ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Балкановой Ольги Германовны «L-функции симметрического квадрата» представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Настоящее диссертационное исследование посвящено анализу моментов L-функций симметрического квадрата, представляющих собой средние значения их степеней при усреднении по заданному множеству. В контексте голоморфных модулярных форм усреднение традиционно осуществляется по базису Гекке, тогда как для форм Маасса в качестве параметра усреднения выступает спектральный параметр формы.

Основным фактором, обусловливающим интерес к исследованию моментов L-функций, является их фундаментальная связь с обобщенной гипотезой Линделёфа и рядом других нерешенных проблем аналитической теории чисел. В частности, к анализу моментов L-функций симметрического квадрата сводится задача о распределении длин примитивных геодезических на модулярной поверхности (верхней полуплоскости Пуанкаре).

Данное научное направление развивалось в трудах ведущих специалистов по аналитической теории чисел, среди которых Н. В. Кузнецов, В. А. Быковский, П. Сарнак (P. Sarnak), Х. Иванец (H. Iwaniec), К. Саундарараджан (K. Soundararajan) и М. Янг (M. Young). В частности, в 1978 году Н. В. Кузнецов установил, что задачу о распределении длин примитивных геодезических можно свести к изучению свойств определенного L-ряда, обобщающего классическую L-функцию Дирихле. В современной литературе данный L-ряд называется L-рядом Загира, поскольку в работе Д. Загира (D. Zagier) были доказаны его основные аналитические свойства и установлена его связь с первым моментом L-функций симметрического квадрата. Несмотря на то, что тесная взаимосвязь L-функций симметрического квадрата и L-рядов Загира известна давно, настоящее диссертационное исследование, по всей видимости, представляет собой первое систематическое изучение свойств L-рядов Загира.

Основным методологическим подходом к исследованию моментов L-функций симметрического квадрата и L-рядов Загира, применяемым в настоящей диссертации, является метод точных формул (или формул взаимности). Данный метод реализуется в два этапа. На первом этапе для исследуемого момента выводится явное аналитическое выражение, связывающее его с двойственным моментом, в котором присутствуют дополнительные весовые функции. На втором этапе для указанных весовых функций доказываются асимптотические разложения, на основании которых получается итоговая асимптотическая формула для исходного момента. Рассматриваемый методологический подход традиционно характерен для российской математической школы, во многом развивающей фундаментальные идеи Н. В. Кузнецова. В зарубежных же исследованиях доминирует аналитический аппарат, основанный на применении приближенных функциональных уравнений. В настоящей диссертационной работе эти два подхода мастерски комбинируются, что позволило достичь существенного прогресса в решении ряда актуальных задач теории чисел. Так были получены новые оценки на долю форм Маасса, чья L-функция симметрического квадрата не обращается в ноль в центральной точке, а также установлена новая гибридная оценка на значения L-функции симметрического квадрата форм Маасса на

критической прямой. Последний результат является особенно важным в виду связи данных гибридных оценок с гипотезой Рудника-Сарнака об арифметической строгой квантовой эргодичности.

Содержание диссертации по главам

Диссертация состоит из введения, 11 глав и списка литературы.

Первые три главы посвящены доказательству новых оценок остаточных членов в асимптотических формулах для различных первых моментов L-функций симметрического квадрата.

В главе 1 анализируется случай голоморфных модулярных форм большого веса. На основании новых асимптотических формул для гипергеометрических функций из формулы взаимности для исследуемого момента, полученных с помощью метода Лиувилля — Грина, автору удалось для ряда случаев установить экспоненциальную оценку остаточного члена. Результаты подобного типа являются нетривиальными и крайне редко встречаются в современной теории моментов.

В главе 2 исследуется первый момент для форм большого примарного уровня. Аналогично методологии, изложенной в главе 1, на первом этапе выводится формула взаимности, выражающая исследуемый момент через первые моменты L-рядов Загира примарного уровня. Данное обобщение L-рядов Загира обладает нетривиальными аналитическими свойствами, применение которых позволило существенно улучшить известные ранее оценки остаточных членов в соответствующих асимптотических формулах.

В главе 3 анализируется случай форм Мааса. Данный случай эвристически схож с контекстом главы 1, посвященной голоморфным формам большого веса, при условии введения дополнительного усреднения по весовому параметру. По аналогии с методологией первой главы, детальный анализ аналитических свойств гипергеометрических функций, входящих в формулу взаимности, позволил получить ряд новых нетривиальных результатов.

В главе 4 на основе применения приближенного функционального уравнения и результатов, полученных в главе 3, доказывается асимптотическая формула с новой оценкой остаточного члена для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса на коротких интервалах. В качестве следствия установлена оценка снизу для доли форм Мааса, чьи L-функции симметрического квадрата не обращаются в ноль в центральной точке.

Глава 5 посвящена доказательству частного случая гипотезы Петридиса — Ризагера о спектральной экспоненциальной сумме. Указанная гипотеза тесно связана с задачей о распределении длин примитивных геодезических. Доказательство базируется на сведении анализа спектральной экспоненциальной суммы к исследованию первого момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса с осциллирующим множителем с последующим применением методологических подходов и результатов главы 3.

Главы 6 и 7 посвящены исследованию первых моментов L-рядов Загира индекса $n^2 - 4l^2$. Объекты именно такого типа возникают в формулах взаимности для первых моментов L-функций симметрического квадрата, рассмотренных в главах 1–3. В главе 6 анализируется усреднение по параметру n, тогда как в главе 7 — по парамет-

ру l. Несмотря на внешнее сходство данных задач, методы их решения существенно различаются. В обоих случаях исследуемые моменты на первом этапе выражаются через суммы сумм Клоостермана. Однако, если в контексте главы 6 (усреднение по n) возникают классические суммы Клоостермана, то в главе 7 (усреднение по l) результирующие выражения содержат суммы Клоостермана относительно различных конгруэнц-подгрупп, заданные в том числе не только в параболической вершине ∞. Данное обстоятельство значительно усложняет реализацию второго этапа вывода формулы взаимности для первого момента L-рядов Загира, а именно — применение формулы суммирования Кузнецова.

Глава 8 посвящена доказательству формулы взаимности для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса. По всей видимости, именно задача получения данного тождества послужила ключевой мотивацией для исследования первого момента L-рядов Загира в главе 7. Хотя теоретические положения главы 7 напрямую не применяются в главе 8, часть доказательств в обеих главах имеет принципиально схожую структуру. Полученная формула взаимности представляет собой аналог формулы взаимности для четвертого момента классических L-функций форм Мааса, доказанной Н. В. Кузнецовым и Й. Мотохаши (Y. Motohashi) на рубеже 2000-х годов.

Глава 9 посвящена доказательству формулы суммирования Вороного для коэффициентов Фурье форм Мааса полуцелого веса и уровня 4. Вопреки кажущейся изолированности данного результата, он находится в тесной методологической взаимосвязи с остальным материалом диссертационного исследования. Обусловлено это тем, что L-ряды Загира входят в коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна — Мааса полуцелого веса и уровня 4. Таким образом, в настоящей главе фактически получена формула Вороного для L-рядов Загира. Указанное тождество играет ключевую роль при выводе новой гибридной оценки для L-функции симметрического квадрата форм Мааса в главе 11.

Глава 10 носит вспомогательный характер и посвящена выведению асимптотического разложения для определенного класса гипергеометрических функций, входящих в формулу взаимности для первого момента L-функции симметрического квадрата форм Мааса.

Наконец, в главе 11 получена новая гибридная оценка роста значений L-функции симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой. Метод доказательства базируется на интеграции формулы взаимности для первого момента и приближенного функционального уравнения исследуемой L-функции, что позволяет свести исходную задачу к анализу двойных сумм L-рядов Загира. Посредством довольно тонких рассуждений данные двойные суммы преобразуются к виду, допускающему применение формулы суммирования Вороного, полученной в главе 9. Необходимо подчеркнуть, что данный результат представляет собой один из первых примеров нетривиального применения формул взаимности в теории моментов. Традиционный методологический подход предполагает оценку правой части формулы взаимности по модулю, где выигрыш достигается либо за счет точных оценок весовых функций, либо за счет арифметических свойств входящих в неё объектов. В настоящем же исследовании разработан принципиально новый метод, позволяющий одновременно учитывать как осцилляции весовых функций, так и аналитические свойства L-рядов Загира.

Замечания

Несмотря на достаточно высокий уровень изложения материала, в тексте диссертационного исследования присутствует ряд моментов, требующих дополнительных пояснений. В частности, в главе 9 не приведен явный вид главного члена в формуле суммирования Вороного для предельного случая $\rho = 0$. Вместе с тем следует указать, что данный случай в рамках последующего анализа не возникает, вследствие чего отмеченное упущение не оказывает влияния на корректность и достоверность результатов главы 11.

Также необходимо отметить, что, вопреки стремлению автора систематизировать все определения и предварительные сведения в соответствующем вводном разделе («Основные теоретические сведения»), в главах 5, 6 и 8 сохранились изолированные формулировки формул Кузнецова.

Указанные замечания не снижают общую высокую научную ценность представленного исследования.

Выводы

Диссертационное исследование О. Г. Балкановой выполнено на высоком международном уровне, что верифицируется публикацией полученных результатов в ведущих рецензируемых отечественных и зарубежных научных изданиях, а также апробацией основных положений работы в форме докладов на профильных семинарах и конференциях в крупнейших научно-образовательных центрах аналитической теории чисел. Автором продемонстрировано глубокое владение современным аналитическим аппаратом теории L-функций автоморфных форм. Содержание автореферата соответствует основным выводам диссертации. Считаю, что диссертация О.Г. Балкановой полностью удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а её автор, О.Г. Балканова, безусловно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Доктор физ.-матем. наук _____ А.А. Илларионов
22.05.2026

Официальный оппонент
Илларионов Андрей Анатольевич
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.06
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»),
профессор факультета математики НИУ ВШЭ
119048, Москва, ул. Усачёва д. 6, каб. 314
e-mail: a.illarionov@hse.ru
тел.(495) 772-95-90 * 12727

Подпись заверяю

Специалист по кадровому делопроизводству
Отдела по кадровому администрированию
Управления персонала
Берсенёв А.В.