ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Балкановой Ольги Германовны

«L-функции симметрического квадрата», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Диссертация О.Г.Балкановой посвящена исследованию ряда актуальных задач аналитической теории чисел, связанных с изучением L-функций симметрического квадрата и ряда родственных объектов. Вообще, изучение аналитических свойств различных L-функций, начиная с L-функций Дирихле и L-функций модулярных форм) является одной из наиболее классических задач аналитической теории чисел, определяющих ее развитие на протяжении многих лет. L-функции симметрических степеней представляют собой важный класс L-функций, который достаточно естественно рассматривать как обобщение L-функций модулярных форм. Они оказываются связанными с автоморфными формами, теорией представлений, программой Ленглендса, подсчетом простых замкнутых геодезических на гиперболических поверхностях, арифметической квантовой эргодичностью и т.д.

В диссертации рассматривается простейший класс таких функций: L-функции симметрического квадрата. В этом случае существуют явные формулы для коэффициентов их рядов Дирихле в терминах коэффициентов Фурье параболических модулярных форм или форм Маасса. Следует отметить, что данный класс L-функций оказывается значительно сложнее, чем L-функции Дирихле или модулярных форм, что, в частности, подтверждается более сложной структурой соответствующего функционального уравнения.

Одним из важных направлений изучения L-функций симметрического квадрата является изучение их аналитических свойств: порядка роста, оценок моментов, существования нулей на критической прямой и т.д. Эти задачи являются намного более сложными, чем в классическом случае. Например, в случае дзета-функции Римана уже достаточно классической является оценка

четвертого момента, а для L-функций симметрического квадрата уже оценки первого и второго моментов представляют собой глубокую проблему.

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав и списка литературы из 185 наименований. Объем диссертации составляет 283 страницы.

Во введении обосновывается актуальность работы и приводится краткое ее содержание.

Фактически, ключевой темой диссертации является изучение центральных значений L-функций симметрического квадрата. Один из основных подходов к изучению этой задачи состоит в получении оценок для взвешенных сумм этих значений, возведенных в некоторую степень. Данные суммы традиционно называются моментами, по аналогии с моментами классических L-функций. При этом отдельно нужно рассматривать функции, построенные на основе форм Мааса и на основе модулярных форм. В последнем случае нужно также учитывать, что суммирование может проводиться как в аспекте уровня, так и в аспекте веса. Одним из основных инструментов оценки таких сумм является получение явных формул для них в терминах различных специальных функций. Изложенные соображения определяют основное содержание диссертации.

Первые три главы диссертации посвящены изучению первого момента L-функций симметрического квадрата в трех различных случаях: функции, возникающие из модулярных форм в аспекте веса, аналогичные функции в аспекте уровня, функции, возникающие из форм Мааса. Во всех трех случаях главный член асимптотики для первого момента был известен ранее. Достижение автора состоит в значимом улучшении остаточных членов в данных асимптотических формулах. В основе доказательств лежат новые полученные автором точные формулы для рассматриваемых моментов.

В четвертой и пятой главах продолжается изучение первого и второго моментов L-функций симметрического квадрата форм Мааса с очень специальными весами, обусловленными конкретными теоретико-числовыми

приложениями. Как следствие, в четвертой главе удается получить нижнюю оценку на пропорцию ненулевых центральных значений данных L-функций. Особенно удивительно, что такую оценку удается также получить на коротких промежутках. Отметим, что аналогичная задача для L-функций модулярных форм восходит к Иванцу и в дальнейшем изучалась многими авторами. В пятой главе полученная техника применяется к задаче Петридиса-Ризагера об оценках спектральной экспоненциальной суммы $\sum_{t_j \le T} X^{it_j}$, где t_j явным образом выражаются через собственные значения оператора Лапласа для группы $PSL_2(\mathbb{Z})$. Оценки данной суммы влекут за собой оценки остатка в проблеме о простых замкнутых геодезических и в гиперболической проблеме круга. Основным результатом пятой главы является новая оценка данной суммы. При определенных соотношениях между параметрами T и X полученная оценка совпадает с той, которая предполагалась в гипотезе Петридиса-Ризагера и, по всей видимости, является оптимальной.

В шестой и седьмой главах рассматриваются в некотором смысле двойственные задачи, связанные с суммами L-рядов Цагира. В обоих главах рассмотрены суммы со слагаемыми вида, но $\omega(n)\mathcal{L}_{n^2-4l^2}(s)$ с различными индексами суммирования. Для обоих сумм получены формулы спектрального разложения. При этом, несмотря на кажущуюся схожесть задач, найденные формулы, а также методы их получения значительно отличаются.

В восьмой и девятой главах доказаны еще две новые точные формулы: формула для второго момента L-функции симметрического квадрата для случая рядов Мааса, аналогичная формуле для четвертого момента L-функций форм Мааса, полученной Кузнецовым и Мотохаши, а также формула суммирования Вороного с коэффициентами, равными значениям рядов Цагира, дополняющая исследования Иванца, Дьюка, Ассинга, Корбетта и др..

Десятая глава носит вспомогательный характер и посвящена получению асимптотической формулы для гипергеометрической функции специального вида.

В одиннадцатой главе получена верхняя оценка для модуля L-функции симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой. Данная оценка расширяет и дополняет недавний результат Кхана и Янга и основана на вспомогательных результатах из двух предыдущих глав.

В дополнение отметим, что многие результаты диссертации основаны на очень глубоком и содержательном использовании теории специальных функций. Многие вспомогательные леммы, полученные в ходе работы, могут найти и дальнейшие приложения.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах в ведущих российских и международных журналах, входящих в список ВАК и индексируемых в международных системах цитирования. Автореферат правильно и полно отображает содержание диссертации.

Работа носит теоретический характер. Результаты являются новыми и значительно улучшают предшествующие. Все результаты строго доказаны. Изложение достаточно ясное и полное. Диссертация вносит существенный вклад в развитие аналитической теории чисел. Некоторые результаты могут быть также интересны специалистам в области алгебраической геометрии или алгебраический теории чисел, а также в теории специальных функций.

По диссертации имеются следующие замечания.

1. Раздел, посвященный истории рассматриваемых вопросов и актуальности работы стоило бы значительно расширить.
2. В работе иногда используются нестандартные обозначения (например cot вместо ctg для котангенса), не общепринятая терминология (например молифайер) и непривычные транскрипции иностранных фамилий (например Загир вместо Цагир).

Указанные замечания ни в коей мере не влияют на высокую оценку диссертации.

Диссертация Балкановой Ольги Германовны «L-функции симметрического квадрата» представляет собой законченное научное исследование, полностью удовлетворяющее всем требованиям действующего

Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения данной ученой степени по специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:
Шутов Антон Владимирович, доктор ф.-м. наук,
доцент, профессор кафедры "Вычислительная техника
и системы управления" ФГБОУ ВО «Владимирский
государственный университет имени Александра Григорьевича и
Николая Григорьевича Столетовых»
60000 Владимир, ул. Горького, 87
(специальность 1.1.5 Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика)
+7(905)055-62-71, a1981@mail.ru

29.04.26

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ
КОННО А. Т. Г.