Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

На правах рукописи

УДК 511.3



Балканова Ольга Германовна

L-функции симметрического квадрата

Специальность 1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2026

Работа выполнена в отделе теории чисел Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института имени В.А. Стеклова Российской Академии наук.

Официальные оппоненты:

Всемирнов Максим Александрович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, доцент, директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06)

Илларионов Андрей Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (специальность 01.01.06)

Шутов Антон Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительной техники и систем управления» Института информационных технологий и электроники Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» (специальность 1.1.5)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится 18 июня 2026г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу 119991, Москва, ул. Губкина, д.8. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref26/balkanova/dis.pdf

Автореферат разослан ____ марта 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.167.03 при МИАН,
доктор физико-математических наук Д. В. Осипов

Актуальность темы

L-функции – это мероморфные функции комплексной переменной, обобщающие дзета-функцию Римана и связанные с различными аналитическими, геометрическими и алгебраическими объектами, включая числовые поля, автоморфные формы и алгебраические многообразия. Обычно они определяются как ряды Дирихле или произведения Эйлера, которые сходятся в некоторой полуплоскости, допускают мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению. Первые L-функции (дзета-функция Римана и L-функции Дирихле) появились в работах Эйлера, Дирихле и Римана при изучении распределения всех простых чисел и распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. Далее были работы Дедекинда, Артина, Гекке, Шимуры, Ленглендса и других математиков, благодаря которым коллекция L-функций значительно пополнилась и они стали важными инструментами при изучении различных задач, часто выходящих за рамки теории чисел. Более того, теория L-функций превратилась в самостоятельную область исследований, богатую известными гипотезами, разнообразными методами и яркими результатами.

В настоящее время не существует единой общепринятой классификации всех L-функций, хотя математики разработали системы для классификации многих из них. Например, в 1989 году А. Сельберг дал аксиоматическое определение класса L-функций, ныне называемое классом Сельберга.

Один из ключевых параметров L-функции в классе Сельберга – это её степень, определяемая числом компонентов, связанных с гамма-факторами в функциональном уравнении, и являющаяся своеобразной мерой сложности L-функции.

Класс Сельберга степени 1 полностью описан; он состоит из дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и L-функций Дирихле $L(s+it;\chi)$, где $t \in \mathbb{R}$, а χ – примитивный характер Дирихле по модулю $\pmod q$, $q \geq 2$.

Структура класса Сельберга степени 2 и выше не изучена, но известны некоторые примеры. Примером L-функций степени 2 являются L-функции модулярных форм для конгруэнц-подрупп модулярной группы. Модулярные формы – это голоморфные функции на верхней полуплоскости, преобразующиеся специальным образом под действием модулярной группы или её конгруэнц-подгрупп, а также удовлетворяющие определенным условиям роста. Нас также будут интересовать формы Маасса – тип автоморфных форм, обобщающих классические модулярные

формы, представляющие собой гладкие, неголоморфные функции на верхней полуплоскости, преобразующиеся под действием конгруэнц-подгрупп подобно модулярным формам и являющиеся собственными функциями оператора Лапласа. Модулярные формы, формы Мааса и их L-функции – важные инструменты аналитической теории чисел, позволяющие решать арифметические задачи при помощи методов комплексного анализа и спектральной теории. Их исследование занимает значительную часть теории чисел XX века.

Наиболее известный пример L-функций степени 3 – автоморфные L-функции симметрического квадрата, ассоциированные с модулярными формами. Исследование данных L-функций началось с основополагающей работы Шимуры[1], в которой он определил их и доказал важные свойства, включая аналитическое продолжение и функциональное уравнение.

Как следовало ожидать, исследование L-функций симметрического квадрата представляет большую сложность в сравнении с изучением L-функций степени 1 или 2. Так, многие важные задачи, включая нетривиальные оценки на критической прямой и исследование старших моментов, до сих пор остаются нерешёнными. Данные задачи не только интересны сами по себе, но и имеют различные приложения. Один из примеров – доказательство Иванца[2] теоремы о простых геодезических. Второй – подход Головинского и Саундарараджана[3] к исследованию арифметической квантовой эргодичности, где логарифмическое улучшение тривиальной оценки на величину центральных значений L-функций симметрического квадрата, полученное Саундарараджаном[4], привело к доказательству важной гипотезы.

Для дальнейшего продвижения в этих и других задачах необходимо получить степенное понижение относительно тривиальной оценки на центральные значения L-функций симметрического квадрата. Заметим, что тривиальной оценкой мы называем результат, полученный из принципа Фрагмена-Линделёфа, а любое его улучшение нетривиальной оценкой или оценкой "подвыпуклости". Один из основных подходов к доказательству таких оценок – это метод моментов, заключающийся в исследовании средних величин L-значений, возведенных в некоторую степень. Усреднение в моментах ведётся по различным семействам L-функций, упорядоченным определённым образом, при этом чем выше

[1]G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31 (1975), 79–98.

[2]H. Iwaniec, Prime geodesic theorem, J. Reine. Angew. Math. 349 (1984), 136–159.

[3]R. Holowinsky and K. Soundararajan, Mass equidistribution for Hecke eigenforms, Ann. of Math. (2), 172(2):1517–1528, 2010.

[4]K. Soundararajan, Weak subconvexity for central values of L-functions, Ann. of Math. (2), 172(2)(2010), 1469–1498.

степень момента, тем сложнее его исследовать. В этом смысле сами по себе моменты являются интересными объектами для изучения. Они позволяют лучше понять структуру семейства и имеют прекрасную симметрию. Пять авторов[5] разработали так называемый рецепт, который позволяет выписать гипотезы для определения главных членов во всех моментах для различных семейств L-функций. При этом в аспекте веса для L-функций симметрического квадрата модулярных форм строгое доказательство известно лишь для первого момента. Наилучший известный результат в аспекте уровня получен Иванцом и Мишелем[6], которые доказали правильную по порядку верхнюю оценку для второго момента L-функций симметрического квадрата для голоморфных форм большого уровня, свободного от квадратов. Данная задача оказалась ещё более сложной в спектральном аспекте (спектральный параметр стремится к бесконечности) для форм Мааса. Для центральных значений L-функций симметрического квадрата известные методы не позволяют доказать даже гипотезу Линделёфа в среднем для второго момента на очень коротких интервалах. Наилучший известный результат с интервалом $(T, T + T^{1/5})$ получен Кханом и Янгом[7].

Цели работы

Целью диссертационной работы является решение различных задач, связанных с L-функциями симметрического квадрата, включая новые верхние оценки на L-функции в различных аспектах и нижние оценки на пропорцию ненулевых центральных L-значений. При этом мы изучаем L-функции ассоциированные как с голоморфными модулярными формами, так и с формами Мааса. Для данных семейств L-функций мы рассматриваем первые и вторые моменты, асимптотическое поведение которых изучается при помощи доказательства новых точных формул, исследования специальных функций методом перевала и методом Лиувилля–Грина, доказательства новых формул Вороного.

[5]J.B. Conrey, D.W. Farmer, J. P. Keating, M. O. Rubinstein and N.C. Snaith, Integral moments of L-functions, Proc. London Math. Soc. (3), 91-1 (2005), 33–104.

[6]H. Iwaniec, P. Michel, The second moment of the symmetric square L-functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 26 (2001), 465–482.

[7]R. Khan and M.Young, Moments and hybrid subconvexity for symmetric-square L-functions, J. Inst. Math. Jussieu 22(5) 2023, 2029–2073.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основными результатами можно считать следующие:

- Доказано существование второго главного члена в асимптотической формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм в аспекте веса;
- Получена асимптотическая формула для первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм с уровнем равным степени простого числа;
- Доказана новая оценка остатка в асимптотической формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса;
- Доказана новая нижняя оценка на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата форм Мааса в коротких интервалах;
- Получены новые оценки на спектральную экспоненциальную сумму;
- Получены формулы спектрального разложения для сумм L-рядов Загира;
- Доказана формула суммирования Вороного с коэффициентами равными значениям L-рядов Загира;
- Впервые получена точная формула для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса;
- Доказана новая гибридная верхняя оценка для L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой.

Методы исследования

В диссертации используются различные методы аналитической теории чисел и спектральной теории автоморфных форм. Кроме того, важную роль играют методы теории специальных функций.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы могут найти применение при изучении различных задач аналитической теории чисел, связанных с изучением L-функций симметрического квадрата и L-рядов Загира. Избранные разделы диссертации могут быть включены в курсы лекций для студентов и аспирантов различных математических специальностей.

Апробация работы

Результаты настоящей диссертации докладывались автором на различных семинарах, включая «Современные проблемы теории чисел» (МИАН, г. Москва), "Rencontres de théorie analytique et élémentaire des nombres"(Институт Анри Пуанкаре, г. Париж, Франция), а также на семинарах по теории чисел в Университете Клермон-Оверни (Франция), в Федеральной политехнической школе Лозанны (Швейцария), в Университете Манчерстера (Великобритания), в Университе Турку (Финляндия), в Университете Гётеборга (Швеция), в Институте математики Альфреда Реньи (Венгрия), в Университете Брауна (США).

Кроме того, результаты были представлены на следующих международных конференциях:

- IV Конференция Математических Центров России, август 2024, г. Санкт-Петербург;
- Конференция «Automorphic Forms in Budapest 2024», август 2024, институт Реньи, г. Будапешт, Венгрия;
- Конференция «Современные проблемы теории чисел», июль 2024, Сириус, г. Сочи;
- Конференция по комплексному анализу и его приложениям, сентябрь 2023, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск;
- XXII международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», сентябрь 2023, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г. Тула;
- Конференция «Декабрьские чтения», декабрь 2023, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск;

- Workshop «Delta symbols and the subconvexity problem», ноябрь 2020, Американский Математический институт (AIM), онлайн;
- Конференция «Zeta functions», декабрь 2019, CIRM, Франция;
- Конференция «Arithmétique en Plat Pays : Journée printanière», июнь 2018, г. Лилль, Франция;
- Конференция «French-Japanese zeta functions», март 2017, г. Лилль, Франция;
- Workshop «Automorphic Forms and Arithmetic», сентябрь 2017, Математический институт Обервольфаха, Германия;
- Workshop «Spectral Theory, Automorphic Forms and Arithmetic», ноябрь 2016, г. Копенгаген, Дания;
- Workshop «Moments of zeta and correlations of divisor sums», сентябрь 2016, Американский Математический институт (AIM), г. Сан Хосе, США.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в одиннадцати работах, список которых приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации – в том числе опубликованные в совместных статьях – получены автором самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 283 страницах и состоит из введения, 11 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы из 185 наименований.

Краткое содержание работы

Во **Введении** приводится краткий обзор предшествующих результатов, а также формулируются основные результаты диссертационного исследования.

Содержание главы 1.

Первая глава посвящена изучению асимптотического поведения первого момента L-функций симметрического квадрата голоморфных модулярных форм, при условии, что уровень формы фиксирован ($N = 1$), а вес формы стремится к бесконечности ($k \to \infty$). С этой целью мы используем точную формулу для скрученного первого момента L-функций симметрического квадрата и применяем метод Лиувилля–Грина, который также называется ВКБ приближением, для оценки остаточных членов.

Для подробного описания полученных результатов введём некоторые обозначения. Пусть $S_{2k}(1)$ – пространство голоморфных параболических форм веса $2k \geq 2$ относительно полной модулярной группы. Обозначим H_{2k} нормализованный базис Гекке для $S_{2k}(1)$. Каждая форма $f \in H_{2k}$ имеет разложение Фурье следующего вида:

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_f(n) n^{k-1/2} \exp(2\pi i n z),$$

$$\lambda_f(1) = 1.$$

При $\Re s > 1$ ассоциированная L-функция симметрического квадрата задаётся рядом

$$L(\mathrm{sym}^2 f, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}.$$

Шимура [8] доказал, что данный ряд допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость и функциональное уравнение подобно дзета-функции Римана.

Рассмотрим первый момент скрученный с коэффициентом Фурье $\lambda_f(l^2)$:

$$M_1(l, s) := \sum_{f \in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l^2) L(\mathrm{sym}^2 f, s). \tag{1}$$

[8] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. (3) 31 (1975), 79–98.

Здесь верхний индекс h означает, что сумма считается с гармоническим весом $\Gamma(2k-1)/((4\pi)^{2k-1}\langle f,f\rangle_1)$, где $\langle f,f\rangle_1$ – это скалярное произведение Петерсона на пространстве голоморфных модулярных форм уровня 1.

Изучение суммы (1) с дополнительным множителем $\lambda_f(l^2)$ играет важную роль в различных приложениях, а также при изучении старших моментов. Заметим, что $\lambda_f(1)=1$, а значит в частном случае при $l=1$ мы получаем в (1) классический первый момент.

Обозначим через γ постоянную Эйлера, а через $\psi(s)$ логарифмическую производную гамма функции. Пусть ${}_2F_1(a,b,c;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса и

$$\Phi_k(x) := \frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(3/4-k)}{\Gamma(1/2)}{}_2F_1\left(k-\frac{1}{4},\frac{3}{4}-k,1/2;x\right), \tag{2}$$

$$\Psi_k(x) := x^k\frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(2k)}{}_2F_1\left(k-\frac{1}{4},k+\frac{1}{4},2k;x\right). \tag{3}$$

Для доказательства основных результатов мы будем использовать следующую точную формулу, связывающую первый момент (1) со средними значениями L-рядов Загира, которые при $\Re s>1$ определяются как

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\rho_q(n)}{q^s}, \tag{4}$$

где $\zeta(s)$ – это дзета-функция Римана, $n\in\mathbf{Z}$,

$$\rho_q(n) := \#\{x \pmod{2q} : x^2\equiv n \pmod{4q}\},$$

и имеют аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Теорема 1. *Для любого $l\geq 1$ выполнено тождество*

$$\begin{aligned} M_1(l,1/2) = \frac{1}{2\sqrt{l}}&\left(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\right) \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^k}{2\sqrt{l}}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2) + \frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{1\leq n<2l}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\Phi_k\left(\frac{n^2}{4l^2}\right) \\ &+ \frac{1}{l\sqrt{2}}\sum_{n>2l}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\sqrt{n}\Psi_k\left(\frac{4l^2}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

При $l=1$ точная формула (5) позволяет выделить второй главный член (порядка $k^{-1/2}$) в асимптотической формуле, при этом из оценок на специальные функции (2) и (3), доказанных в данной главе, следует, что остаточный член убывает экспоненциально быстро.

Следствие 2. *Существует $c > 0$ такое, что*

$$M_1(1,1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 3\log 2\pi + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\right) + \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^k}{2}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}L(1/2,\chi_{-4}) + \Phi_k\left(\frac{1}{4}\right)L(1/2,\chi_{-3}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}exp(-ck)\right), \quad (6)$$

где $L(1/2,\chi_D)$ – это L-функция Дирихле для примитивного квадратичного характера по модулю D и

$$\Phi_k\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{3^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Замечание 3. *Формула аналогичная* (6)*, но с более слабой оценкой остатка, также была независимо получена Лью* [9] *при помощи приближенного функционального уравнения.*

Следствие 2 улучшает предыдущие работы, в которых были доказаны следующие оценки остатков:

- $k^{-0.008}$ – Лау[10] 2002 год;
- $k^{-1/20}$ – Кхан[11] 2007 год;
- $k^{-1/2}$ – Фоменко[12] 2003 год и Сун[13] 2013 год.

Следствие 4. *Для любого $\epsilon > 0$ и $l > 1$ выполнено равенство*

$$M_1(l,1/2) = \frac{1}{2\sqrt{l}}\left(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 4\gamma + \psi(1) + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\right) + O\left(\frac{l^{5/6+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right). \quad (7)$$

[9] S. Liu, The first moment of central values of symmetric-square L-functions in the weight aspect, Ramanujan J. 46 (2018), 775–794.

[10] Y.-K. Lau, Non-vanishing of symmetric square L-functions, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (11) (2002), 3133–3139.

[11] R. Khan, The first moment of the symmetric-square L-function, J. Number Theory 124 (2007), 259–266.

[12] О. М. Фоменко, Распределение целых точек на гиперболоидах, Зап. научн. сем. ПОМИ, 302 (2003), 168Ц177.

[13] Q. Sun, On the first moment of symmetric-square L-functions, Proc. Amer. Math. Soc., 141, (2013), no.2, 369–375.

В предположении гипотезы Линделёфа для L-функций Дирихле квадратичного характера остаток в асимптотической формуле (7) *можно заменить на* $O\left(l^{1/2+\epsilon}k^{-1/2}\right)$.

Данный результат улучшает оценку остатка $lk^{-1/2+\epsilon}$, доказанную Нг[14].

Содержание главы 2.

Вторая глава является комплементарной к первой. Мы продолжаем изучение первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм, но теперь уже не в аспекте веса, а в аспекте уровня. Более точно, мы предполагаем, что вес модулярной формы фиксирован, а уровень равен степени простого числа и стремится к бесконечности. При этих условиях мы доказываем асимптотические формулы для первого момента, которые обобщают ранее известные результаты Блумера[15] и Суна[16] для простого уровня на случай произвольной степени простого числа. Более того, оценки остатка в наших асимптотических формулах улучшают соответствующие оценки Блумера и Суна для простого уровня.

Для подробного описания полученных результатов введём некоторые обозначения. Пусть $H_{2k}^*(N)$ – ортогональный базис примитивных новых форм уровня N и веса $2k \geq 2$. Для любой формы $f \in H_{2k}^*(N)$ имеет место разложение Фурье вида:

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{k-1/2} \exp(2\pi i n z), \quad \lambda_f(1) = 1.$$

L-функция симметрического квадрата при $\Re s > 1$ задаётся рядом

$$L(\mathrm{sym}^2 f, s) := \zeta^N(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s},$$

где $\zeta^N(2s) := \prod_{p\nmid N}(1 - p^{-2s})^{-1}$. Рассмотрим первый момент с дополнительным множителем равным коэффициенту Фурье индекса l^2:

$$M_1(l, N, s) := \sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l^2) L(\mathrm{sym}^2 f, s).$$

[14] M.-H. Ng, *Moments of automorphic L-functions*, Ph.D. thesis, University of Hong Kong, 2016.

[15] V. Blomer, On the central value of symmetric-square L-functions, Math. Z., 260 (2008), 755–777.

[16] Q. Sun, On the first moment of symmetric-square L-functions, Proc. Amer. Math. Soc., 141, (2013), no. 2, 369–375.

Мы не указываем зависимость от k в $M_1(l,N,s)$, поскольку не собираемся изучать асимптотическое поведение при $k \to \infty$ и предполагаем, что вес k ограничен некоторой абсолютной константой, не зависящей от N. Верхний индекс h в сумме $\sum^h_{f\in H^*_{2k}(N)}$ обозначает, что сумма считается с гармоническим весом:

$$\frac{2\pi^2}{(2k-1)NL(\mathrm{sym}^2 f,1)}.$$

Для простоты введем некоторые дополнительные обозначения:

$$\mathcal{MT}(l) := \frac{1}{2\sqrt{l}}\bigg(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\bigg),$$

$$\mathcal{MT}(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) := \frac{\log \mathbf{p}}{\sqrt{l}}\left(\left[\frac{\nu+1}{2}\right] + \frac{1-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\mathbf{p}}\right) + (1-\mathbf{p}^{-1})\mathcal{MT}(l),$$

где γ - постоянная Эйлера, $\psi(s)$ - логарифмическая производная Гамма-функции, а квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Теперь мы можем сформулировать основные теоремы. Заметим, что остаточные члены в асимптотических формулах ниже зависят от параметра θ, который определяется из верхней оценки на L-функции Дирихле квадратичных характеров. Наилучший из известных результатов

$$\theta = 1/6 \tag{8}$$

доказан в работе Конри и Иванца.[17] А в соответствии с гипотезой Линделёфа $\theta = 0$.

Теорема 5. *Для простого числа* $\mathbf{p} > 2$, $(l,\mathbf{p}) = 1$ *и* $2k < 12$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$M_1(l,\mathbf{p},1/2) := \mathcal{MT}(l,\mathbf{p},1/2) + O\left(\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}\right).$$

Теорема 6. *Для простого числа* $\mathbf{p} > 2$, $(l,\mathbf{p}) = 1$ *и* $\nu \geqslant 3$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$M_1(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) = \mathcal{MT}(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) - \frac{\mathcal{MT}(l,\mathbf{p}^{\nu-1},1/2)}{\mathbf{p}} + O\left(\mathcal{ET}(l,\mathbf{p}^\nu)\right),$$

[17] J. B. Conrey and H. Iwaniec, The cubic moment of central values of automorphic L-functions, Ann. of Math. (2) 151 (2000), 1175–1216.

где при $\nu \equiv 0 \pmod 2$

$$\mathcal{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-2)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-2)+3/2}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right),$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $l < \mathbf{p}^{\nu-2}$

$$\mathcal{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta\nu}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)\nu}}\left(\mathbf{p}^{4k-3-4\theta} + \mathbf{p}^{2k-1-2\theta}\right),$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $\mathbf{p}^{\nu-2} < l < \mathbf{p}^{\nu-1}$

$$\mathcal{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}} + \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu}},$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $l > \mathbf{p}^{\nu-1}$

$$\mathcal{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}.$$

Содержание главы 3.

В первых двух главах мы изучали асимптотическое поведение первых моментов L-функций симметрического квадрата для голоморфных модулярных форм. В данной главе мы рассматриваем неголоморфный аналог этой задачи. А именно, мы получаем новые асимптотические формулы на критической прямой и в критической точке для L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Доказательство этого результата основано на применении формулы следа Кузнецова, при помощи которой методом аналитического продолжения мы выводим точную формулу для скрученного первого момента (с дополнительным множителем, равным коэффициенту Фурье форм Мааса). Полученная точная формула содержит две специальные функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. Анализируя асимптотическое поведение данных специальных функций, мы доказываем основные результаты третьей главы, для точного описания которых нам потребуется ввести некоторые обозначения.

Пусть $\{u_j\}$ – ортонормированный базис пространства параболических форм Мааса для полной модулярной группы, состоящий из общих собственных функций всех операторов Гекке и оператора Лапласа. Обозначим через $\{\lambda_j(n)\}$ собственные значения операторов Гекке, действующих на u_j, а через $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$ – собственные значения оператора

Лапласа, действующего на u_j. Элементы базиса имеют разложение Фурье следующего вида:

$$u_j(x+iy) = \sqrt{y}\sum_{n\neq 0}\rho_j(n)K_{it_j}(2\pi|n|y)e(nx),$$

где $K_\alpha(x)$ – K-функция Бесселя, а $\rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n)$.

Аналогично голоморфному случаю, L-функция симметрического квадрата при $\Re s > 1$ определяется формулой

$$L(\mathrm{sym}^2 u_j, s) := \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(n^2)}{n^s} \tag{9}$$

и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Для $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$ определим тестовую функцию

$$\omega_T(r) := \frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}\exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right)dK$$

и исследуем асимптотику первого момента с твистом (дополнительным множителем равным коэффициенту Фурье $\lambda_j(l^2)$)

$$\mathcal{M}_1(l,s) := \sum_j \omega_T(t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2 u_j, s)$$

на критической прямой $s = 1/2 + it$ и в центральной точке $s = 1/2$, где

$$\alpha_j := \frac{|\rho_j(1)|^2}{\cosh\pi t_j} \tag{10}$$

– нормирующий коэффициент.

Теорема 7. *Пусть $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$. Тогда для $s = 1/2 + it$, $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$ и $l \ll G^2/T^\epsilon$ выполнено равенство*

$$M_1(l,s) = MT(T;G;l;t) + O\left(T(1+|t|)^{\theta_t}l^{1/2+2\theta} + T(1+|t|)^{\vartheta}l^\epsilon\log^3 T\right),$$

где $\theta = \theta_t = 1/6 + \epsilon$, $\vartheta = 13/84 + \epsilon$, а $MT(T;G;l;t)$ обозначает главный член, заданный формулой

$$\begin{aligned} MT(T;G;l;t) = {} & \frac{\zeta(2s)}{\pi^2 l^s}\int_{-\infty}^{\infty} r(\omega_T(r)+\omega_T(-r))\tanh(\pi r)dr \\ & + \frac{(2\pi)^{s-1}}{(2l)^{1-s}}\zeta(2s-1)\Gamma(s-1/2)\frac{2^{2-s}i}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\omega_T(r)+\omega_T(-r))}{\cosh(\pi r)}\times \\ & \sin\left(\pi(s/2-ir)\right)\frac{\Gamma(1/2-s/2+ir)\Gamma(1-s/2+ir)}{\Gamma(s/2+ir)\Gamma(1/2+s/2+ir)}dr. \end{aligned}$$

Теорема 8. *Пусть* $T^{\epsilon} < G < T^{1-\epsilon}$. *Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$M_1(l,1/2) = \frac{1}{\pi^2 l^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} r(\omega_T(r)+\omega_T(-r))\tanh(\pi r)\left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4}\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\log(2\pi) - \log l + \frac{\psi(1/4+ir)+\psi(1/4-ir)}{2}\right)dr + O(Tl^{1/2+2\theta}),$$

где $\theta = 1/6+\epsilon$.

Теорема 8 улучшает результаты Нг (теорема 7.1.1)[18] и Танга[19].

Содержание главы 4.

В четвёртой главе мы продолжаем изучение моментов L-функций симметрического квадрата форм Мааса. А именно, мы доказываем новую асимптотическую формулу для второго молифицированного момента и в качестве приложения получаем нижнюю оценку на пропорцию L-функций, которые не обращаются в ноль в критической точке.

Аналогично предыдущей главе обозначим через $\{u_j\}$ – пространство форм Мааса, состоящее из общих собственных функций всех операторов Гекке и оператора Лапласа. Пусть $\{\lambda_j(n)\}$ – собственные значения операторов Гекке, действующих на u_j, а $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$ (с $t_j > 0$) – собственные значения оператора Лапласа, действующего на u_j. Соответствующая L-функция симметрического квадрата при $\Re s > 1$ задаётся рядом , а нормализующий коэффициент α_j определён в .

Наш основной результат – нижняя оценка на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата в коротких интервалах.

Теорема 9. *Для любого* $\epsilon > 0$ *и достаточно большого* T *выполнена оценка*

$$\sum_{\substack{T\le t_j\le T+H\\ L(\mathrm{sym}^2 u_j,1/2)\neq 0}} \alpha_j \ge \left(1 - \frac{1}{(1+\Delta)^3} - \epsilon\right) \sum_{T\le t_j\le T+H} \alpha_j,$$

где $H = T^{\beta}$ *с* $(1+4\theta)/(3+4\theta) < \beta \le 1$, $\theta = 1/6+\epsilon$ *и*

$$\Delta \le \max\left(\beta - 1/2; \frac{(3/2+2\theta)\beta - (1/2+2\theta)}{2+4\theta}\right).$$

[18] M.-H. Ng, Moments of automorphic L-functions, Ph.D. thesis, University of Hong Kong, 2016.

[19] H. Tang, Central value of the symmetric square L-functions related to Maass forms (in Chinese), Sci. Sin. Math 42 12 (2012), 1213–1224.

Теорема 9 является аналогом результата Балкановой, Хуанга и Содергрена (теорема 1.2)[20], доказанной для L-функций форм Мааса.

Для доказательства теоремы 9 мы получили асимптотические формулы для молифицированных первого и второго моментов

$$\mathbf{M}_n(1/2) := \sum_j \omega_{T,H}(t_j)\alpha_j \mathcal{M}(j)^n L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2)^n, \quad n = 1, 2,$$

где

$$\omega_{T,H}(r) := \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} \exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right) dK.$$

Молифайер обычно имеет следующий вид

$$\mathcal{M}(j) = \sum_{l \leq T^{\Delta}} \frac{x_l}{\sqrt{l}} \lambda_j(l^2),$$

где Δ – логарифмическая длина молифайера, $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, которая выбирается определённым образом на основе решения некой оптимизационной задачи. Таким образом, изучение молифицированных моментов сводится к анализу первого и второго моментов с твистом (домноженных на коэффициент Фурье формы Мааса $\lambda_j(l^2)$), при этом ключевой момент – получить максимально точную оценку остатка в асимптотической формуле для второго момента. С этой целью мы доказали точную формулу для второго момента с твистом, содержащую два вида специальных функций, для асимптотического анализа которых мы адаптировали метод Фарид Хваджа и Олде Даалхейс [21] [22].

Содержание главы 5.

В данной главе мы рассматриваем ещё одну задачу аналитической теории чисел, в которой естественным образом возникают моменты L-функций симметрического квадрата. Наш основной результат – новая оценка на спектральную экспоненциальной сумму

$$S(T, X) = \sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j}, \tag{11}$$

[20] O. Balkanova, B. Huang, A. Södergren, Non-vanishing of Maass form L-functions at the critical point, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), 509–523.

[21] S. Farid Khwaja and A. B. Olde Daalhuis, Exponentially accurate uniform asymptotic approximations for integrals and Bleistein's method revisited, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 469 (2153), 2013, 1–12.

[22] S. Farid Khwaja, A. B. Olde Daalhuis, Uniform asymptotic expansions for hypergeometric functions with large parameters IV, Anal. Appl. (Singap.), 12 (2014), 667–710.

где $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$ – собственные значения оператора Лапласа для группы $PSL_2(\mathbb{Z})$. Интерес к сумме (11) возник благодаря её связи с классическими задачами, включая теорему о простых геодезических и гиперболическую проблему круга.

Петридис и Ризагер[23] выдвинули гипотезу о корневом сокращении в сумме (11), а именно они предположили верность оценки

$$S(T, X) \ll T(TX)^{\epsilon}. \tag{12}$$

Кроме того, они показали, что оценка (12) не только позволяет получить наилучшую возможную оценку остатка $O(X^{1/2+\epsilon})$ в теореме о простых геодезических, но и влечёт наилучшую возможную оценку остатка в среднем в гиперболической проблеме круга.

В аппендиксе к данной статье Лааксонен доказал, что гипотеза Петридиса-Ризагера верна для фиксированного X при $T \to \infty$. Кроме того, основываясь на численных вычислениях, Лааксонен заметил, что функция $S(T, X)$ имеет экстремум, когда $\kappa(X) = 0$, где

$$\kappa(X) := \left\| X^{1/2} + X^{-1/2} \right\|,$$

а $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого числа.

Функция $\kappa(X)$ появляется также и в нашей теореме. Кроме того, наш результат зависит от параметра θ, соответствующего степени в верхней оценке на L-функции Дирихле примитивных вещественных характеров, см. (8).

Теорема 10. *Выполнены следующие оценки:*

$$S(T, X) \ll \max\left(X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}, X^{\theta/2}T\right)\log^3 T;$$

$$S(T, X) \ll T\log^2 T \quad \textit{if} \quad T > \frac{X^{1/2+7\theta/6}}{\kappa(X)}.$$

Из теоремы 10 следует, что гипотеза Петридиса–Ризагера справедлива при $T > X^{1/2}$ в предположении гипотезы Линделёфа и при $T > X^{1/2+7\theta/6}/\kappa(X)$ безусловно.

Основой доказательства теоремы 10 является верхняя оценка на среднее значение L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой с дополнительным множителем X^{it_j}.

[23] Y. N. Petridis and M. S. Risager, Local average in hyperbolic lattice point counting, with an appendix by N. Laaksonen, Math. Z. 285 (2017), no. 3-4, 1319–1344.

Теорема 11. *Пусть* $X \gg 1$. *Тогда при* $s = 1/2 + ir, |r| \ll T^{\epsilon}$ *выполнена оценка*

$$\sum_j \alpha_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) L(\mathrm{sym}^2 u_j, s) \ll (1+|r|)^A T \log^3 T + \frac{(1+|r|)^A X^{\theta}}{X^{1/4}} \left(X^{1/2} \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{1/2} + \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2} \right),$$

где коэффициент α_j *определён в* (10).

Содержание главы 6.

В данной главе мы доказываем точную формулу, связывающую средние значения L-рядов Загира со вторым моментом дзета-функции Римана и первыми моментами L-функций симметрического квадрата для голоморфных форм и форм Маасса, а также рассматриваем некоторые приложения этого результата.

Напомним, что L-ряды Загира при $\Re s > 1$ задаются формулой (4). Данные L-ряды возникли практически одновременно в работах Коэна, Загира и Кузнецова. Во-первых, Коэн [24] получил функцию $\mathscr{L}_n(s)$ в разложении Фурье-Уиттекера для рядов Эйзенштейна-Маасса полуцелого веса и уровня 4. Во-вторых, $\mathscr{L}_n(s)$ изучалась Загиром[25] в связи с дзета-функцией

$$\zeta(s,\delta) = \sum_{\substack{\phi \pmod \Gamma \\ |\phi|=\delta}} \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2/\operatorname{Aut}(\phi) \\ \phi(m,n)>0}} \frac{1}{\phi(m,n)^s},$$

где для полной модулярной группы Γ внешняя сумма ведется по всем Γ классам эквивалентности бинарной квадратичной формы ϕ дискриминанта δ, а внутренняя сумма – по всем классам эквивалентности пар целых чисел по модулю группы автоморфизмов формы ϕ. В-третьих, Кузнецов[26] исследовал связь средних значений $\mathscr{L}_n(s)$ в специальной точке $s = 1$ с формулой следа Сельберга и с теоремой о простых геодезических. Кроме того, как показано в предыдущих главах, средние значения $\mathscr{L}_n(s)$

[24] H. Cohen, Sums Involving the Values at Negative Integers of L-Functions of Quadratic Characters. Math. Annalen 217 (1975): 271–285.

[25] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977.

[26] N.V. Kuznetsov, An arithmetic form of the Selberg trace formula and the distribution of norms of primitive hyperbolic classes of the modular group (in Russian), Preprint Khabarovsk, 1978.

возникают в точных формулах для моментов L-функций симметрического квадрата.

В данной главе мы докажем обратную точную формулу, которая выражает средние значения L-рядов Загира в терминах моментов L-функций симметрического квадрата.

Теорема 12. *Пусть $\omega \in C^\infty$ – функция с компактным носителем на $[a_1, a_2]$ при $0 < a_1 < a_2 < \infty$. Предположим, что $\Re s > 1$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = MT(s) + Z_C(s) + Z_H(s) + Z_D(s), \tag{13}$$

где

$$MT(s) = \sigma_{-s}(l^2) \frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)} \int_0^\infty \omega(x) dx$$

– главный член,

$$Z_C(s) = \frac{\zeta(s)}{\pi^{1/2+s}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(l^2)}{l^{2ir}} \frac{\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2} h(\omega; s; r) dr$$

– второй момент дзета-функции Римана,

$$Z_H(s) = \pi^{1/2-s} \sum_{k \geq 6} g(\omega; s; k) \sum_{j \leq \vartheta(k)} \alpha_{j,k} \lambda_{j,k}(l^2) L(\mathrm{sym}^2 u_{j,k}, s)$$

– первый момент L-функций симметрического квадрата по базису Гекке для голоморфных форм, с твистом равным коэффициенту Фурье формы $\lambda_{j,k}(l^2)$, с нормировочным коэффициентом $\alpha_{j,k}$ и дополнительным усреднением по весу формы k,

$$Z_D(s) = \pi^{1/2-s} \sum_j \alpha_j \lambda_j(l^2) L(\mathrm{sym}^2 u_j, s) h(\omega; s; \kappa_j)$$

– первый момент L-функций симметрического квадрата по базису Гекке для форм Маасса, с твистом равным коэффициенту Фурье $\lambda_j(l^2)$, с нормировочным коэффициентом α_j. Весовые функции задаются формулами:

$$f(\omega; s; x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{x}{4l}\right)^s \int_0^\infty \omega(y) \cos\left(\frac{xy}{2l}\right) dy,$$

$$g(\omega; s; k) = \pi(-1)^k \int_0^\infty J_{2k-1}(x) \frac{f(\omega; s; x)}{x} dx,$$

$$h(\omega; s; r) = \pi \int_0^\infty k_0(x, ir) \frac{f(\omega; s; x)}{x} dx,$$

где $J_v(x)$ *– это* J*-функция Бесселя, а*

$$k_0(x, v) := \frac{1}{2\cos \pi(1/2 + v)} \left(J_{2v}(x) - J_{-2v}(x) \right).$$

Кроме того, мы получаем аналитическое продолжение формулы (13) в область, содержащую специальные точки $s = 1/2$ и $s = 1$, и рассматриваем некоторые приложения этого результата.

Содержание главы 7.

Предыдущая глава была посвящена доказательству формулы спектрального разложения для суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s), \tag{14}$$

где ω - это некоторая тестовая функция, а L-ряд Загира определён в (4).

В данной главе мы изучаем похожую задачу, но вместо суммы по n рассматриваем сумму по l

$$\sum_{l=1}^{\infty} \omega(l) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s). \tag{15}$$

Формулы спектрального разложения для сумм (14) и (15), а также методы их получения значительным образом отличаются. Кроме того, отличаются и причины их изучения. Наш интерес к сумме (14) в большей степени мотивирован её связью с теоремой о простых геодезических, в то время как необходимость исследования суммы (15) возникает при изучении вторых моментов L-функций симметрического квадрата. Например, рассмотрим первый момент L-функций симметрического квадрата для форм Мааса над $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, умноженный на коэффициент Фурье $\lambda_j(l^2)$, а именно:

$$\sum_j \lambda_j(l^2) L(s, \mathrm{sym}^2 u_j).$$

Домножив данное выражение на $\zeta(2s) l^{-s}$ и просуммировав по l от 1 до ∞, мы получаем второй момент

$$\sum_j L(s, \mathrm{sym}^2 u_j)^2.$$

Применив аналогичную процедуру к точной формуле, доказанной в главе 3, мы получаем выражения следующего вида

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)f(n,l;s) \tag{16}$$

в правой части точной формулы для второго момента.

Двойную сумму (16) можно изучать при помощи спектральных методов. Однако спектральное разложение для внутренней суммы по n приводит нашу задачу к зацикливанию, так как вновь получаются те же самые моменты, с которых мы начали. Для того чтобы избежать подобной ситуации, мы можем поменять порядки суммирования и сначала рассмотреть сумму по l. Таким образом, возникает необходимость получения спектрального разложения для суммы (15).

Несмотря на то что суммы (15) и (14) выглядят похоже, методы изучения каждой из них значительно различаются. Спектральное разложение суммы (14) является прямым следствием применения формулы следа Кузнецова к обобщенным суммам Клоостермана, в то время как в случае суммы (15) наше доказательство начинается с изучения различных свойств сумм Гаусса. А именно, вычисляя возникшие суммы Гаусса, мы получаем суммы сумм Клоостермана для конгруэнц подгруппы $\Gamma_0(N)$ уровней $N = 4, 16, 64$ в различных параболических вершинах и скрученных с характером χ_4 (нетривиальный характер Дирихле по модулю 4). Далее, применяя формулу следа Кузнецова, мы приходим к спектральному разложению для суммы (15), которое содержит моменты L-функций симметрического квадрата для $\Gamma_0(N)$ уровней $N = 4, 16, 64$ скрученных с коэффициентом Фурье в параболических вершинах 0 и ∞.

Содержание главы 8.

В предыдущих главах мы изучали асимптотическое поведение первых моментов L-функций симметрического квадрата, рассмотрели различные приложения этих результатов и исследовали связь данных моментов со средними значениями L-рядов Загира. В данной главе мы продолжаем эти исследования и доказываем точную формулу для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса

$$\mathcal{M}_2(h;u,v) := \sum_j h(t_j)\alpha_j L(\mathrm{sym}^2 u_j, s_-)L(\mathrm{sym}^2 u_j, s_+),$$

где

$$s_+ = 1/2 + u + v, \quad s_- = 1/2 + u - v,$$

$L(\mathrm{sym}^2 u_j, s)$ задана в (9), коэффициент α_j определён в (10), а $h(t)$ – функция, удовлетворяющая некоторым условиям.

Мотивацией для этого результата послужило спектральное разложение, доказанное в предыдущей главе. Формулировка основной теоремы очень сложна и громоздка, поэтому мы не будем приводить её здесь. Но отметим, что полученная точная формула выражает исходный второй момент через четвертый момент дзета-функции Римана, а также двойственные вторые моменты L-функций симметрического квадрата голоморфных форм и форм Маасса уровней 4, 16, 64 с характером χ_{-4}.

Данный результат является аналогом точной формулы для четвёртого момента L-функций форм Маасса, которая была получена Кузнецовым[27] и Мотохаши[28] [29]. Кроме того, спектральные тождества подобного вида были доказаны Биро[30].

Полученная точная формула также дополняет коллекцию различных формул взаимности, которые выражают один момент L-функций через другие моменты. Одна из самых известных формул такого типа, доказанная Мотохаши[31] (см. также теорему 4.2[32]), выражает четвёртый момент дзета-функции Римана через третьи моменты $GL(2)$ автоморфных L-функций. Как и следовало ожидать, эти третьи моменты в свою очередь можно выразить через четвёртый момент дзета-функции Римана, как показано Фроленковым[33].

Для доказательства нашей точной формулы мы применили метод аналитического продолжения, рассматривая исходный момент в предположении, что $\Re(u) > 1, \Re(v) = 0$. При выполнении данных условий можно записать L-функции через ряды Дирихле и после этого

[27] N. V. Kuznetsov, Sums of Kloosterman sums and the eighth power moment of the Riemann zeta-function, T.I.F.R. Stud. Math. 12 (1989), 57–117.

[28] Y. Motohashi, Kuznetsov's paper on the eighth power moment of the Riemann zeta-function (Revised), Part I. Manuscript, June 22, 1991.

[29] Y. Motohashi, A functional equation for the spectral fourth moment of the modular Hecke L-functions, Proc. MPIM-Bonn Special Activity on Analytic Number Theory, Bonn 2002, Bonner Math. Schrift., 130 (2003), 19 pages, arXiv:math/0310105.

[30] A. Biro, A duality relation for certain triple products of automorphic forms, Israel J. of Math., 192 (2012), 587–636.

[31] Y. Motohashi, An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function, Acta Math., 170(2) (1993), 181–220.

[32] Y. Motohashi, Spectral theory of the Riemann zeta-function, Cambridge Tracts in Mathematics 127 (Cambridge University Press, 1997).

[33] D. Frolenkov, The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect, J. Number Theory 207 (2020), 247–281.

применить формулу следа Кузнецова к суммам коэффициентов Фурье форм Мааса. В результате, мы получаем суммы сумм Клоостермана с весовой специальной функцией. Однако, также как и в вышеупомянутых работах Мотохаши, данная функция не является достаточно хорошей для дальнейших преобразований. Поэтому необходимо модифицировать формулу суммирования Кузнецова с применением метода регуляризации. Такой подход позволяет получить выражение вида

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u+s}}\frac{S(m^2,n^2;q)}{q^{1-s}},$$

где $S(m,n;q)$ – классическая сумма Клоостермана.

Разбивая суммы по m и n в арифметические прогрессии по модулю q, мы получили произведение двух дзета-функций Лерха, для каждой из которых можно применить функциональное уравнение. Таким образом, после некоторых преобразований мы свели нашу задачу к изучению сумм

$$K(n,l;q) := \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2,q)e\left(\frac{nc+ld}{q}\right).$$

Данную двойную сумму можно выразить через суммы Гаусса, что позволяет вычислить её в явном виде. В результате, получается выражение для $K(n,l;q)$ в терминах обобщенных сумм Клоостермана, для которых на следующем шаге можно применить одну из версий формулы следа Кузнецова. Далее нужно убедиться, что слагаемые, получившиеся в правой части точной формулы, сходятся абсолютно. С этой целью мы доказали несколько оценок на специальные функции, которые возникли после применения формулы Кузнецова. Последний шаг – аналитическое продолжение формулы из области $\Re(u) > 1, \Re(v) = 0$ в область $0 \leqslant \Re(u) < 1/2, \Re(v) = 0$.

Содержание главы 9.

Формулой Вороного мы называем тождество для суммы следующего вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e\left(\frac{an}{c}\right) F(n), \tag{17}$$

где $(a,c) = 1$, $e(x) := e^{2\pi i x}$, $F(n)$ – весовая функция (обычно с компактным носителем или из пространства Шварца $S(\mathbb{R})$ с некоторыми условиями на

поведение в нуле и на бесконечности), а a_n – некоторая последовательность, обычно удовлетворяющая некоторым арифметическим свойствам.

В данной главе мы доказываем формулу суммирования Вороного с коэффициентами a_n равными значениям L-рядов Загира (4), которая является следствием более общего результата, а именно формулы Вороного для коэффициентов Фурье неголоморфных форм Маасса веса $1/2$ и уровня 4.

Данный результат дополняет коллекцию уже известных формул Вороного, интерес к которым обусловлен большим кругом задач, которые можно решить с их помощью.

Изначально Вороной изучал случай $a_n = \tau(n)$ (функция числа делителей n). В этом случае существует два различных доказательства. Во-первых, можно получить формулу Вороного для (17) при помощи формулы суммирования Пуассона. Во-вторых, можно построить доказательство, основываясь на том, что $\tau(n)$ является коэффициентом Фурье рядов Эйзенштейна для группы $\mathrm{GL}(2)$. Такой подход является более универсальным, позволяя доказать формулы Вороного с a_n равным коэффициентам Фурье различных автоморфных форм.

Наиболее общая версия $\mathrm{GL}(2)$ формулы Вороного доказана Ковальским, Мишелем и Вандеркамом (в аппендиксе A)[34] для голоморфных форм и форм Маасса произвольного уровня D. Формула Вороного для голоморфных параболических форм полуцелого веса и уровня $N \equiv 0 \pmod 4$ была доказана Дьюком и Иванцом[35]. Этот результат также можно вывести из работы Быковского[36]. Общий случай формулы Вороного для параболических форм полуцелого веса и уровня $N \equiv 0 \pmod 4$ был недавно доказан в работе Ассинга и Корбетта[37].

Наш результат отличается от более общего случая, который изучали Ассинг и Корбетт, в двух аспектах. Во-первых, мы рассматриваем не только параболические формы Маасса, но также и непараболические. Во-вторых, мы доказываем три теоремы, которые покрывают все возможные значения c в (17) и позволяют в явном виде выписать формулы суммирования Вороного, что является важным для приложения из главы 11.

Доказательство следует классической схеме. Записывая тестовую

[34]E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, Rankin-Selberg L-functions in the level aspect, Duke Math. J. 114 (2002), 123–191.

[35]W. Duke, H. Iwaniec, Bilinear forms in the Fourier coefficients of half-integral weight cusp forms and sums over primes, Math. Ann. 286 (1990), no. 4, 783–802.

[36]V.A. Bykovskii, Functional equations for Hecke-Maass series, Funct. Anal. Appl., 34:2 (2000), 98–105.

[37]E. Assing, A. Corbett, Voronoi summation for half-integral weight automorphic Forms, Int. Math. Res. Not. 23 (2022), 18632–18675.

функцию $F(n)$ в (17) через обратное преобразование Меллина, мы сводим нашу задачу к изучению рядов Дирихле

$$L^-(f,s,a/c) := \sum_{n>0} \frac{a_n}{n^s} e\left(\frac{an}{c}\right), \quad L^-(f,s,a/c) := \sum_{n<0} \frac{a_n}{|n|^s} e\left(\frac{an}{c}\right),$$
$$L_4^+(f,s,a/c) := \sum_{n>0} \frac{a_{4n}}{n^s} e\left(\frac{an}{c}\right), \quad L_4^-(f,s,a/c) := \sum_{n<0} \frac{a_{4n}}{|n|^s} e\left(\frac{an}{c}\right).$$

Далее мы получаем функциональные уравнения для данных рядов, а также определяем местоположение их полюсов. Применяя полученные результаты, мы доказываем формулы суммирования Вороного для непараболических форм Маасса веса 1/2 и уровня 4. Наконец, используя тот факт, что значения L-рядов Загира возникают в разложении Фурье-Уиттекера для комбинации рядов Эйзенштейна–Маасса веса 1/2 и уровня 4 (частный случай непараболической формы Маасса), мы доказываем основной результат.

Содержание главы 10.

Данная глава посвящена доказательству асимптотической формулы для функции

$$ {}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha), 3/4+ir(1-\alpha), 1+2ir; z\right), \tag{18}$$

где $0<z<1$, $r\to\infty$, $\alpha = t/r \to 0$. Это один из двух частных случаев гипергеометрической функции Гаусса, возникающих в точной формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата форм Маасса на критической прямой $\rho = 1/2+2it$, как показано в главе 3. Наша цель – использовать данную точную формулу в качестве отправной точки для изучения второго момента на коротких интервалах, чтобы в конечном итоге доказать в главе 11 новые нетривиальные гибридные оценки для L-функций симметрического квадрата. Для этого нам потребуется следующее равномерное асимптотическое разложение для (18).

Теорема 13. *Предположим, что* $0<z<1$, $r\to\infty$ *и* $r^{-1+\delta} < \alpha < r^{-\delta}$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$ {}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha), 3/4+ir(1-\alpha), 1+2ir; z\right) =$$
$$= \frac{\exp\left(2irl_1(\alpha,z)\right)}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}} \left(1+\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(\alpha,r)}{(\alpha r)^j}\right) + O((\alpha r)^{-N-1}),$$

где

$$l_1(\alpha, z) = \log 2 - \alpha \log(1+\alpha) - \log(1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}) + \\ + \alpha \log(\alpha + \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}).$$

Содержание главы 11.

В данной главе мы доказываем новую гибридную верхнюю оценку на L-функции симметрического квадрата форм Мааса, дополняя недавний результат Кхана и Янга [38]. Пусть u_j - форма Гекке-Мааса с собственным значением оператора Лапласа $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$, L-функция симметрического квадрата определена в (9). Кхан и Янг доказали следующий результат.

Теорема 14. *Зафиксируем $0 < \delta < 2$. Выберем t, T, $G > 1$ так, что*

$$\frac{T^{3/2+\delta}}{G^{3/2}} \leqslant t \leqslant (2-\delta)T. \tag{19}$$

Тогда выполнена следующая оценка

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j |L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)|^2 \ll T^{1+\epsilon} G.$$

Прямое следствие данной теоремы – следующая гибридная оценка подвыпуклости.

Следствие 15. *Пусть $0 < \delta < 2$ и*

$$|t_j|^{6/7+\delta} < t < (2-\delta)|t_j|.$$

Тогда

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll |t_j|^{1+\epsilon} t^{-1/3}. \tag{20}$$

Условие $|t_j|^{6/7+\delta} < t$ гарантирует, что (20) лучше тривиальной оценки (полученной из принципа Фрагмена-Линделёфа)

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it)| \ll (1+|t|)^{1/4+\epsilon} |t_j|^{1/2+\epsilon}. \tag{21}$$

Заметим, что в случае, когда $|t-t_j| < t_j^{1/3}$, Хуанг[39] доказал оценку (20) другим методом.

[38] R. Khan and M.Young, Moments and hybrid subconvexity for symmetric-square L-functions, J. Inst. Math. Jussieu 22(5) 2023, 2029–2073.

[39] B. Huang, The cubic moment of Hecke–Maass cusp forms and moments of L-functions, Math. Ann. 389 (2024), no. 1, 899–945.

Наш основной результат позволяет расширить область (19) в теореме 14 следующим образом.

Теорема 16. *При* $G \gg \max\left(\frac{t^{2/3}}{T^{1/3}}, \frac{T}{t}\right) T^{\epsilon}$ *и* $t \ll T^{6/7-\epsilon}$ *выполнена оценка*

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j |L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)|^2 \ll T^{1+\epsilon} G.$$

Следствие 17. *Выполнены оценки*

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll \frac{|t_j|^{1+\epsilon}}{\sqrt{t}} \quad for \quad |t_j|^{2/3+\epsilon} \ll t \leq |t_j|^{4/5}, \tag{22}$$

и

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll (|t_j|t)^{1/3}|t_j|^{\epsilon} \quad for \quad |t_j|^{4/5} \leq t \ll |t_j|^{6/7-\epsilon}.$$

Условие $t \gg |t_j|^{2/3+\epsilon}$ гарантирует, что (22) лучше тривиальной оценки (21). Ограничение $t \ll |t_j|^{6/7-\epsilon}$ имеет технический характер.

Доказательство теоремы 16 использует точную формулу для первого момента с твистом для L-функций симметрического квадрата из главы 3, приближенное функциональное уравнение для второй L-функции, формулу суммирования Вороного из главы 9, асимптотическую формулу для гипергеометрической функции Гаусса из главы 10. При этом ключевую роль играет более сложный и тщательный анализ специальных функций на критической прямой, который позволяет нам улучшить результаты Кхана и Янга.

Работы автора по теме диссертации

[1] О. Г. Балканова, *Асимптотика гипергеометрической функции Гаусса, возникающей в моментах L-функций симметрического квадрата I*, Матем. заметки, 119:3 (2026), 339–349.

[2] О. Г. Балканова, *Первый момент L-функций симметрического квадрата модулярных форм*, Матем. сб., 216:9 (2025), 3–20.

[3] О. Г. Балканова, *Формула спектрального разложения и моменты L-функций симметрического квадрата*, Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 3–46.

[4] O. Balkanova, *The first moment of Maass form symmetric square L-functions*, Ramanujan J., 55 (2021), 761–781.

[5] O. Balkanova and D. Frolenkov, *The mean value of symmetric square L-functions*, Algebra Number theory 12:1 (2018), 35–59.

[6] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Convolution formula for the sums of generalized Dirichlet L-functions*, Rev. Mat. Iberoam. 35:7 (2019), 1973–1995.

[7] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Bounds for a spectral exponential sum*, J. Lond. Math. Soc. 99:2 (2019), 249–272.

[8] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Non-vanishing of Maass form symmetric square L-functions*, J. Math. Anal. Appl., 500:2 (2021), 125148 , 23 pp.

[9] O. Balkanova and D. Frolenkov, *An explicit formula for the second moment of Maass form symmetric square L-functions*, Publ. Mat. 67 (2) 611–660, 2023.

[10] O. Balkanova and D. Frolenkov, *A Voronoi summation formula for non-holomorphic Maass forms of half-integral weight*, Monatsh. Math. 203 (2024), 733–764.

[11] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Hybrid subconvexity for Maass form symmetric-square L-functions*, Proc. R. Soc. Edinb. A: Math., published online, DOI: https://doi.org/10.1017/prm.2025.10113.

Подписано в печать 12.03.2026

Тираж 100 экз.

Отпечатано в (название, адрес типографии)