«УТВЕРЖДАЮ»
проректор по научной работе
ФГАОУ ВО «МАИ»
доктор технических наук
_____ А. В. Иванов
«13» апреля 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)» на диссертационную работу Балкановой Ольги Германовны «L-функции симметрического квадрата», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Актуальность темы диссертации

Диссертация посвящена изучению L-функций симметрического квадрата, которые были определены Шимурой в 1975 году и с тех пор стали одним из важнейших объектов исследования в аналитической теории чисел. Кроме того, данные L-функции имеют ряд приложений в других областях математики и физики, включая квантовый хаос и арифметическую квантовую эргодичность, гипотезу Сато-Тейта, программу Лэнгленда, теорему о простых геодезических.

Особое внимание в диссертации уделяется изучению моментов L-функций симметрического квадрата. В теории автоморфных форм под моментами L-функций подразумеваются средние значения их степеней (первой для первого момента, второй для второго и.т.д.). При этом усреднение ведется либо по базису Гекке в случае модулярных форм, либо по спектральному параметру формы Маасса из некого интервала. Изучение моментов L-функций обусловлено тем, что на их основе удается получать нетривиальную информацию о порядке роста L-функций и их нулях.

Семейство L-функций симме́трического квадрата являются одним из самых сложных для изучения. В частности, для значений данных L-функций на критической прямой до сих пор не получено улучшение тривиальной оценки, которая следует из функционального уравнения и метода Фрагмена-Линделёфа. Многие ведущие специалисты по аналитической теории чисел (Иванец, Сарнак, Мишель, Блумер и многие другие) в разное время получали результаты о моментах L-функций симметрического квадрата.

В диссертации также детально изучаются L-ряды Загира. Данные L-ряды тесно связаны с моментами L-функций симметрического квадрата. Впервые эта связь была установлена самим Загиром в 1976 году, которому удалось выразить первый момент L-функций симметрического квадрата модулярных форм через первые моменты L-рядов Загира.

Структура и содержание диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав и списка литературы. Диссертация представлена на 283 страницах машинописного текста, включает 0 рисунков и 5 таблиц.

В первой главе получена новая оценка на остаточный член в асимптотической формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата голоморфных модулярных форм большого веса. Данный результат не только существенно улучшает предшествующие оценки остаточных членов, но также позволяет выделить второй главный член в асимптотической формуле.

Вторая глава является в некотором смысле естественным продолжением первой, так как в ней рассматривается аналогичная задача, только не для форм уровня один и большого веса, а для форм фиксированного веса и большого уровня специального вида (уровень равен степени простого числа). В отличие от первой главы, в которой основной результат следовал из новых результатов о гипергеометрических функциях Гаусса, в случае большого уровня задача сводится к изучению поведения так называемых L-рядов Загира простого примарного уровня, впервые введенных в работе диссертанта.

В третьей главе продолжается исследование первых моментов L-функций симметрического квадрата, но на этот раз изучаются не голоморфные формы, а формы Маасса. Как и в первой главе, для данного момента получена точная формула, выражающая его через суммы L-рядов Загира, домноженные на некие гипергеометрические функций. Изучение асимптотических свойств этих функций привело к улучшению известных ранее остатков в асимптотической формуле для данного момента. Отметим, что полученная точная формула для первого момента впоследствии используется в целом ряде глав.

Основным результатом **четвертой главы** является новая оценка на пропорцию форм Маасса, для которых L-функция симметрического квадрата не обращается в ноль в точке $1/2$.

В пятой главе доказана гипотеза Петридиса-Ризагера о порядке роста спектральной экспоненциальной суммы при условии некоторых ограничений на параметры спектральной экспоненциальной суммы. Доказательство основано на изучении первого момента L-функций симметрического квадрата форм Масса, домноженных на определенную осциллирующую функцию.

В шестой и седьмой главах получены формулы, выражающие различные первые моменты L-рядов Загира через моменты L-функций симметрического квадрата. Очень сложные технически доказательства основаны на связи L-рядов Загира с суммами Клоостермана, что позволяет в итоге применить формулу Кузнецова для суммы сумм Клоостермана.

Восьмая глава технически сильно перекликается с вычислениями из главы семь. В данной главе рассматривается второй момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса, для которого получена точная формула, выражающая его через вторые моменты L-функций симметрического квадрата автоморфных форм (как голоморфных так и форм Мааса) уровней 4, 16, 64.

Главы девять-одиннадцать посвящены доказательству новой гибридной оценки на значения L-функции симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой. Для этого в главе девять сначала доказывается формула Вороного для L-рядов Загира (на самом деле рассматривается более общий случай коэффициентов Фурье неголоморфных форм Мааса уровня 4 и полуцелого веса, из которого уже следует результат для L-рядов Загира). После этого в десятой главе получена асимп-

тотическая формула для гипергеометрической функции, входящей в точную формулу для первого момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса. На основе результатов из глав девять и десять, с использованием нового метода изучения второго момента L-функций симметрического квадрата, в главе одиннадцать выводится новая гибридная оценка.

Научная новизна диссертационной работы

Существует три метода изучения моментов L-функций автоморфных форм:

1. основанный на использовании приближенного функционального уравнения;
2. основанный на изучении кратных рядов Дирихле;
3. основанный на исследовании точных формул, выражающих данный момент через какой-либо другой.

В диссертации развивается именно третий подход к изучению L-функций симметрического квадрата и L-рядов Загира. До работ диссертанта существовала только работа Загира 1976г., в которой им была получена точная формула для первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм, выражающая его через моменты L-рядов Загира. В диссертации не только получены аналогичные формулы для случая голоморфных форм примарного уровня и форм Маасса, но и на их основе доказаны новые асимптотические формулы для данных моментов. Полученные асимптотические формулы позволили доказать частный случай гипотезы Петридиса-Ризагера, получить новые оценки на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата, а также новую гибридную оценку на значения L-функции симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой, связанную с гипотезой Рудника-Сарнака о строгой квантовой эргодичности. Также были получены точные формулы для первых моментов L-рядов Загира и второго момента L-функций симметрического квадрата форм Маасса.

Практическая значимость диссертации

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования могут найти применения в различных задачах теории чисел.

Достоверность результатов диссертационной работы.

Все работы опубликованы в рецензируемых математических издательствах, а также представлены на научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

Работа носит теоретический характер.

Основные результаты и положительные стороны исследования.

В диссертации получен целый ряд новых точных формул, связывающих моменты L-функций симметрического квадрата и моменты L-рядов Загира. На основе данных формул доказаны новые асимптотические формулы для соответствующих моментов.

Полученные асимптотические формулы позволили доказать частный случай гипотезы Петридиса-Ризагера, получить новые оценки на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата, а также новую гибридную оценку на значения L-функций симметрического квадрата форм Маасса на критической прямой, связанную с гипотезой Рудника-Сарнака о строгой квантовой эргодичности.

Недостатки исследования.

Мы не будем останавливаться на некоторых опечатках, которые, естественно, присутствуют в таком большом тексте, а выскажем ряд замечаний к самой структуре диссертации, которые никак не умаляют качества достигнутых результатов.

В целом диссертация написана хорошо. Однако решение автора посвятить каждой своей работе отдельную главу выглядит спорным. На наш взгляд, диссертация предоставляла отличный шанс объединить несколько статей, использующихся для доказательства некого итогового результата, в единый текст. Например, естественным образом можно было бы объединить главы 9, 10 и 11.

Апробация и публикация результатов диссертационной работы.

Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах.

- «Современные проблемы теории чисел» (МИАН, г. Москва),
- "Rencontres de théorie analytique et élémentaire des nombres"(Институт Анри Пуанкаре, г. Париж, Франция),
- на семинарах по теории чисел в Университете Клермон-Овернь (Франция), в Федеральной политехнической школе Лозанны (Швейцария), в Университете Манчестера (Великобритания), в Университете Турку (Финляндия), в Университете Гётеборга (Швеция), в Институте математики Альфреда Реньи (Венгрия), в Университете Брауна (США).
- IV Конференция Математических Центров России, август 2024, г. Санкт-Петербург;
- Конференция «Automorphic Forms in Budapest 2024», август 2024, институт Реньи, г. Будапешт, Венгрия;
- Конференция «Современные проблемы теории чисел», июль 2024, Сириус, г. Сочи;
- Конференция по комплексному анализу и его приложениям, сентябрь 2023, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск;
- XXII международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», сентябрь 2023, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г. Тула;
- Конференция «Декабрьские чтения», декабрь 2023, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск;
- Workshop «Delta symbols and the subconvexity problem», ноябрь 2020, Американский Математический институт (AIM), онлайн;

- Конференция «Zeta functions», декабрь 2019, CIRM, Франция;
- Конференция «Arithmétique en Plat Pays : Journée printanière», июнь 2018, г. Лилль, Франция;
- Конференция «French-Japanese zeta functions», март 2017, г. Лилль, Франция;
- Workshop «Automorphic Forms and Arithmetic», сентябрь 2017, Математический институт Обервольфаха, Германия;
- Workshop «Spectral Theory, Automorphic Forms and Arithmetic», ноябрь 2016, г. Копенгаген, Дания;
- Workshop «Moments of zeta and correlations of divisor sums», сентябрь 2016, Американский Математический институт (AIM), г. Сан Хосе, США.

По материалам диссертации опубликовано 11 статей в ведущих научных изданиях, включенных в перечень ВАК РФ и проиндексированных в базе цитирования Scopus.

1. О. Г. Балканова, *Асимптотика гипергеометрической функции Гаусса, возникающей в моментах L-функций симметрического квадрата I*, Матем. заметки, 119:3 (2026), 339–349.
2. О. Г. Балканова, *Первый момент L-функций симметрического квадрата модулярных форм*, Матем. сб., 216:9 (2025), 3–20.
3. О. Г. Балканова, *Формула спектрального разложения и моменты L-функций симметрического квадрата*, Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 3–46.
4. O. Balkanova, *The first moment of Maass form symmetric square L-functions*, Ramanujan J., 55 (2021), 761–781.
5. O. Balkanova and D. Frolenkov, *The mean value of symmetric square L-functions*, Algebra Number theory 12:1 (2018), 35–59.
6. O. Balkanova and D. Frolenkov, *Convolution formula for the sums of generalized Dirichlet L-functions*, Rev. Mat. Iberoam. 35:7 (2019), 1973–1995.
7. O. Balkanova and D. Frolenkov, *Bounds for a spectral exponential sum*, J. Lond. Math. Soc. 99:2 (2019), 249–272.
8. O. Balkanova and D. Frolenkov, *Non-vanishing of Maass form symmetric square L-functions*, J. Math. Anal. Appl., 500:2 (2021), 125148 , 23 pp.
9. O. Balkanova and D. Frolenkov, *An explicit formula for the second moment of Maass form symmetric square L-functions*, Publ. Mat. 67 (2) 611–660, 2023.
10. O. Balkanova and D. Frolenkov, *A Voronoi summation formula for non-holomorphic Maass forms of half-integral weight*, Monatsh. Math. 203 (2024), 733–764.
11. O. Balkanova and D. Frolenkov, *Hybrid subconvexity for Maass form symmetric-square L-functions*, Proc. R. Soc. Edinb. A: Math., published online, DOI: https://doi.org/10.1017/prm.2025.10113.

Заключение

Диссертация представляет собой глубокое исследование важных и актуальных тем современной аналитической теории чисел. В ней достигнут значительный прогресс в направлении доказательства значимых и очень сложных гипотез Петридиса-Ризагера (о спектральной экспоненциальной сумме) и Рудника-Сарнака (о строгой квантовой эргодичности). Кроме того, получены новые результаты об L-рядах Загира.

Все результаты являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами. С результатами диссертации полезно ознакомить ученых, работающих в НИУ ВШЭ, ПОМИ РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ. Целесообразно продолжить исследования, представленные в диссертации, в данных организациях.

Результаты диссертации докладывались на различных международных и российских конференциях и семинарах. По теме диссертации опубликовано 11 статьей в ведущих зарубежных и отечественных журналах. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Диссертация Балкановой Ольги Германовны «L-функции симметрического квадрата» удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в п.9 Положения ВАК РФ о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» ФГАОУ ВО МАИ 14 апреля 2026 г. (протокол заседания № 8). Присутствовало 15 человек. Результаты голосования: за 15, против 0, воздержавшихся 0.

Доктор физ.-матем. наук, профессор _____ И.Д. Кан

Доктор физ.-матем. наук, профессор,
заведующий кафедрой 311
ФГАОУ ВО «МАИ», _____ В.А. Вестяк

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
Адрес: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
Тел.: +7 (499) 158-10-44, +7 499 158-29-77
Электронная почта: mai@mai.ru
Сайт: mai.ru