Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

На правах рукописи
УДК 511.3

Балканова Ольга Германовна

L-функции симметрического квадрата

Специальность 1.1.5 — математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва 2026

Содержание

Введение 5

Основные теоретические сведения 13

Глава 1. Первый момент L-функций симметрического квадрата в аспекте веса 22

1.1. Основные результаты 22

1.2. Метод Лиувилля-Грина для приближения специальных функций 25

1.3. Асимптотическая формула 37

Глава 2. Первый момент L-функций симметрического квадрата в аспекте уровня 40

2.1. Некоторые предварительные результаты 42

2.2. Точная формула для первого момента 47

2.3. Оценки остаточных членов 49

2.4. Доказательство теорем 2.0.1 и 2.0.2 53

Глава 3. Первый момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса 54

3.1. Точная формула 55

3.2. Доказательство основных теорем 59

Глава 4. Пропорция ненулевых L-значений в центральной точке 68

4.1. Точная формула для первого момента 71

4.2. Доказательство теоремы 4.0.3 72

4.3. Доказательство теоремы 4.0.1 81

Глава 5. Оценки на спектральную экспоненциальную сумму 83

5.1. Формула следа Кузнецова 85

5.2. Начало доказательства 87

5.3. Точная формула 89

5.4. Анализ $\Sigma(s)$ 90

5.5. Анализ $\Sigma_B(s)$ 93

5.6. Специальные функции 94

5.7. Оценки на момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса 99

5.8. Оценки спектральной экспоненциальной суммы 101

Глава 6. Формула спектрального разложения для сумм L-рядов Загира I 105
6.1. Обобщенные суммы Клоостермана 108
6.2. Формула свёртки 110
6.3. Некоторые свойства весовых функций 113
6.4. Аналитическое продолжение 117

Глава 7. Формула спектрального разложения для сумм L-рядов Загира II 122
7.1. Основные теоретические сведения 125
7.2. Диагональные и недиагональные слагаемые 133
7.3. Специальные функции 140
7.4. Коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна 143
7.5. Вклад непрерывного спектра 152
7.6. Вклад дискретного и голоморфного спектра 161
7.7. Доказательство основных теорем 162

Глава 8. Точная формула для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса 164
8.1. Обозначения и основные теоретические сведения 167
8.2. Точная формула для больших значений u 178
8.3. Специальные функции 182
8.4. Вклад непрерывного спектра 184
8.5. Доказательство теоремы 8.0.1 и заключительные замечания 193

Глава 9. Формула суммирования Вороного 197
9.1. Основные теоретические сведения 202
9.2. Основные тождества 204
9.3. Некоторые результаты Мюллера 206
9.4. Функциональные уравнения для $T(f, s, a/c)$ и $T(E_k f, s, a/c)$ 208
9.5. Вычисление вычетов 210
9.6. Функциональные уравнения 217
9.7. Специальные функции 218
9.8. Доказательство теорем 9.0.2–9.0.4 219

Глава 10. Асимптотика гипергеометрической функции Гаусса, возникающей в моментах L-функций симметрического квадрата 222
10.1. Первый случай: $0 < z < 1 - \delta$ 222
10.2. Второй случай: $1 - \delta < z < 1$ 226
10.3. Численные примеры 229

Глава 11. Гибридные оценки L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой 232

11.1. Основные теоретические сведения 235

11.2. Формула суммирования Вороного для $\mathscr{L}_n(1/2+2it)$ 239

11.3. Точная формула для первого скрученного момента 241

11.4. Асимптотический анализ гипергеометрических функций 243

11.5. Второй момент на критической прямой и суммы L-рядов Загира 245

11.6. Интегральные преобразования 258

11.7. Доказательство теоремы 11.0.3 273

Литература 275

Введение

Актуальность темы. L-функции – это мероморфные функции комплексной переменной, обобщающие дзета-функцию Римана и связанные с различными аналитическими, геометрическими и алгебраическими объектами, включая числовые поля, автоморфные формы и алгебраические многообразия. Обычно они определяются как ряды Дирихле или произведения Эйлера, которые сходятся в некоторой полуплоскости, допускают мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению. Первые L-функции (дзета-функция Римана и L-функции Дирихле) появились в работах Эйлера, Дирихле и Римана при изучении распределения всех простых чисел и распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. Далее были работы Дедекинда, Артина, Гекке, Шимуры, Ленглендса и других математиков, благодаря которым коллекция L–функций значительно пополнилась и они стали важными инструментами при изучении различных задач, часто выходящих за рамки теории чисел. Более того, теория L-функций превратилась в самостоятельную область исследований, богатую известными гипотезами, разнообразными методами и яркими результатами.

В настоящее время не существует единой общепринятой классификации всех L–функций, хотя математики разработали системы для классификации многих из них. Например, в 1989 году А. Сельберг дал аксиоматическое определение класса L-функций, ныне называемое классом Сельберга. Один из ключевых параметров L-функции в классе Сельберга – это её степень, определяемая числом компонентов, связанных с гамма-факторами в функциональном уравнении, и являющаяся своеобразной мерой сложности L-функции.

Класс Сельберга степени 1 полностью описан; он состоит из дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и L–функций Дирихле $L(s+it;\chi)$, где $t \in \mathbb{R}$, а χ – примитивный характер Дирихле по модулю $\pmod q$, $q \geq 2$.

Структура класса Сельберга степени 2 и выше не изучена, но известны некоторые примеры. Примером L–функций степени 2 являются L-функции модулярных форм для конгруэнц-подрупп модулярной группы. Модулярные формы – это голоморфные функции на верхней полуплоскости, преобразующиеся специальным образом под действием модулярной группы или её конгруэнц-подгрупп, а также удовлетворяющие определенным условиям роста. Нас также будут интересовать формы Маасса — тип автоморфных форм,

обобщающих классические модулярные формы, представляющие собой гладкие, неголоморфные функции на верхней полуплоскости, преобразующиеся под действием конгруэнц-подгрупп подобно модулярным формам и являющиеся собственными функциями оператора Лапласа. Модулярные формы, формы Мааса и их L-функции – важные инструменты аналитической теории чисел, позволяющие решать арифметические задачи при помощи методов комплексного анализа и спектральной теории. Их исследование занимает значительную часть теории чисел XX века.

Наиболее известный пример L–функций степени 3 – автоморфные L-функции симметрического квадрата, ассоциированные с модулярными формами. Исследование данных L–функций началось с основополагающей работы Шимуры [**165**], в которой он определил их и доказал важные свойства, включая аналитическое продолжение и функциональное уравнение.

Как следовало ожидать, исследование L-функций симметрического квадрата представляет большую сложность в сравнении с изучением L-функций степени 1 или 2. Так, многие важные задачи, включая нетривиальные оценки на критической прямой и исследование старших моментов, до сих пор остаются нерешёнными. Данные задачи не только интересны сами по себе, но и имеют различные приложения. Один из примеров – доказательство Иванца [**100**] теоремы о простых геодезических. Второй – подход Головинского и Саундарараджана [**92**] к исследованию арифметической квантовой эргодичности, где логарифмическое улучшение тривиальной оценки на величину центральных значений L-функций симметрического квадрата, полученное Саундарараджаном в работе [**166**], привело к доказательству важной гипотезы.

Для дальнейшего продвижения в этих и других задачах необходимо получить степенное понижение относительно тривиальной оценки на центральные значения L-функций симметрического квадрата. Заметим, что тривиальной оценкой мы называем результат, полученный из принципа Фрагмена-Линделёфа, а любое его улучшение нетривиальной оценкой или оценкой "подвыпуклости". Один из основных подходов к доказательству таких оценок – это метод моментов, заключающийся в исследовании средних величин L-значений, возведенных в некоторую степень. Усреднение в моментах ведётся по различным семействам L–функций, упорядоченным определённым образом, при этом чем выше степень момента, тем сложнее его исследовать. В этом смысле сами по себе моменты являются интересными объектами для изучения. Они позволяют лучше понять структуру семейства и имеют прекрасную симметрию. Пять авторов разработали в работе [**67**] так называемый рецепт, который позволяет выписать гипотезы для определения главных членов во всех моментах для различных семейств L-функций. При этом в аспекте веса для

L–функций симметрического квадрата модулярных форм строгое доказательство известно лишь для первого момента. Наилучший известный результат в аспекте уровня получен Иванцом и Мишелем [**104**], которые доказали правильную по порядку верхнюю оценку для второго момента L-функций симметрического квадрата для голоморфных форм большого уровня, свободного от квадратов. Данная задача оказалась ещё более сложной в спектральном аспекте (спектральный параметр стремится к бесконечности) для форм Мааса. Для центральных значений L-функций симметрического квадрата известные методы не позволяют доказать даже гипотезу Линделёфа в среднем для второго момента на очень коротких интервалах. Наилучший известный результат с интервалом $(T, T + T^{1/5})$ получен Кханом и Янгом [**112**].

Цели работы. Целью диссертационной работы является решение различных задач, связанных с L-функциями симметрического квадрата, включая новые верхние оценки на L-функции в различных аспектах и нижние оценки на пропорцию ненулевых центральных L-значений. При этом мы изучаем L-функции ассоциированные как с голоморфными модулярными формами, так и с формами Мааса. Для данных семейств L-функций мы рассматриваем первые и вторые моменты, асимптотическое поведение которых изучается при помощи доказательства новых точных формул, исследования специальных функций методом перевала и методом Лиувилля-Грина, доказательства новых формул Вороного.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основными результатами данной работы можно считать следующие:

- Доказано существование второго главного члена в асимптотической формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм в аспекте веса;
- Получена асимптотическая формула для первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм с уровнем равным степени простого числа;
- Доказана новая оценка остатка в асимптотической формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса;
- Доказана новая нижняя оценка на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата форм Мааса в коротких интервалах;
- Получены новые оценки на спектральную экспоненциальную сумму;
- Получены формулы спектрального разложения для сумм L-рядов Загира;
- Доказана формула суммирования Вороного с коэффициентами равными значениям L–рядов Загира;

- Впервые получена точная формула для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса;
- Доказана новая гибридная верхняя оценка для L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой.

Методы исследования. В диссертации используются различные методы аналитической теории чисел и спектральной теории автоморфных форм. Кроме того, важную роль играют методы теории специальных функций.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы могут найти применение при изучении различных задач аналитической теории чисел, связанных с изучением L-функций симметрического квадрата и L-рядов Загира. Избранные разделы диссертации могут быть включены в курсы лекций для студентов и аспирантов различных математических специальностей.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации докладывались автором на различных семинарах, включая «Современные проблемы теории чисел» (МИАН, г. Москва), "Rencontres de théorie analytique et élémentaire des nombres"(Институт Анри Пуанкаре, г. Париж, Франция), а также на семинарах по теории чисел в Университете Клермон-Оверни (Франция), в Федеральной политехнической школе Лозанны (Швейцария), в Университете Манчерстера (Великобритания), в Университе Турку (Финляндия), в Университете Гётеборга (Швеция), в Институте математики Альфреда Реньи (Венгрия), в Университете Брауна (США).

Кроме того, результаты были представлены на следующих международных конференциях:

- IV Конференция Математических Центров России, август 2024, г. Санкт-Петербург;
- Конференция «Automorphic Forms in Budapest 2024», август 2024, институт Реньи, г. Будапешт, Венгрия;
- Конференция «Современные проблемы теории чисел», июль 2024, Сириус, г. Сочи;
- Конференция по комплексному анализу и его приложениям, сентябрь 2023, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск;
- XXII международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», сентябрь 2023, ТГПУ им. Л.Н.Толстого, г. Тула;

- Конференция «Декабрьские чтения», декабрь 2023, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, г. Новосибирск;
- Workshop «Delta symbols and the subconvexity problem», ноябрь 2020, Американский Математический институт (AIM), онлайн;
- Конференция «Zeta functions», декабрь 2019, CIRM, Франция;
- Конференция «Arithmétique en Plat Pays : Journée printanière», июнь 2018, г. Лилль, Франция;
- Конференция «French-Japanese zeta functions», март 2017, г. Лилль, Франция;
- Workshop «Automorphic Forms and Arithmetic», сентябрь 2017, Математический институт Обервольфаха, Германия;
- Workshop «Spectral Theory, Automorphic Forms and Arithmetic», ноябрь 2016, г. Копенгаген, Дания;
- Workshop «Moments of zeta and correlations of divisor sums», сентябрь 2016, Американский Математический институт (AIM), г. Сан Хосе, США.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в одиннадцати работах: [**1**], [**2**], [**3**], [**26**], [**29**], [**30**], [**31**], [**32**], [**33**], [**34**], [**35**].

Личный вклад. Результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации — в том числе опубликованные в совместных статьях — получены автором самостоятельно.

Краткое содержание работы.

Содержание главы 1. Первая глава посвящена изучению асимптотического поведения первого момента L-функций симметрического квадрата голоморфных модулярных форм, при условии, что уровень формы фиксирован ($N = 1$), а вес формы стремится к бесконечности ($k \to \infty$). С этой целью мы применяем точную формулу для скрученного первого момента L-функций симметрического квадрата и используем метод Лиувилля-Грина, который также называется ВКБ приближением, для оценки остаточных членов. В результате мы доказываем новую асимптотическую формулу со вторым главным членом (порядка $k^{-1/2}$) и показываем, что остаточный член убывает экспоненциально быстро, тем самым улучшая серию предыдущих работ: [**122**], [**110**], [**147**], [**15**], [**169**].

Содержание главы 2. Вторая глава является комплементарной к первой. Мы продолжаем изучение первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм, но теперь уже не в аспекте веса, а в аспекте уровня. Более точно, мы предполагаем, что вес модулярной формы фиксирован, а уровень равен степени простого числа и стремится к бесконечности. При этих условиях мы доказываем асимптотические формулы

для первого момента, которые обобщают ранее известные результаты Блумера [**44**] и Суна [**170**] для простого уровня на случай произвольной степени простого числа. Более того, оценки остатка в наших асимптотических формулах улучшают соответствующие оценки Блумера и Суна для простого уровня.

Содержание главы 3. В первых двух главах мы изучали асимптотическое поведение первых моментов L-функций симметрического квадрата для голоморфных модулярных форм. В данной главе мы рассматриваем неголоморфный аналог этой задачи. А именно, мы получаем новые асимптотические формулы на критической прямой и в критической точке для L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Доказательство этого результата основано на применении формулы следа Кузнецова, при помощи которой методом аналитического продолжения мы выводим точную формулу для скрученного первого момента (с дополнительным множителем, равным коэффициенту Фурье форм Мааса). Полученная точная формула содержит две специальные функции, выражающиеся через гипергеометрические функции Гаусса. Анализируя асимптотическое поведение данных специальных функций, мы доказываем основные результаты данной главы.

Содержание главы 4. В четвёртой главе мы продолжаем изучение моментов L-функций симметрического квадрата форм Мааса. А именно, мы доказываем новую асимптотическую формулу для второго молифицированного момента и в качестве приложения получаем нижнюю оценку на пропорцию L-функций, которые не обращаются в ноль в критической точке.

Содержание главы 5. В данной главе мы рассматриваем ещё одну задачу аналитической теории чисел, в которой естественным образом возникают моменты L-функций симметрического квадрата. Наш основной результат – новая оценка на спектральную экспоненциальной сумму

$$S(T,X)=\sum_{t_j\leqslant T} X^{it_j}, \tag{0.1}$$

где $\kappa_j=1/4+t_j^2$ – собственные значения оператора Лапласа для группы $PSL_2(\mathbb{Z})$. Интерес к сумме (0.1) возник благодаря её связи с классическими задачами, включая теорему о простых геодезических и гиперболическую проблему круга.

Содержание главы 6. В данной главе мы доказываем точную формулу, связывающую средние значения L-рядов Загира со вторым моментом дзета-функции Римана и первыми моментами L-функций симметрического квадрата для голоморфных форм и форм Мааса, а также рассматриваем некоторые приложения этого результата.

Содержание главы 7. Предыдущая глава была посвящена доказательству формулы спектрального разложения для суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s), \tag{0.2}$$

где ω - это некоторая тестовая функция, а $\mathscr{L}_n(s)$ – это L-ряд Загира.

В данной главе мы изучаем похожую задачу, но вместо суммы по n рассматриваем сумму по l

$$\sum_{l=1}^{\infty} \omega(l) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s). \tag{0.3}$$

Формулы спектрального разложения для сумм (0.2) и (0.3), а также методы их получения значительным образом отличаются. Кроме того, отличаются и причины их изучения. Наш интерес к сумме (0.2) в большей степени мотивирован её связью с теоремой о простых геодезических, в то время как необходимость исследования суммы (0.3) возникает при изучении вторых моментов L-функций симметрического квадрата.

Содержание главы 8. В данной главе мы доказываем точную формулу для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса. Мотивацией для этого результата послужило спектральное разложение, доказанное в предыдущей главе. Полученная точная формула выражает исходный второй момент через четвертый момент дзета функции Римана, а также двойственные вторые моменты L-функций симметрического квадрата голоморфных форм и форм Мааса уровней 4, 16, 64 с характером χ_{-4}. Данный результат является аналогом точной формулы для четвёртого момента L-функций форм Маааса, которая была получена Кузнецовым [**119**] и Мотохаши [**137**].

Содержание главы 9. В данной главе мы доказываем формулу суммирования Вороного с коэффициентами a_n равными значениям L-рядов Загира, которая является следствием более общего результата, а именно формулы Вороного для коэффициентов Фурье неголоморфных форм Мааса веса $1/2$ и уровня 4. Данный результат дополняет коллекцию уже известных формул Вороного, интерес к которым обусловлен большим кругом задач, которые можно решить с их помощью.

Содержание главы 10. Данная глава посвящена доказательству равномерной асимптотической формулы для функции

$$ {}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right), $$

где $0 < z < 1$, $r \to \infty$, $\alpha = t/r \to 0$. Это один из двух частных случаев гипергеометрической функции Гаусса, возникающих в точной формуле для первого момента L-функций

симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой $\rho = 1/2+2it$, как показано в главе 3.

Содержание главы 11. В данной главе мы доказываем новую гибридную верхнюю оценку на L-функции симметрического квадрата форм Мааса, дополняя недавний результат Кхана и Янга [**112**]. Наше доказательство использует точную формулу для первого момента с твистом для L-функций симметрического квадрата из главы 3, приближенное функциональное уравнение для второй L-функции, формулу суммирования Вороного из главы 9, асимптотическую формулу для гипергеометрической функции Гаусса из главы 10. При этом ключевую роль играет более сложный и тщательный анализ специальных функций на критической прямой.

Основные теоретические сведения

Различные функции. Пусть $\Gamma(z)$ — гамма-функция. В соответствии с формулой Стирлинга

$$\Gamma(\sigma+it)=\sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2}\exp(-\pi|t|/2)$$
$$\times\exp\left(i\left(t\log|t|-t+\frac{\pi t(\sigma-1/2)}{2|t|}\right)\right)\left(1+O(|t|^{-1})\right) \quad (0.4)$$

для $|t|\to\infty$ и фиксированного σ. Заметим, что вместо $O(|t|^{-1})$ можно записать сколь угодно точные приближения, вычисляя достаточно большое число членов асимптотического разложения.

Для комплексного числа v определим

$$\tau_v(n):=\sum_{n_1n_2=n}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^v=n^{-v}\sigma_{2v}(n),$$

где

$$\sigma_v(n):=\sum_{d|n}d^v.$$

Справедливы следующие тождества

$$\tau_{ir}(n)\tau_{ir}(m)=\sum_{d|(m,n)}\tau_{ir}\left(\frac{nm}{d^2}\right), \quad (0.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_{ir}(n^2)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)}{\zeta(2s)}, \quad (0.6)$$

где $\zeta(s)$ – это дзета-функция Римана.

Наилучшая из известных в настоящее время оценок

$$|\zeta(1/2+ir)|\ll(1+|r|)^{\vartheta},\quad \vartheta=13/84+\epsilon \quad (0.7)$$

была доказана в работе **[53]**.

Положим $e(x)=exp(2\pi ix)$. Классическая сумма Клоостермана определяется формулой

$$S(n,m;c):=\sum_{\substack{a\pmod c\\(a,c)=1}}e\left(\frac{an+a^*m}{c}\right),\quad aa^*\equiv1\pmod c. \quad (0.8)$$

Лемма 0.0.1. *(Оценка Вейля* **[179]***)*

$$|S(m,n;c)|\le\tau_0(c)\sqrt{(m,n,c)}\sqrt{c}. \quad (0.9)$$

Дзета-функция Лерха

$$\zeta(\alpha,\beta,s)=\sum_{n+\alpha>0}\frac{e(n\beta)}{(n+\alpha)^s} \tag{0.10}$$

впервые изучалась Липшицом [**125**] в 1857, а была названа в честь Лерха, который в 1887 доказал для неё функциональное уравнение. Отметим, что частный случай $\zeta(\alpha,0,s)$ называется дзета-функцией Гурвица.

Лемма 0.0.2. *([**123**]) Выполнено равенство*

$$\zeta(\alpha,0,s)=\frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left(-ie\left(\frac{s}{4}\right)\zeta(0,\alpha,1-s)+ie\left(-\frac{s}{4}\right)\zeta(0,-\alpha,1-s)\right). \tag{0.11}$$

Из [**89**, ур. 3.323.2] и [**89**, ур. 3.462.2] следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-p^2x^2+qx)dx=\frac{\pi^{1/2}}{p}\exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right),\quad \text{если}\quad \mathrm{Re}(p^2)>0, \tag{0.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^n\exp(-x^2+qx)dx=P_n(q)\exp\left(\frac{q^2}{4}\right),$$

где n – неотрицательное число, а $P_n(q)$ – многочлен степени n.

L-функции симметрического квадрата модулярных форм. Пусть

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z}):c\equiv 0 \pmod N\right\}.$$

Голоморфная функция f на верхней полуплоскости Пуанкаре $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C},\mathrm{Im}\,z>0\}$ называется *параболической модулярной формой* веса $2k\geq 2$ и уровня N, если выполнены следующие условия:

- $f(\gamma z)=(cz+d)^{2k}f(z)$ для всех $\gamma\in\Gamma_0(N)$
- $(\mathrm{Im}\,z)^k|f(z)|$ ограничена на $\mathbb{H}$.

Обозначим через $S_{2k}(N)$ пространство параболических модулярных форм веса $2k\geq 2$ и уровня N, на котором задано скалярное произведение Петерсона

$$\langle f,g\rangle_N:=\int_{F_0(N)}f(z)\overline{g(z)}y^{2k}\frac{dxdy}{y^2},$$

где $F_0(N)$ – фундаментальная область действия группы $\Gamma_0(N)$ на $\mathbb{H}$. Любая $f\in S_{2k}(N)$ имеет разложение Фурье вида

$$f(z)=\sum_{n\geq 1}a_f(n)e(nz).$$

Обозначим через $H_{2k}(N)$ ортогональный базис пространства параболических модулярных форм $S_{2k}(N)$.

В соответствии с теорией Аткина–Лехнера **[25]**, для пространства $S_{2k}(N)$ справедливо разложение

$$S_{2k}(N) = S_{2k}^{new}(N) \oplus S_{2k}^{old}(N),$$

где пространство старых форм определяется как

$$S_{2k}^{old}(N) = span\left\{f(lz) : lN' | N, N' < N, f(z) \in S_{2k}(N')\right\},$$

а пространство новых форм является ортогональным дополнением к $S_{2k}^{old}(N)$.

Операторы Гекке $T_n : S_{2k}(N) \to S_{2k}(N)$, действующие на пространстве всех параболических форм следующим образом

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n,(a,N)=1} \left(\frac{a}{d}\right)^k \sum_{0\le b<d1} f\left(\frac{az+b}{d}\right),$$

сохраняют подпространство новых форм и являются самосопряженными и коммутирующими операторами.

Существует ортогональный базис $H_{2k}^*(N)$ пространства новых форм $S_{2k}^{new}(N)$, состоящий из собственных функций операторов Гекке T_n. Коэффициенты Фурье

$$\lambda_f(n) := a_f(n) n^{-(2k-1)/2} \tag{0.13}$$

для $f \in H_{2k}^*(N)$ обладают важными свойствами:

$$\lambda_f(1) = 1, \quad \lambda_f(n) \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_f(n_1)\lambda_f(n_2) = \sum_{\substack{d|(n_1,n_2)\\(d,N)=1}} \lambda_f\left(\frac{n_1 n_2}{d^2}\right).$$

Аналогично работе Иванца-Мишеля **[104**, (2.20)] для $\operatorname{Re} s > 1$ определим L-функцию симметрического квадрата как

$$L(\operatorname{sym}^2 f, s) := \zeta^N(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}, \tag{0.14}$$

где $\zeta^N(2s) := \prod_{p\nmid N}(1-p^{-2s})^{-1}$.

Для $2k \ge 12$ и целых чисел $l, n \ge 1$ определим

$$\Delta_{2k,N}(l,n) := \delta_{l,n} + 2\pi i^{2k} \sum_{\substack{c=1\\ c\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{S(l,n;c)}{c} J_{2k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{ln}}{c}\right),$$

где $J_v(x)$ обозначает функцию Бесселя первого рода.

Запишем формулу следа Петерсона (см. **[152]**):

$$\sum_{f\in H_{2k}(N)}^{h} \lambda_f(l)\lambda_f(n) = \Delta_{2k,N}(l,n). \tag{0.15}$$

Верхний индекс h в суммировании означает, что сумма считается с гармоническим весом

$$\Gamma(2k-1)/((4\pi)^{2k-1}\langle f,f\rangle_N).$$

Для вычисления моментов L-функций необходимо перейти от $H_{2k}(N)$ к $H^*_{2k}(N)$ в формуле (0.15). Пусть p – простое число. В случае, когда $N=1$ или $N=p$ и $2k<12$, пространство старых форм пусто и справедлива формула

$$\sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h}\lambda_f(l)\lambda_f(n)=\Delta_{2k,N}(l,n). \tag{0.16}$$

В случае, когда $N=p^\nu$ и $\nu\geq 2$ выполнено равенство (см. [**161**, замечание 4]):

$$\sum_{f\in H^*_{2k}(N)}^{h}\lambda_f(l)\lambda_f(n)=\begin{cases}\Delta_{2k,N}(l,n)-\frac{\Delta_{2k,N/p}(l,n)}{p-p^{-1}} & \text{если } \nu=2 \text{ и } (N,nl)=1,\\ \Delta_{2k,N}(l,n)-\frac{\Delta_{2k,N/p}(l,n)}{p} & \text{если } \nu\geq 3 \text{ и } (N,nl)=1,\\ 0 & \text{если } (N,nl)>1.\end{cases} \tag{0.17}$$

Заметим, что последнее утверждение следует из [**161**, (8)]. Для работы с условием $(N,nl)=1$ можно применить следующий результат Ройера.

Лемма 0.0.3. *([**162**], лемма A.12) Пусть m,n,c - три строго положительных целых числа и p - простое число. Предположим, что $p^2|c$, $p|m$ и $(n,p)=1$. Тогда $S(m,n;c)=0$.*

L-функции симметрического квадрата форм Мааса. *Формой Мааса* для группы $SL(2,\mathbb{Z})$ называется гладкая функция f на $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C},\operatorname{Im}z>0\}$, для которой выполнены условия:

- $f(\gamma z)=f(z)$ для всех $\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})$, $z\in\mathbb{H}$
- существует $\lambda\in\mathbb{C}$ такое, что $\Delta f=\lambda f$, где $\Delta=-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ – оператор Лапласа
- $f(x+iy)=O(y^A)$ при $y\to\infty$ для некоторого $A>0$.

Форма Мааса называется *параболической*, если $\int_0^1 f(z+t)dt=0$ для всех $z\in\mathbb{H}$.

Существует ортонормированный базис пространства параболических форм Мааса, состоящий из общих собственных функций оператора Лапласа Δ и всех операторов Гекке

$$(T_nf)(z)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{ad=n,0\leq b<d}f\left(\frac{az+b}{d}\right),\quad n=1,2,\dots$$

Обозначим этот базис $\{u_j\}$. Пусть $\{\lambda_j(n)\}$ – собственные значения операторов Гекке, действующих на u_j, а $\kappa_j=1/4+t_j^2$ — собственные значения оператора Лапласа, действующего на u_j. Элементы базиса имеют разложение Фурье следующего вида:

$$u_j(x+iy)=\sqrt{y}\sum_{n\neq 0}\rho_j(n)K_{it_j}(2\pi|n|y)e(nx),$$

где $K_\alpha(x)$ — K-функция Бесселя, а

$$\rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n). \tag{0.18}$$

При $m, n \geq 1$ выполнено тождество Гекке

$$\lambda_j(n)\lambda_j(m) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_j\left(\frac{nm}{d^2}\right). \tag{0.19}$$

L-функция симметрического квадрата при $\operatorname{Re} s > 1$ определяется формулой

$$L(\operatorname{sym}^2 u_j, s) := \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(n^2)}{n^s} \tag{0.20}$$

и допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость.

Выполнено функциональное уравнение

$$L_\infty(s, t_j)L(\operatorname{sym}^2 u_j, s) = L_\infty(1-s, t_j)L(\operatorname{sym}^2 u_j, 1-s), \tag{0.21}$$

где

$$L_\infty(s, t_j) = \pi^{-3s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+it_j}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-it_j}{2}\right). \tag{0.22}$$

Моменты данных L-функций обычно считаются с нормирующим коэффициентом

$$\alpha_j := \frac{|\rho_j(1)|^2}{\cosh \pi t_j}. \tag{0.23}$$

Стандартное следствие функционального уравнения (0.21) – следующее приближенное функциональное уравнение.

Лемма 0.0.4. *Выполнено равенство*

$$L(\operatorname{sym}^2 u_j, 1/2) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_j(m^2)}{m^{1/2}} V(n, t_j), \tag{0.24}$$

где для любого $y > 0$ и $a > 0$

$$V(y, t_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \frac{L_\infty(1/2+z, t_j)}{L_\infty(1/2, t_j)}\zeta(1+2z)G(z)y^{-z}\frac{dz}{z}, \tag{0.25}$$

$$G(z) = \exp(z^2)P_n(z^2).$$

Здесь P_n – многочлен степени n такой, что $P_n(0) = 1$ и $P_n((1/2+2j)^2) = 0$ при $j = 0, \ldots, n-1$.

Доказательство. Доказательство аналогично [**111**, лемме 2.2] (см. также [**172**, лемму 1] и [**147**, лемму 7.2.1]). □

Применяя (0.22) и (0.4), мы доказываем (см. [**172**, лемму 2]) следующий результат.

Лемма 0.0.5. *Для любых положительных y, t_j и A выполнена оценка*

$$V(y,t_j) \ll \left(\frac{t_j}{y}\right)^A. \tag{0.26}$$

Для любого положительного N и $1 \leqslant y \ll t_j^{1+\epsilon}$ выполнена асимптотическая формула

$$V(y,t_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \left(\frac{t_j}{2\pi^{3/2}y}\right)^z \frac{\Gamma(1/4+z/2)}{\Gamma(1/4)}\zeta(1+2z)G(z) \times \left(1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{p_{2k}(v)}{t_j^k}\right)\frac{dz}{z} + O(t_j^{-N+\epsilon}), \tag{0.27}$$

где $v = \mathrm{Im}(z)$ и $p_n(v)$ – многочлен степени n.

При $\mathrm{Re}\, s > 1$ определим также L-функцию Ранкина–Сельберга

$$L(u_j \otimes u_j, s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\rho_j(n)|^2}{n^s}. \tag{0.28}$$

Выполнены следующие соотношения (см. [**128**, стр. 216] и [**100**, док-во леммы 8])

$$res_{s=1}L(u_j \otimes u_j, s) = \frac{2}{\zeta(2)}\cosh(\pi t_j), \tag{0.29}$$

$$L(u_j \otimes u_j, s) = |\rho_j(1)|^2\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}L(\mathrm{sym}^2 u_j, s). \tag{0.30}$$

Далее мы будем использовать различные тестовые функции $h(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

C1: $h(t)$ — чётная функция;

C2: $h(t)$ голоморфна в полосе $|\mathrm{Im}(t)| < \Delta$ для некоторого $\Delta > 1/2$;

C3: $h(t)$ такова, что в полосе $|\mathrm{Im}(t)| < \Delta$, $\Delta > 1/2$ справедлива оценка $h(t) \ll (1+|t|)^{-2-\epsilon}$;

C4: $h(\pm(n+1/2)i) = 0$ для $n = 0, 1, \ldots N-1$, где $N > 0$ — достаточно большое целое число.

Пусть

$$H_0 := \int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)dr \tag{0.31}$$

и

$$\phi(x) := \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_{2ir}(x)h(r)\frac{rdr}{\cosh(\pi r)}. \tag{0.32}$$

Лемма 0.0.6. *(формула следа Кузнецова) Для всех $m, n \geq 1$ и любой функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям $(C1) - (C3)$, справедлива следующая формула:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j(m)\lambda_j(n)h(t_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{ir}(m)\tau_{ir}(n)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h(r)dr = \frac{\delta(m,n)}{\pi^2}H_0 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(m,n;q)}{q}\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q}\right). \quad (0.33)$$

Доказательство. См. [**99**] или [**9**]. □

Введём следующее обозначение для преобразования Меллина от функции $f(x)$

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}dx.$$

Лемма 0.0.7. *Предположим, что $h(t)$ удовлетворяет условиям $(C1) - (C4)$. При $0 < \operatorname{Re} s < 3/2$ выполнено равенство*

$$\hat{\phi}(s) = \frac{2^s i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\frac{\Gamma(s/2+ir)}{\Gamma(1-s/2+ir)}dr. \quad (0.34)$$

При $-1-2N < \operatorname{Re} s < 3/2$ справедлива следующая оценка:

$$\hat{\phi}(s) \ll (1+|\operatorname{Im} s|)^{\operatorname{Re} s - 1}. \quad (0.35)$$

Доказательство. Тождество (0.34) немедленно следует из (0.32) и [**41**, (1), стр. 326]. Используя $(C4)$, мы можем переместить прямую интегрирования в (0.34) на прямую $\operatorname{Im} r = -c$ при $0 < c < N+1/2$, не пересекая полюсов. Сделав замену переменных $z := ir$, получаем

$$\hat{\phi}(s) = \frac{2^s}{\pi i}\int_{(c)} \frac{zh(iz)}{\cos(\pi z)}\frac{\Gamma(s/2+z)}{\Gamma(1-s/2+z)}dz \quad (0.36)$$

для $-1-2N < \operatorname{Re} s < 3/2$. Применяя формулу Стирлинга (0.4) для оценки (0.36), доказываем (0.35). □

L-ряды Загира. L-ряд Загира при $\operatorname{Re} s > 1$ определяется как

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}\left(\sum_{1\leq r\leq 2q; r^2\equiv n \pmod{4q}} 1\right). \quad (0.37)$$

Также справедливо следующее равенство

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\rho_q(n)}{q^s} = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{\lambda_q(n)}{q^s},$$

где

$$\rho_q(n) := \#\{x \pmod{2q} : x^2 \equiv n \pmod{4q}\},$$

$$\lambda_q(n) := \sum_{q_1^2 q_2 q_3 = q} \mu(q_2)\rho_{q_3}(n).$$

При фиксированном n функции $\rho_q(n)$ и $\lambda_q(n)$ являются мультипликативными по q. Кроме того, при $n \equiv 2, 3 \pmod 4$ функция $\rho_q(n)$ тождественно обращается в ноль. Поэтому $\mathscr{L}_n(s)$ не обращается в ноль только при $n \equiv 0, 1 \pmod 4$. Если же $n = 0$, то

$$\mathscr{L}_n(s) = \zeta(2s-1). \tag{0.38}$$

В противном случае, если $n = Dl^2$, D - фундаментальный дискриминант, выполнено равенство

$$\mathscr{L}_n(s) = l^{1/2-s} T_l^{(D)}(s) L(s, \chi_D), \tag{0.39}$$

где $L(s, \chi_D)$ – это L-функция Дирихле примитивного квадратичного характера χ_D, а

$$T_l^{(D)}(s) = \sum_{l_1 l_2 = l} \chi_D(l_1) \frac{\mu(l_1)}{\sqrt{l_1}} \tau_{s-1/2}(l_2). \tag{0.40}$$

Загир [**184**] доказал, что $\mathscr{L}_n(s)$ допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость, при этом дополненная L-функция

$$\mathscr{L}_n^*(s) = (\pi/|n|)^{-s/2} \Gamma(s/2 + 1/4 - \operatorname{sgn} n/4) \mathscr{L}_n(s)$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathscr{L}_n^*(s) = \mathscr{L}_n^*(1-s).$$

Лемма 0.0.8. *Пусть $d \neq 0$. Для любого $\epsilon > 0$ выполнено*

$$\mathscr{L}_d(1/2) \ll d^{\theta+\epsilon}, \quad \theta = 1/6. \tag{0.41}$$

В предположении гипотезы Линделёфа для L-функций Дирихле

$$\mathscr{L}_d(1/2) \ll d^{\epsilon}.$$

Доказательство. Пусть $d = Dl^2$, D – фундаментальный дискриминант. Тогда

$$\mathscr{L}_d(1/2) = T_l^{(D)}(1/2) L(1/2, \chi_D)$$

в соответсвии с (0.39). Из равенства (0.40) получаем, что

$$T_l^{(D)}(1/2) \ll \sum_{l_1 l_2 = l} \frac{\sigma(l_2)}{\sqrt{l_1}} \ll \sum_{l_1 | l} \frac{(l/l_1)^{\epsilon}}{\sqrt{l_1}} \ll l^{\epsilon}.$$

Согласно [**68**, следствию 1.5] для любого $\epsilon > 0$ выполнена оценка

$$L(1/2, \chi_D) \ll D^{1/6+\epsilon},$$

из которой следует утверждение леммы. □

Аналогично при $d \neq 0$ справедлива следующая гибридная оценка

$$\mathscr{L}_d(1/2+it) \ll d^{\theta}(1+|t|)^{\theta_t}, \tag{0.42}$$

где θ и θ_t — показатели подвыпуклости для L-функций Дирихле вещественных примитивных характеров. Согласно результатам Янга [**181**] можно взять $\theta = \theta_t = 1/6+\epsilon$.

Значения L-рядов Загира с индексом (n^2-4l^2) можно записать (см. [**31**, (4-9)]) в терминах сумм сумм Клоостермана следующим образом:

$$\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \zeta(2s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{c \pmod q} S(l^2,c^2;q)e\left(\frac{nc}{q}\right). \tag{0.43}$$

Лемма 0.0.9. *При $u,v \neq 0$ и $\operatorname{Re}(u-v)>0$ выполнено тождество*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{5/2+u+v}}\sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1+2v\right) = \frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(1+2u-2v)}\frac{L(\chi_{-4},1/2+u-v)}{L(\chi_{-4},3/2+u+v)}. \tag{0.44}$$

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Re} v>0$ и $\operatorname{Re}(u-v)>1$. Эти условия гарантируют абсолютную сходимость всех рядов, возникающих в доказательстве. Применяя (0.10) и (0.43), получаем

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{5/2+u+v}}\sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1+2v\right) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{3/2+u-v}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{1+2v}}\sum_{c \pmod q} S(l^2,c^2;q) = \frac{1}{\zeta(1+2u-2v)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2+u-v)}{l^{1+2v}}. \tag{0.45}$$

Вычисляя сумму по l при помощи (0.39) с $D=-4$, мы находим, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2+u-v)}{l^{1+2v}} = L(\chi_{-4},1/2+u-v)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{1+2v}}\sum_{f|l} f^{-2u+2v}\sum_{k|(l/f)}\frac{\mu(k)\chi_{-4}(k)}{k^{1/2+u-v}} =$$

$$L(\chi_{-4},1/2+u-v)\zeta(1+2u)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{1+2v}}\sum_{k|l}\frac{\mu(k)\chi_{-4}(k)}{k^{1/2+u-v}} = \zeta(1+2u)\zeta(1+2v)\frac{L(\chi_{-4},1/2+u-v)}{L(\chi_{-4},3/2+u+v)}. \tag{0.46}$$

Подставляя (0.46) в (0.45), мы доказываем (0.44) при $\operatorname{Re} v>0$ и $\operatorname{Re}(u-v)>1$. Заметим, что правая часть (0.44) – аналитическая функция при $u,v \neq 0$ и $\operatorname{Re}(u-v)>0$, и поэтому доказанное тождество справедливо в этой области на основании принципов аналитического продолжения. □

ГЛАВА 1

Первый момент L-функций симметрического квадрата в аспекте веса

Асимптотическое поведение старших моментов L-функций для различных семейств может быть смоделировано при помощи теории случайных матриц [**67**] или при помощи теории кратных рядов Дирихле [**72**]. Тем не менее, даже для младших моментов доказательство асимптотических формул с хорошей оценкой остатка - достаточно сложная задача.

Одно из самых интересных и в то же время непростых для анализа семейств - это L-функции симметрического квадрата в аспекте веса. Гельбарт и Жаке [**85**] доказали, что данное семейство является L-функциями ассоциированными с $GL(3)$ параболическими формами.

Несмотря на многочисленные исследования, задача получения правильной по порядку верхней оценки по-прежнему остается открытой даже для второго момента L-функций симметрического квадрата, см. гипотезу 1.2 [**111**].

Первый момент изучался достаточно интенсивно в работах [**15, 110, 117, 122, 147, 148, 169**]. Тем не менее, даже наилучшие из известных оценок остатков в асимптотических формулах для данного момента, по-видимому, не являются точными.

Цель данной главы — оптимизировать оценки остатков в существующих асимптотических формулах.

С этой целью мы применяем точную формулу для скрученного первого момента L-функций симметрического квадрата и используем метод Лиувилля-Грина (также называемый приближением ВКБ) для оценки остаточных членов. Этот метод, берущий начало из теории аппроксимации дифференциальных уравнений второго порядка, довольно необычен для аналитической теории чисел, но при этом весьма эффективен, см. [**28, 8**].

1.1. Основные результаты

Пусть $S_{2k}(1)$ – пространство параболических модулярных форм веса $2k \geq 2$ относительно полной модулярной группы. Обозначим H_{2k} нормализованный базис Гекке пространства $S_{2k}(1)$. Каждая форма $f \in H_{2k}$ имеет разложение Фурье следующего вида:

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{k-1/2} \exp(2\pi i n z), \quad \lambda_f(1) = 1. \tag{1.1}$$

При $\operatorname{Re} s > 1$ ассоциированная L-функция симметрического квадрата определяется рядом

$$L(\operatorname{sym}^2 f, s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n^2)}{n^s}. \tag{1.2}$$

Пусть $\Gamma(s)$ – это гамма-функция и

$$L_\infty(s) := \pi^{-3s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + k\right).$$

Шимура [**165**] показал, что дополненная L-функция

$$\Lambda(\operatorname{sym}^2 f, s) := L_\infty(s) L(\operatorname{sym}^2 f, s)$$

является целой и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Lambda(\operatorname{sym}^2 f, s) = \Lambda(\operatorname{sym}^2 f, 1-s).$$

Рассмотрим первый момент L-функций симметрического квадрата (1.2), скрученный с коэффициентом Фурье (1.1), а именно

$$M_1(l, s) := \sum_{f \in H_{2k}}^{h} \lambda_f(l^2) L(\operatorname{sym}^2 f, s). \tag{1.3}$$

Верхний индекс h означает, что сумма считается с гармоническим весом

$$\Gamma(2k-1)/((4\pi)^{2k-1} \langle f, f \rangle_1),$$

где $\langle f, f \rangle_1$ – это скалярное произведение Петерсона.

Обозначим через γ постоянную Эйлера, а через $\psi(s)$ логарифмическую производную гамма функции. Пусть ${}_2F_1(a, b, c; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса и

$$\Phi_k(x) := \frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(3/4-k)}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1\left(k - \frac{1}{4}, \frac{3}{4} - k, 1/2; x\right), \tag{1.4}$$

$$\Psi_k(x) := x^k \frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(2k)} {}_2F_1\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}, 2k; x\right). \tag{1.5}$$

Мы будем изучать асимптотическое поведение (1.3) при помощи следующей точной формулы.

Теорема 1.1.1. *(*[**31**, теорема 2.1]*) Для любого $l \geq 1$ выполнено равенство*

$$\begin{aligned} M_1(l, 1/2) = \frac{1}{2\sqrt{l}} \Bigg(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4) \Bigg) + \\ \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^k}{2\sqrt{l}} \frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)} \mathscr{L}_{-4l^2}(1/2) + \\ \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{1 \leq n < 2l} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2) \Phi_k\left(\frac{n^2}{4l^2}\right) + \frac{1}{l\sqrt{2}} \sum_{n > 2l} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2) \sqrt{n} \Psi_k\left(\frac{4l^2}{n^2}\right), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\mathscr{L}_n(s)$ – это L-ряд Загира (0.37).

Аналогичная формула, в которой два последних слагаемых записаны через функции Лежандра первого рода, была доказана другим методом в работе Загира [**184**, Теорема 1]. Формула Загира послужила отправной точкой для доказательства Конена и Сенгупты [**117**] верхней оценки на $M_1(1,1/2)$, для работы Фоменко [**15**], в которой получена асимптотика для $M_1(1,1/2)$, а также для работы Луо [**127**], посвященной получению верхней оценки на второй момент $L(\mathrm{sym}^2 f, 1/2)$ в коротких интервалах.

Доказательство теоремы 1.1.1 основывается на применении формулы следа Петерсона (0.15) и функционального уравнения для дзета функции Лерха (0.11).

При $l = 1$ точная формула (1.6) позволяет изолировать второй главный член размера $k^{-1/2}$ в асимптотической формуле для (1.3), при этом из оценок на специальные функции (1.4) и (1.5), доказанных в данной главе, следует, что остаточный член убывает экспоненциально.

Следствие 1.1.2. *Существует $c > 0$ такое, что*

$$M_1(1,1/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 3\log 2\pi + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\right) + \frac{\sqrt{2\pi}(-1)^k}{2}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}L(1/2,\chi_{-4}) + \Phi_k\left(\frac{1}{4}\right)L(1/2,\chi_{-3}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}exp(-ck)\right), \quad (1.7)$$

где $L(1/2,\chi_D)$ L-функция Дирихле для примитивного квадратичного характера по модулю D и

$$\Phi_k\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{3^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Замечание 1.1.3. *Формула аналогичная* (1.7)*, но с более слабой оценкой остатка, также была независимо получена Лью* [**126**] *при помощи приближенного функционального уравнения.*

Следствие 1.1.2 улучшает предыдущие работы, в которых были доказаны следующие оценки остатков:

- $k^{-0.008}$ – Лау [**122**] 2002 год;
- $k^{-1/20}$ – Кхан[**110**] 2007 год;
- $k^{-1/2}$ – Фоменко [**15**] 2003 год и Сун [**169**] 2013 год.

Следствие 1.1.4. *Для любого $\epsilon > 0$ и $l > 1$ выполнено равенство*

$$M_1(l,1/2) = \frac{1}{2\sqrt{l}}\left(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 4\gamma + \psi(1) + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\right) + O\left(\frac{l^{5/6+\epsilon}}{\sqrt{k}}\right). \quad (1.8)$$

В предположении гипотезы Линделёфа для квадратичных L-функций Дирихле остаток в асимптотической формуле (1.8) *можно заменить на* $O\left(l^{1/2+\epsilon}k^{-1/2}\right)$.

Данный результат улучшает оценку остатка $lk^{-1/2+\epsilon}$, доказанную в работе Нг (см. [**147**, Теорему 2.1.1] и [**148**]).

1.2. Метод Лиувилля-Грина для приближения специальных функций

Рассмотрим специальные функции $\Phi_k(x)$ и $\Psi_k(x)$, которые возникли в точной формуле (1.6). Заметим, что каждая из данных функций выражается через гипергеометрические функции Гаусса, асимптотический анализ которых часто является довольно непростой задачей. В нашем случае похожие гипергеометрические функции рассматривались в работах Вотсана (1918) [**179**], Джонса (2001) [**107**] и Харид Кхвайа–Олде Даалхиус (2014, 2016) [**80, 81**]. Однако, из-за определенных технических трудностей, связанных либо с ограничениями на область, в которой асимптотическое разложение является допустимым, либо с отсутствием оценок асимптотической погрешности, эти результаты невозможно применить непосредственно к аппроксимации функций $\Phi_k(x)$ и $\Psi_k(x)$. По этой причине мы выбрали метод, разработанный Олвером [**150**] и Бойдом-Данстером [**54**], коротый позволяет применить приближение Лиувилля-Грина напрямую к функциям $\Phi_k(x)$ и $\Psi_k(x)$. Оказывается, что данные специальные функции имеют схожее асимптотическое поведения с функциями, возникающими в точной формуле для второго момента L-функций параболических форм, см. [**28**, Теорему 4.2].

1.2.1. Свойства Φ_k. Изучим функцию $\Phi_k(x)$ при $0 < x < 1$.

Лемма 1.2.1. *Выполнено равенство*

$$\Phi_k(x) = -\pi\left({}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-2k,1;\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right){}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-2k,1;\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)\right). \tag{1.9}$$

Доказательство. Применяя квадратичное преобразование [**151**, ур. 15.8.27], получаем

$$\Phi_k(x) = \Gamma(k-1/4)\Gamma(3/4-k)\Gamma(k+1/4)\Gamma(5/4-k)\times$$
$$\frac{1}{2\Gamma^2(1/2)}\left({}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-2k,1;\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)+{}_2F_1\left(2k-\frac{1}{2},\frac{3}{2}-2k,1;\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)\right).$$

Заметим, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. По формуле отражения Эйлера

$$\Gamma(k-1/4)\Gamma(k+1/4)\Gamma(3/4-k)\Gamma(5/4-k) = -2\pi^2.$$

Утверждение леммы доказано. □

Замена переменных

$$m := 2k - 1/2, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$y := \frac{1-\sqrt{x}}{2}, \quad 0 < y < 1/2$$

позволяет получить равенство

$$\Phi_k(x) = -\pi \left({}_2F_1\left(m, 1-m, 1; y\right) + {}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1-y\right)\right). \tag{1.10}$$

В точке $y = 0$ функция ${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; y\right)$ является рецессивной, а ${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1-y\right)$ доминантной. Поэтому требуются дальнейшие преобразования, чтобы применить метод Лиувилля-Грина ко второй функции. В частности, чтобы показать, что ${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1-y\right)$ имеет схожую форму с функцией $\phi_k(x)$, которая изучалась в [**28**]. Заметим, что сейчас параметр m является полуцелым.

Лемма 1.2.2. *Пусть $m := 2k - 1/2$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1-y\right) = \left(-\log y + 2\psi(1) - 2\psi(m)\right)\times$$
$${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; y\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} + 2\frac{\partial}{\partial c}\right) {}_2F_1\left(a, b, c; y\right)\Big|_{\substack{a=m\\ b=1-m\\ c=1}}.$$

Доказательство. В соответствии с [**41**, ур. 33, стр. 107]

$${}_2F_1\left(m+u, 1-m+u, 1; 1-y\right) =$$
$${}_2F_1\left(m+u, 1-m+u, 1+2u; y\right)\frac{\Gamma(1)\Gamma(-2u)}{\Gamma(1-m-u)\Gamma(m-u)} +$$
$${}_2F_1\left(m-u, 1-m-u, 1-2u; y\right)\frac{\Gamma(1)\Gamma(2u)}{\Gamma(1-m+u)\Gamma(m+u)} y^{-2u}.$$

Вычисляя предел при $u \to 0$, мы доказываем лемму. □

Лемма 1.2.3. *При $m = 2k - 1/2$, $k \in \mathbb{N}$ выполнено равенство*

$${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1/2\right) = -\frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}, \tag{1.11}$$
$$\frac{d}{dx}\left({}_2F_1\left(m, 1-m, 1; x\right)\right)\Big|_{x=1/2} = \frac{4(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(k-1/4)}. \tag{1.12}$$

Доказательство. С одной стороны, из уравнения (1.9) следует, что

$${}_2F_1\left(m, 1-m, 1; 1/2\right) = -\frac{1}{2\pi}\Phi_k(0).$$

С другой стороны, уравнение (1.4) позволяет записать

$$\Phi_k(0) = \frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(3/4-k)}{\Gamma(1/2)} = (-1)^k\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}.$$

Тогда (1.11) получается из последних двух равенств.

Как следствие [**151**, ур. 15.8.25] получаем

$$
{}_2F_1\left(m,1-m,1;x\right)=\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(m/2+1/2)\Gamma(1-m/2)}{}_2F_1\left(m/2,1/2-m/2,1/2;(1-2x)^2\right)+
$$
$$
(1-2x)\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(1/2-m/2)}{}_2F_1\left(m/2+1/2,1-m/2,3/2;(1-2x)^2\right).
$$

Наконец, чтобы получить равенство (1.12), нам нужно продифференцировать последнее выражение по x, а затем взять $x=1/2$. □

Лемма 1.2.4. *Функции*

$$
{}_2F_1\left(m,1-m,1;y\right)\ \text{и}\ {}_2F_1\left(m,1-m,1;1-y\right)
$$

также являются решениями дифференциального уравнения

$$
y(1-y)F''(y)+(1-2y)F'(y)+m(m-1)F(y)=0. \tag{1.13}
$$

Доказательство. Утверждение следует из дифференциального уравнения для гипергеометрической функции Гаусса.

□

1.2.2. Приближение Φ_k. Для нахождения приближения Лиувилля-Грина для функции $\Phi_k(y)$ мы применим формулу (1.10) и рассмотрим по отдельности каждую из функций

$$
{}_2F_1\left(m,1-m,1;y\right)\ \text{и}\ {}_2F_1\left(m,1-m,1;1-y\right).
$$

Как показано в лемме 1.2.4, эти функции являются решениями дифференциального уравнения (1.13), которое уже изучалось в [**28**, главе 5.2]. Таким образом, наша задача свелась к вычислению констант C_Y и C_J в приближении Лиувилля-Грина для ${}_2F_1\left(m,1-m,1;1-y\right)$.

Для удобства читателя, напомним требуемые результаты из [**28**, главы 5.2]. Из леммы 1.2.4 следует, что

$$
G_1(y):={}_2F_1\left(m,1-m,1;y\right)\sqrt{y(1-y)},
$$
$$
G_2(y):={}_2F_1\left(m,1-m,1;1-y\right)\sqrt{y(1-y)}
$$

– решения дифференциального уравнения

$$
G''(y)=(u^2f(y)+g(y))G(y), \tag{1.14}
$$

где

$$
u:=2k-1,\quad f(y):=-\frac{1}{y(1-y)},
$$
$$
g(y):=-\frac{1}{4y^2(1-y)^2}+\frac{1}{4y(1-y)}.
$$

Замена переменных

$$Z(y) := \frac{G(y)}{\alpha(y)}, \quad \alpha(y) := \frac{(y-y^2)^{1/4}}{2(\arcsin\sqrt{y})^{1/2}},$$

$$\xi := 4\arcsin^2\sqrt{y}$$

трансформирует уравнение (1.14) в следующую форму

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left[\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2} + \frac{\psi(\xi)}{\xi}\right] Z = 0 \tag{1.15}$$

с

$$\psi(\xi) := \frac{1}{16\sin^2\sqrt{\xi}} - \frac{1}{16\xi}.$$

Отбросив слагаемое с $\psi(\xi)/\xi$ в уравнении (1.15), получаем

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left[\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\right] Z = 0. \tag{1.16}$$

Решения (1.16) записываются в виде

$$Z_C = \sqrt{\xi}C_0(u\sqrt{\xi}),$$

где C_i – это J или Y функция Бесселя порядка i.

Тогда в соответствии с [**150**, главой 12] решения первоначального дифференциального уравнения (1.15) могут быть найдены в следующей форме

$$Z_C(\xi) = \sqrt{\xi}C_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}C_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n;\xi)}{u^{2n}}. \tag{1.17}$$

Для определения коэффициентов $A(n;\xi)$, $B(n;\xi)$ воспользуемся дифференциальными уравнениями (см. [**89**, ур. 8.491(3)]) для функций

$$W(\xi) := \sqrt{\xi}C_0(u\sqrt{\xi}), \quad V(\xi) := \xi C_1(u\sqrt{\xi})$$

и подставим (1.17) в уравнение (1.15). В результате,

$$W(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(\xi)}{u^{2n}} - V(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n(\xi)}{u^{2n-1}} = 0,$$

где

$$C_n(\xi) := A''(n;\xi) + \frac{1}{\xi}A'(n;\xi) - \frac{\psi(\xi)}{\xi}A(n;\xi) - B'(n;\xi) - \frac{B(n;\xi)}{2\xi},$$

$$D_n(\xi) := B''(n-1;\xi) + \frac{1}{\xi}B'(n-1;\xi) - \frac{\psi(\xi)}{\xi}B(n-1;\xi) + \frac{1}{\xi}A'(n;\xi).$$

Положим $C_n(\xi) = D_n(\xi) = 0$, найдём требуемые рекуррентные соотношения

$$A(n;\xi) = -\xi B'(n-1;\xi) + \int_0^{\xi}\psi(x)B(n-1;x)dx + \lambda_n, \tag{1.18}$$

$$\sqrt{\xi}B(n;\xi) = \int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(xA''(n;x) + A'(n;x) - \psi(x)A(n;x)\right)dx \tag{1.19}$$

для некоторых вещественных постоянных интегрирования λ_n.

Предположим, что $A(0;\xi)=1$. Тогда

$$B(0;\xi)=-\frac{1}{8\sqrt{\xi}}\left(\cot\sqrt{\xi}-\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right), \tag{1.20}$$

$$A(1;\xi)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\cot\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}}-\frac{1}{2\sin^2\sqrt{\xi}}\right)-\frac{1}{128}\left(\cot\sqrt{\xi}-\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)^2+\lambda_1. \tag{1.21}$$

Кроме того, решения (1.17) могут быть приближены конечным рядом при помощи [**150**, теоремы 4.1, стр. 444] или [**54**, теоремы 1].

Теорема 1.2.5. *Пусть $\xi_2=\pi^2/4$. Для любого u и любого неотрицательного целого N уравнение* (1.15) *имеет решения $Z_Y(\xi)$, $Z_J(\xi)$, бесконечно дифференцируемые по ξ на интервале $(0,\xi_2)$. При этом*

$$Z_Y(\xi)=\sqrt{\xi}Y_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_Y(n;\xi)}{u^{2n}}-\frac{\xi}{u}Y_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_Y(n;\xi)}{u^{2n}}+\epsilon_{2N+1,1}(u,\xi), \tag{1.22}$$

$$Z_J(\xi)=\sqrt{\xi}J_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_J(n;\xi)}{u^{2n}}-\frac{\xi}{u}J_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_J(n;\xi)}{u^{2n}}+\epsilon_{2N+1,2}(u,\xi), \tag{1.23}$$

где

$$\epsilon_{2N+1,1}(u,\xi)\ll\frac{\sqrt{\xi}|Y_0(u\sqrt{\xi})|}{u^{2N+1}}\sqrt{\xi_2-\xi},$$

$$\epsilon_{2N+1,2}(u,\xi)\ll\frac{\sqrt{\xi}|J_0(u\sqrt{\xi})|}{u^{2N+1}}\min\left(\sqrt{\xi},1\right)$$

и коэффициенты $(A_Y(n;\xi),B_Y(n;\xi))$, $(A_J(n;\xi),B_J(n;\xi))$ определяются формулами (1.18)-(1.19).

Функции $\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2}G_1(\sin^2\sqrt{\xi}/2)$ и $Z_J(\xi)$ являются рецессивными решениями уравнения (1.15) при $\xi\to 0$. Поэтому существует c_0 такое, что

$$\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2}G_1(\sin^2\sqrt{\xi}/2)=c_0Z_J(\xi). \tag{1.24}$$

Значение постоянной c_0 можно определить вычислив предел левой и правой частей уравнения (1.24) при $\xi\to 0$. С одной стороны,

$$\lim_{\xi\to 0}{}_2F_1(k,1-k,1;\sin^2\sqrt{\xi}/2)=1.$$

С другой стороны,

$$Z_J(\xi)=\sqrt{\xi}\sum_{n=0}^{N}\frac{A_J(n;\xi)}{u^{2n}}+O(\xi)\text{ при }\xi\to 0.$$

Выбирая $A_J(n;\xi)$ так, чтобы $A_J(0;0)=1$ и $A_J(n;0)=0$ при $n\geq 1$, находим, что $c_0=1$.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1.2.6. *Пусть* $\xi_2 = \pi^2/4$. *При* $\xi \in (0, \xi_2)$ *выполнено равенство*

$$\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2} G_1\left(\sin^2\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right) = Z_J(\xi),$$

где $Z_J(\xi)$ *задается формулой* (1.23).

Мы завершили обзор результатов [**28**, главы 5.2] и теперь нам необходимо вычислить $C_Y = C_Y(u)$ и $C_J = C_J(u)$, для которых

$$\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2} G_2(\sin^2\sqrt{\xi}/2) = C_Y Z_Y(\xi) + C_J Z_J(\xi). \tag{1.25}$$

Заметим, что существуют c_1, c_2 такие, что

$$Z_Y(\xi) = \left(c_1 G_1\left(\sin^2\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right) + c_2 G_2\left(\sin^2\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)\right) \times$$

$$\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2} = c_1 Z_J(\xi) + \xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2} c_2 G_2\left(\sin^2\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right).$$

Из двух последних равенств получаем

$$C_Y = \frac{1}{c_2}, \quad C_J = -\frac{c_1}{c_2}. \tag{1.26}$$

Лемма 1.2.7. *Выполнены следующие равенства*

$$2c_1 = (-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(k-1/4)}\frac{Z_Y(\xi_2)}{\xi_2^{1/4}} + (-1)^k\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}\xi_2^{1/4}\left(Z_Y'(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2}\right),$$

$$2c_2 = (-1)^{k+1}\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(k-1/4)}\frac{Z_Y(\xi_2)}{\xi_2^{1/4}} - (-1)^k\sqrt{2\pi}\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)}\xi_2^{1/4}\left(Z_Y'(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2}\right).$$

Доказательство. Для определения значений c_1, c_2 рассмотрим пару уравнений

$$Z_Y(\xi_2) = \xi_2^{1/4}\left(c_1 G_1(1/2) + c_2 G_2(1/2)\right),$$

$$Z_Y'(\xi_2) = \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2} + \frac{1}{4\xi_2^{1/4}}\left(c_1 G_1'(1/2) + c_2 G_2'(1/2)\right).$$

Заметим, что

$$G_1(1/2) = G_2(1/2) \text{ and } G_1'(1/2) = -G_2'(1/2).$$

Поэтому

$$(c_1 + c_2) G_1(1/2) = \frac{Z_Y(\xi_2)}{\xi_2^{1/4}},$$

$$(c_1 - c_2) G_1'(1/2) = 4\xi_2^{1/4}\left(Z_Y'(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2}\right).$$

Тогда утверждение следует из леммы 1.2.3. □

Лемма 1.2.8. *При $\xi_2 = \pi^2/4$ выполнены равенства*

$$Z_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left[1 + \frac{1}{u^2}\left(\lambda_1 - \frac{1}{16}\right) + O\left(\frac{1}{u^3}\right)\right], \tag{1.27}$$

$$Z'_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left[\frac{u}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{2\lambda_1 + 1/8}{2\pi u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right)\right]. \tag{1.28}$$

Доказательство. Применяя [**54**, теорему 1] с $N = 1$, получаем

$$\epsilon_{3,1}(u;\xi_2) = 0 \text{ and } \frac{\partial}{\partial\xi}\epsilon_{3,1}(u;\xi)\Big|_{\xi=\xi_2} = 0.$$

Следовательно,

$$Z_Y(\xi_2) = \sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})\left(1 + \frac{A_Y(1,\xi_2)}{u^2}\right) - \xi_2 Y_1(u\sqrt{\xi_2})\frac{B_Y(0,\xi_2)}{u}$$

и

$$Z'_Y(\xi_2) = \sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})\left(\frac{1}{2\xi_2}\left[1 + \frac{A_Y(1;\xi_2)}{u^2}\right] + \frac{A'_Y(1;\xi_2)}{u^2} - \frac{1}{2}B_Y(0;\xi_2)\right)$$
$$- \xi_2 Y_1(u\sqrt{\xi_2})\left(\frac{u}{2\xi_2}\left[1 + \frac{A_Y(1;\xi_2)}{u^2}\right] + \frac{1}{2\xi_2 u}B_Y(0;\xi_2) + \frac{1}{u}B'_Y(0;\xi_2)\right).$$

Используя асимптотическое разложение Ханкеля (см. [**151**, ур. 10.17.1, 10.17.4] и [**89**, ур. 8.451(1,7,8)]), вычисляем

$$\sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2}) = \frac{\pi}{2}Y_0\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j}(0)}{(\pi u/2)^{2j}} + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j+1}(0)}{(\pi u/2)^{2j+1}}\right],$$

$$\xi_2 Y_1(u\sqrt{\xi_2}) = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2u}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j}(1)}{(\pi u/2)^{2j}} - \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_{2j+1}(1)}{(\pi u/2)^{2j+1}}\right],$$

где

$$a_j(v) = \frac{\Gamma(v + j + 1/2)}{2^j j!\Gamma(v - j + 1/2)}.$$

Соответственно,

$$Z_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left[1 + \frac{a_1(0)}{\pi u/2} - \frac{a_2(0)}{(\pi u/2)^2} + O(u^{-3})\right]\left(1 + \frac{A_Y(1;\xi_2)}{u^2}\right) -$$
$$\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2u}}\left[1 - \frac{a_1(1)}{\pi u/2} - \frac{a_2(1)}{(\pi u/2)^2} + O(u^{-3})\right]\frac{B_Y(0,\xi_2)}{u}.$$

Упрощая выражение выше, получаем

$$Z_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\Bigg[1 + \frac{1}{u}\left(\frac{2}{\pi}a_1(0) + \frac{\pi}{2}B_Y(0,\xi_2)\right) +$$
$$\frac{1}{u^2}\left(A_Y(1,\xi_2) - \frac{4}{\pi^2}a_2(0) - a_1(1)B_Y(0,\xi_2)\right)\Bigg] + O(u^{-7/2}).$$

Применяя формулы (1.20) и (1.21), находим

$$a_1(0) = -\frac{1}{8}, \quad \frac{2}{\pi}a_1(0) + \frac{\pi}{2}B_Y(0,\xi_2) = 0,$$

$$A_Y(1,\xi_2) - \frac{4}{\pi^2}a_2(0) - a_1(1)B_Y(0,\xi_2) = \lambda_1 - \frac{1}{16}.$$

Из этого следует уравнение (1.27).

Аналогично доказывается равенство

$$Z'_Y(\xi_2) = \sqrt{\xi_2}Y_0(u\sqrt{\xi_2})\left[\frac{7}{4\pi^2} + \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(2\lambda_1 - \frac{1}{32}\right) - \frac{15}{8\pi^4}\right)\right] - \\ \xi_2 Y_1(u\sqrt{\xi_2})\left[u\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{u}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(2\lambda_1 + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{16\pi^4}\right)\right].$$

Разложение Ханкеля для функций Бесселя позволяет получить следующую асимптотическую формулу

$$Z'_Y(\xi_2) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left[u\frac{1}{\pi} + \left(\frac{7}{4\pi^2} - \frac{2}{\pi^2}a_1(1)\right) + \right. \\ \frac{1}{u}\left(\frac{7}{2\pi^3}a_1(0) + \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\lambda_1 + 1/8}{\pi^2} - \frac{1}{16\pi^4}\right) - \frac{4}{\pi^3}a_2(1)\right) + \\ \left.\frac{1}{u^2}\left(-\frac{7}{\pi^4}a_2(0) - a_1(1)\left(\frac{2\lambda_1 + 1/8}{\pi^2} - \frac{1}{16\pi^4}\right) + \frac{8}{\pi^4}a_3(1)\right) + O(u^{-3})\right].$$

Наконец, подставляя

$$a_1(0) = -\frac{1}{8}, \quad a_1(1) = \frac{3}{8}, \quad a_2(1) = -\frac{15}{128},$$

мы доказываем уравнение (1.28). □

Следствие 1.2.9. *Выполнены формулы*

$$C_Y = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_J = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Доказательство. Из леммы 1.2.8

$$Z'_Y(\xi_2) - \frac{Z_Y(\xi_2)}{4\xi_2} = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2u}}\left(\frac{u}{\pi} + \frac{2\lambda_1 + 1/8}{2\pi u} + O(u^{-2})\right).$$

Применяя [**151**, ур. 5.11.13], находим, что

$$\frac{\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(k-1/4)} = k^{1/2} - \frac{1}{4}k^{-1/2} + O(k^{-3/2})$$

и

$$\frac{\Gamma(k-1/4)}{\Gamma(k+1/4)} = k^{-1/2} + O(k^{-3/2}).$$

Тогда по лемме 1.2.7

$$c_1 = O(k^{-2}), \quad c_2 = 1 + O(k^{-1}).$$

Наконец, утверждение следует из (1.26). □

Как следствие уравнения (1.25), леммы 1.2.6, теоремы 1.2.5 и следствия 1.2.9 мы получаем наш основной результат.

Теорема 1.2.10. *Пусть* $u = 2k-1$, $\xi_2 = \pi^2/4$. *Тогда при* $\xi \in (0, \xi_2)$

$$\Phi_k(\cos^2\sqrt{\xi}) = \frac{-\pi}{\xi^{1/4}(\sin\sqrt{\xi})^{1/2}}\left[Z_J(\xi) + C_Y Z_Y(\xi) + C_J Z_J(\xi)\right],$$

где Z_Y, Z_J *заданы формулами* (1.22), (1.23) *и*

$$C_Y = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad C_J = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Следствие 1.2.11. *Выполнена асимптотическая формула*

$$\Phi_k\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{3^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

1.2.3. Приближение Ψ_k. Найдём приближение Лиувилля-Грина для функции Ψ_k. С этой целью мы воспользуемся методом [**28**, главы 5.3] с небольшими изменениями. В частности, дифференциальное уравнения для $\Psi_k(x)$ будет немного другим, а значит потребуется заново вычислять различные функции и постоянные в приближении Лиувилля-Грина.

Рассмотрим функцию

$$y(x) := \sqrt{1-x}\Psi_k(x).$$

Пусть $u := k - 1/2$ и

$$f(x) := \frac{1}{x^2(1-x)}, \quad g(x) := -\frac{1}{4x^2(1-x)^2} + \frac{3}{16x(1-x)}.$$

Лемма 1.2.12. *Функция* $y = y(x)$ *является решением уравнения*

$$y''(x) - (u^2 f(x) + g(x))y(x) = 0. \tag{1.29}$$

Доказательство. Применяя дифференциальное уравнение для гипергеометрической функции Гаусса, находим, что $y = y(x)$ – решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{1-(2k-1)^2}{4x^2} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{5/4-(2k-1)^2}{4x(1-x)}\right)y = 0.$$

Утверждение следует. □

Сделав замену

$$Z(x) := \frac{y(x)}{\alpha(x)}, \quad \alpha(x) := \frac{(x^2-x^3)^{1/4}}{2(\operatorname{atanh}\sqrt{1-x})^{1/2}}$$

и подстановку

$$\xi := 4\operatorname{atanh}^2\sqrt{1-x},$$

мы преобразуем уравнение (1.29) к виду

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} + \left[-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}\right]Z = 0, \tag{1.30}$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4\sinh^2\sqrt{\xi}/2}\right)$$

– аналитическая функция при $\xi \to 0$.

Для того чтобы найти приближение Лиувилля-Грина для (1.30) мы отбрасываем слагаемое $\psi(\xi)/\xi$ в (1.30). Таким образом, получаем уравнение

$$Z'' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi}\right) Z = 0,$$

решениями которого являются I и K функции Бесселя (см. [**151**, ур. 10.13.2]), то есть

$$Z_L = \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}),$$

где

$$L_v(x) := \begin{cases} I_v(x) \\ e^{\pi i v} K_v(x) \end{cases}.$$

Это позволяет предположить, что решения исходного дифференциального уравнения (1.30) могут быть записаны в виде (см. [**150**, ур. 2.09, Глава 12])

$$Z_L = \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n;\xi)}{u^{2n}} + \frac{\xi}{u} L_1(u\sqrt{\xi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n;\xi)}{u^{2n}}. \tag{1.31}$$

Лемма 1.2.13. *Коэффициенты $A(n;\xi)$ и $B(n;\xi)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\sqrt{\xi} B(n;\xi) = -\sqrt{\xi} A'(n;\xi) + \int_0^{\xi} \left(\psi(x) A(n;x) - \frac{1}{2} A'(n;x)\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}, \tag{1.32}$$

$$A(n;\xi) = -\xi B'(n-1;\xi) + \int_0^{\xi} \psi(x) B(n-1;x) dx + \lambda_n$$

для некоторой вещественной постоянной интегрирования λ_n.

Доказательство. Из [**151**, ур. 10.13.2, 10.13.5, 10.36, 10.29.2, 10.29.3] получаем, что

$$W(\xi) := \sqrt{\xi} L_0(u\sqrt{\xi}), \quad V(\xi) := \xi L_1(u\sqrt{\xi})$$

удовлетворяют уравнениям

$$W'' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{1}{4\xi^2}\right) W = 0,$$

$$V'' - \frac{1}{\xi} V' + \left(-\frac{u^2}{4\xi} + \frac{3}{4\xi^2}\right) V = 0,$$

$$V' = \frac{1}{2\xi} V + \frac{u}{2} W, \quad W' = \frac{1}{2\xi} W + \frac{u}{2\xi} V.$$

Используя данный факт и подставляя решения (1.31) в уравнение (1.30), доказываем, что

$$W(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(n;\xi)}{u^{2n}} + V(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D(n;\xi)}{u^{2n+1}} = 0,$$

где

$$C(n;\xi) = A''(n;\xi) + \frac{A'(n;\xi)}{\xi} - \frac{\psi(\xi)}{\xi} A(n;\xi) + B'(n;\xi) + \frac{B(n;\xi)}{2\xi},$$

$$D(n;\xi) = B''(n-1;\xi) + \frac{B'(n-1;\xi)}{\xi} - \frac{\psi(\xi)}{\xi}B(n-1;\xi) + \frac{A'(n;\xi)}{\xi}.$$

Положив $C(n;\xi) = D(n;\xi) = 0$, доказываем лемму. □

Пусть $A(0;\xi) = 1$. Тогда

$$B(0;\xi) = \frac{1}{16}\left(\frac{\coth\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} - \frac{2}{\xi}\right),$$

$$A(1;\xi) = -\frac{1}{32}\left(\frac{4}{\xi} - \frac{\coth\sqrt{\xi/4}}{\sqrt{\xi}} - \frac{1}{2\sinh^2\sqrt{\xi/4}}\right) + \frac{1}{512}\left(\coth\sqrt{\xi/4} - \frac{2}{\sqrt{\xi}}\right)^2 + \lambda_1.$$

Заметим, что

$$\lim_{\xi\to\infty}\sqrt{\xi}B(0;\xi) = \frac{1}{16}, \quad \lim_{\xi\to\infty}A(1;\xi) = \frac{1}{512} + \lambda_1. \tag{1.33}$$

Определим вариацию функции

$$V_{a,b}(f(x)) := \int_a^b |(f(x))'|dx.$$

Лемма 1.2.14. *Функция $V_{\xi,\infty}(\sqrt{x}B(1;x))$ ограничена. При $n > 1$ функция $V_{\xi,\infty}(\sqrt{x}B(n;x))$ сходится.*

Доказательство. Из рекуррентного соотношения (1.32) находим, что

$$(\sqrt{x}B(1;x))' = O(x^{-1/2}) \text{ при } x \to 0$$

и

$$(\sqrt{x}B(1;x))' = O(x^{-2}) \text{ при } x \to \infty.$$

Поэтому $V_{\xi,\infty}(\sqrt{x}B(1;x))$ ограничена. Заметим, что

$$\psi^{(s)}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{s+1}}\right).$$

Тогда сходимость вариации при $n > 1$ следует из [**150**, упр 4.2, стр. 445]. □

Применяя лемму 1.2.14, мы обрезаем бесконечное суммирование в (1.31) до N слагаемых с пренебрежимо малым остатком. Значение N определяет качество приближения: остаток меньше для большего N.

Лемма 1.2.15. *Для каждого значения u и каждого неотрицательного целого N уравнение* (1.30) *имеет решения $Z_K(\xi)$, бесконечно дифференцируемые по ξ на интервале $(0,\infty)$, которые задаются как*

$$Z_K(\xi) = \sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N}\frac{A_K(n;\xi)}{u^{2n}} - \frac{\xi}{u}K_1(u\sqrt{\xi})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{B_K(n;\xi)}{u^{2n}} + \epsilon_{2N+1,3}(u,\xi), \tag{1.34}$$

где

$$|\epsilon_{2N+1,3}(u,\xi)| \le \frac{\sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})}{u^{2N+1}}V_{\xi,\infty}(\sqrt{\xi}B_K(N;\xi))exp\left(\frac{1}{u}V_{\xi,\infty}(\sqrt{\xi}B_K(0;\xi))\right).$$

В частности, при $N = 1$

$$\epsilon_{3,3}(u,\xi) \ll \frac{\sqrt{\xi}K_0(u\sqrt{\xi})}{u^3}\min\left(\sqrt{\xi},\frac{1}{\xi}\right).$$

При $\xi \to \infty$ дифференциальное уравнение (1.30) имеет два рецессивных решения, а именно

$$Z(\xi) = \Psi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\sqrt{\xi}/2}\right)\left(\xi\sinh^2\sqrt{\xi}\right)^{1/4}$$

и $Z_K(\xi)$, заданное уравнением (1.34). Поэтому существует $C_K = C_K(u)$ такое, что

$$\Psi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\sqrt{\xi}/2}\right)\left(\xi\sinh^2\sqrt{\xi}\right)^{1/4} = C_K Z_K(\xi). \tag{1.35}$$

Последний шаг – определить $C_K = C_K(u)$.

Лемма 1.2.16. *Выполнена асимптотическая формула*

$$C_K = 2 + O(k^{-1}).$$

Доказательство. Для определения C_K мы вычислим предел правой и левой частей уравнения (1.35) при $\xi \to \infty$. Таким образом,

$$C_K = \frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(2k)}\frac{2^{2k}\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{u^{2n}} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{b_n}{u^{2n+1}}\right]^{-1},$$

где

$$a_n = \lim_{\xi\to\infty} A(n;\xi), \quad b_n = \lim_{\xi\to\infty} B(n;\xi)\sqrt{\xi}.$$

В соответствии с (1.33) мы знаем, что

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{512} + \lambda_1, \quad b_0 = \frac{1}{16}.$$

Кроме того,

$$\frac{\Gamma(k-1/4)\Gamma(k+1/4)}{\Gamma(2k)} = \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(2k)}(1+O(1/k)) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}2^{2k}}(1+O(1/k)).$$

Утверждение следует. □

Наконец, мы доказываем основную теорему.

Теорема 1.2.17. *При* $\xi \in (0,\infty)$ *выполнено равенство*

$$\Psi_k\left(\frac{1}{\cosh^2\sqrt{\xi}/2}\right)\left(\xi\sinh^2\sqrt{\xi}\right)^{1/4} = C_K Z_K(\xi),$$

где $Z_K(\xi)$ *задается уравнением* (1.34) *и* $C_K = 2 + O(k^{-1})$.

1.3. Асимптотическая формула

Следствия 1.1.2 и 1.1.4 следуют из теоремы 1.1.1 и оценки двух последних слагаемых в точной формуле (1.6), как мы сейчас покажем.

Лемма 1.3.1. *Для любого $\epsilon > 0$ выполнена оценка*

$$E_1(k,l) := \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{1 \le n < 2l} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\Phi_k\left(\frac{n^2}{4l^2}\right) \ll \frac{l^{5/6+\epsilon}}{\sqrt{k}}.$$

Доказательство. Используя оценку подвыпуклости (0.41), получаем

$$E_1(k,l) \ll \frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}} \sum_{1 \le n < 2l} (2l-n)^{1/6}(2l+n)^{1/6} \left|\Phi_k\left(\frac{n^2}{4l^2}\right)\right| \ll \frac{l^{1/6+\epsilon}}{\sqrt{l}} \sum_{1 \le n < 2l} n^{1/6} \left|\Phi_k\left(\left(1-\frac{n}{2l}\right)^2\right)\right|.$$

Пусть

$$\xi = 4\left(\arcsin\sqrt{\frac{n}{4l}}\right)^2, \quad u = 2k-1.$$

Тогда по теореме 1.2.10

$$\Phi_k\left(\left(1-\frac{n}{2l}\right)^2\right) \ll \frac{\sqrt{\xi}Y_0(u\sqrt{\xi})}{(\arcsin(\sqrt{n/4l}))^{1/2}(n/l)^{1/4}} \ll \frac{(\arcsin(\sqrt{n/4l}))^{1/2}}{(n/l)^{1/4}} Y_0(u\sqrt{\xi}).$$

Если $l \ll k^2$, то $u\sqrt{\xi} \gg 1$. Оценка на функцию Бесселя

$$Y_0(u\sqrt{\xi}) \ll \frac{1}{u^{1/2}\xi^{1/4}}$$

позволяет доказать, что

$$\Phi_k\left(\left(1-\frac{n}{2l}\right)^2\right) \ll \frac{1}{k^{1/2}(n/l)^{1/4}}.$$

Следовательно,

$$E_1(k,l) \ll \frac{l^{1/6+\epsilon}}{\sqrt{l}} \sum_{n<2l} \frac{n^{1/6}l^{1/4}}{k^{1/2}n^{1/4}} \ll \frac{l^{5/6+\epsilon}}{\sqrt{k}}.$$

□

Следствие 1.3.2. *Если верна гипотеза Линделёфа для L-функций Дирихле, то для любого $\epsilon > 0$ верна оценка*

$$E_1(k,l) \ll \frac{l^{1/2+\epsilon}}{\sqrt{k}}.$$

Лемма 1.3.3. *Для некоторого $c > 0$ верна оценка*

$$E_2(k,l) := \frac{1}{l\sqrt{2}} \sum_{n>2l} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\sqrt{n}\Psi_k\left(\frac{4l^2}{n^2}\right) \ll \frac{l^{-1/12}}{\sqrt{k}} \exp\left(-\frac{ck}{\sqrt{l}}\right).$$

Доказательство. Из оценки подвыпуклости (0.41) следует, что

$$E_2(k,l) \ll \frac{1}{l}\sum_{n>2l}(n^2-4l^2)^{1/6}\sqrt{n}\left|\Psi_k\left(\frac{4l^2}{n^2}\right)\right| \ll$$
$$\frac{1}{l}\int_{2l+1}^{\infty} x^{1/2}(x^2-4l^2)^{1/6}\left|\Psi_k\left(\frac{4l^2}{x^2}\right)\right|dx + l^{-1/3}\left|\Psi_k\left(\frac{4l^2}{(2l+1)^2}\right)\right|.$$

Далее мы сделаем замену переменных

$$x = 2l\cosh\frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

и оценим $E_2(k,l)$ используя теорему 1.2.17 с $N=0$. Рассмотрим первое слагаемое

$$E_{2,1}(k,l) := \frac{1}{l}\int_{2l+1}^{\infty} x^{1/2}(x^2-4l^2)^{1/6}\left|\Psi_k\left(\frac{4l^2}{x^2}\right)\right|dx \ll l^{5/6}\times$$
$$\int_{\xi_0}^{\infty}\left(\sinh\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)^{5/6}\frac{|Z_k(\xi)|}{\xi^{3/4}}d\xi \ll l^{5/6}\int_{\xi_0}^{\infty}\left(\sinh\frac{\sqrt{\xi}}{2}\right)^{5/6}\frac{|K_0(u\sqrt{\xi})|}{\xi^{1/4}}d\xi,$$

где $u = k-1/2$ и предел интегрирования по ξ_0 определяется из уравнения

$$\cosh\frac{\sqrt{\xi_0}}{2} = 1+\frac{1}{2l}.$$

Выполнив ещё одну замену переменных $\sqrt{\xi}=t$, находим, что

$$t_0 = 4\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{1}{\sqrt{4l}}.$$

Так как $t_0 \gg 1/\sqrt{l}$ и $ut \geq ut_0 \gg k/\sqrt{l} \gg 1$, мы оцениваем функцию Бесселя следующим образом

$$K_0(ut) \ll \frac{\exp(-ut)}{\sqrt{ut}}.$$

Наконец,

$$E_{2,1}(k,l) \ll l^{5/6}\int_{t_0}^{\infty}\left(\sinh\frac{t}{2}\right)^{5/6}\frac{|K_0(ut)|}{\sqrt{t}}tdt \ll$$
$$\frac{l^{5/6}}{\sqrt{k}}\int_{t_0}^{\infty}\left(\sinh\frac{t}{2}\right)^{5/6}e^{-ut}dt \ll \frac{l^{5/6}}{\sqrt{k}}\times$$
$$\left(\int_{t_0}^{1} t^{5/6}\exp\left(-ut\right)dt + \int_{1}^{\infty}\exp\left(-ut+5t/12\right)dt\right) \ll \frac{l^{5/12}}{u\sqrt{k}}\exp(-ut_0).$$

Второе слагаемое оценивается аналогично:

$$E_{2,2}(k,l) := l^{-1/3}\left|\Psi_k\left(\frac{4l^2}{(2l+1)^2}\right)\right| \ll l^{-1/3}\frac{C_K|Z_k(\xi)|}{\xi^{1/4}(\sinh\sqrt{\xi})^{1/2}} \ll$$
$$l^{-1/3}l^{1/2}|Z_K(\xi)| \ll l^{1/6}\sqrt{\xi}|K_0(u\sqrt{\xi})| \ll \frac{\exp\left(-ut_0\right)}{k^{1/2}l^{1/12}}.$$

Таким образом,

$$E_2(k,l) \ll E_{2,1}(k,l)+E_{2,2}(k,l) \ll \frac{1}{l^{1/12}\sqrt{k}}\exp\left(\frac{-ck}{\sqrt{l}}\right)$$

для некоторого $c > 0$. $\square$

ГЛАВА 2

Первый момент L-функций симметрического квадрата в аспекте уровня

В данной главе мы изучаем асимптотическое поведение первого момента L-функций симметрического квадрата модулярных форм с уровнем равным степени простого числа. Во-первых, мы улучшаем оценку остатка, полученную в предыдущих работах для простого уровня, см. **[44]**, **[170]**. Во-вторых, мы обобщаем эти результаты на случай произвольной степени простого числа. В-третьих, мы продолжаем исследования начатые в предыдущей главе, где первый момент L-функций симметрического квадрата изучался в аспекте веса.

Рассмотрим первый момент L-функций симметрического квадрата (0.14) с твистом (дополнительным множителем равным коэффициенту Фурье (0.13) индекса l^2):

$$M_1(l,N,s) := \sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h} \lambda_f(l^2)L(\mathrm{sym}^2 f,s), \tag{2.1}$$

где $H_{2k}^*(N)$ – ортогональный базис примитивных новых форм уровня N и веса $2k$. Мы не указываем зависимость от k в $M_1(l,N,s)$, поскольку не собираемся изучать асимптотическое поведение при $k\to\infty$ и предполагаем, что вес k ограничен некоторой абсолютной константой, не зависящей от N. Верхний индекс h в сумме $\sum_{f\in H_{2k}^*(N)}^{h}$ обозначает, что сумма считается с гармоническим весом:

$$\frac{2\pi^2}{(2k-1)NL(\mathrm{sym}^2 f,1)}.$$

Для простоты введем некоторые дополнительные обозначения:

$$\mathbf{MT}(l) := \frac{1}{2\sqrt{l}}\bigg(-2\log l - 3\log 2\pi + \frac{\pi}{2} + 3\gamma + \psi(k-1/4) + \psi(k+1/4)\bigg), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{MT}(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) := \frac{\log \mathbf{p}}{\sqrt{l}}\left(\left[\frac{\nu+1}{2}\right] + \frac{1-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\mathbf{p}}\right) + (1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{MT}(l),$$

где γ - постоянная Эйлера, $\psi(s)$ - логарифмическая производная Гамма-функции, а квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты. Заметим, что остаточные члены в теоремах ниже зависят от параметра θ, который определяется из оценки (0.41).

Теорема 2.0.1. *Для простого числа* $\mathbf{p} > 2$, $(l, \mathbf{p}) = 1$ *и* $2k < 12$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$M_1(l, \mathbf{p}, 1/2) := \mathbf{MT}(l, \mathbf{p}, 1/2) + O\left(\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}\right). \tag{2.3}$$

Теорема 2.0.2. *Для простого числа* $\mathbf{p} > 2$, $(l, \mathbf{p}) = 1$ *и* $\nu \geqslant 3$ *справедлива асимптотическая формула:*

$$M_1(l, \mathbf{p}^\nu, 1/2) = \mathbf{MT}(l, \mathbf{p}^\nu, 1/2) - \frac{\mathbf{MT}(l, \mathbf{p}^{\nu-1}, 1/2)}{\mathbf{p}} + O\left(\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu)\right), \tag{2.4}$$

где при $\nu \equiv 0 \pmod 2$

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-2)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-2)+3/2}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right), \tag{2.5}$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $l < \mathbf{p}^{\nu-2}$

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta\nu}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)\nu}}\left(\mathbf{p}^{4k-3-4\theta} + \mathbf{p}^{2k-1-2\theta}\right), \tag{2.6}$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $\mathbf{p}^{\nu-2} < l < \mathbf{p}^{\nu-1}$

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}} + \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}, \tag{2.7}$$

при $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $l > \mathbf{p}^{\nu-1}$

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}. \tag{2.8}$$

Замечание 2.0.3. *В данной главе нас в большей степени интересует поведение момента при* $\nu \to \infty$, *и поэтому мы не изучаем случай* $\nu = 2$, *который требует отдельного рассмотрения из-за наличия определенных условий взаимной простоты в формуле следа Петерсона. Тем не менее, отметим, что случай* $\nu = 2$ *был исследован в работе* **[4]** *для L-функций модулярных форм, и мы считаем, что те же аргументы должны работать и для L-функций симметрического квадрата.*

Для того чтобы сравнить асимптотические формулы, указанные в теоремах выше, давайте проанализируем, для каких l наши оценки остаточных членов меньше соответствующих главных членов. Пусть $\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, \theta)$ обозначает наибольшую длину твиста, то есть наибольшее значение l, для которого у нас есть асимптотическая формула. Из теорем 2.0.1 и 2.0.2 следует, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}, \theta) = \mathbf{p}^{\frac{1}{2+4\theta}-\epsilon}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{p}, 1/6) = \mathbf{p}^{3/8-\epsilon}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{p}, 0) = \mathbf{p}^{1/2-\epsilon}.$$

При $\nu \equiv 0 \pmod 2$, $\nu > 2$ выполнены равенства:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, \theta) = \begin{cases} \mathbf{p}^{\frac{\nu-1/2}{1+2\theta}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu < 2 + \frac{3}{4\theta} - \epsilon, \\ \mathbf{p}^{\nu-2+\frac{3-4\theta(\nu-2)}{4k-1}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu > 2 + \frac{3}{4\theta} - \epsilon, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, 1/6) = \begin{cases} \mathbf{p}^{\frac{3\nu-3/2}{4}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu = 4, 6, \\ \mathbf{p}^{\nu(1-\frac{1}{6k-3/2})-2+\frac{13}{12k-3}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu \geqslant 8, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, 0) = \mathbf{p}^{\nu-1/2-\epsilon}.$$

При $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $\nu > 2$ выполнены равенства:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, \theta) = \begin{cases} \mathbf{p}^{\frac{\nu-1/2}{1+2\theta}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu < 1 + \frac{1}{4\theta} - \epsilon, \\ \mathbf{p}^{\nu-1+\frac{1-4\theta(\nu-1)}{4k-1}-\epsilon}, & \text{для} \quad 1 + \frac{1}{4\theta} - \epsilon < \nu < 1 + \frac{1}{2\theta} + \frac{1+2\theta}{4\theta(2k-3/2-2\theta)} - \epsilon, \\ \mathbf{p}^{\frac{\nu}{1+2\theta}-\epsilon}, & \text{для} \quad 1 + \frac{1}{2\theta} + \frac{1+2\theta}{4\theta(2k-3/2-2\theta)} - \epsilon < \nu < 2 + \frac{1}{\theta} - \epsilon, \\ \mathbf{p}^{\nu-2+\frac{2-2\theta(\nu-2)}{2k-1/2}-\epsilon}, & \text{для} \quad \nu > 2 + \frac{1}{\theta} - \epsilon,\ k \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, 0) = \mathbf{p}^{\nu-1/2-\epsilon}.$$

Введем обозначения:

$$\Delta(\nu, \theta) := \frac{\log \mathcal{L}(\mathbf{p}^\nu, \theta)}{\log \mathbf{p}^\nu}.$$

Тогда

$$\Delta(\nu, 0) = 1 - \frac{1}{2\nu} - \epsilon, \quad \lim_{\nu\to\infty} \Delta(\nu, 1/6) = 1 - \frac{1}{6k - 3/2} - \epsilon, \tag{2.9}$$

$$\Delta(1, 0) = \frac{1}{2} - \epsilon, \quad \Delta(1, 1/6) = \frac{3}{8} - \epsilon. \tag{2.10}$$

Анализируя (2.9) и (2.10), можно заметить, что чем больше ν, тем больше длина твиста, для которого у нас есть асимптотическая формула. Тем не менее, даже при $\nu \to \infty$ и в предположении гипотезы Линделёфа для квадратичных L-функций Дирихле, длина твиста не может быть выбрана больше уровня формы.

2.1. Некоторые предварительные результаты

Напомним, что L-ряд Загира при $\operatorname{Re} s > 1$ определяется как

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho_q(n)}{q^s} = \zeta(2s) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\upsilon_q(n)}{q^s},$$

где

$$\rho_q(n) := \#\{x \pmod{2q} : x^2 \equiv n \pmod{4q}\}, \quad \upsilon_q(n) := \sum_{q_2 q_3 = q} \mu(q_2)\rho_{q_3}(n). \tag{2.11}$$

Для фиксированного n функции $\rho_q(n)$ и $\upsilon_q(n)$ являются мультипликативными по q.

Из вычислений в [**104**, главе 8] следует, что если $n = p^\alpha n_1$ с $(n_1, p) = 1$, то

$$\rho_{p^\gamma}(n)=\begin{cases} p^{[\gamma/2]} & \text{if} \quad \gamma\leqslant\alpha, \\ \left(1+\left(\frac{n_1}{p}\right)\right)p^{\alpha/2} & \text{if} \quad \gamma>\alpha, \quad \alpha\equiv 0 \pmod 2, \\ 0 & \text{if} \quad \gamma>\alpha, \quad \alpha\equiv 1 \pmod 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Кроме того, при $n=0$

$$\rho_{p^\gamma}(0)=p^{[\gamma/2]} \quad \text{and} \quad \mathscr{L}_0(s)=\zeta(2s-1). \tag{2.13}$$

Лемма 2.1.1. *Предположим, что* $n=p^\alpha n_1$, $(n_1,p)=1$.

При $\alpha=0$ *выполнено равенство:*

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}=\frac{1+\left(\frac{n}{p}\right)p^{-s}}{1-p^{-s}}. \tag{2.14}$$

При $\alpha=2m$ *выполнено равенство:*

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}}=m+1+\frac{m}{\sqrt{p}}+\frac{1+\left(\frac{n_1}{p}\right)}{\sqrt{p}-1}. \tag{2.15}$$

При $\alpha=2m+1$ *выполнено равенство:*

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}}=(m+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right). \tag{2.16}$$

Доказательство. Формула (2.14) следует немедленно из (2.12).

В случае, когда $\alpha=2m$, применяя (2.12), доказываем

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}=\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{p^{j(2s-1)}}+\frac{1}{p^s}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{p^{j(2s-1)}}+\frac{1+\left(\frac{n_1}{p}\right)}{1-p^{-s}}p^{m-(2m+1)s}.$$

При $s=1/2$ мы получаем (2.15).

В случае, когда $\alpha=2m+1$, применяя (2.12), мы показываем, что

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}=\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{p^{j(2s-1)}}.$$

Подставляя $s=1/2$, мы завершаем доказательство (2.16). □

Лемма 2.1.2. *Пусть* $n=p^\alpha n_1$, $(n_1,p)=1$. *Тогда*

$$\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}=\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{\gamma\geqslant 1}\frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}=\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\sum_{\gamma\geqslant 0}\frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}-1. \tag{2.18}$$

Доказательство. Из (2.11) следует, что

$$\upsilon_1(n) = 1, \quad \upsilon_{p^\gamma}(n) = \rho_{p^\gamma}(n) - \rho_{p^{\gamma-1}}(n) \quad \text{для} \quad \gamma \geqslant 1. \tag{2.19}$$

В результате мы доказываем (2.17) и (2.18). □

Лемма 2.1.3. *Пусть* $n = p^\alpha n_1$, *где* $\alpha = 2m$, $(n_1, p) = 1$. *Тогда для* $\nu > 1$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}} = 0, \quad \textit{если} \quad \alpha \leqslant \nu - 2, \tag{2.20}$$

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = \left(m - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{p}-1}\left(\frac{n_1}{p}\right), \quad \textit{если} \quad \alpha \geqslant \nu - 1. \tag{2.21}$$

Доказательство. Если $\alpha \leqslant \nu - 2$ и $\gamma \geqslant \nu$, тогда применяя (2.19) и (2.12), мы показываем, что $\upsilon_{p^\gamma}(n) = 0$, тем самым доказывая (2.20).

При $\nu \geqslant 1$ из формулы (2.19) следует, что

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}} = \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\rho_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}} - \frac{\rho_{p^{\nu-1}}(n)}{(1-p^{-s})p^{\nu s}}. \tag{2.22}$$

Если $\alpha = \nu - 1$, применяя (2.22) и (2.12), мы доказываем, что

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = \sum_{\gamma \geqslant 2m+1} \frac{1 + \left(\frac{n_1}{p}\right)}{p^{\gamma/2-m}} - \frac{p^m}{(1-p^{-1/2})p^{(2m+1)/2}} = \frac{1}{p^{1/2}-1}\left(\frac{n_1}{p}\right),$$

из чего следует (2.21) в данном случае.

Если $\alpha \geqslant \nu$, применяя (2.22) и (2.12), получаем

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = \sum_{\nu \leqslant \gamma \leqslant \alpha} \frac{p^{[\gamma/2]}}{p^{\gamma/2}} + \sum_{\gamma \geqslant \alpha+1} \frac{1 + \left(\frac{n_1}{p}\right)}{p^{\gamma/2-m}} - \frac{p^{[(\nu-1)/2]}}{(1-p^{-1/2})p^{\nu/2}}.$$

Если $\nu \equiv 0 \pmod 2$, то

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = m + 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{m - \nu/2}{\sqrt{p}} + \frac{1 + \left(\frac{n_1}{p}\right)}{\sqrt{p}-1} - \\ - \frac{1}{(\sqrt{p}-1)\sqrt{p}} = m + 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{m - \nu/2 + 1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p}-1}\left(\frac{n_1}{p}\right).$$

В результате, равенство (2.21) доказано в данном случае.

Если $\nu \equiv 1 \pmod 2$, то

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = m - \frac{\nu-1}{2} + \frac{m - \nu/2 + 1/2}{\sqrt{p}} + \frac{\left(\frac{n_1}{p}\right)}{\sqrt{p}-1},$$

и поэтому равенство (2.21) доказано также и в этом случае. □

Лемма 2.1.4. *Пусть* $n = p^\alpha n_1$, *где* $\alpha = 2m+1$, $(n_1, p) = 1$. *Тогда для* $\nu > 1$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}} = 0, \quad \textit{если} \quad \alpha \leqslant \nu - 2, \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = \left(m - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{1}{p-\sqrt{p}}, \quad \textit{если} \quad \alpha \geqslant \nu - 1. \tag{2.24}$$

Доказательство. Если $\alpha \leqslant \nu-2$ и $\gamma \geqslant \nu$, то применяя (2.19) и (2.12), мы показываем, что $\upsilon_{p^\gamma}(n) = 0$, тем самым доказывая (2.23).

Если $\alpha = \nu - 1$, то из (2.22) и (2.12) следует, что

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = -\frac{p^{[(\nu-1)/2]}}{(1-p^{-1/2})p^{\nu/2}} = \frac{-1}{p-p^{1/2}},$$

что доказывает (2.24).

Если $\alpha \geqslant \nu$, то применяя (2.22) и (2.12), мы приходим к выводу, что

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = \sum_{\nu \leqslant \gamma \leqslant \alpha} \frac{p^{[\gamma/2]}}{p^{\gamma/2}} - \frac{p^{[(\nu-1)/2]}}{(1-p^{-1/2})p^{\nu/2}}.$$

Если $\nu \equiv 0 \pmod 2$, то

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = m + 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{m+1-\nu/2}{\sqrt{p}} - \frac{1}{p-\sqrt{p}}.$$

Если $\nu \equiv 1 \pmod 2$, то

$$\frac{1}{1-p^{-1/2}} \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma/2}} = m - \frac{\nu-1}{2} + \frac{m+1-(\nu-1)/2}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}-1}.$$

Таким образом, в обоих случаях выполнено (2.24). □

Для простоты записи введём обозначение:

$$\mathcal{P}(s, \nu, p, n) := \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}} \left(\sum_{\gamma \geqslant 0} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(n)}{p^{\gamma s}}\right)^{-1}. \tag{2.25}$$

Как следствие лемм 2.1.1 и 2.1.2 мы получаем следующие результаты.

Лемма 2.1.5. *Предположим, что* $n = p^\alpha n_1$, *где* $(n_1, p) = 1$.

При $\alpha = 0$

$$\mathcal{P}(1/2, 1, p, n) = \frac{\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}}{1 + \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{\sqrt{p}}}. \tag{2.26}$$

При $\alpha = 2m \geqslant 2$

$$\mathcal{P}(1/2, 1, p, n) = 1 - \frac{(1-p^{-1/2})^{-1}}{m + 1 + \frac{m}{\sqrt{p}} + \frac{1+\left(\frac{n_1}{p}\right)}{\sqrt{p}-1}}.$$

При $\alpha = 2m+1 \geqslant 1$

$$\mathcal{P}(1/2,1,p,n) = 1 - \frac{1}{(m+1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Кроме того, применяя леммы 2.1.1 и 2.1.2, мы устанавливаем следующие тождества.

Лемма 2.1.6. *Предположим, что* $n = p^\alpha n_1$, $\alpha = 2m$, $(n_1,p)=1$. *Тогда для* $\nu > 1$

$$\mathcal{P}(1/2,\nu,p,n) = 0, \quad \textit{если} \quad \alpha \leqslant \nu - 2, \tag{2.27}$$

$$\mathcal{P}(1/2,\nu,p,n) = \frac{\left(m - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + \frac{1}{\sqrt{p}-1}\left(\frac{n_1}{p}\right)}{m\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) + 1 + \frac{1+\left(\frac{n_1}{p}\right)}{\sqrt{p}-1}}, \quad \textit{если} \quad \alpha \geqslant \nu - 1. \tag{2.28}$$

Для доказательства следующего случая необходимо воспользоваться леммами 2.1.1 и 2.1.4.

Лемма 2.1.7. *Пусть* $n = p^\alpha n_1$, $\alpha = 2m+1$, $(n_1,p)=1$. *Тогда для* $\nu > 1$

$$\mathcal{P}(1/2,\nu,p,n) = 0, \quad \textit{если} \quad \alpha \leqslant \nu - 2,$$

$$\mathcal{P}(1/2,\nu,p,n) = \frac{\left(m - \left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right) - \frac{1}{p-\sqrt{p}}}{(m+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}, \quad \textit{если} \quad \alpha \geqslant \nu - 1. \tag{2.29}$$

Наконец, рассмотрим случай $n = 0$.

Лемма 2.1.8. *При* $\nu \geqslant 1$

$$\mathcal{P}(s,\nu,p,0) = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-2s}} p^{(1-2s)\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Применяя (2.13) и (2.17), получаем

$$\sum_{\gamma \geqslant 0} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(0)}{p^{\gamma s}} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\gamma \geqslant 0} \frac{p^{[\gamma/2]}}{p^{\gamma s}} = \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{1-2s}}. \tag{2.31}$$

Комбинируя (2.13) и (2.19), доказываем равенство:

$$\sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{\upsilon_{p^\gamma}(0)}{p^{\gamma s}} = \sum_{\gamma \geqslant \nu} \frac{p^{[\gamma/2]} - p^{[\gamma/2-1/2]}}{p^{\gamma s}} = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{1-2s}} p^{(1-2s)\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}. \tag{2.32}$$

Подставляя (2.31) и (2.32) в (2.25), мы завершаем доказательство леммы. □

Для $N = \mathbf{p}^\nu$, $\nu \geqslant 1$ пусть

$$L_n^N(s) := \frac{\zeta^N(2s)}{\zeta(2s)} \mathscr{L}_n(s) \mathcal{P}(s,\nu,\mathbf{p},n), \tag{2.33}$$

где $\mathscr{L}_n(s)$ – это L-ряд Загира (0.37). Следующая лемма является обобщением [**31**, леммы 4.1].

Лемма 2.1.9. *При $N = \mathbf{p}^\nu$ выполнено тождество:*

$$\zeta^N(2s) \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{1}{q^{1+s}} \sum_{c \pmod q} S(l^2, c^2; q) e\left(\frac{nc}{q}\right) = L^N_{n^2-4l^2}(s), \tag{2.34}$$

где $S(m, n; c)$– сумма Клоостермана (0.8).

Доказательство. Аналогично доказательству [**31**, леммы 4.1] мы показываем, что

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{1}{q^{1+s}} \sum_{c \pmod q} S(l^2, c^2; q) e\left(\frac{nc}{q}\right) =$$

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{1}{q^s} \sum_{bd=q} \mu(d)\rho_b(n^2-4l^2) =$$

$$\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod N}}^{\infty} \frac{\upsilon_{n^2-4l^2}(q)}{q^s} = \frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)}{\zeta(2s)} \sum_{\gamma\geqslant\nu} \frac{\upsilon_{\mathbf{p}^\gamma}(n^2-4l^2)}{\mathbf{p}^{\gamma s}} \left(\sum_{\gamma\geqslant 0} \frac{\upsilon_{\mathbf{p}^\gamma}(n^2-4l^2)}{\mathbf{p}^{\gamma s}}\right)^{-1}.$$

Комбинируя (2.25) и (2.33), мы завершаем доказательство (2.34). □

2.2. Точная формула для первого момента

Асимптотические свойства функций

$$\Phi_k(s, x) := \frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(1-s/2-k)}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1\left(k-\frac{s}{2}, 1-\frac{s}{2}-k, 1/2; x\right)$$

и

$$\Psi_k(s, x) := x^k \frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(k+1/2-s/2)}{\Gamma(2k)} {}_2F_1\left(k-\frac{s}{2}, k+\frac{1-s}{2}, 2k; x\right)$$

изучались в предыдущей главе при $k \to +\infty$. В данной главе мы предполагаем, что вес k фиксированный, и поэтому,

$$\Phi_k(1/2, x) \ll \max\left(1, \log(1-x)\right), \quad \Psi_k(1/2, x) \ll x^k \max\left(1, \log(1-x)\right). \tag{2.35}$$

Для упрощения записи точной формулы введем следующие обозначения:

$$\Sigma_0(l, N, s) := \frac{\zeta^N(2s)}{l^s} + \frac{(2\pi)^s \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{l^{1-s}\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(k+1/2-s/2)}{\Gamma(k+s/2)\Gamma(k-1/2+s/2)} \Gamma(s-1/2) L^N_0(s), \tag{2.36}$$

$$\Sigma_<(l, N, s) := \frac{(2\pi)^s \sin(\pi s/2)}{\sqrt{\pi} l^{1-s}} \sum_{1\leq n<2l} L^N_{n^2-4l^2}(s) \Phi_k\left(s, \left(\frac{n}{2l}\right)^2\right), \tag{2.37}$$

$$\Sigma_>(l, N, s) := \frac{\pi^s \cos(\pi s/2)}{l\sqrt{\pi}} \sum_{n>2l} L^N_{n^2-4l^2}(s) n^s \Psi_k\left(s, \left(\frac{2l}{n}\right)^2\right), \tag{2.38}$$

$$R_0(l, N, s) := \frac{(2\pi)^s i^{2k}}{2l^{1-s}} \frac{\Gamma(k-s/2)}{\Gamma(k+s/2)} L^N_{-4l^2}(s), \tag{2.39}$$

$$\mathcal{E}(l,N,s) := \Sigma_<(l,N,s) + \Sigma_>(l,N,s) + R_0(l,N,s), \tag{2.40}$$

$$\mathfrak{S}(l,N,s) := \Sigma_0(l,N,s) + \mathcal{E}(l,N,s). \tag{2.41}$$

Следующая лемма позволяет получить аналитическое продолжение $\Sigma_0(l,N,s)$ в центральную точку $s=1/2$.

Лемма 2.2.1. *Для $\nu \geqslant 1$ выполнено тождество:*

$$\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) = \frac{\log \mathbf{p}}{\sqrt{l}}\left(\left[\frac{\nu+1}{2}\right] + \frac{1-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\mathbf{p}}\right) + (1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{MT}(l),$$

где $\mathbf{MT}(l)$ определено в (2.2).

Доказательство. Из формул (2.36), (2.33), (2.13), (2.30) следует, что

$$\begin{aligned}\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2+u) = \frac{\zeta(1+2u)}{l^{1/2+u}}(1-\mathbf{p}^{-1-2u})+\\ + \frac{(2\pi)^{1/2+u}}{l^{1/2-u}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(k-1/4-u/2)\Gamma(k+1/4-u/2)}{\Gamma(k+1/4+u/2)\Gamma(k-1/4+u/2)}\times\\ \times\cos\left(\frac{\pi(1+2u)}{4}\right)\Gamma(u)\zeta(2u)(1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{p}^{-2u\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}.\end{aligned}$$

Применяя [**151**, 5.5.1, 25.4.1], получаем

$$\Gamma(u)\zeta(2u) = 2^{2u}\pi^{2u}\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\zeta(1-2u),$$

из чего следует, что

$$\begin{aligned}\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2+u) = \frac{\zeta(1+2u)}{l^{1/2+u}}(1-\mathbf{p}^{-1-2u})+\\ + \frac{\Gamma(1-2u)\Gamma(k-1/4-u/2)\Gamma(k+1/4-u/2)}{\Gamma(1-u)\Gamma(k+1/4+u/2)\Gamma(k-1/4+u/2)}\times\\ \times\frac{(2\pi)^{3u}\sqrt{2}}{l^{1/2-u}}\cos\left(\frac{\pi(1+2u)}{4}\right)(1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{p}^{-2u\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}\zeta(1-2u).\end{aligned}$$

Разлагая дзета-функции в ряд Лорана и оценивая полученный предел по формуле Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned}\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2) = \frac{2(1-\mathbf{p}^{-1})\gamma}{l^{1/2}}+\\ + \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{1-\mathbf{p}^{-1-2u}}{l^{1/2+u}} - \frac{(2\pi)^{3u}\sqrt{2}}{l^{1/2-u}}\frac{\Gamma(1-2u)\Gamma(k+1/4-u/2)}{\Gamma(1-u)\Gamma(k+1/4+u/2)}\times\right.\\ \left.\times\frac{\Gamma(1-2u)\Gamma(k-1/4-u/2)}{\Gamma(k-1/4+u/2)}\cos\left(\frac{\pi(1+2u)}{4}\right)(1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{p}^{-2u\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}\right)\Bigg|_{u=0}.\end{aligned}$$

Вычисляя производную, мы показываем, что

$$\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=\frac{2(1-\mathbf{p}^{-1})\gamma}{l^{1/2}}+\frac{1}{2\sqrt{l}}\left(\frac{2\log\mathbf{p}}{\mathbf{p}}+2(1-\mathbf{p}^{-1})\left[\frac{\nu+1}{2}\right]\log\mathbf{p}\right)+$$
$$\frac{1-\mathbf{p}^{-1}}{2l^{1/2}}\left(-2\log l+\frac{\pi}{2}-3\log(2\pi)+\psi(k-1/4)+\psi(k+1/4)+\psi(1)\right). \quad (2.42)$$

Сравнив (2.42) с (2.2), заключаем, что

$$\Sigma_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=\frac{\log\mathbf{p}}{\sqrt{l}}\left(\left[\frac{\nu+1}{2}\right]+\frac{1-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\mathbf{p}}\right)+(1-\mathbf{p}^{-1})\mathbf{MT}(l).$$

□

Теперь мы готовы вывести точную формулу для первого момента (2.1). При $N=\mathbf{p}$ можно рассуждать так же, как в доказательстве [**31**, теоремы 5.5] с учётом (0.16). Единственное отличие в том, что мы используем лемму 2.1.9 вместо [**31**, леммы 4.1]. В результате,

$$M_1(l,\mathbf{p},s)=\mathfrak{S}(l,\mathbf{p},s). \quad (2.43)$$

Для $N=\mathbf{p}^\nu$, $\nu\geqslant 3$ мы применяем (0.17), тем самым показывая, что для $(l,p)=1$ выполнено равенство:

$$M_1(l,\mathbf{p}^\nu,s)=\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^\nu,s)-\frac{\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^{\nu-1},s)}{\mathbf{p}}, \quad (2.44)$$

где

$$\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^\nu,s)=\frac{\zeta^{\mathbf{p}}(2s)}{l^s}+2\pi i^{2k}\zeta^{\mathbf{p}}(2s)\sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 0 \pmod{\mathbf{p}^\nu}}}^{\infty}\frac{1}{q}\sum_{\substack{n=1\\(n,p)=1}}^{\infty}\frac{S(l^2,n^2;q)}{n^s}J_{2k-1}\left(4\pi\frac{ln}{q}\right).$$

Так как $\nu\geqslant 3$ мы можем просто убрать условие $(n,p)=1$ в выражениях $\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^\nu,s)$ и $\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^{\nu-1},s)$ благодаря лемме 0.0.3. После этого рассуждаем так же, как в [**31**, лемме 5.1], с той лишь разницей, что вместо [**31**, леммы 4.1] используем лемму 2.1.9.

Заметим, что в случае, когда $\nu=2$, невозможно применить лемму 0.0.3 для того, чтобы убрать условие $(n,p)=1$ в $\mathfrak{S}(l,\mathbf{p}^{\nu-1},s)$. Поэтому нужны более сложные рассуждения.

2.3. Оценки остаточных членов

Лемма 2.3.1. *При $(l,p)=1$ выполнено тождество:*

$$\mathcal{E}(l,\mathbf{p},1/2)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}. \quad (2.45)$$

Доказательство. Начнём доказательство с анализа $R_0(l,\mathbf{p},1/2)$. Из формул (2.39) и (2.33) следует, что

$$R_0(l,\mathbf{p},1/2)\ll\frac{1}{l^{1/2}}\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2)\mathcal{P}(1/2,1,\mathbf{p},-4l^2).$$

Применяя (0.41) и (2.26) (так как $(l,\mathbf{p})=1$) показываем, что

$$R_0(l,\mathbf{p},1/2)\ll\frac{l^{2\theta}}{\sqrt{l\mathbf{p}}}. \tag{2.46}$$

Рассмотрим слагаемое $\Sigma_<(l,\mathbf{p},1/2)$. Применяя (2.37), (2.33), (0.41), лемму 2.1.5, (2.35), мы заключаем, что

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p},1/2)\ll\frac{l^\epsilon}{\sqrt{\mathbf{p}l}}\sum_{\substack{1\leq n<2l\\(4l^2-n^2,\mathbf{p})=1}}(4l^2-n^2)^\theta+\frac{l^\epsilon}{\mathbf{p}\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\leq n<2l\\\mathbf{p}\|4l^2-n^2}}(4l^2-n^2)^\theta+$$
$$+\frac{l^\epsilon}{\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\leq n<2l\\n^2\equiv 4l^2\pmod{\mathbf{p}^2}}}(4l^2-n^2)^\theta. \tag{2.47}$$

Предположим, что $n^2\equiv 4l^2\pmod{\mathbf{p}^a}$. Тогда из условия $(l,p)=1$ следует, что $n\equiv\pm 2l\pmod{\mathbf{p}^a}$. Поэтому вторая сумма в (2.47) пуста при $l\ll\mathbf{p}$, а третья сумма пуста при $l\ll\mathbf{p}^2$. Тем не менее, наибольший вклад приходится на первую сумму. Оценивая все суммы тривиально, мы доказываем, что

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p},1/2)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}. \tag{2.48}$$

Рассмотрим $\Sigma_>(l,\mathbf{p},1/2)$. Применяя (2.38), (2.35), (2.33), (0.41), лемму 2.1.5, доказываем

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p},s)\ll\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}\sum_{\substack{n>2l\\(n^2-4l^2,\mathbf{p})=1}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\mathbf{p}}\sum_{\substack{n>2l\\\mathbf{p}\|n^2-4l^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+$$
$$+l^{2k-1+\epsilon}\sum_{\substack{n>2l\\n^2\equiv 4l^2\pmod{\mathbf{p}^2}}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}. \tag{2.49}$$

Теперь в первой и второй сумме можем расширить диапазон суммирования до всех n, получая

$$\sum_{\substack{n>2l\\(n^2-4l^2,\mathbf{p})=1}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+\sum_{\substack{n>2l\\\mathbf{p}\|n^2-4l^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}\ll$$
$$\ll\sum_{n>2l}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}\ll\sum_{2l<n\leqslant 3l}\frac{(n-2l)^\theta l^\theta}{l^{2k-1/2}}+\sum_{n>3l}\frac{n^{2\theta}}{n^{2k-1/2}}\ll\frac{l^{2\theta}}{l^{2k-3/2}}. \tag{2.50}$$

Далее мы оцениваем последнюю сумму в (2.49). Поскольку $(l,\mathbf{p})=1$, то либо $n\equiv 2l\pmod{\mathbf{p}^2}$, либо $n\equiv -2l\pmod{\mathbf{p}^2}$. Мы рассмотрим только первый случай, поскольку второй может быть изучен аналогичным образом. Соответственно,

$$\sum_{\substack{n>2l\\n\equiv 2l\pmod{\mathbf{p}^2}}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}\mathbf{p}^{2\theta}\sum_{m>0}\frac{m^\theta(m\mathbf{p}^2+4l)^\theta}{(m\mathbf{p}^2+2l)^{2k-1/2}}\ll\min\left(\frac{\mathbf{p}^{4\theta}}{\mathbf{p}^{4k-1}},\frac{l^{2\theta}}{l^{2k-3/2}\mathbf{p}^2}\right). \tag{2.51}$$

Подставляя (2.50) и (2.51) в (2.49), получаем

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p},s)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}+\min\left(\frac{\mathbf{p}^{4\theta}l^{2k-1+\epsilon}}{\mathbf{p}^{4k-1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^2}\right)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}. \tag{2.52}$$

Таким образом, оценка (2.45) следует из (2.40), (2.46), (2.48) и (2.52). □

Лемма 2.3.2. *Пусть* $(l,p)=1$ *и* $\nu\equiv 0 \pmod 2$. *Тогда выполнена оценка:*

$$\mathcal{E}(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right). \tag{2.53}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.1. Из (2.39), (2.33), (2.27) и того факта, что $(l,\mathbf{p})=1$ следует, что $R_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=0$. Рассмотрим слагаемое $\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)$. Применяя (2.37), (2.35), (2.33), (0.41), (2.27), (2.28), (2.29), получаем

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\le n<2l\\ \mathbf{p}^{\nu-1}\|4l^2-n^2}}1+\frac{l^{2\theta+\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\le n<2l\\ n^2\equiv 4l^2 \pmod{\mathbf{p}^\nu}}}1. \tag{2.54}$$

Условие $(l,\mathbf{p})=1$ означает, что $n^2\equiv 4l^2 \pmod{p^a}$ эквивалентно $n\equiv\pm 2l \pmod{p^a}$. Поэтому для $l\ll\mathbf{p}^{\nu-1}$ суммы в (2.54) пусты, и соответственно, $\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=0$. Для $l\gg\mathbf{p}^{\nu-1}$ оценивая суммы тривиально, доказываем

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}. \tag{2.55}$$

Расмотрим слагаемое $\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)$. Применяя (2.38), (2.35), (2.33), (0.41), леммы 2.1.6 и 2.1.7, оцениваем

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\mathbf{p}}\sum_{\substack{n>2l\\ \mathbf{p}^{\nu-1}\|4l^2-n^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+l^{2k-1+\epsilon}\sum_{\substack{n>2l\\ n^2\equiv 4l^2 \pmod{\mathbf{p}^\nu}}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}. \tag{2.56}$$

Как и в лемме 2.3.1 заключаем, что во второй сумме суммирование можно проводить в области $n\equiv\pm 2l \pmod{\mathbf{p}^\nu}$, а в первой сумме область суммирования можно расширить до $n\equiv\pm 2l \pmod{\mathbf{p}^{\nu-1}}$. Далее мы рассмотрим только случай с плюсом, так как случай с минусом оценивается аналогично. Соответственно,

$$\begin{aligned}\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\mathbf{p}}\sum_{\substack{n>2l\\ \mathbf{p}^{\nu-1}\|4l^2-n^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}&\ll\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2(\nu-1)\theta}}{\mathbf{p}^{(\nu-1)(2k-1/2)+1}}\sum_{m>0}\frac{m^\theta(m+4l/\mathbf{p}^{\nu-1})^\theta}{(m+2l/\mathbf{p}^{\nu-1})^{2k-1/2}}\\ &\ll\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2(\nu-1)\theta}}{\mathbf{p}^{(\nu-1)(2k-1/2)+1}}\min\left(1,\frac{(l/\mathbf{p}^{\nu-1})^{2\theta}}{(l/\mathbf{p}^{\nu-1})^{2k-3/2}}\right)\\ &\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right).\end{aligned} \tag{2.57}$$

Оценивая вторую сумму в (2.56) аналогично, доказываем, что

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right)+\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta\nu}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)\nu}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right)$$
$$\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right). \quad (2.58)$$

Таким образом, (2.53) следует из (2.40), (2.55), (2.58). □

Лемма 2.3.3. *Пусть* $(l,p)=1$ *и* $\nu=2\nu_1+1>1$. *Тогда*

$$\mathcal{E}(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right). \quad (2.59)$$

Доказательство. Будем рассуждать так же, как в доказательстве леммы 2.3.2. Используя (2.39), (2.33), (2.27), получаем $R_0(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=0$. Рассмотрим член $\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)$. Из (2.37), (2.35), (2.33), (0.41), лемм 2.1.6 и 2.1.7 следует, что

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{2\theta+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}l}}\sum_{\substack{1\le n<2l\\ \mathbf{p}^{\nu-1}\|4l^2-n^2}}1+\frac{l^{2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\le n<2l\\ \mathbf{p}^{\nu}\|4l^2-n^2}}1+\frac{l^{2\theta+\epsilon}}{\sqrt{l}}\sum_{\substack{1\le n<2l\\ n^2\equiv 4l^2 \pmod{\mathbf{p}^{\nu+1}}}}1. \quad (2.60)$$

Снова при $l\ll\mathbf{p}^{\nu-1}$ суммы в (2.60) пусты, и поэтому $\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)=0$. Для $l\gg\mathbf{p}^{\nu-1}$ тривиальная оценка приводит к

$$\Sigma_<(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}. \quad (2.61)$$

Рассмотрим слагаемое $\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)$. Применяя (2.38), (2.35), (2.33), (0.41), леммы 2.1.6 и 2.1.7, показываем

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\sqrt{\mathbf{p}}}\sum_{\substack{n>2l\\ \mathbf{p}^{\nu-1}\|4l^2-n^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+\frac{l^{2k-1+\epsilon}}{\mathbf{p}}\sum_{\substack{n>2l\\ \mathbf{p}^{\nu}\|4l^2-n^2}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}+$$
$$+l^{2k-1+\epsilon}\sum_{\substack{n>2l\\ n^2\equiv 4l^2 \pmod{\mathbf{p}^{\nu+1}}}}\frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{2k-1/2}}. \quad (2.62)$$

Оценивая суммы (2.62) как в (2.57), заключаем

$$\Sigma_>(l,\mathbf{p}^\nu,1/2)\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right)+$$
$$+\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta\nu}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)\nu+1}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu+1}}\right)+\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu+1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu+1)}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu+1}}\right)$$
$$\ll\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}},\frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right). \quad (2.63)$$

Таким образом, (2.59) следует из (2.40), (2.61), (2.63). □

2.4. Доказательство теорем 2.0.1 и 2.0.2

Формула (2.3) следует немедленно из (2.43), (2.41), лемм 2.2.1 и 2.3.1.

Докажем (2.4). Подставляя (2.41) в (2.44), применяя лемму 2.2.1, мы получаем главный член в формуле (2.4). Чтобы оценить остаточный член, мы рассмотрим отдельно чётные и нечётные ν.

В случае, когда $\nu \equiv 0 \pmod 2$, $\nu \geqslant 4$, применяя лемму 2.3.2 и лемму 2.3.3 с заменой ν на $\nu - 1$, показываем, что

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^\nu}\right) + \\ + \frac{1}{\mathbf{p}}\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-2)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-2)+1/2}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-3/2}}\right) = \\ = \min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-2)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-2)+3/2}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right).$$

Таким образом, оценка (2.5) доказана.

В случае, когда $\nu \equiv 1 \pmod 2$, $\nu \geqslant 3$, применяя лемму 2.3.2 с заменой ν на $\nu - 1$ и лемму 2.3.3, получаем

$$\mathbf{ET}(l, \mathbf{p}^\nu) = \min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-1)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-1)+1/2}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1/2}}\right) + \frac{1}{\mathbf{p}}\min\left(\frac{l^{2k-1+\epsilon}\mathbf{p}^{2\theta(\nu-2)}}{\mathbf{p}^{(2k-1/2)(\nu-2)+1}}, \frac{l^{1/2+2\theta+\epsilon}}{\mathbf{p}^{\nu-1}}\right). \quad (2.64)$$

Рассматривая случаи $l < \mathbf{p}^{\nu-2}$, $\mathbf{p}^{\nu-2} < l < \mathbf{p}^{\nu-1}$ и $l > \mathbf{p}^{\nu-1}$ можно упростить (2.64) до (2.6), (2.7) и (2.8) соответственно, что завершает доказательство теоремы 2.0.2.

ГЛАВА 3

Первый момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса

В данной главе мы исследуем асимптотическое поведение первого момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса (0.20) с дополнительным множителем, равным коэффициенту (0.18) с индексом l^2.

Для $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$ введем тестовую функцию

$$\omega_T(r) := \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{2T} \exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right) dK. \tag{3.1}$$

Рассмотрим

$$\mathcal{M}_1(l,s) := \sum_j \omega_T(t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2\, u_j, s)$$

на критической прямой $s = 1/2+it$ и в центральной точке $s = 1/2$, где α_j — нормирующий коэффициент (0.23).

Теорема 3.0.1. *Предположим, что $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$. При $s = 1/2 + it$, $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$ и $l \ll G^2/T^\epsilon$ выполнено равенство*

$$M_1(l,s) = MT(T;G;l;t) + O(T(1+|t|)^{\theta_t} l^{1/2+2\theta} + T(1+|t|)^{\vartheta} l^{\epsilon} \log^3 T), \tag{3.2}$$

где $\theta = \theta_t = 1/6 + \epsilon$, $\vartheta = 13/84 + \epsilon$, а $MT(T;G;l;t)$ — это главный член, заданный формулой (3.19).

Заметим, что параметры θ и θ_t определяются из оценки (0.42) на L-функции Дирихле квадратичных характеров, а параметр ϑ из оценки (0.7) на дзета функцию Римана.

Теорема 3.0.2. *Предположим, что $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$. Имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$M_1(l,1/2) = \frac{1}{\pi^2 l^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} r(\omega_T(r) + \omega_T(-r)) \tanh(\pi r) \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\log(2\pi) - \log l + \frac{\psi(1/4+ir) + \psi(1/4-ir)}{2}\right) dr + O(Tl^{1/2+2\theta}), \tag{3.3}$$

где $\theta = 1/6 + \epsilon$.

Теорема 3.0.2 улучшает результаты Нг [**147**, теорема 7.1.1] и Танга [**171**].

Доказательство теорем 3.0.1 и 3.0.2 основано на методе аналитического продолжения. А именно, при помощи данного метода мы выводим точную формулу для скрученного первого момента в разделе 4.1, что позволяет нам получить асимптотические формулы (3.2) и (3.3), анализируя соответствующие специальные функции в разделе 3.2.

3.1. Точная формула

В этом разделе мы докажем точную формулу, связывающую первый момент

$$\mathcal{M}_1(l,\rho;h) := \sum_j h(t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\operatorname{sym}^2 u_j,\rho)$$

с суммой значений L-рядов Загира (0.37) вида $\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)$, умноженных на интеграл

$$I(\rho;x) := \frac{2}{2\pi i}\int_{(\Delta)} \hat{\phi}(w)\Gamma(1-\rho-w)\sin\left(\pi\frac{\rho+w}{2}\right)(x/2)^w dw, \tag{3.4}$$

где $\hat{\phi}$ – преобразование Меллина функции (0.32), $-1-2N<\Delta<1-\operatorname{Re}\rho$.

Далее мы будем использовать различные тестовые функции $h(t)$, удовлетворяющие некоторым из следующих условий:

C1: $h(t)$ — чётная функция;

C2: $h(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im}(t)|<\Delta$ для некоторого $\Delta>1/2$;

C3: $h(t)$ такова, что в полосе $|\operatorname{Im}(t)|<\Delta$, $\Delta>1/2$ справедлива оценка $h(t)\ll(1+|t|)^{-2-\epsilon}$;

C4: $h(\pm(n+1/2)i)=0$ для $n=0,1,\dots N-1$, где $N>0$ — достаточно большое целое число.

Теорема 3.1.1. *При $0<\operatorname{Re}\rho<1$ для любой функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям $(C1)-(C4)$, выполнено равенство*

$$\begin{aligned}M_1(l,\rho;h) = \frac{\zeta(2\rho)}{\pi^2 l^\rho}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)dr + (2\pi)^{\rho-1}\zeta(2\rho-1)\frac{I(\rho;2)}{(2l)^{1-\rho}}\\ -\frac{\zeta(\rho)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{ir}(l^2)\zeta(\rho+2ir)\zeta(\rho-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h(r)dr\\ -\frac{2\zeta(2\rho-1)}{\zeta(2-\rho)}\tau_{(1-\rho)/2}(l^2)h\left(\frac{1-\rho}{2i}\right)+\frac{\hat{\phi}(1-\rho)}{(4\pi l)^{1-\rho}}\mathscr{L}_{-4l^2}(\rho)\\ +(2\pi)^{\rho-1}\sum_{n=1}^{2l-1}\frac{1}{n^{1-\rho}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)I\left(\rho;\frac{n}{l}\right)\\ +(2\pi)^{\rho-1}\sum_{n=2l+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\rho}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)I\left(\rho;\frac{n}{l}\right).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы 3.1.1 основано на методе аналитического продолжения.

Поэтому сначала предположим, что $\operatorname{Re}\rho$ достаточно велико.

Лемма 3.1.2. *При* $\operatorname{Re}\rho > 3/2$ *для любой функции* $h(t)$*, удовлетворяющей условиям* $(C1)-(C4)$*, справедлива следующая точная формула:*

$$M_1(l,\rho;h) = \frac{\zeta(2\rho)}{\pi^2 l^\rho} H_0 - \frac{\zeta(\rho)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{ir}(l^2)\zeta(\rho+2ir)\zeta(\rho-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2} h(r)dr + \frac{\hat\phi(1-\rho)}{(4\pi l)^{1-\rho}}\mathscr{L}_{-4l^2}(\rho) + (2\pi)^{\rho-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\rho}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho) I\left(\rho;\frac{n}{l}\right). \quad (3.6)$$

Доказательство. Это аналог [**31**, леммы 5.1]. Единственное отличие состоит в том, что вместо формулы следа Петерсона теперь применяется формула следа Кузнецова (0.33). Следовательно, вместо функции Бесселя $J_{2k-1}(4\pi ln/q)$ в качестве весовой функции в суммах сумм Клостермана мы имеем $\phi(4\pi ln/q)$. Соответственно, требуется заменить преобразование Меллина $J_{2k-1}(x)$ равное

$$\hat J_{2k-1}(w) = 2^{w-1}\frac{\Gamma(k-1/2+w/2)}{\Gamma(k+1/2-w/2)}$$

на $\hat\phi(w)$ везде в [**31**, лемме 5.1]. Наконец, отметим, что лемма 0.0.7 гарантирует абсолютную сходимость всех сумм и интегралов. □

Для доказательства аналитического продолжения (3.6) в область $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$ требуется исследовать

$$C(l;\rho) := \frac{\zeta(\rho)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{ir}(l^2)\zeta(\rho+2ir)\zeta(\rho-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h(r)dr = \frac{\zeta(\rho)}{2\pi i}\int_{(0)}\frac{\tau_{z/2}(l^2)\zeta(\rho+z)\zeta(\rho-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\frac{z}{2i}\right)dz.$$

Применяя [**64**, следствие 2.4.2, с. 55] получаем, что для $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$

$$C(l;\rho) = \frac{\zeta(\rho)}{2\pi}\int_{(0)}\frac{\tau_{z/2}(l^2)\zeta(\rho+z)\zeta(\rho-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\frac{z}{2i}\right)dz + \zeta(\rho)\left(res_{z=1-\rho}-res_{z=\rho-1}\right)\frac{\tau_{z/2}(l^2)\zeta(\rho+z)\zeta(\rho-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\frac{z}{2i}\right).$$

Вычисляя остатки при помощи (0.38) и (0.31), мы доказываем теорему 3.1.1.

Теперь приступим к более подробному исследованию интеграла $I(\rho;x)$.

Лемма 3.1.3. *Предположим, что* $x \geq 2$ *и* $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$*. Тогда*

$$I(\rho;x) = \frac{2^{2-\rho}i}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2ir}\frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1-\rho/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)} \times \sin\left(\pi(\rho/2-ir)\right){}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir, 1-\rho/2+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right)dr. \quad (3.7)$$

Доказательство. Подставив (0.34) в (3.4), получим

$$I(\rho;x)=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(w/2+ir)}{\Gamma(1-w/2+ir)}\times \\ \Gamma(1-\rho-w)\sin\left(\pi\frac{\rho+w}{2}\right)x^{w}dwdr \quad (3.8)$$

с $0<\Delta<1-\operatorname{Re}\rho$. Перемещая прямую интегрирования влево и вычисляя вычеты в точках $w=-2ir-2j$, $j=0,1,2\ldots$, находим

$$I(\rho;x)=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}2\sin\left(\pi(\rho/2-ir)\right)x^{-2ir}\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-\rho+2ir+2j)x^{-2j}}{\Gamma(1+2ir+j)j!}dr.$$

Применяя [**151**, ур. 5.5.5], мы завершаем доказательство (3.7). □

Лемма 3.1.4. *Для* $0<\operatorname{Re}\rho<1$ *справедливо следующее интегральное представление:*

$$I(\rho;2)=\Gamma(\rho-1/2)\frac{2^{2-\rho}i}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\sin\left(\pi(\rho/2-ir)\right) \\ \times\frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1-\rho/2+ir)}{\Gamma(\rho/2+ir)\Gamma(1/2+\rho/2+ir)}dr. \quad (3.9)$$

Доказательство. Положим $x=2$ в (3.7) и применим [**151**, ур. 15.4.20]. Тогда

$${}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir,1-\rho/2+ir,1+2ir;1\right)=\frac{\Gamma(\rho-1/2)\Gamma(1+2ir)}{\Gamma(\rho/2+ir)\Gamma(1/2+\rho/2+ir)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.1.5. *При* $x<2$ *и* $0<\operatorname{Re}\rho<1$ *выполнено равенство*

$$I(\rho;x)=\frac{2i}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}x^{1-\rho}\frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1/2-\rho/2-ir)}{\Gamma(1/2)} \\ \times\cos\left(\pi(\rho/2+ir)\right){}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir,1/2-\rho/2-ir,1/2;\frac{x^2}{4}\right)dr. \quad (3.10)$$

Доказательство. Сдвигая контур интегрирования в (3.8) вправо, мы пересекаем простые полюса в точках $w=1-\rho+j$, $j=0,1,2,\ldots$. Следовательно,

$$I(\rho;x)=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}x^{1-\rho}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(1/2-\rho+ir+m)x^{2m}}{\Gamma(1/2+\rho+ir-m)(2m)!}dr.$$

Используя [**151**, ур. 5.5.3] для $\Gamma(1/2+\rho+ir-m)$ и [**151**, ур. 5.5.5] для $\Gamma(2m+1)$, мы доказываем (3.10). □

Лемма 3.1.6. *При* $0<z<2$ *и* $0<\operatorname{Re}\rho<1$ *выполнено равенство*

$$I(\rho;z)=z^{1-\rho}\frac{2^{1+\rho}i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\int_{0}^{\infty}x^{-\rho}J_{2ir}(x)\cos\left(\frac{xz}{2}\right)dxdr. \quad (3.11)$$

Доказательство. Применяя [**89**, ур. 6.699.2], мы доказываем, что при $0 < z < 2$, $-1/2 < \operatorname{Re}\rho < 1$

$$\int_0^\infty x^{-\rho} J_{2ir}(x)\cos\left(\frac{xz}{2}\right)dx = \frac{2^{-\rho}\Gamma(1/2-\rho/2+ir)}{\Gamma(1/2+\rho/2+ir)} \times {}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir, 1/2-\rho/2-ir, 1/2; \frac{z^2}{4}\right).$$

Используя [**151**, ур. 5.5.3], получаем равенство

$$\int_0^\infty x^{-\rho} J_{2ir}(x)\cos\left(\frac{xz}{2}\right)dx = \frac{1}{2^\rho\pi}\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1/2-\rho/2-ir) \times \cos\left(\pi(\rho/2+ir)\right){}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir, 1/2-\rho/2-ir, 1/2; \frac{z^2}{4}\right). \quad (3.12)$$

Наконец, (3.11) следует из (3.10) и (3.12). □

Замечание 3.1.7. *Формула* (3.11) *также верна для* $z \geq 2$. *Равенство* (3.11) *можно переписать следующим образом:*

$$I(\rho; z) = z^{1-\rho}2^\rho \int_0^\infty \phi(x)x^{-\rho}\cos\left(\frac{xz}{2}\right)dx,$$

где $\phi(x)$ *определяется формулой* (0.32).

Теперь приступим к доказательству точной формулы в центральной точке.

Теорема 3.1.8. *Для любой функции* $h(t)$, *удовлетворяющей условиям* $(C1)-(C4)$, *выполнено равенство*

$$M_1(l, 1/2; h) = \frac{1}{\pi^2 l^{1/2}}\int_{-\infty}^\infty rh(r)\tanh(\pi r)\left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4} - \log l - \frac{3}{2}\log(2\pi) + \frac{\psi(1/4+ir)+\psi(1/4-ir)}{2}\right)dr - \frac{\zeta(1/2)}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_{ir}(l^2)h(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2}\zeta(1/2+2ir)\zeta(1/2-2ir)dr - \frac{2\zeta(0)}{\zeta(3/2)}\tau_{1/4}(l^2)h\left(\frac{1}{4i}\right) + \frac{\hat{\phi}(1/2)}{(4\pi l)^{1/2}}\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2) + \sum_{n=1}^{2l-1}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)}{\sqrt{2\pi n}}I\left(\frac{1}{2}; \frac{n}{l}\right) + \sum_{n=2l+1}^\infty \frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)}{\sqrt{2\pi n}}I\left(\frac{1}{2}; \frac{n}{l}\right). \quad (3.13)$$

Доказательство. Для доказательства (3.13) требуется исследовать (см. (3.5))

$$\lim_{\rho\to 1/2}\left(\frac{\zeta(2\rho)}{\pi^2 l^\rho}\int_{-\infty}^\infty rh(r)\tanh(\pi r)dr + (2\pi)^{\rho-1}\zeta(2\rho-1)I(\rho;2)\right).$$

Пусть $\rho = 1/2 + u$. Применяя (3.9), сводим нашу задачу к вычислению

$$\lim_{u\to 0}\Bigg(\frac{\zeta(1+2u)}{\pi^2 l^{1/2+u}}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)dr + \zeta(2u)\Gamma(u)\frac{2i}{\pi^{2-u}(2l)^{1/2-u}}\times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\sin\left(\pi(1/4+u/2-ir)\right)\frac{\Gamma(1/4-u/2+ir)\Gamma(3/4-u/2+ir)}{\Gamma(1/4+u/2+ir)\Gamma(3/4+u/2+ir)}dr\Bigg). \quad (3.14)$$

Используя функциональное уравнение для дзета-функции Римана [**151**, ур. 25.4.1], а именно

$$\zeta(2u)\Gamma(u) = (2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\zeta(1-2u),$$

получаем, что предел (3.14) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\Bigg(\frac{2\gamma\tanh(\pi r)}{\pi^2 l^{1/2}} - \frac{\log l}{2\pi^2 l^{1/2}}\tanh(\pi r) - \frac{i}{\pi^2(2l)^{1/2}}\frac{\sin(\pi(1/4-ir))}{\cosh(\pi r)}\Big($$

$$\log(8\pi^3 l) - \psi(1) - \psi(1/4+ir) - \psi(3/4+ir)\Big) - \frac{i}{\pi^2(2l)^{1/2}}\frac{\pi\cos(\pi(1/4-ir))}{2\cosh(\pi r)}\Bigg)dr. \quad (3.15)$$

Из [**151**, ур. 5.5.4] следует, что

$$\psi(3/4+ir) = \psi(1/4-ir) + \frac{\pi}{\tan(1/4-ir)}. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.15), применяя следующие тождества:

$$\sin(\pi(1/4-ir)) = \sin(\pi/4)\cosh(\pi r) - i\cos(\pi/4)\sinh(\pi r),$$

$$\cos(\pi(1/4-ir)) = \cos(\pi/4)\cosh(\pi r) + i\sin(\pi/4)\sinh(\pi r),$$

и используя тот факт, что $h(r)$ чётна, а интеграл от нечётной функции по числовой оси равен нулю, мы завершаем доказательство.

□

3.2. Доказательство основных теорем

Сначала напомним некоторые свойства функции $\omega_T(r)$, заданной формулой (3.1). Предположим, что $T^\epsilon < G < T^{1-\epsilon}$. Для любого $A > 1$ и некоторого $c > 0$ (см. [**98**])

$$\omega_T(r) = 1 + O(r^{-A}),\ \text{если}\ T + cG\sqrt{\log T} < r < 2T - cG\sqrt{\log T},$$

$$\omega_T(r) = O((|r|+T)^{-A}),\ \text{если}\ r < T - cG\sqrt{\log T}\ \text{или}\ r > 2T + cG\sqrt{\log T},$$

и в противном случае

$$\omega_T(r) = 1 + O(G^3(G + \min(|r-T|, |r-2T|))^{-3}).$$

Кроме того, справедливы следующие тривиальные оценки:

$$\omega_T(r) \ll TG^{-1} \exp\left(-\frac{(r-T)^2}{G^2}\right), \text{ если } r < T,$$

$$\omega_T(r) \ll TG^{-1} \exp\left(-\frac{(r-2T)^2}{G^2}\right), \text{ если } r > 2T.$$

Для произвольного большого целого числа N определим

$$q_N(r) := \frac{(r^2+1/4)\dots(r^2+(N-1/2)^2)}{(r^2+100N^2)^N}, \tag{3.17}$$

$$h(K,N;r) := q_N(r)\exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right) + q_N(r)\exp\left(-\frac{(r+K)^2}{G^2}\right). \tag{3.18}$$

Заметим, что $q_N(r) = 1+O(1/r^2)$ и что функция $h(K,N;r)$ удовлетворяет условиям $(C1)-(C4)$.

3.2.1. Доказательство теоремы 3.0.1. Чтобы доказать теорему 3.0.1, мы применяем теорему 3.1.1 с тестовой функцией (3.18), а затем интегрируем результат по K, чтобы получить (3.1).

Взяв $s = 1/2 + it$ в теореме 3.1.1, мы находим, что главный член равен

$$\begin{aligned} MT(T;G;l;t) = \frac{\zeta(2s)}{\pi^2 l^s}\int_{-\infty}^{\infty} r(\omega_T(r)+\omega_T(-r))\tanh(\pi r)dr \\ + \frac{(2\pi)^{s-1}}{(2l)^{1-s}}\zeta(2s-1)\Gamma(s-1/2)\frac{2^{2-s}i}{\pi^{3/2}}\times \\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\omega_T(r)+\omega_T(-r))}{\cosh(\pi r)}\sin\left(\pi(s/2-ir)\right)\frac{\Gamma(1/2-s/2+ir)\Gamma(1-s/2+ir)}{\Gamma(s/2+ir)\Gamma(1/2+s/2+ir)}dr. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Далее оценим вклад остальных слагаемых.

В приведенных ниже рассуждениях мы будем часто использовать [**89**, ур. 3.323.2] и [**89**, ур. 3.462.2], а именно

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-p^2x^2+qx)dx = \frac{\pi^{1/2}}{p}\exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right), \quad \text{if} \quad \mathrm{Re}(p^2) > 0, \tag{3.20}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\exp(-x^2+qx)dx = P_n(q)\exp\left(\frac{q^2}{4}\right),$$

где n — неотрицательное целое число, а $P_n(q)$ — многочлен степени n.

Лемма 3.2.1. *Для* $\rho = 1/2 + 2it$, $|t| \ll T^{1-\epsilon}$, $|t| \ll T^{2-\epsilon}/G^2$ *и* $x \gg T^{\epsilon}$ *справедлива следующая оценка:*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{2T} I(\rho; x) dK \ll x^{-2N} T^2. \tag{3.21}$$

Доказательство. Используя интегральное представление [**151**, ур. 15.6.1] для гипергеометрической функции из (3.7), получаем

$$I(\rho; x) = \frac{2^{2-\rho} i}{\pi^{3/2}} \int_0^1 \frac{y^{-1/4-it}(1-y)^{-3/4+it}}{(1-4y/x^2)^{1/4-it}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)} \sin\left(\pi(\rho/2 - ir)\right) \times \frac{\Gamma(1/4 + i(r-t))}{\Gamma(1/4 + i(r+t))} \left(\frac{y(1-y)}{x^2/4 - y}\right)^{ir} dr dy. \tag{3.22}$$

Поскольку (3.18) содержит $q_N(r)$, определяемое (3.17), мы не проходим ни одного полюса, перемещая линию интегрирования (3.22) на $\operatorname{Im} r = -N$. Применяя формулу Стирлинга (0.4), показываем, что

$$\frac{\sin\left(\pi(\rho/2 - ir)\right)}{\cosh(\pi r)} \frac{\Gamma(1/4 + i(r-t))}{\Gamma(1/4 + i(r+t))} \ll \frac{|r+t|^{1/4}}{|r-t|^{1/4}} \exp\left(\max(2t - 2|r|, 0)\right).$$

Поскольку $|t| \ll T^{1-\epsilon}$ и $|t| \ll T^{2-\epsilon}/G^2$, доказываем, что

$$\exp\left(\max(2t - 2|r|, 0)\right) h(r) \ll 1. \tag{3.23}$$

Наконец, используя (3.23), оцениваем тривиально все интегралы в (3.22) и выводим (3.21). □

Лемма 3.2.2. *Предположим, что* $\rho = 1/2 + 2it$, $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$ *и* $x > 2$. *Тогда*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{2T} I(\rho; x) dK \ll \exp\left(-G^2 \log^2\left(x/2 + \sqrt{x^2/4 - 1}\right)\right) T^2 + T^{-A}, \tag{3.24}$$

где $A > 0$ *- произвольное фиксированное число.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно оценить вклад первого слагаемого в (3.18), поскольку второе слагаемое оценивается аналогично. Для этого мы распишем все множители в (3.22) (кроме экспоненты в (3.18)) в ряды Тейлора. Заметим, что интеграл по r в (3.22) можно рассматривать в области $|r - K| < G \log^2 K$, так как вклад других значений r принебрежимо мал. Используя формулу Стирлига (0.4), а также условие $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$, получаем

$$\frac{\sin\left(\pi(\rho/2 - ir)\right)}{\cosh(\pi r)} \frac{\Gamma(1/4 + i(r-t))}{\Gamma(1/4 + i(r+t))} = \frac{(r+t)^{1/4}}{(r-t)^{1/4}} \times \exp\left(i\left(2t + (r-t)\log(r-t) - (r+t)\log(r+t)\right)\right)(1 + \ldots).$$

Заметим, что

$$2t + (r-t)\log(r-t) - (r+t)\log(r+t) = 2t - 2t\log r + \\ r\left((1-t/r)\log(1-t/r) - (1+t/r)\log(1+t/r)\right) = -2t\log r + \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{10r^4} + \dots$$

Так как $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$, выписав достаточно много слагаемых в разложении, получаем, что r-интеграл в (3.22) равен

$$\int_{K-G\log^2 T}^{K+G\log^2 T} r\exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right)\exp\left(-i2t\log r + \frac{it^3}{3r^2} + \frac{it^5}{10r^4} + \dots\right)\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{ir} dr$$

с точностью до аналогичных слагаемых меньшего размера и пренебрежимо малого остаточного члена. Замена переменных $r := K + Gx$ позволяет записать главный член как

$$KG\int_{-\log^2 T}^{\log^2 T}\exp\left(-x^2\right)\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{i(K+Gx)} \\ \times\exp\left(-i2t\log(K+Gx) + \frac{it^3}{3(K+Gx)^2} + \frac{it^5}{10(K+Gx)^4} + \dots\right)dx. \quad (3.25)$$

Заметим, что для $|x| < \log^2 T$ и $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$ выполнены равенства

$$\exp\left(-i2t\log(K+Gx)\right) = \exp\left(-i2t\log K\right)\exp\left(-i2t\frac{Gx}{K} + \dots\right) \\ = \exp\left(-i2t\log K\right)\left(1 - i2t\frac{Gx}{K} + \dots\right)$$

и

$$\exp\left(\frac{it^3}{3(K+Gx)^2}\right) = \exp\left(\frac{it^3}{3K^2} - \frac{2it^3Gx}{3K^3} + \dots\right) = \exp\left(\frac{it^3}{3K^2}\right)\left(1 - \frac{2it^3Gx}{3K^3} + \dots\right).$$

Аналогичные разложения могут быть записаны для всех слагаемых в (3.25). Таким образом, существует функция $\phi = \phi(t,K)$ такая, что выражение в (3.25) равно

$$KG\exp\left(i\phi(t,K)\right)\int_{-\log^2 T}^{\log^2 T}\exp\left(-x^2\right)\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{i(K+Gx)} dx$$

плюс аналогичные слагаемые меньшего размера и пренебрежимо малый остаток.

Далее можно расширить интервал интегрирования до $(-\infty,\infty)$, при этом вводя новый пренебрежимо малый остаток. Применяя (3.20), получаем

$$\pi^{1/2}KG\exp\left(i\phi(t,K)\right)\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{iK}\exp\left(-\frac{G^2}{4}\log^2\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)\right).$$

Подставляя это выражение в (3.22), доказываем равенство

$$I(\rho;x) = \frac{2^{2-\rho}i}{\pi^{3/2}}\pi^{1/2}KG\exp\left(i\phi(t,K)\right)\int_0^1 \frac{y^{-1/4-it}(1-y)^{-3/4+it}}{(1-4y/x^2)^{1/4-it}}\times \\ \left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{iK}\exp\left(-\frac{G^2}{4}\log^2\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)\right)dy + \dots$$

Оценивая интеграл по y тривиально, получаем оценку

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(\rho;x)dK \ll T^2 \max_{0<y<1} \exp\left(-\frac{G^2}{4}\log^2\left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)\right) + T^{-A}.$$

Максимум достигается в точках $y_0 = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^{1/2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(\rho;x)dK \ll T^2 \exp\left(-G^2\log^2\left(x/2+\sqrt{x^2/4-1}\right)\right) + T^{-A}.$$

□

Следствие 3.2.3. *Пусть* $\rho = 1/2+2it$, $|t| \ll T^{1-\epsilon}/G$ *и* $l \ll G^2T^{-\epsilon}$. *Тогда*

$$\sum_{n=2l+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\rho}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I\left(\rho;\frac{n}{l}\right)dK \ll T^{-A}, \tag{3.26}$$

где $A > 0$ *– произвольное фиксированное число.*

Доказательство. Применяя (3.21), (3.24) и (0.42), доказываем, что левая часть уравнения (3.26) ограничена следующей величиной

$$(1+|t|)^{\theta_t}T^2 \sum_{2l<n<T^\epsilon} \frac{(n^2-4l^2)^\theta}{n^{1/2}} \exp\left(-G^2\log^2\left(n/(2l)+\sqrt{n^2/(4l^2)-1}\right)\right) + T^{-A}.$$

Для $n \geq 2l+1$ выполнена оценка

$$G^2\log^2\left(n/(2l)+\sqrt{n^2/(4l^2)-1}\right) \gg \frac{G^2}{l} \gg T^\epsilon,$$

которая показывает, что сумма в (3.2.1) пренебрежимо мала. □

Лемма 3.2.4. *При* $0 < z < 2$ *и* $\rho = 1/2+2it$ *выполнена оценка*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(\rho;z)dK \ll T\frac{\sqrt{z}}{(2-z)^{1/2}}\log T. \tag{3.27}$$

Доказательство. Рассмотрим ядро Бесселя

$$k^+(y,v) = \frac{1}{2\cos\pi v}\left(J_{2v-1}(y) - J_{1-2v}(y)\right).$$

В соответствии с [**4**, ур. (4.5)]

$$k^+(a,1/2+it) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(a\cosh z\right)\cos\left(2tz\right)dz = \\ = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos\left(au\right)}{\sqrt{u^2-1}}\cos\left(2t\log\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)\right)du.$$

Интегрируя по частям (см. [**4**, ур. (4.11)]), получаем

$$k^+(a,1/2+it) = \frac{2}{\pi}\int_0^U \cos\left(a\cosh u\right)\cos\left(2tu\right)du + O\left(\frac{1+|t|}{a\exp(U)}\right).$$

Так как функция $h(r)$ чётная, мы можем записать (3.11) как

$$I(\rho;z)=\frac{2^{2+\rho}}{\pi z^{\rho-1}}\int_0^\infty rh(r)\tanh(\pi r)\int_0^\infty k^+(x,1/2+ir)\cos\left(\frac{xz}{2}\right)\frac{dxdr}{x^\rho}. \tag{3.28}$$

Пусть $\epsilon>0$ – некоторое маленькое число, которое будет выбрано позже. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^\infty k^+(x,1/2+ir)\frac{\cos\left(\frac{xz}{2}\right)}{x^\rho}dx &= \int_\epsilon^\infty k^+(x,1/2+ir)\frac{\cos\left(\frac{xz}{2}\right)}{x^\rho}dx+O(\sqrt{\epsilon})\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^U\cos(2ru)\int_\epsilon^\infty\cos(x\cosh u)\frac{\cos\left(\frac{xz}{2}\right)}{x^\rho}dxdu+O\left(\epsilon^{1/2}+\frac{1+|r|}{\exp(U)\epsilon^{1/2}}\right)\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^U\cos(2ru)\int_0^\infty\cos(x\cosh u)\frac{\cos\left(\frac{xz}{2}\right)}{x^\rho}dxdu+O\left(U\epsilon^{1/2}+\frac{1+|r|}{\exp(U)\epsilon^{1/2}}\right).\end{aligned}$$

Вычисляя интеграл по x при помощи [**41**, ур. (21), стр. 319], получаем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-\rho}k^+(x,1/2+ir)\cos\left(\frac{xz}{2}\right)dx &= \frac{1}{\pi}\Gamma(1-\rho)\sin(\pi\rho/2)\\ &\times\int_0^U\cos(2ru)\left((\cosh u+z/2)^{\rho-1}+(\cosh u-z/2)^{\rho-1}\right)du\\ &+O\left(U\epsilon^{1/2}+\frac{1+|r|}{\exp(U)\epsilon^{1/2}}\right).\end{aligned} \tag{3.29}$$

Подставляя (3.29) в (3.28) и выбирая $\epsilon=T^{-2A}$, $U=\log^2 T$, доказываем

$$\begin{aligned}I(\rho;z)=\frac{2^{2+\rho}}{\pi^2}\frac{\Gamma(1-\rho)}{z^{\rho-1}}\sin(\pi\rho/2)&\int_0^U\left((\cosh u+z/2)^{\rho-1}+(\cosh u-z/2)^{\rho-1}\right)\\ &\times\int_0^\infty rh(r)\tanh(\pi r)\cos(2ru)drdu+O(T^{-A}).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Далее, повторяя рассуждения доказательства леммы 3.2.2, показваем, что с точностью до пренебрежимо малого остатка интеграл по r равен

$$KG\int_{-\infty}^\infty\exp(-x^2)\cos(2u(K+Gx))dx$$

плюс аналогичные интергалы меньшего размера. Применяя [**89**, ур. 3.896.2] для вычисления интеграла, получаем

$$KG\int_{-\infty}^\infty\exp(-x^2)\cos(2u(K+Gx))dx=KG\pi^{1/2}\exp(-u^2G^2)\cos(2uK). \tag{3.31}$$

Используя (3.30) и (3.31), находим, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}I(\rho;z)dK &\ll z^{1/2}\int_0^U\exp(-u^2G^2)\\ &\times\left((\cosh u+z/2)^{-1/2}+(\cosh u-z/2)^{-1/2}\right)\int_T^{2T}K\cos(2uK)dKdu.\end{aligned}$$

Тогда из оценки

$$\int_T^{2T}K\cos(2uK)dK\ll\min(T^2,T/u)$$

следует, что

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(\rho;z)dK \ll z^{1/2}T^2\int_0^{1/T}\left((\cosh u+z/2)^{-1/2}+(\cosh u-z/2)^{-1/2}\right)du$$
$$+z^{1/2}T\int_{1/T}^{U}\left((\cosh u+z/2)^{-1/2}+(\cosh u-z/2)^{-1/2}\right)\exp(-u^2G^2)\frac{du}{u}\ll T\log T\frac{\sqrt{z}}{(2-z)^{1/2}}.$$

□

Следствие 3.2.5. *При $\rho=1/2+2it$ выполнена оценка*

$$\sum_{n=1}^{2l-1}\frac{1}{n^{1-\rho}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(\rho)\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I\left(\rho;\frac{n}{l}\right)dK\ll T^{1+\epsilon}(1+|t|)^{\theta_t}l^{1/2+2\theta}. \tag{3.32}$$

Доказательство. Применяя (3.27) и (0.42), показываем, что левая часть (3.32) оценивается как

$$T(1+|t|)^{\theta_t}\sum_{n=1}^{2l-1}\frac{(4l^2-n^2)^{\theta}}{l^{1/2}(2-n/l)^{1/2}}\ll T(1+|t|)^{\theta_t}l^{\theta}\sum_{n=1}^{2l-1}(2l-n)^{\theta-1/2}\ll T(1+|t|)^{\theta_t}l^{1/2+2\theta}.$$

□

Лемма 3.2.6. *При $\rho=1/2+2it$, $|t|\ll T^{1-\epsilon}$ выполнена оценка*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}\hat{\phi}(1-\rho)dK\ll T^{-A}, \tag{3.33}$$

где A – произвольное положительное число.

Доказательство. Используя формулу Стирлинга (0.4) для оценки (0.34), получаем

$$\hat{\phi}(1-\rho)\ll\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{(1+|r-t|)^{1/4}(1+|r+t|)^{1/4}}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\left(2|r|+|r-t|+|r+t|\right)\right)dr.$$

Так как $|t|\ll T^{1-\epsilon}$, мы доказываем (3.33) применяя (3.18). □

Лемма 3.2.7. *При $\rho=1/2+2it$, $|t|\ll T^{1-\epsilon}$ выполнена оценка*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}\frac{\zeta(\rho)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{ir}(l^2)\zeta(\rho+2ir)\zeta(\rho-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h(r)drdK\ll T(1+|t|)^{\vartheta}l^{\epsilon}\log^3 T. \tag{3.34}$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши-Шварца, стандартную оценку $|\zeta(1+2ir)|^{-1}\ll\log(1+|r|)$ и верхнюю оценку на второй момент

$$\int_R^{2R}|\zeta(1/2+ir)|^2dr\ll R\log R,$$

показываем, что левая часть (3.34) ограничена величиной

$$l^{\epsilon}(T+|t|)\log(T+|t|)\log^2(T)|\zeta(1/2+2it)|.$$

Тогда (3.34) следует из оценки $|\zeta(1/2+ir)|\ll r^{\vartheta}$. □

Наконец, оценка 3.0.1 получается из следствий 3.2.3 и 3.2.5, лемм 3.2.6 и 3.2.7.

3.2.2. Доказательство теоремы 3.0.2. Заметим, что единственное отличие теорем 3.0.2 и 3.0.1 - область значений l. Так, если $l \gg G^2T^{-\epsilon}$, то сумма (3.2.1) более не является пренебрежимо малой. Для анализа $I(1/2, z)$ при z в окрестности 1 мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.2.8. *Существует $x_0 > 2$ такое, что для $r \to \infty$ равномерно при всех $x > x_0$ выполнено равенство*

$$F\left(\frac{1}{4}+ir, \frac{3}{4}+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) = x^{2ir}\exp(-2ir\operatorname{arcosh} x/2)\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4}(1+\ldots). \quad (3.35)$$

Доказательство. Применяя [**151**, ур. 15.8.1], получаем

$$F\left(\frac{1}{4}+ir, \frac{3}{4}+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) = \left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-1/4-ir} F\left(\frac{1}{4}+ir, \frac{1}{4}+ir, 1+2ir; -\frac{1}{x^2/4-1}\right).$$

Для простоты записи положим $X := x^2/4 - 1$. Из [**151**, ур. 15.6.1] следует, что

$$F\left(\frac{1}{4}+ir, \frac{3}{4}+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) = \frac{X^{ir}\Gamma(1+2ir)}{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(3/4+ir)} \times \left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-1/4-ir}\int_0^1 \left(y^3(1-y)(1+y/X)\right)^{-1/4}\left(\frac{y(1-y)}{y+X}\right)^{ir} dy. \quad (3.36)$$

Применяя метод перевала (см. [**108**, стр. 173]), получаем

$$\int_0^1 \left(y^3(1-y)(1+y/X)\right)^{-1/4}\left(\frac{y(1-y)}{y+X}\right)^{ir} dy = \frac{c_0}{\sqrt{r}}\left(\sqrt{1+X}+\sqrt{X}\right)^{-2ir}(1+\ldots)$$

для некоторой абсолютной константы c_0. Подставляя (3.2.2) в (3.36) и применяя формулу Стирлинга (0.4), доказываем лемму. □

Лемма 3.2.9. *При $x > 2$ выполнена оценка*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(1/2; x)dK \ll \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4}\exp(-G^2\operatorname{arcosh}^2 x/2)\min\left(T^{3/2}, \frac{T^{1/2}}{\operatorname{arcosh} x/2}\right). \quad (3.37)$$

Доказательство. Применяя (3.7), получаем

$$I(1/2; x) = \frac{2^{3/2}i}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2ir}\frac{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(3/4+ir)}{\Gamma(1+2ir)} \times \sin\left(\pi(1/4-ir)\right){}_2F_1\left(1/4+ir, 3/4+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right)dr. \quad (3.38)$$

Формула Стирлинга (0.4) позволяет разложить гамма функции в ряды с пренебрежимо малым остаточным членом. При этом первое слагаемое равно

$$\frac{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(3/4+ir)}{\Gamma(1+2ir)} = c|r|^{-1/2}2^{-2ir} + \ldots,$$

где c – некоторая абсолютная константа. Подставляя (3.35) в (3.38), получаем

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I(1/2;x)dK \ll \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}\int_{-\infty}^{\infty}|r|^{1/2}h(r) \times \exp(-2ir\operatorname{arcosh} x/2)drdK. \quad (3.39)$$

Далее используем (3.18), делаем замену переменных $r = K+Gy$ и применяем (3.20). Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T}\int_{-\infty}^{\infty}|r|^{1/2}h(r)\exp(-2ir\operatorname{arcosh} x/2)drdK \ll \\ \int_T^{2T} K^{1/2}\exp(-2iK\operatorname{arcosh} x/2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y^2-2iGy\operatorname{arcosh} x/2)dydK \\ \ll \exp(-G^2\operatorname{arcosh}^2 x/2)\int_T^{2T}K^{1/2}\exp(-2iK\operatorname{arcosh} x/2)dK \\ \ll \exp(-G^2\operatorname{arcosh}^2 x/2)\min\left(T^{3/2},\frac{T^{1/2}}{\operatorname{arcosh} x/2}\right).\end{aligned}$$

Оценивая другой интеграл в (3.39) аналогично, доказываем утверждение леммы. □

Следствие 3.2.10. *Выполнена следующая оценка*

$$\sum_{n=2l+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{2T} I\left(\frac{1}{2};\frac{n}{l}\right)dK \ll \frac{T^{1/2+\epsilon}l^{1/2+2\theta}}{G^{1/2+2\theta}}. \quad (3.40)$$

Доказательство. Применяя (3.21) и (3.24), показываем, что вклад суммы по $n > 2l+lT^{\epsilon}/G^2$ пренебрежимо мал. Оставшуюся сумму по $2l < n < 2l+lT^{\epsilon}/G^2$ будем изучать при помощи (3.37) и (0.42). В результате, приходим к выводу, что левая часть (3.40) ограничена величиной

$$\sum_{2l<n<2l+lT^{\epsilon}/G^2}\frac{(n^2-4l^2)^{\theta}}{n^{1/2}}\left(\left(\frac{n^2}{n^2-4l^2}\right)^{1/4}\min\left(T^{3/2},\frac{T^{1/2}}{\operatorname{arcosh} n/(2l)}\right) \times\left(1+\frac{n}{T\sqrt{n^2-4l^2}}\right)+\frac{l^2}{n^2T^{1/2}}\right). \quad (3.41)$$

Достаточно рассмотреть только слагаемое с 1, так как оставшиеся слагаемые (меньшего размера) могут быть оценены аналогично. Таким образом, (3.41) оценивается как

$$\begin{aligned}T^{3/2}\sum_{2l<n<2l+l/T^2}(n^2-4l^2)^{\theta-1/4}+\sum_{2l+l/T^2<n<2l+lT^{\epsilon}/G^2}\frac{T^{1/2}(n^2-4l^2)^{\theta-1/4}}{\operatorname{arcosh}(n/(2l))} \\ \ll \frac{l^{1/2+2\theta}}{T^{2\theta}}+\sum_{2l+l/T^2<n<2l+lT^{\epsilon}/G^2}(n^2-4l^2)^{\theta-1/4}\frac{T^{1/2}l^{1/2}}{(n-2l)^{1/2}} \ll \frac{T^{1/2+\epsilon}l^{1/2+2\theta}}{G^{1/2+2\theta}},\end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

ГЛАВА 4

Пропорция ненулевых L-значений в центральной точке

В данной главе мы докажем нижнюю оценку на пропорцию ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата форм Мааса (0.20) в коротких интервалах спектрального параметра t_j.

Теорема 4.0.1. *Для любого $\epsilon > 0$ и достаточно большого T выполнена оценка*

$$\sum_{\substack{T\le t_j\le T+H\\ L(\mathrm{sym}^2 u_j,1/2)\neq 0}} \alpha_j \ge \left(1-\frac{1}{(1+\Delta)^3}-\epsilon\right)\sum_{T\le t_j\le T+H}\alpha_j,$$

где α_j – коэффициент нормализации, заданный в (0.23), $H = T^\beta$ *с* $(1+4\theta)/(3+4\theta) < \beta \le 1$, $\theta = 1/6+\epsilon$ *и*

$$\Delta \le \max\left(\beta - 1/2; \frac{(3/2+2\theta)\beta - (1/2+2\theta)}{2+4\theta}\right).$$

При $T^{2\epsilon} < H \leqslant T$ и $T^\epsilon < G < H^{1-\epsilon}$ введём следующую тестовую функцию

$$\omega_{T,H}(r) := \frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right)dK. \tag{4.1}$$

Для доказательства теоремы 4.0.1 необходимо получить асимптотические формулы с наилучшей возможной оценкой остатка для первого и второго моментов

$$\mathcal{M}_n(l,1/2) := \sum_j \omega_{T,H}(t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2 u_j,1/2)^n, \quad n=1,2. \tag{4.2}$$

Теорема 4.0.1 является аналогом [**38**, теоремы 1.2], доказанной для L-функций форм Мааса.

Для простоты будем использовать функцию-индикатор

$$\mathbf{1}(S) := \begin{cases} 1, & \text{если } S \text{ верно;}\\ 0, & \text{если } S \text{ не верно.}\end{cases}$$

Для первого момента мы воспользуемся формулой из работы [**30**], которая улучшает результаты предыдущей главы благодаря более тщательному анализу соответствующих специальных функций, основанному на применении результатов из работ [**82**] и [**80**].

Теорема 4.0.2. *([**30**, теорема 1.2]) Пусть $T^{2\epsilon} < H \leqslant T$, $T^{\epsilon} < G < H^{1-\epsilon}$ и $l \ll T^{2-\epsilon}$. Тогда*

$$M_1(l,1/2) = \frac{2}{\pi^2 l^{1/2}} \int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(r) \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\log(2\pi) - \log l + \log r \right) dr + O\left(T^{\epsilon} \max(H, T^{1273/4053}) + \frac{T^{1/2+\epsilon} l^{1/2+2\theta}}{G^{1/2+2\theta}} \mathbf{1}\left(l > G^{2-\epsilon}\right) \right), \quad (4.3)$$

где $\theta = 1/6 + \epsilon$.

В данной главе мы докажем следующую асимптотическую формулу для второго момента.

Теорема 4.0.3. *Пусть $T^{2\epsilon} < H \leqslant T$, $T^{\epsilon} < G < H^{1-\epsilon}$ и $l \ll T^{1-\epsilon}$. Тогда*

$$M_2(l,1/2) = \frac{4}{\pi^2 l^{1/2}} \int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(r) \times \sum_{d \mid l^2} \frac{1}{\sqrt{d_1}} \left(-\frac{1}{12}\log^3 \frac{r}{d_1 d_2} + \frac{1}{4}\log^2 \frac{r}{d_1 d_2} \log \frac{r d_2}{l} + P_2\left(\log \frac{r}{d_1 d_2}\right) + \log\left(\frac{r d_2}{l}\right) P_1\left(\log \frac{r}{d_1 d_2}\right) \right) dr + O\left(T^{\epsilon} \max(H, T^{2/3}) + H l^{1/2+\epsilon} \mathbf{1}\left(l > T^{1/2-\epsilon}\right) + \frac{T^{3/2+2\theta+\epsilon} l^{1/2+2\theta}}{G^{1/2+2\theta}} \mathbf{1}\left(l > \frac{G^2}{T^{1+\epsilon}}\right) \right), \quad (4.4)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $\theta = 1/6 + \epsilon$ и $d = d_1 d_2^2$, d_1 не содержит квадратов.

Теорему 4.0.3 в частном случае $H = T$ можно сравнить с [**111**, теоремой 3.1], которая содержит аналогичный результат для голоморфных параболических форм. Заметим, что наш подход отличается от доказательства [**111**, теоремы 3.1]. А именно, применяя приближенное функциональное уравнение для одной L-функции $L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2)$, мы сводим исходную задачу к вычислению скрученного первого момента $M_1(l,1/2)$, для которого в свою очередь мы применяем точную формулу, доказанную в предыдущей главе. В то время как доказательство [**111**, теоремы 3.1] следует более стандартной схеме с использованием приближенного функционального уравнения для двух L-функций и с последующим применением формулы следа Петерсона для средних значений J-функций Бесселя (см. [**101**, лемму 5.8])

$$\sum_{k \equiv 0 \pmod 2} 2i^k h\left(\frac{k-1}{K}\right) J_{k-1}(x) = -\frac{K}{\sqrt{x}} \mathrm{Im}\left(e^{-\pi i/4} e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{h(\sqrt{u})}{\sqrt{2\pi u}} e\left(\frac{K^2 u}{4\pi x}\right) du \right) + O\left(\frac{x}{K^4} \int_{-\infty}^{\infty} v^4 |\tilde{h}(v)| dv \right). \quad (4.5)$$

Здесь $h(x)$ – это функция с компактным носителем, для которой $|h^{(n)}(x)| \ll 1$.

Для сравнения двух методов можно адаптировать метод работы [**111**] на случай форм Маасса. В частности, формулу (4.5) можно заменить на

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{2it}(2\pi x)}{\cosh(\pi t)} h\left(\frac{t}{T}\right) t dt = -\frac{i}{\pi\sqrt{2}} \frac{T^2}{\sqrt{x}} \operatorname{Re}\left((1+i)e^{2\pi i x} \int_0^{\infty} h(\sqrt{u}) e\left(-\frac{T^2 u}{2\pi^2 x}\right) du\right) + O\left(\frac{x}{T^{3-\epsilon}}\right), \quad (4.6)$$

см. [**57**, лемму 3.7]. Применяя (4.6) вместо (4.5) и повторяя все шаги доказательства [**111**, теоремы 3.1], возможно получить асимптотическую формулу для (4.4) в случае $H = T$, $G = H^{1-\epsilon}$ с ограничением $l \ll T^{1-\epsilon}$ и с оценкой остатка $O(T^{1+\epsilon}\sqrt{l})$. Это соответствует результату теоремы 4.0.3, так как при $H = T$, $G = H^{1-\epsilon}$ и $l \ll T^{1-\epsilon}$ оценка остатков в теореме 4.0.3 сводится к $O(T^{1+\epsilon}\sqrt{l})$.

Далее рассмотрим короткие интервалы. Для этого потребуется аналог (4.6) с $h(t) = \omega_{T,H}(t)$. Следуя доказательству [**57**, леммы 3.7], мы доказываем, что остаток в (4.6) оценивается как $O\left(xHT^{1+\epsilon}/G^5\right)$. Кроме того, единственное отличие, возникающее в доказательстве [**111**, теоремы 3.1] в случае коротких интервалов – это $(TG^{-1}/v)^B$ в формулах [**111**, (2.17), (2.22), (2.23)] вместо v^{-B}. Следовательно, мы получаем асимптотическую формулу (4.4) с оценкой остатка

$$O\left(T^{\epsilon}\max(H, T^{2/3}) + l\frac{T^{4+\epsilon}H}{G^5} + \sqrt{l}\frac{T^{2+\epsilon}}{G}\right). \quad (4.7)$$

Для того чтобы сравнить качество оценки остатков можно рассмотреть приложение к задаче оценки пропорции ненулевых центральных значений L-функций симметрического квадрата. На длинном интервале $H = T$ результаты данной главы и работы [**111**] приводят к одинаковым оценкам на пропорцию ненулевых L-значений. Однако для коротких интервалов наш метод оказывается чуть лучше. Для иллюстрации этого, из наших результатов необходимо получить асимптотические формулы для молифицированных первого и второго моментов

$$\mathbf{M}_n(1/2) := \sum_j \omega_{T,H}(t_j)\alpha_j \mathcal{M}(j)^n L(\operatorname{sym}^2 u_j, 1/2)^n, \quad n = 1, 2. \quad (4.8)$$

Молифайер можно выбрать следующим образом

$$\mathcal{M}(j) = \sum_{l \le T^{\Delta}} \frac{x_l}{\sqrt{l}} \lambda_j(l^2),$$

где Δ – логарифмическая длина молифайера, $\{x_l\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел. Изучение молифицированных моментов сводится к анализу скрученных моментов. Ключевой момент – доказать асимптотическую формулу для второго момента $M_2(l, 1/2)$ при $l \ll T^{2\Delta}$ для как можно большего значения Δ.: чем больше Δ, тем лучше оценка на пропорцию ненулевых L-значений.

В нашем случае, взяв $H = T^\beta$ с $\beta \le 1$, мы находим, что остаток в (4.4) не превосходит главный член при $l \ll T^{2\Delta}$ с

$$\Delta < \max\left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{(3/2+2\theta)\beta - (1/2+2\theta)}{2+4\theta}\right).$$

Взяв $\theta = 1/6$ (см. (0.41)), получаем

$$\Delta < \max\left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{11\beta - 5}{16}\right). \tag{4.9}$$

В то время как остаточный член в (4.7) не превосходит главный член при $l \ll T^{2\Delta}$ с

$$\Delta < \min\left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{3}\beta - 1\right).$$

Таким образом, две оценки на Δ совпадают при $3/4 < \beta < 1$, а при $5/11 < \beta < 3/4$ оценка (4.9) оказывается лучше.

Следовательно, наш метод позволяет получить эффективные нижние оценки на пропорцию центральных L-значений для более коротких интервалов.

4.1. Точная формула для первого момента

Рассмотрим

$$\mathcal{M}_1(l, \rho; h) := \sum_j h(t_j)\alpha_j \lambda_j(l^2) L(\mathrm{sym}^2 u_j, \rho),$$

где $h(t)$ – весовая функция, удовлетворяющая условиям:

C1: $h(t)$ чётная;

C2: $h(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im}(t)| < \Upsilon$ для некоторого $\Upsilon > 1/2$;

C3: $h(t)$ такая, что оценка $h(t) \ll (1+|t|)^{-2-\epsilon}$ верна в полосе $|\operatorname{Im}(t)| < \Upsilon$, $\Upsilon > 1/2$;

C4: $h(\pm(n+1/2)i) = 0$ при $n = 0, 1, \dots N-1$, где $N > 0$ – достаточно большое целое число.

Для $x \ge 2$ определим

$$I(x) := \frac{2^{3/2} i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r h(r)}{\cosh(\pi r)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2ir} \frac{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(3/4+ir)}{\Gamma(1+2ir)} \times \sin\left(\pi(1/4-ir)\right) {}_2F_1\left(1/4+ir, 3/4+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) dr, \tag{4.10}$$

а для $0 < x < 2$ положим

$$I(x) := \frac{2i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r h(r)}{\cosh(\pi r)} x^{1/2} \frac{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(1/4-ir)}{\Gamma(1/2)} \times \cos\left(\pi(1/4+ir)\right) {}_2F_1\left(1/4+ir, 1/4-ir, 1/2; \frac{x^2}{4}\right) dr. \tag{4.11}$$

Для удобства вычислений запишем точную формулу (3.13), доказанную в предыдущей главе, в следующем виде.

Теорема 4.1.1. *Для любой функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям $(C1)-(C4)$, выполнено равенство*

$$M_1(l,1/2;h)=MT(l;h)+CT(l;h)+ET(l;h)+S_1(l;h)+S_2(l;h),$$

где

$$MT(l;h)=\frac{1}{\pi^2 l^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)\left(\frac{3}{2}\gamma-\frac{\pi}{4}-\log l-\frac{3}{2}\log(2\pi)\right.$$
$$\left.+\frac{\psi(1/4+ir)+\psi(1/4-ir)}{2}\right)dr,$$

$$CT(l;h)=-\frac{\zeta(1/2)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau_{ir}(l^2)h(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2}\zeta(1/2+2ir)\zeta(1/2-2ir)dr, \tag{4.12}$$

$$ET(l;h)=-\frac{2\zeta(0)}{\zeta(3/2)}\tau_{1/4}(l^2)h\left(\frac{1}{4i}\right)-\frac{\mathscr{L}_{-4l^2}(1/2)}{i(2l\pi^3)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\frac{\Gamma(1/4+ir)}{\Gamma(3/4+ir)}dr,$$

$$S_1(l;h)=\sum_{n=1}^{2l-1}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)}{\sqrt{2\pi n}}I\left(\frac{n}{l}\right),\quad S_2(l;h)=\sum_{n=2l+1}^{\infty}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)}{\sqrt{2\pi n}}I\left(\frac{n}{l}\right). \tag{4.13}$$

4.2. Доказательство теоремы 4.0.3

Рассмотрим тестовую функцию $\omega_{T,H}(r)$ (заданную (4.1)) при $T^{2\epsilon}<H\leqslant T$ и $T^{\epsilon}<G<H^{1-\epsilon}$. В соответствии с [**98**] для любого фиксированного $A>1$ существует $c>0$ такое, что

$$\omega_{T,H}(r)=1+O(r^{-2}) \text{ if } T+cG\sqrt{\log T}<r<T+H-cG\sqrt{\log T},$$

$$\omega_{T,H}(r)=O((|r|+T)^{-A}) \text{ if } r<T-cG\sqrt{\log T} \text{ or } r>T+H+cG\sqrt{\log T},$$

и в противном случае

$$\omega_{T,H}(r)=1+O(G^3(G+\min(|r-T|,|r-(T+H)|))^{-3}).$$

Кроме того, выполнены следующие оценки

$$\omega_{T,H}(r)\ll HG^{-1}\exp\left(-\frac{(r-T)^2}{G^2}\right) \text{ if } r<T, \tag{4.14}$$

$$\omega_{T,H}(r)\ll HG^{-1}\exp\left(-\frac{(r-(T+H))^2}{G^2}\right) \text{ if } r>T+H. \tag{4.15}$$

Для произвольного большого целого N определим

$$q_N(r) := \frac{(r^2+1/4)\dots(r^2+(N-1/2)^2)}{(r^2+100N^2)^N}, \tag{4.16}$$

$$h(K,N;r) := q_N(r)\exp\left(-\frac{(r-K)^2}{G^2}\right) + q_N(r)\exp\left(-\frac{(r+K)^2}{G^2}\right). \tag{4.17}$$

Заметим, что $q_N(r) = 1+O(1/r^2)$ и что функция $h(K,N;r)$ удовлетворяет условиям $(C1)-(C4)$.

Рассмотрим второй момент

$$\mathcal{M}_2(l,1/2;h(K,N,\cdot)) := \sum_j h(K,N,t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2\, u_j,1/2)^2. \tag{4.18}$$

Для простоты далее мы будем писать $h(r)$ вместо $h(K,N,r)$. Из (4.1), (4.2) и (4.17) следует, что

$$\mathcal{M}_2(l,1/2) = \frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\mathcal{M}_2(l,1/2;h(\cdot))dK + O(1). \tag{4.19}$$

Лемма 4.2.1. *Для любого $A>0$ существует $\epsilon>0$ такое, что*

$$\mathcal{M}_2(l,1/2;h(\cdot)) = 2\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}}\frac{1}{m^{1/2}}\sum_{d|(l^2,m^2)}\mathcal{M}_1(lm/d,1/2;h(\cdot)V(m,\cdot)) + O(T^{-A}), \tag{4.20}$$

где функция $V(m,\cdot)$ задана в (0.25).

Доказательство. Для начала запишем приближенное функциональное уравнение (0.24) для одной из L-функций в (4.18). Далее воспользуемся оценками (0.26) чтобы обрезать суммирование по m до $m \ll T^{1+\epsilon}$ с пренебрежимо малым остатком. Наконец, мы завершаем доказательство применяя (0.19) для произведения $\lambda_j(l^2)\lambda_j(m^2)$. □

Подставляя (4.20) в (4.19), получаем

$$\mathcal{M}_2(l,1/2) = 2\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}}\frac{1}{m^{1/2}}\sum_{d|(l^2,m^2)}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\mathcal{M}_1(lm/d,1/2;h(\cdot)V(m,\cdot))dK + O(T^{-A}). \tag{4.21}$$

Для оценки интеграла мы воспользуемся теоремой 4.1.1 для

$$\mathcal{M}_1(lm/d,1/2;h(\cdot)V(m,\cdot)).$$

Отметим, что поскольку мы можем сдвинуть прямую интегрирования в (0.25) далеко вправо, функция $h(r)V(m,r)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1.1.

Вклад $ET(l;h(\cdot)V(m,\cdot))$ в (4.21) пренебрежимо мал. Поэтому

$$\mathcal{M}_2(l,1/2)=2\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}}\frac{1}{m^{1/2}}\sum_{d|(l^2,m^2)}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\Bigg(MT(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))$$
$$+CT(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))+\sum_{i=1,2}S_i(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))\Bigg)dK+O(T^{-A}). \quad (4.22)$$

Лемма 4.2.2. *При $l\ll T^{2-\epsilon}$ выполнена оценка*

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}S_1(l;h)dK=\sum_{n=1}^{2l-1}\frac{1}{n^{1/2}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}I\left(\frac{n}{l}\right)dK\ll T^{-A}.$$

Доказательство. Применяя (4.11) и (4.1), получаем

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}I\left(\frac{n}{l}\right)dK\ll\int_{-\infty}^{\infty}r\omega_{T,H}(r)\left(\frac{n}{l}\right)^{1/2}|\Gamma(1/4+ir)\Gamma(1/4-ir)|$$
$$\times\left|{}_2F_1\left(1/4+ir,1/4-ir,1/2;\frac{n^2}{4l^2}\right)\right|dr.$$

Используя (4.14) и (4.15) можно ограничить интегрирование по r до интервала $(T/2,4T)$ с пренебрежимо малым остатком. Чтобы оценить гипергеометрическую функцию мы применим [**30**, следствие 4.2] с $z=1-\frac{n^2}{2l^2}$. Для этого необходимо проверить условие

$$ra=r\arccos\left(\frac{n^2}{2l^2}-1\right)\gg T^{\epsilon},$$

которое выполняется так как

$$r>T/2,\quad \frac{n}{l}\le 2-\frac{1}{l},\quad l\ll T^{2-\epsilon}.$$

Применяя (0.4) и [**30**, следствие 4.2], мы получаем оценку

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}I\left(\frac{n}{l}\right)dK\ll\int_{T/2}^{4T}r\omega_{T,H}(r)\frac{e^{-ar}}{\sqrt{ar}}dr\ll T^{-A},$$

поскольку $ar\gg T^{\epsilon}$. Лемма доказана. □

Из леммы 4.2.2 следует, что для $l\ll T^{1-2\epsilon}$ вклад $S_1(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))$ в (4.22) пренебрежимо мал. Следующий шаг – оценить вклад $S_2(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))$.

Лемма 4.2.3. *При $l\ll T^{1-2\epsilon}$ выполнена оценка*

$$\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}}\frac{1}{m^{1/2}}\sum_{d|(l^2,m^2)}\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}S_2(lm/d;h(\cdot)V(m,\cdot))dK\ll$$
$$T^{-A}+\frac{T^{3/2+2\theta+\epsilon}l^{1/2+2\theta}}{G^{1/2+2\theta}}\mathbf{1}\left(l>\frac{G^2}{T^{1+2\epsilon}}\right). \quad (4.23)$$

Доказательство. Пусть $\Sigma_2(l)$ обозначает левую часть (4.23). Применяя (4.13) и (4.10), получаем

$$\Sigma_2(l) = \sum_{m\ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} \sum_{n=2lm/d+1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4(lm/d)^2}(1/2)}{\sqrt{2\pi n}} I_V\left(\frac{dn}{lm}\right) dK, \quad (4.24)$$

где для $x = \frac{n}{lm/d}$

$$I_V(x) = \frac{2^{3/2}i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)V(m,r)}{\cosh(\pi r)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2ir} \frac{\Gamma(1/4+ir)\Gamma(3/4+ir)}{\Gamma(1+2ir)} \times \sin\left(\pi(1/4-ir)\right) {}_2F_1\left(1/4+ir, 3/4+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) dr. \quad (4.25)$$

Во-первых, покажем, что вклад больших n в (4.24) пренебрежимо мал. Для этого мы воспользуемся интегральным представлением [**151**, Eq. 15.6.1] для гипергеометрической функции в (4.25). В результате,

$$I_V(x) = \frac{2^{3/2}i}{\pi^{3/2}} \int_0^1 \frac{y^{-1/4}(1-y)^{-3/4}}{(1-4y/x^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)V(m,r)}{\cosh(\pi r)} \sin\left(\pi(1/4-ir)\right) \times \left(\frac{y(1-y)}{x^2/4-y}\right)^{ir} dr dy. \quad (4.26)$$

Так как (4.17) содержит множитель $q_N(r)$, заданный формулой (4.16), мы не проходим полюсов перемещая линию интегрирования в (4.26) на $\operatorname{Im} r = -N$. Применяя оценку

$$V(m, r-iN) \ll \left(\frac{r}{m}\right)^N,$$

полученную при помощи сдвига линии интегрирования в (0.25) на $\operatorname{Re} z = N$, заключаем, что

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} I_V(x) dK \ll \frac{TH}{(mx^2)^N}.$$

Поэтому вклад $n > T^{\epsilon_0} lm/d$ в (4.24) пренебрежимо мал. Следовательно,

$$\Sigma_2(l) = \sum_{m\ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} \times \sum_{2lm/d<n<T^{\epsilon_0}lm/d} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4(lm/d)^2}(1/2)}{\sqrt{2\pi n}} I_V\left(\frac{n}{lm/d}\right) dK + O(T^{-A}). \quad (4.27)$$

В оставшейся области $2lm/d < n \leqslant T^{\epsilon_0} lm/d$ мы докажем следующую оценку

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} I_V(x) dK \ll \left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4} \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{1/2} h(r) V(m,r) \times \exp(-2ir \operatorname{arcosh} x/2) dr dK. \quad (4.28)$$

Для этого выполним замену переменных $r = K + Gy$ и применим (4.17). Таким образом,

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{1/2} h(r) V(m,r) \exp(-2ir \operatorname{arcosh} x/2) dr dK \ll \int_T^{T+H} K^{1/2} \exp(-2iKA(x)) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) V(m, K+Gy) dy dK, \quad (4.29)$$

где $A(x) = \operatorname{arcosh} x/2$. Для вычисления интеграла по y для начала обрежем его до области $|y| < (\log T)^2$, вводя тем самым пренебрежимо малый остаток. Для анализа $V(m, K + Gy)$ применим (0.27) с a равной некоторому фиксированному числу $\epsilon_1 > 0$. Достаточно рассмотреть только главный член в (0.27), поскольку вклад других членов будет меньше, а остаток в (0.27) пренебрежимо мал. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) V(m, K+Gy) dy = \int_{-(\log T)^2}^{(\log T)^2} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) \times \frac{1}{2\pi i} \int_{(\epsilon_1)} \left(\frac{K+Gy}{2\pi^{3/2} m} \right)^z \frac{\Gamma(1/4 + z/2)}{\Gamma(1/4)} \zeta(1+2z) G(z) \frac{dz}{z} dy + \dots$$

Благодаря функции $G(z)$ мы можем обрезать интеграл по z в $|\operatorname{Im} z| = \log T$, вводя пренебрежимо малый остаток. Поэтому $|Gyz/K| \ll T^{-\epsilon}$, и мы можем аппроксимировать $(K + Gy)^z$ как K^z при помощи разложения Тейлора

$$(K+Gy)^z = K^z \left(1 + \frac{Gyz}{K} + \dots\right).$$

В результате,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) V(m, K+Gy) dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\epsilon_1)} \left(\frac{K}{2\pi^{3/2} m} \right)^z \frac{\Gamma(1/4 + z/2)}{\Gamma(1/4)} \times \zeta(1+2z) G(z) \int_{-(\log T)^2}^{(\log T)^2} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) dy \frac{dz}{z} + \dots$$

Восстанавливая область интегрирования по y до всей вещественной прямой, получаем пренебрежимо малый остаток. Далее, для вычисления интеграла по y применяем (0.12). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 - 2iGyA(x)) V(m, K+Gy) dy = \pi^{1/2} \exp\left(-G^2 A(x)^2\right) \times \frac{1}{2\pi i} \int_{(\epsilon_1)} \left(\frac{K}{2\pi^{3/2} m} \right)^z \frac{\Gamma(1/4 + z/2)}{\Gamma(1/4)} \zeta(1+2z) G(z) \frac{dz}{z} + \dots \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30) в (4.29), получаем

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\int_{-\infty}^{\infty}|r|^{1/2}h(r)V(m,r)\exp(-2ir\operatorname{arcosh}x/2)drdK\ll$$
$$\exp\left(-G^2A(x)^2\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{(\epsilon_1)}\left(\frac{1}{2\pi^{3/2}m}\right)^z\frac{\Gamma(1/4+z/2)}{\Gamma(1/4)}\zeta(1+2z)G(z)$$
$$\times\int_T^{T+H}K^{1/2+z}\exp(-2iKA(x))dK\frac{dz}{z}. \quad (4.31)$$

Благодаря функции $G(z)$ мы можем обрезать интеграл по z в $|\operatorname{Im}z|=\log T$. Поэтому $z=\epsilon+it$ с $|t|<\log T$. Для вычисления интеграла по K в (4.31) применим [**177**, лемму 4.3], из чего следует оценка

$$\int_T^{T+H}K^{1/2+z}\exp(-2iKA(x))K^zdK$$
$$=\int_T^{T+H}K^{1/2+\epsilon_1}\exp(-2iKA(x)+it\log K)dK$$
$$\ll\min\left(HT^{1/2+\epsilon_1},\max_{T<K<T+H}\frac{K^{1/2+\epsilon_1}}{|-2A(x)+t/K|}\right). \quad (4.32)$$

Так как $x=\frac{n}{lm/d}$, $n>2lm/d$ и $lm\ll T^{2-\epsilon}$, то

$$A(x)=\operatorname{arcosh}(x/2)=\operatorname{arcosh}\frac{n}{2lm/d}\geqslant\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{d}{2lm}\right)\gg\frac{1}{(lm)^{1/2}}\gg T^{-1+\epsilon}>|t/K|.$$

Поэтому (4.32) может быть записано как

$$\int_T^{T+H}K^{1/2+z}\exp(-2iKA(x))K^zdK\ll\min\left(HT^{1/2+\epsilon_1},\frac{T^{1/2+\epsilon_1}}{A(x)}\right). \quad (4.33)$$

Подставляя (4.33) в (4.31) и оценивая интеграл по z тривиально, показываем, что

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}\int_{-\infty}^{\infty}|r|^{1/2}h(r)V(m,r)\exp(-2ir\operatorname{arcosh}x/2)drdK\ll$$
$$\exp\left(-G^2A(x)^2\right)\min\left(HT^{1/2},\frac{T^{1/2}}{A(x)}\right)\left(\frac{T}{m}\right)^{\epsilon_1}. \quad (4.34)$$

Подставляя (4.34) в (4.28), получаем

$$\frac{1}{G\pi^{1/2}}\int_T^{T+H}I_V(x)dK\ll T^{1/2+\epsilon}\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4}\exp\left(-G^2A(x)^2\right)\min\left(H,\frac{1}{A(x)}\right), \quad (4.35)$$

где $A(x)=\operatorname{arcosh}(x/2)$. Наконец, подставляя (4.35) в (4.27), заключаем, что

$$\Sigma_2(l)\ll\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}}\frac{1}{m^{1/2}}\sum_{d|(l^2,m^2)}\sum_{2lm/d<n<T^{\epsilon_0}lm/d}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4(lm/d)^2}(1/2)}{(n^2-(2lm/d)^2)^{1/4}}T^{1/2+\epsilon}$$
$$\times\exp\left(-G^2\operatorname{arcosh}^2\frac{n}{2lm/d}\right)\frac{1}{\operatorname{arcosh}\frac{n}{2lm/d}}+T^{-A}. \quad (4.36)$$

Если $l \leqslant G^2/T^{1+2\epsilon}$, то

$$G \operatorname{arcosh} \frac{n}{2lm/d} \geqslant G \operatorname{arcosh}\left(1+\frac{1}{2lm}\right) \gg \frac{G}{\sqrt{lm}} \gg T^{\epsilon},$$

и поэтому сумма в правой части (4.36) пренебрежимо мала и (4.23) доказана. Если $l > G^2/T^{1+2\epsilon}$, то из (4.36) следует, что

$$\Sigma_2(l) \ll \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \sum_{2lm/d<n<T^{\epsilon}G^{-2}lm/d} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4(lm/d)^2}(1/2)}{(n^2-(2lm/d)^2)^{1/4}} \frac{T^{1/2+\epsilon}}{\operatorname{arcosh} \frac{n}{2lm/d}}.$$

Применяя (0.41), доказываем (4.23). □

Лемма 4.2.4. *Выполнена оценка*

$$\sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} CT(lm/d; h(\cdot)V(m,\cdot))dK \quad \ll \quad T^{\epsilon} \max(H, T^{2/3}). \quad (4.37)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{CT}(l)$ обозначает левую часть (4.37). Подставляя (4.12) в (4.37) и используя (0.5), получаем

$$\mathcal{CT}(l) \ll \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{ir}(l^2)\omega_{T,H}(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2} |\zeta(1/2+2ir)|^2 \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{\tau_{ir}(m^2)V(m,r)}{m^{1/2}} dr \right|. \quad (4.38)$$

Рассмотрим сумму по m. Применяя (0.26), мы можем дополнить сумму до всех положительных целых чисел, вводя пренебрежимо малый остаток. После запишем $V(m,r)$ при помощи (0.25) и вычислим сумму по m используя (0.6). Тогда

$$\sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{\tau_{ir}(m^2)V(m,r)}{m^{1/2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(3)} \frac{L_{\infty}(1/2+z,r)}{L_{\infty}(1/2,r)} G(z) \times \zeta(1/2+z)\zeta(1/2+z+2ir)\zeta(1/2+z-2ir)\frac{dz}{z} + O(T^{-A}).$$

Сдвигая линию интегрирования влево на $\operatorname{Re}(z) = \epsilon$, мы проходим полюса в точках $z = 1/2 \pm 2ir$ (см. (0.22)). Вклад данных полюсов пренебрежимо мал. Заметим, что так как $G(1/2) = 0$, в точке $z = 1/2$ полюса нет. Следовательно,

$$\sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{\tau_{ir}(m^2)V(m,r)}{m^{1/2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\epsilon)} \frac{L_{\infty}(1/2+z,r)}{L_{\infty}(1/2,r)} G(z) \times \zeta(1/2+z)\zeta(1/2+z+2ir)\zeta(1/2+z-2ir)\frac{dz}{z} + O(T^{-A}). \quad (4.39)$$

Подставляя (4.39) в (4.38) и применяя (0.22), получаем

$$\mathcal{CT}(l) \ll \left| \int_{(\epsilon)} \frac{G(z)}{\pi^{3z/2}} \Gamma(1/4+z/2)\zeta(1/2+z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{ir}(l^2)\omega_{T,H}(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2} \times \frac{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{z+ir}{2})\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{z-ir}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{ir}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{ir}{2})} |\zeta(1/2+2ir)|^2 \zeta(1/2+z+2ir)\zeta(1/2+z-2ir) dr \frac{dz}{z} \right|. \quad (4.40)$$

Пусть $z = \epsilon + iy$. Оценивая (4.40) по модулю, показываем, что

$$\mathcal{CT}(l) \ll T^{\epsilon} \max_{|y|<\log T} \int_{T-2H}^{T+2H} |\zeta(1/2+2ir)|^2 |\zeta(1/2+\epsilon+i(2r+y))\zeta(1/2+\epsilon-i(2r-y))| dr.$$

Неравенство Коши-Буняковского позволяет получить оценку

$$\mathcal{CT}(l) \ll T^{\epsilon} \left(\int_{2T-4H}^{2T+4H} |\zeta(1/2+ir)|^4 dr \right)^{1/2} \left(\int_{2T-5H}^{2T+5H} |\zeta(1/2+\epsilon+ir)|^4 dr \right)^{1/2}.$$

Для оценки четвертого момента дзета-функции Римана на и вне критической прямой применим [**102**, теорему 3] и [**97**, теорему 4]. Лемма доказана. □

Наконец, вычислим главный член в (4.22).

Лемма 4.2.5. *Выполнена следующая асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} 2 \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{1}{G\pi^{1/2}} \int_T^{T+H} MT(lm/d; h(\cdot)V(m,\cdot)) dK \\ = \frac{4}{\pi^2 l^{1/2}} \int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(r) \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{\sqrt{d_1}} \Bigg(-\frac{1}{12} \log^3 \frac{r}{d_1 d_2} + \frac{1}{4} \log^2 \frac{r}{d_1 d_2} \log \frac{r d_2}{l} + P_2 \left(\log \frac{r}{d_1 d_2} \right) \\ + \log \left(\frac{r d_2}{l} \right) P_1 \left(\log \frac{r}{d_1 d_2} \right) \Bigg) dr + O\left(\frac{H^{1+\epsilon}}{l^{1/2}} + H l^{1/2+\epsilon} \mathbf{1}(l > T^{1/2-\epsilon}) \right), \quad (4.41) \end{aligned}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Доказательство. Пусть $\mathcal{MT}(l)$ обозначает левую часть формулы (4.41). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{MT}(l) = 2 \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{2}{\pi^2 (lm/d)^{1/2}} \int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(r) V(m,r) \\ \times \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\log(2\pi) - \log \frac{lm}{d} + \log r \right) dr + O(1). \quad (4.42) \end{aligned}$$

Для простоты положим

$$L(r) := \frac{3}{2}\gamma - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\log(2\pi) + \log r.$$

Для вычисления (4.42) необходимо рассмотреть

$$\mathfrak{M}(l,r) := \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}} \frac{1}{m^{1/2}} \sum_{d|(l^2,m^2)} \frac{V(m,r)}{(lm/d)^{1/2}} \left(L(r) - \log \frac{lm}{d} \right).$$

В этих обозначениях

$$\mathcal{MT}(l) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(r) \mathfrak{M}(l,r) dr + O(1). \quad (4.43)$$

Интеграл в (4.43) можно ограничить до $(T/5, 5T)$ с пренебрежимо малым остатком. Поэтому нужно вычислить $\mathfrak{M}(l,r)$ при $T/5 < r < T$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{d|l^2} d^{1/2} \sum_{\substack{m \ll T^{1+\epsilon} \\ m^2 \equiv 0(d)}} \frac{V(m,r)}{m} \left(L(r) - \log \frac{lm}{d} \right).$$

Удобно записать число d как $d = d_1 d_2^2$, где d_1 свободно от квадратов. В результате, условие $m^2 \equiv 0(d)$ эквивалентно $m \equiv 0(d_1 d_2)$. Поэтому

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{d_1^{1/2}} \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}/d_1 d_2} \frac{V(m d_1 d_2, r)}{m} \left(L(r) - \log \frac{lm}{d_2} \right). \tag{4.44}$$

Можно приблизить $V(md_1d_2, r)$ используя (0.27), так что

$$V(md_1d_2, r) = V_1(md_1d_2, r) + O(r^{-1+\epsilon}), \tag{4.45}$$

$$V_1(md_1d_2, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \left(\frac{r}{2\pi^{3/2} m d_1 d_2} \right)^z \frac{\Gamma(1/4 + z/2)}{\Gamma(1/4)} \zeta(1+2z) G(z) \frac{dz}{z}, \tag{4.46}$$

где $a > 0$. Подставляя (4.45) в (4.44), находим, что

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{d_1^{1/2}} \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}/d_1 d_2} \frac{V_1(m d_1 d_2, r)}{m} \left(L(r) - \log \frac{lm}{d_2} \right) + O\left(\frac{(rl)^\epsilon}{rl^{1/2}} \right). \tag{4.47}$$

Сдвигая линию интегрирования в (4.46) далеко вправо, получаем

$$V_1(md_1d_2, r) \ll \left(\frac{r}{md_1d_2} \right)^A.$$

Поэтому мы можем дополнить сумму по m в (4.47) до суммы по всем положительным целым числам с пренебрежимо малым остатком. Таким образом,

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{d_1^{1/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{V_1(m d_1 d_2, r)}{m} \left(L(r) - \log \frac{lm}{d_2} \right) + O\left(\frac{(rl)^\epsilon}{rl^{1/2}} \right). \tag{4.48}$$

Подставляя (4.46) в (4.48), получаем

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{d_1^{1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \left(\frac{r}{2\pi^{3/2} d_1 d_2} \right)^z \frac{\Gamma(1/4 + z/2)}{\Gamma(1/4)} G(z)$$
$$\times \zeta(1+2z) \left(\zeta'(1+z) + \left(L(r) - \log \frac{l}{d_2} \right) \zeta(1+z) \right) \frac{dz}{z} + O\left(\frac{(rl)^\epsilon}{rl^{1/2}} \right).$$

Следующий шаг – сдвинуть линию интегрирования влево, чтобы пройти полюс в точке $z = 0$.

Если $l \ll T^{1/2-\epsilon}$, тогда мы сдвигаем линию интегрирования на $\operatorname{Re} z = -2n$. Заметим, что в точках $z = -1/2 - 2j$ при $j = 0, \dots, n-1$ нет полюсов, поскольку $G(-1/2-2j) = 0$. Вклад интеграла по $\operatorname{Re}(z) = -2n$ равен

$$O\left(\frac{l^{\epsilon}}{l^{1/2}}\left(\frac{l^2}{r}\right)^{2n}\right),$$

что пренебрежимо мало, так как $l < T^{1/2-\epsilon}$.

Если $T^{1/2-\epsilon} \ll l \ll T^{1-\epsilon}$, то мы сдвигаем линию интегрирования на $\operatorname{Re} z = -1$. В этом случае вклад интеграла может быть оценен как $O(l^{1/2+\epsilon}/r)$.

Поэтому

$$\mathfrak{M}(l,r) = \frac{1}{l^{1/2}} \sum_{\substack{d|l^2 \\ d=d_1 d_2^2}} \frac{1}{d_1^{1/2}} res_{z=0}\left(\left(\frac{r}{2\pi^{3/2} d_1 d_2}\right)^z \frac{\Gamma(1/4+z/2)}{\Gamma(1/4)} G(z) \frac{\zeta(1+2z)}{z}\right.$$
$$\left. \times \left(\zeta'(1+z) + \left(L(r) - \log\frac{l}{d_2}\right)\zeta(1+z)\right)\right) + O\left(\frac{(rl)^{\epsilon}}{rl^{1/2}} + \frac{l^{1/2+\epsilon}}{r}\mathbf{1}(l > T^{1/2-\epsilon})\right).$$

Вычисляя данные вычеты и подставляя результат в (4.43), мы доказываем лемму. □

Наконец, теорема 4.0.3 следует из (4.22), лемм 4.2.3, 4.2.4 и 4.2.5.

4.3. Доказательство теоремы 4.0.1

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\sum_{L(\operatorname{sym}^2 u_j, 1/2)\neq 0} \alpha_j \omega_{T,H}(t_j) \geq \frac{\mathbf{M}_1^2(1/2)}{\mathbf{M}_2(1/2)}, \tag{4.49}$$

где $\mathbf{M}_n(1/2)$ при $n = 1, 2$ – молифицированные моменты, заданные формулой (4.8). Для вычисления моментов $\mathbf{M}_n(1/2)$ выберем молифайер $\mathcal{M}(j)$ как в [**111**, главе 4]. Вводя замену переменных $r = Tu$ в (4.3) и (4.4), можно заметить, что главные члены имеют такую же структуру как и главные члены в [**111**, теореме 2.1] и [**111**, теореме 3.1]. Таким образом, повторяя доказательство [**111**, ур. 4.24], заключаем, что

$$\mathbf{M}_1(1/2) = \frac{4T^2}{\pi^2}\log^3(T)\frac{\Delta(3+3\Delta+\Delta^2)}{6}\int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(rT)dr + O(T^2\log^2(T)). \tag{4.50}$$

Также в качестве аналога [**111**, Eq. 4.56] получаем

$$\mathbf{M}_2(1/2) = \frac{4T^2}{\pi^2}\log^6(T)\frac{\Delta(1+\Delta)^3(3+3\Delta+\Delta^2)}{18}\int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(rT)dr + O(T^2\log^5(T)). \tag{4.51}$$

Подставляя (4.50) и (4.51) в (4.49), показываем, что

$$\sum_{L(\operatorname{sym}^2 u_j, 1/2)\neq 0} \alpha_j \omega_{T,H}(t_j) \geq \frac{2T^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{(1+\Delta)^3} - \epsilon\right)\int_0^{\infty} r\omega_{T,H}(rT)dr. \tag{4.52}$$

В соответствии с [**98**, Eq. 1.7]

$$\sum_j \alpha_j \omega_{T,H}(t_j) = \frac{2T^2}{\pi^2} \int_0^\infty r\omega_{T,H}(rT)dr + O(T^{1+\epsilon}).$$

Поэтому (4.52) можно записать как

$$\sum_{L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2)\neq 0} \alpha_j \omega_{T,H}(t_j) \geq \left(1 - \frac{1}{(1+\Delta)^3} - \epsilon\right) \sum_j \alpha_j \omega_{T,H}(t_j). \tag{4.53}$$

Наконец, повторяя рассуждения [**38**, леммы 3.1], мы убираем $\omega_{T,H}(t_j)$ в (4.53).

ГЛАВА 5

Оценки на спектральную экспоненциальную сумму

Данная глава посвящена изучению спектральной экспоненциальной суммы

$$S(T,X)=\sum_{t_j\leqslant T}X^{it_j}, \tag{5.1}$$

где $\kappa_j=1/4+t_j^2$ – собственные значения гиперболического оператора Лапласа для группы $PSL_2(\mathbb{Z})$. Интерес к сумме (5.1) возник благодаря её связи с классическими задачами, включая теорему о простых геодезических и гиперболическую проблему круга, см. [**62**], [**100**], [**129**], [**153**], [**154**].

Теорема о простых геодезических заключается в изучении асимптотического поведения функции

$$\pi_\Gamma(X)=\#\{\{P\}:NP\leq X\},$$

где $\{P\}$ обозначает примитивный гиперболический класс в $PSL_2(\mathbb{Z})$, а NP его норму.

Суммирование по частям позволяет сформулировать данную задачу в терминах

$$\Psi_\Gamma(X)=\sum_{NP\leq X}\Lambda(P),$$

где суммирование ведётся по всем гиперболическим классам, а $\Lambda(P)=\log NP_0$, если $\{P\}$ – степень примитивного гиперболического класса $\{P_0\}$.

Иваниец ([**100**, лемма 1]) доказал, что при $1\leqslant T\leqslant X^{1/2}\log^{-2}X$ справедлива формула

$$\Psi_\Gamma(X)=X+X^{1/2}\sum_{|t_j|\leqslant T}\frac{X^{it_j}}{1/2+it_j}+O\left(\frac{X}{T}\log^2X\right),$$

которая связывает исходную задачу с изучением суммы (5.1).

Тривиальная оценка на (5.1), а именно

$$S(T,X)\ll T^2,$$

следует из закона Вейля и позволяет доказать, что

$$\Psi_\Gamma(X)=X+O(X^{3/4}\log X). \tag{5.2}$$

Для улучшения (5.2) необходимо более тщательно исследовать сумму (5.1). На настоящий момент известно несколько нетривиальных оценок. Первая из них

$$S(T,X)\ll TX^{11/48+\epsilon}$$

была получена Иванцом в работе [**100**]. Этот результат приводит у следующему улучшению

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O(X^{35/48+\epsilon}).$$

Луо и Сарнак [**129**] доказали другую оценку

$$S(T, X) \ll T^{5/4} X^{1/8} \log^2 T, \tag{5.3}$$

из которой следует, что

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O(X^{7/10+\epsilon}).$$

В работе [**59**, ур. (7.1)] Кай показал, что

$$S(T, X) \ll (TX)^\epsilon (T^{2/5} X^{11/30} + T^{3/2}) \tag{5.4}$$

и

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O(X^{71/102+\epsilon}).$$

Наконец, наилучшая из известных на данный момент асимптотических формул

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O(X^{2/3+\theta/6}) \text{ с } \theta = 1/6 + \epsilon,$$

была доказана Саундарараджаном и Янгом в работе [**167**] при помощи комбинации оценки Луо-Сарнака (5.3) и другого метода без перехода к спектральной экспоненциальной сумме.

Петридис и Ризагер выдвинули [**154**, гипотезу 2.2] о корневом сокращении в сумме (5.1), а именно они предположили верность оценки

$$S(T, X) \ll T(TX)^\epsilon. \tag{5.5}$$

Кроме того, они показали, что оценка (5.5) не только позволяет получить наилучшую возможную оценку остатка $O(X^{1/2+\epsilon})$ в теореме о простых геодезических, но и влечёт наилучшую возможную оценку остатка в среднем для гиперболической проблемы круга.

В аппедиксе к работе [**154**], Лааксонен доказал, что гипотеза Петридиса-Ризагера верна для фиксированного X при $T \to \infty$. Кроме того, основываясь на численных вычислениях, Лааксонен заметил, что функция $S(T, X)$ имеет экстремум, когда $\kappa(X) = 0$, где

$$\kappa(X) := \left\| X^{1/2} + X^{-1/2} \right\|,$$

а $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого числа.

Функция $\kappa(X)$ появляется также и в нашей теореме. Кроме того, наш результат зависит от параметра θ, соответствующего степени в верхней оценке на L-функции Дирихле примитивных вещественных характеров (см. (0.41)).

Теорема 5.0.1. *Выполнены следующие оценки*

$$S(T,X) \ll \max\left(X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}, X^{\theta/2}T\right)\log^3 T; \tag{5.6}$$

$$S(T,X) \ll T\log^2 T \quad if \quad T > \frac{X^{1/2+7\theta/6}}{\kappa(X)}.$$

Из теоремы 5.0.1 следует, что гипотеза Ризагера-Петридиса справедлива при $T > X^{1/2}$ в предположении гипотезы Линделёфа и при $T > X^{1/2+7\theta/6}/\kappa(X)$ безусловно.

Кроме того, оценка (5.6) улучшает (5.3) при $T \geq X^{1/6+2\theta/3+\epsilon}$. Следовательно, данный результат можно применить для оценки остатка в теореме о простых геодезических. А именно, суммируя по частям и комбинируя оценки (5.3) и (5.6), мы получаем

$$\Psi_\Gamma(X) = X + O\left(X^{2/3+\theta/6}\log^3 X\right). \tag{5.7}$$

Оценка остатка в асимптотической формуле (5.7) совпадает с результатом Саундарараджана и Янга. Заметим, что применение (5.4) вместо (5.3) не приводит к дальнейшему улучшению.

Основой доказательства теоремы 5.0.1 является верхняя оценка на среднее значение L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой с дополнительным множителем X^{it_j}.

Теорема 5.0.2. *Пусть $X \gg 1$. Тогда при $s = 1/2 + ir, |r| \ll T^\epsilon$ выполнена оценка*

$$\sum_j \alpha_j X^{it_j}\exp(-t_j/T)L(\mathrm{sym}^2 u_j, s) \ll (1+|r|)^A T\log^3 T + \frac{(1+|r|)^A X^\theta}{X^{1/4}}\left(X^{1/2}\min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{1/2} + \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2}\right).$$

5.1. Формула следа Кузнецова

Пусть $\varphi(x)$ – гладкая функция на $[0,\infty)$, для которой

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi^{(j)}(x) \ll (1+x)^{-2-\epsilon}, \quad j = 0,1,2.$$

Пусть $J_\nu(x)$ – это J-функция Бесселя. Определим интегральные преобразования

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(y)\varphi(y)dy, \tag{5.8}$$

$$\varphi_B(x) = \int_0^1\int_0^\infty \xi x J_0(\xi x)J_0(\xi y)\varphi(y)dyd\xi,$$

$$\varphi_H(x) = \int_1^\infty \int_0^\infty \xi x J_0(\xi x) J_0(\xi y) \varphi(y) dy d\xi,$$

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{\pi i}{2\sinh(\pi t)} \int_0^\infty (J_{2it}(x) - J_{-2it}(x)) \varphi(x) \frac{dx}{x}, \tag{5.9}$$

$$\check{\varphi}(l) = \int_0^\infty J_l(y) \varphi(y) \frac{dy}{y}.$$

Выполнено следующее тождество

$$\varphi(x) = \varphi_H(x) + \varphi_B(x), \tag{5.10}$$

где

$$\varphi_B(x) = \sum_{l \equiv 1(2)} 2l \check{\varphi}(l) J_l(x). \tag{5.11}$$

Лемма 5.1.1. *(формула следа Кузнецова) При $m, n \geq 1$ справедливо тождество*

$$\sum_{j=1}^\infty \alpha_j \lambda_j(m) \lambda_j(n) \hat{\varphi}(t_j) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_{ir}(m) \tau_{ir}(n)}{|\zeta(1+2ir)|^2} \hat{\varphi}(r) dr =$$

$$\delta(m,n) \varphi_0 + \sum_{q=1}^\infty \frac{S(m,n;q)}{q} \varphi_H \left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q} \right). \tag{5.12}$$

Доказательство. См. [**99**] и [**9**] . □

Следуя [**70**] и [**129**][1] положим

$$\varphi(x) = \frac{\sinh \beta}{\pi} x \exp(ix \cosh \beta) \tag{5.13}$$

с

$$\beta = \frac{1}{2} \log X + \frac{i}{2T}. \tag{5.14}$$

Для удобства записи введём обозначения

$$c := -i \cosh \beta = a - ib, \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} a := \sinh(\log \sqrt{X}) \sin((2T)^{-1}); \\ b := \cosh(\log \sqrt{X}) \cos((2T)^{-1}). \end{cases} \tag{5.16}$$

Заметим, что

$$\arg c = -\pi/2 + \gamma, \quad 0 < \gamma \ll T^{-1}. \tag{5.17}$$

[1] В работе допущена опечатка (мнимая единица i стоит в знаменателе вместо числителя) на [**70**, стр.68 линия -1] и на [**129**, стр. 233 линия -3] в определении $\hat{\varphi}(t)$. Исправленная версия дана в (5.9). Это объясняет изменение знака в определении $\varphi(x)$.

Лемма 5.1.2. *Выполнены следующие равенства и оценки*

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{\sinh(\pi t + 2i\beta t)}{\sinh(\pi t)} = X^{it}\exp(-t/T) + O(\exp(-\pi t)), \tag{5.18}$$

$$\varphi_0 = \frac{-\cosh\beta}{2\pi^2\sinh^2\beta}, \tag{5.19}$$

$$\varphi_B(x) \ll X^{-1/2}\min(x, x^{1/2}), \tag{5.20}$$

$$\varphi_B(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)J_{2k-1}(x). \tag{5.21}$$

Доказательство. Из [**89**, ур. 6.6621.1], [**151**, ур. 15.4.18] следует, что

$$\int_0^\infty J_{2it}(x)\exp(ix\cosh\beta)dx = -\frac{\exp(-(\pi+2i\beta)t)}{i\sinh\beta}. \tag{5.22}$$

Применяя (5.9), (5.13) и (5.22), мы доказываем (5.18). Дифференцируя уравнение (5.22) по β и положив $t = 0$, получаем

$$\int_0^\infty J_0(x)\exp(ix\cosh\beta)xdx = -\frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}. \tag{5.23}$$

Теперь (5.19) следует из (5.8),(5.13) и (5.23). Оценку (5.20) сможно доказать аналогично [**70**, лемме 11]. А именно,

$$\varphi_B(x) \ll |\sinh(2\beta)|\int_0^1 \frac{\min(\xi x, \sqrt{\xi x})}{|\cosh^2\beta - \xi^2|^{3/2}}d\xi \ll X^{-1/2}\min(x, x^{1/2}).$$

Для доказательства (5.21) необходимо подставить (5.13) в (5.11) и применить [**89**, 6.6621.1], [**151**, 15.4.18]. □

5.2. Начало доказательства

Для доказательства теоремы 5.0.1 мы последуем методу Иванца [**100**] (см. также [**129**, главу 6]). Для начала задачу можно свести к изучению

$$\sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T)$$

с остатком размера $O(T\log T)$. Для этого введём гладкую функцию $g(x)$, для которой $g(x) = 1$ при $1 \leqslant x \leqslant T$ и $g(x) = 0$ при $x \leqslant 1/2$ и $x \geqslant T + 1/2$. Тогда

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} = \sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T)g(t_j)\exp(t_j/T) + O(T).$$

Пусть

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\exp(\xi/T)e(x\xi)d\xi.$$

В соответствии с [**129**, главой 6]

$$\hat{g}(x) \ll \min(T, 1/|x|). \tag{5.24}$$

Следующая лемма доказана в [**129**, главе 6]).

Лемма 5.2.1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} = \int_{-1}^{1} \hat{g}(\xi) \left(\sum_j (X \exp(-2\pi\xi))^{it_j} \exp(-t_j/T) \right) d\xi + O(T \log T). \tag{5.25}$$

Пусть $h(x)$ - гладкая функция с компактным носителем на $[N, 2N]$, для которой

$$|h^{(j)}(x)| \ll N^{-j}, \text{ for } j = 0, 1, 2, \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = N.$$

Первая идея Иванца - рассмотреть следующее выражение

$$\sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j} \exp(-t_j/T). \tag{5.26}$$

Сумму по n можно вычислить при помощи обратного преобразования Меллина для $h(n)$, учитывая тот факт, что дзета функция Ранкина-Сельберга (0.28) имеет полюс в точке $s = 1$ с вычетом (0.29). Также как в [**100**, лемме 8]

$$\sum_n h(n) \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} = \frac{2}{\zeta(2)} N + \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{h}(s) \frac{L(u_j \otimes u_j, s)}{\cosh(\pi t_j)} ds. \tag{5.27}$$

Подставляя (5.27) в (5.26), получаем

$$\begin{aligned} \sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) = \frac{\zeta(2)}{2N} \sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} X^{it_j} \exp(-t_j/T) \\ - \frac{\zeta(2)}{2N} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{h}(s) \sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \frac{L(u_j \otimes u_j, s)}{\cosh(\pi t_j)} ds. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Стандартный метод для изучения суммы в правой части (5.28) – формула следа Кузнецова.

Вторая идея Иванца – не применять формулу Кузнецова напрямую, а вместо этого подобрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы её преобразование (5.9) приближала $X^{it} \exp(-t/T)$ с небольшим остатком. Заметим, что выбор подходящей функции $\varphi(x)$ не является очевидным. Несколько примеров таких функций можно найти в литературе, например [**100**, ур. 29] и [**70**, ур. 7.2]. Поскольку приближение с применением [**70**, ур. 7.2] приводит к меньшему остатку, аналогично работе [**129**] мы выбираем $\varphi(x)$, заданное (5.13). Можно вычислить $\hat{\varphi}(t)$ в явном виде, см. (5.18). Заменяя $X^{it} \exp(-t/T)$ на $\hat{\varphi}(t)$ в (5.28), получаем

$$\begin{aligned} \sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) + O(1) = \frac{\zeta(2)}{2N} \sum_n h(n) \sum_j \frac{|\rho_j(n)|^2}{\cosh(\pi t_j)} \hat{\varphi}(t_j) \\ - \frac{\zeta(2)}{2N} \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{h}(s) \sum_j \hat{\varphi}(t_j) \frac{L(u_j \otimes u_j, s)}{\cosh(\pi t_j)} ds. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Применяя формулу следа Кузнецова (5.12) к первой сумме по j в правой части (5.29) и рассуждая как на [**129**, стр. 234], мы доказываем, что

$$\sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T) \ll \frac{NX^{1/2}\log T}{(\max(1,NX^{1/2}/T))^{1/2}} + \sqrt{N/X}\log^2 N + T\log^2 T + \frac{1}{N}\left|\int_{(1/2)}\tilde{h}(s)\sum_j \hat{\varphi}(t_j)\frac{L(u_j\otimes u_j,s)}{\cosh(\pi t_j)}ds\right|. \quad (5.30)$$

Замечание 5.2.2. *Оценка* (5.30) *совпадает с оценкой Луо-Сарнака, когда* $\max(1,NX^{1/2}/T) = NX^{1/2}/T$ *(см.* [**129**, стр. 235, строки 2-4]*). Данный максимум возникает естественным образом при оценке сумм сумм Клоостермана*

$$S_n(\phi) := \sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(n,n;q)}{q}\varphi\left(\frac{4\pi n}{q}\right) \ll \sum_{q=1}^{\infty}\frac{|S(n,n;q)|}{q}X^{1/2}\frac{n}{q}\exp(-4\pi an/q)$$

с применением оценки Вейля. Поскольку $a \asymp X^{1/2}/(4T)$ *(см.* (5.16)*), сумму по* q *можно записать как* $q > \max(1, NX^{1/2}/T)$.

Для анализа интеграла в (5.30), Луо и Сарнак применили следующую оценку Линделёфа в среднем (см. [**129**, ур. 5])

$$\sum_{t_j\leqslant T}\frac{L(u_j\otimes u_j,1/2+ir)}{\cosh(\pi t_j)} \ll (1+|r|)^4T^2\log^2 T. \quad (5.31)$$

Для улучшения их результата мы рассмотрим всю сумму

$$\sum_j \hat{\varphi}(t_j)\frac{L(u_j\otimes u_j,1/2+ir)}{\cosh(\pi t_j)},$$

чтобы учесть осцилляцию $\hat{\varphi}(t_j)$.

Из свойств функции $h(x)$ следует, что $|\tilde{h}(s)| \ll N^{1/2}(1+|r|)^{-A}$ для любого A и $s = 1/2+ir$. Применяя (5.31) для суммы по $|r| > T^{\epsilon} := r_0$, нам необходимо работать только с $|r| \leqslant r_0$. Наконец, используя (0.30) и (0.23), получаем

$$\sum_j X^{it_j}\exp(-t_j/T) \ll \frac{NX^{1/2}\log T}{(\max(1,NX^{1/2}/T))^{1/2}} + \sqrt{N/X}\log^2 N + T\log^2 T + \frac{1}{N^{1/2}}\int_{-r_0}^{r_0}\left|\frac{\zeta(1/2+ir)}{\zeta(1+2ir)}\sum_j \alpha_j\hat{\varphi}(t_j)L(\mathrm{sym}^2 u_j,1/2+ir)\right|dr. \quad (5.32)$$

5.3. Точная формула

Данный раздел посвящен изучению

$$M_1(s) := \sum_j \alpha_j\hat{\varphi}(t_j)L(\mathrm{sym}^2 u_j,s), \quad s = 1/2+ir, \quad |r| \leqslant T^{\epsilon}.$$

С этой целью мы воспользуемся методом работы [**31**] (см. также главу 1), где изучался голоморфный случай, с той разницей, что вместо формулы следа Петерсона теперь мы будем применять формулу следа Кузнецова (5.12).

Для доказательства точной формулы для $M_1(1/2+ir)$, мы воспользуемся методом аналитического продолжения. Для $\operatorname{Re} s > 3/2$ определим

$$\Sigma(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(1,n^2;q)}{q} \varphi\left(\frac{4\pi n}{q}\right), \tag{5.33}$$

$$\Sigma_B(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(1,n^2;q)}{q} \varphi_B\left(\frac{4\pi n}{q}\right). \tag{5.34}$$

Двойная сумма в (5.33) и (5.34) сходится при $\operatorname{Re} s > 3/2$ ввиду (0.9), (5.13) и (5.20).

Лемма 5.3.1. *При* $\operatorname{Re} s > 3/2$ *выполнено равенство*

$$M_1(s) = \zeta(2s)\varphi_0 + \Sigma(s) - \Sigma_B(s) - \frac{2\zeta(s)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2} \hat{\varphi}(t)dt. \tag{5.35}$$

Доказательство. Применяя формулу следа Кузнецова (5.12) и (0.6), получаем

$$M_1(s) = \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_j \alpha_j \hat{\varphi}(t_j) \lambda_j(1) \lambda_j(n^2) =$$
$$\zeta(2s)\varphi_0 - \frac{2\zeta(s)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2} \hat{\varphi}(t)dt +$$
$$\zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(1,n^2;q)}{q} \varphi_H\left(\frac{4\pi n}{q}\right).$$

Тогда тождество (5.10) завершает доказательство леммы. □

Для продолжения точной формулы (5.35) на критическую прямую $\operatorname{Re} s = 1/2 + it$ необходимо продолжить аналитически двойную сумму (5.33) и (5.34). Это будет сделано в следующих двух разделах.

5.4. Анализ $\Sigma(s)$

Мы будем работать с $\Sigma(s)$ как в доказательстве [**31**, леммы 5.1]. Во-первых, поменяем порядок суммирования в предположении, что $\operatorname{Re} s > 3/2$. Во-вторых, применим обратное преобразование Меллина для $\varphi(x)$, раскроем суммы Клоостермана и получим дзета функции Лерха. После этого сдвинем линию интегрирования в область, в которой можно применить функциональное уравнение для дзета функции Лерха.

Однако, оказывается, что преобразование Меллина для $\varphi(x)$ не позволяет сдвинуть контур интегрирования в требуемую область, поскольку функция $\varphi(x)$ асимптотически ведёт себя как x при $x \to 0$, а этого не достаточно для абсолютной сходимости. Чтобы

обойти данную сложность мы применить трюк Гекке и вместо того, чтобы работать напрямую с $\varphi(x)$ и $\Sigma(s)$, мы введём дополнительную комплексную переменную λ с $\operatorname{Re}\lambda > 1$ и две функции

$$\varphi(\lambda, x) = \frac{\sinh\beta}{\pi} x^{\lambda} \exp(ix\cosh\beta),$$

$$\Sigma(\lambda, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(1, n^2; q)}{q} \varphi\left(\lambda, \frac{4\pi n}{q}\right), \tag{5.36}$$

где β задано в (5.14). Идея заключается в том, чтобы сначала доказать формулу для $\Sigma(\lambda, s)$ в предположении $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} s$, а затем продолжим её аналитически в область, содержащую точку $\lambda = 1$.

Лемма 5.4.1. *При* $\operatorname{Re}\lambda > \operatorname{Re} s > 3/2$ *выполнено равенство*

$$\Sigma(\lambda, s) = (4\pi)^{s-1}\tilde{\varphi}(\lambda, 1-s)\mathscr{L}_{-4}(s) + 2(2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \mathscr{L}_{n^2-4}(s) I\left(\lambda, \frac{n}{2}\right), \tag{5.37}$$

где

$$I(\lambda, x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Delta)} \tilde{\varphi}(\lambda, w)\Gamma(1-s-w) \sin\left(\pi\frac{s+w}{2}\right) x^w dw \tag{5.38}$$

$c - \operatorname{Re}\lambda < \Delta < -\operatorname{Re} s$.

Доказательство. Чтобы поменять порядок суммирования в (5.36) требуется абсолютная сходимость обоих рядов. Применяя (5.14), (5.15) и (5.16), получаем

$$|\varphi(\lambda, x)| \ll X^{1/2} x^{\operatorname{Re}(\lambda)} \exp(-ax).$$

Из оценки (0.9) следует, что обе суммы в (5.36) сходятся абсолютно при $\operatorname{Re}(s) > 3/2$. В соответствии с [**41**, стр. 312, ур. 1] преобразование Меллина функции $\varphi(\lambda, x)$ при $\operatorname{Re} w > -\operatorname{Re}\lambda$ равно

$$\tilde{\varphi}(\lambda, w) = \frac{\sinh\beta}{\pi} \frac{\Gamma(w+\lambda)}{c^{w+\lambda}}.$$

Следовательно,

$$\Sigma(\lambda, s) = \zeta(2s) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Delta)} \tilde{\varphi}(\lambda, w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(1, n^2; q)}{n^{w+s}} \left(\frac{q}{4\pi}\right)^w dw.$$

Предположим, что $\max(-\operatorname{Re}\lambda, 1 - \operatorname{Re} s) < \Delta < -1/2$, чтобы гарантировать абсолютную сходимость интеграла по w и сумм по q, n. Заметим, что из (5.17) следует, что функция $\tilde{\varphi}(\lambda, w)$ экспоненциально убывает относительно $\operatorname{Im} w$. В соответствии с [**31**, леммой 5.1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(1, n^2; q)}{n^{w+s}} = \sum_{d \pmod q} \frac{S(1, d^2; q)}{q^{w+s}} \zeta\left(\frac{d}{q}, 0, w+s\right).$$

Отметим, что для всех d дзета функция Лерха имеет простой полюс в точке $w = 1 - s$ с вычетом один. Сдвинем w-контур влево до $\Delta_1 := -s - \epsilon$, проходя простой полюс в точке $w = 1 - s$. Для получившегося интеграла применим функциональное уравнение (0.11). Таким образом,

$$\Sigma(\lambda, s) = \zeta(2s)(4\pi)^{s-1}\tilde{\varphi}(\lambda, 1-s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{d \pmod q} S(1, d^2; q) + \\ \zeta(2s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta_1)}\tilde{\varphi}(\lambda, w)\frac{2(2\pi)^{s+w-1}}{q^{s+w}}\Gamma(1-s-w)\times \\ \sin\left(\pi\frac{s+w}{2}\right)\sum_{d \pmod q} S(1, d^2; q)\zeta(0, d/q; 1-s-w)\left(\frac{q}{4\pi}\right)^{w} dw.$$

Записывая дзета функции Лерха по определению и применяя [**31**, лемму 4.1], мы завершаем доказательство. □

Лемма 5.4.2. *Справедливо тождество*

$$I(\lambda, x) = \frac{\sinh\beta}{\pi c^{\lambda}}2^{\lambda-s}\frac{\Gamma((1+\lambda-s)/2)\Gamma(1+(\lambda-s)/2)}{2\Gamma(1/2)} \\ \times\left(\frac{x}{c}\right)^{1-s}\left(\left(1+\sqrt{-x^2/c^2}\right)^{s-\lambda-1} + \left(1-\sqrt{-x^2/c^2}\right)^{s-\lambda-1}\right). \quad (5.39)$$

Доказательство. Сдвигая контур интегрирования в (5.38) вправо, мы проходим простые полюса в точках $w = 1 - s + j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Таким образом,

$$I(\lambda, x) = \frac{\sinh\beta}{\pi c^{\lambda}}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-s}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\Gamma(1+\lambda-s+2j)\left(\frac{x}{c}\right)^{2j}.$$

Дважды применяя формулу Лежандра

$$\Gamma(1+\lambda-s+2j) = \frac{2^{\lambda-s+2j}}{\sqrt{\pi}}\Gamma((1+\lambda-s)/2+j)\Gamma(1+(\lambda-s)/2)+j),$$

$$\Gamma(2j+1) = \frac{2^{2j}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(j+1/2)\Gamma(j+1),$$

получаем

$$I(\lambda, x) = \frac{\sinh\beta}{\pi c^{\lambda}}2^{\lambda-s}\frac{\Gamma((1+\lambda-s)/2)\Gamma(1+(\lambda-s)/2)}{\Gamma(1/2)} \\ \times\left(\frac{x}{c}\right)^{1-s}{}_2F_1\left(\frac{1+\lambda-s}{2}, 1+\frac{\lambda-s}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{c^2}\right).$$

Наконец, утверждение леммы следует из [**151**, 15.4.7]. □

Анализируя правую часть уравнения (5.37), мы видим, что $\Sigma(\lambda, s)$ может быть продолжена аналитически в область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\mathscr{L}_{n^2-4}(s)I\left(\lambda, \frac{n}{2}\right).$$

Благодаря (5.39) и (0.41) мы получаем аналитическое продолжение $\Sigma(\lambda, s)$ в интересующую нас область, а именно $\operatorname{Re} s = 1/2$ и $\lambda = 1$.

Лемма 5.4.3. *При* $\operatorname{Re} s = 1/2$ *выполнено равенство*

$$\Sigma(s) = (4\pi)^{s-1}\tilde{\varphi}(1, 1-s)\mathscr{L}_{-4}(s) + 2(2\pi)^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\mathscr{L}_{n^2-4}(s)I\left(\frac{n}{2}\right), \tag{5.40}$$

где

$$I(x) = \frac{\sinh\beta}{\pi c}2^{1-s}\left(\frac{x}{c}\right)^{1-s}\frac{\Gamma(1-s/2)\Gamma(3/2-s/2)}{\Gamma(1/2)}\times \\ \left(\left(1+\sqrt{-x^2/c^2}\right)^{s-2} + \left(1-\sqrt{-x^2/c^2}\right)^{s-2}\right). \tag{5.41}$$

5.5. Анализ $\Sigma_B(s)$

Подставляя выражение (5.21) в формулу (5.34), получаем

$$\Sigma_B(s) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\Sigma_B(k, s),$$

где

$$\Sigma_B(k, s) = 2\pi(-1)^k\zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(1, n^2; q)}{q}J_{2k-1}\left(\frac{4\pi n}{q}\right).$$

Функция $\Sigma_B(k, s)$ изучалась в [**31**, лемме 5.1]. Основное отличие состоит в том, что в [**31**, лемме 5.1] мы предполагали, что $k \geqslant 6$, а сейчас суммирование ведётся по всем $k \geq 1$. Случай $k = 1$ является самым сложным. В остальных случаях можно провести доказательство аналогично [**31**, лемме 5.1]. Основная проблема при $k = 1$ заключается в невозможности сдвинуть линию интегрирования на $\Delta_1 := -s-\epsilon$ в силу того, что требуемое для этого условие $1 - 2k < -s - \epsilon < -3/2 - \epsilon$ выполнено только при $k \geq 2$. Чтобы обойти данную проблему, мы снова применим трюк Гекке аналогично работе [**7**]. Более точно, мы заменим k в функции Бесселя на параметр λ в предположении, что $\operatorname{Re}\lambda > 5/4$. Таким образом, мы можем повторить доказательство [**31**, леммы 5.1] и получить при $\operatorname{Re}\lambda > (1 + \operatorname{Re} s)/2, \operatorname{Re} s > 3/2$ следующее выражение

$$\Sigma_B(\lambda, s) = (2\pi)^s i^{2k}\frac{\Gamma(\lambda - s/2)}{\Gamma(\lambda + s/2)}\mathscr{L}_{-4}(s) + (2\pi)^s i^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)I_B(\lambda, n), \tag{5.42}$$

где

$$I_B(\lambda, x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Delta)}\frac{\Gamma(\lambda - 1/2 + w/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 - w/2)}\Gamma(1-s-w)\sin\left(\pi\frac{s+w}{2}\right)x^w dw$$

с $1-2\operatorname{Re}\lambda<\Delta<1-\operatorname{Re}s$. Также как и в [**31**, лемме 5.1] мы получаем, что при $x\geq 2$ выполнено равенство

$$I_B(\lambda,x)=\frac{2^{2\lambda}}{2^s\sqrt{\pi}}\cos\left(\pi\lambda-\frac{\pi s}{2}\right)\frac{\Gamma(\lambda-s/2)\Gamma(\lambda+1/2-s/2)}{\Gamma(2\lambda)}x^{1-2\lambda}$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\lambda-s/2,\lambda+1/2-s/2,2\lambda;\frac{4}{x^2}\right). \quad (5.43)$$

Правая часть (5.42) позволяет получить аналитическое продолжение $\Sigma_B(\lambda,s)$ в область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)I_B\left(\lambda,n\right).$$

Применяя (5.43) и (0.41) мы доказываем аналтическое продолжение $\Sigma_B(\lambda,s)$ в область, содержащую $\operatorname{Re}s=1/2,\lambda=1$.

Лемма 5.5.1. *При* $\operatorname{Re}s=1/2$ *выполнено тождество*

$$\Sigma_B(s)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\left(\frac{(2\pi)^s i^{2k}}{2}\frac{\Gamma(k-s/2)}{\Gamma(k+s/2)}\mathscr{L}_{-4}(s)\right.$$
$$+\frac{(2\pi)^s}{\sqrt{\pi}}\zeta(2s-1)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(k+1/2-s/2)}{\Gamma(k+s/2)\Gamma(k-1/2+s/2)}\Gamma(s-1/2)$$
$$+\frac{(2\pi)^s\sin(\pi s/2)}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}_{-3}(s)\Phi_k(s,1/4)$$
$$\left.+\frac{\pi^s\cos(\pi s/2)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n>2}\mathscr{L}_{n^2-4}(s)n^s\Psi_k(s,4/n^2)\right), \quad (5.44)$$

где

$$\Phi_k(s,x):=\frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(1-k-s/2)}{\Gamma(1/2)}{}_2F_1\left(k-\frac{s}{2},1-k-\frac{s}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right), \quad (5.45)$$

$$\Psi_k(s,x):=x^k\frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(k+1/2-s/2)}{\Gamma(2k)}{}_2F_1\left(k-\frac{s}{2},k+\frac{1-s}{2},2k;x\right). \quad (5.46)$$

5.6. Специальные функции

Чтобы получить верхнюю оценку на $M_1(1/2+ir)$, необходимо оценить $I(x)$, $\Phi_k(s,x)$, $\Psi_k(s,x)$, заданные формулами (5.41), (5.45), (5.46) при $\operatorname{Re}s=1/2$.

Лемма 5.6.1. *При* $s=1/2+ir$ *справедлива оценка*

$$I(x)\ll(1+|r|)^{3/2}\left(\frac{x}{|c|}\right)^{1/2}\left|1-\sqrt{-x^2/c^2}\right|^{-3/2}. \quad (5.47)$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma_{\pm}=\arg\left(1\pm\sqrt{-x^2/c^2}\right).$$

Для оценки функции $I(x)$, заданной (5.41), мы применим равенство

$$|z^a| = |z|^{\operatorname{Re} a} \exp(-\operatorname{Im} a \arg z),$$

из которого следует, что

$$I(x) \ll (1+|r|)^{3/2} \left(\frac{x}{|c|}\right)^{1/2} \exp(-\pi|r|/2) \left(\frac{\exp(-r(\arg c + \gamma_-))}{\left|1-\sqrt{-x^2/c^2}\right|^{3/2}} + \frac{\exp(-r(\arg c + \gamma_+))}{\left|1+\sqrt{-x^2/c^2}\right|^{3/2}} \right).$$

Таким образом, для доказательства (5.47) необходимо показать, что

$$-\pi|r|/2 - r(-\pi/2 + \gamma + \gamma_\pm) \leqslant 0. \tag{5.48}$$

Из (5.17) следует, что

$$1 \pm \sqrt{-x^2/c^2} = 1 \pm \frac{x}{|c|}\cos\gamma \mp i\frac{x}{|c|}\sin\gamma. \tag{5.49}$$

В случае с плюсом $-\gamma < \gamma_+ < 0$, а значит (5.48) выполнено. В случае с минусом $0 < \gamma_- < \pi - \gamma$, то есть снова справедливо (5.48) . □

Лемма 5.6.2. *При $s = 1/2 + ir$ выполнена оценка*

$$\Sigma(s) \ll \frac{(1+|r|)^A X^\theta}{X^{1/4}} \left(X^{1/2}T^{1/2} + T^{3/2}\right), \tag{5.50}$$

где A – некоторая положительная константа.

Доказательство. Оценивая (5.40) по модулю и применяя (0.41), (5.47), получаем

$$\Sigma(s) \ll \frac{(1+|r|)^A}{|c|^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\theta} \left|1-\sqrt{-n^2/(4c^2)}\right|^{-3/2}.$$

Ввиду (5.49) выполнено равенство

$$\left|1-\sqrt{-x^2/c^2}\right|^2 = \left(1-\frac{x}{|c|}\right)^2 + 2\frac{x}{|c|}\sin^2(\gamma/2).$$

Следовательно,

$$\Sigma(s) \ll \frac{(1+|r|)^A X^\theta}{X^{1/4}} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{2|c|}\right), \tag{5.51}$$

где

$$f(x) = \frac{x^{2\theta}}{\left((1-x)^2 + x\delta\right)^{3/4}}, \quad \delta = 2\sin^2(\gamma/2) \asymp \frac{1}{8T^2}.$$

Вычисляя первую производную $f(x)$ и решая уравнение $f'(x) = 0$,мы показываем, что функция $f(x)$ имеет только одну критическую точку $x_0 = 1 + O(\delta)$ в интервале $(0, \infty)$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{n}{2|c|}\right) = \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{2|c|}\right) dx + O(\max_{0<x<\infty} |f(x)|) \ll$$

$$X^{1/2} \int_0^{1-\delta^{1/2}} \frac{x^{2\theta} dx}{(1-x)^{3/2}} + X^{1/2} \int_{1-\delta^{1/2}}^{1+\delta^{1/2}} \frac{x^{2\theta} dx}{(x\delta)^{3/4}}$$

$$+ X^{1/2} \int_{1+\delta^{1/2}}^{\infty} \frac{x^{2\theta} dx}{(1-x)^{3/2}} + T^{3/2} \ll X^{1/2} T^{1/2} + T^{3/2}. \quad (5.52)$$

Подставляя (5.52) в (5.51), мы завершаем доказательство. □

Улучшение оценки (5.50) для произвольных X и T – довольно сложная задача. Однако, мы можем усилить оценку в случае, когда T достаточно большое и $\left\|X^{1/2} + X^{-1/2}\right\| \neq 0$, где $\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого. Пусть

$$\kappa(X) = \left\|X^{1/2} + X^{-1/2}\right\|.$$

Лемма 5.6.3. *Предположим, что* $\kappa(X) \neq 0$ *и*

$$T \gg \frac{X^{1/4+\epsilon}}{\kappa^{1/2}(X)}.$$

При $s = 1/2 + ir$ *выполнена оценка*

$$\Sigma(s) \ll \frac{(1+|r|)^A X^{\theta}}{X^{1/4}} \left(X^{1/2} \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{1/2} + \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2} \right),$$

где A *– некоторая положительная константа.*

Доказательство. Наша цель – улучшить оценку суммы по n в (5.51). Вычисляя производную функции $f(x)$ и решая уравнение $f'(x) = 0$, мы показываем, что функция $f(x)$ имеет только одну критическую точку $x_0 = 1 + O(\delta)$ в интервале $(0, \infty)$. В соответствии с (5.52) самый большой вклад в оценку на $\Sigma(s)$ вносит суммирование по

$$|2|c| - n| \ll 2|c|T^{-1}.$$

Заметим, что для достаточно большого T данная область может не содержать ни одного целого числа.

Для начала рассмотрим значения $\|2|c|\|$. Из (5.15) следует, что

$$2|c| = 2\left(\cosh^2(\log\sqrt{X}) - \sin^2((2T)^{-1})\right)^{1/2} = X^{1/2} + X^{-1/2} + O(X^{-1/2}T^{-2}).$$

Если $X^{1/2}+X^{-1/2}$ – целое число, то $\|2|c|\| = O(X^{-1/2}T^{-2})$. Так как сумма по n в (5.51) содержит слагаемые

$$f\left(\frac{[2|c|]}{2|c|}\right)+f\left(\frac{[2|c|]+1}{2|c|}\right)\ll\frac{1}{((\|2|c|\|/(2|c|))^2+\delta)^{3/4}}\ll T^{3/2},$$

оценка (5.50) не улучшается в этом случае.

Если $X^{1/2}+X^{-1/2}$ не является целым числом, то при

$$T\gg X^{-1/4+\epsilon}\|X^{1/2}+X^{-1/2}\|^{-1/2}$$

значения $\|2|c|\|$ очень близки к $\|X^{1/2}+X^{-1/2}\|$. Сумму по n в (5.51) можно разбить на две части

$$\Sigma(s)\ll\frac{(1+|r|)^A X^\theta}{X^{1/4}}\left(\sum_{n=1}^{[2|c|]}f\left(\frac{n}{2|c|}\right)+\sum_{n=[2|c|]+1}^{\infty}f\left(\frac{n}{2|c|}\right)\right).$$

При $n\leqslant[2|c|]$ функция $f(n/(2|c|))$ возрастает, а при $n\geqslant[2|c|]+1$ убывает при условии, что

$$T\gg X^{1/4+\epsilon}\|X^{1/2}+X^{-1/2}\|^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{[2|c|]}f\left(\frac{n}{2|c|}\right)=\int_1^{[2|c|]}f\left(\frac{x}{2|c|}\right)dx+O\left(f\left(\frac{[2|c|]}{2|c|}\right)\right),$$

$$\sum_{n=[2|c|]+1}^{\infty}f\left(\frac{n}{2|c|}\right)=\int_{[2|c|]+1}^{\infty}f\left(\frac{x}{2|c|}\right)dx+O\left(f\left(\frac{[2|c|]+1}{2|c|}\right)\right).$$

Вычисляя эти интегралы, мы показываем, что первую сумму можно оценить как

$$\sum_{n=1}^{[2|c|]}f\left(\frac{n}{2|c|}\right)\ll X^{1/2}\min\left(T^{1/2},\left(\frac{2|c|}{\|2|c|\|}\right)^{1/2}\right)+\min\left(T^{3/2},\left(\frac{2|c|}{\|2|c|\|}\right)^{3/2}\right).$$

Кроме того, та же оценка справедлива и для второй суммы.

□

Также для нашего доказательства необходимы следующие результаты из работы [**32**].

Лемма 5.6.4. *([**32**, лемма 7.4]) При $s=1/2+2ir$, $0<x<1$ выполнены оценки*

$$\exp(\pi|r|)\Psi_k(s,x)\ll(1-x)^{1/4}\frac{(1+|r|)^{2k-2a-1}}{2^{2k}k^{a+1/2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k-a},\tag{5.53}$$

$$\exp(\pi|r|)\Psi_k(s,x)\ll(1-x)^{1/4}\frac{(1+|r|)^{2b}}{k^{2b-1/2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{b},\tag{5.54}$$

где a, b – некоторые абсолютные константы, для которых $0<a<k-1/4$, $1/4<b<k$.

Лемма 5.6.5. *([**32**, лемма 7.5]) При $s = 1/2 + 2ir$*

$$\exp(\pi|r|)\Phi_k(s, 1/4) \ll \frac{4^k}{k + |r|}.$$

Замечание 5.6.6. *при $s = 1/2$ выполнена (см. [**31**, ур. 2.12]) лучшая оценка $\Phi_k(1/2, 1/4) \ll k^{-1/2}$. Мы ожидаем, что при $s = 1/2 + 2ir$ оценка вида*

$$\exp(\pi|r|)\Phi_k(s, 1/4) \ll (1 + |r|)^a k^{-1/2} \tag{5.55}$$

должна выполняться для некоторого положительного значения a.

Лемма 5.6.7. *При $s = 1/2 + 2ir$, $X > 5$ выполнена оценка*

$$\Sigma_B(s) \ll (1 + |r|)^A X^{-1/2}, \tag{5.56}$$

где A – некоторая положительная константа.

Доказательство. Для оценки (5.44) применим (5.14), (0.41), леммы 5.6.4 и 5.6.5 вместе с классическими оценками на гамма-функцию и дзета функцию Римана. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\frac{(2\pi)^s \sin(\pi s/2)}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}_{-3}(s)\Phi_k(s, 1/4)$$
$$\ll (1 + |r|)^A \sum_{k=1}^{\infty}(2/\sqrt{X})^{2k-1} \ll (1 + |r|)^A X^{-1/2}.$$

Для оценки вклада

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\frac{\pi^s \cos(\pi s/2)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n>2}\mathscr{L}_{n^2-4}(s)n^s\Psi_k(s, 4/n^2)$$

разобьём сумму по n на две части с условиями $n \leqslant 4(1 + |r|)$ и $n > 4(1 + |r|)$. Для первой суммы применим (5.54), из чего следует оценка

$$(1 + |r|)^A \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2b-3/2}X^{k-1/2}} \ll (1 + |r|)^A X^{-1/2}.$$

Для второй суммы по $n > 4(1 + |r|)$ при помощи (5.53) получаем

$$(1 + |r|)^{A_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{X^{k-1/2}}\sum_{n>4(1+|r|)}\frac{n^{2\theta+\epsilon}}{(n^2/4-1)^{k-a-1/4}}\frac{(1+|r|)^{2k-2a-1}}{2^{2k}k^{a+1/2}} \ll (1 + |r|)^A X^{-1/2}.$$

□

Замечание 5.6.8. *Условие $X > 5$ в лемме 5.6.7 необходимо только для оценки вклада от $\Phi_k(s, 1/4)$. В частности, оценка (5.55) позволила бы получить оценку вида*

$$\Sigma_B(s) \ll \frac{(1+|r|)^A}{(X-1)^B}$$

для любого $X > 1$ с некоторыми положительными A и B.

5.7. Оценки на момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса

Лемма 5.7.1. *При $\operatorname{Re} s = 1/2$ справедлива формула*

$$M_1(s) = \zeta(2s)\varphi_0 + \Sigma(s) - \Sigma_B(s) - \frac{2\zeta(s)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2}\hat{\varphi}(t)dt - 2\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}\hat{\varphi}\left(\frac{1-s}{2i}\right), \quad (5.57)$$

где $\Sigma(s)$ задана в (5.40) и $\Sigma_B(s)$ в (5.44).

Доказательство. Для доказательства аналитического продолжения (5.35) на критическую прямую $\operatorname{Re} s = 1/2$ нам осталось рассмотреть

$$\frac{2\zeta(s)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2}\hat{\varphi}(t)dt = \frac{\zeta(s)}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}\hat{\varphi}\left(\frac{z}{2i}\right)dz.$$

Продолжение $\Sigma(s)$ и $\Sigma_B(s)$ следует из (5.40) и (5.44), соответственно. Рассуждая как в **[29**, теореме 7.3], мы доказываем (5.57). □

Процедура аналитического продолжения (5.57) в область, содержащую критическую точку $s = 1/2$ не является тривиальной, поскольку в правой части (5.57) содержатся два слагаемых с простыми полюсами в точке $s = 1/2$.

Лемма 5.7.2. *Справедлива следующая формула на критической прямой*

$$M_1(1/2) = -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\left(\psi(k-1/4)+\psi(k+1/4)\right) - \frac{\cosh\beta}{4\pi^2\sinh^2\beta}\left(3\gamma+\frac{\pi}{2}-3\log(2\pi)\right) + \Sigma(1/2) - \Sigma_B(1/2) - \frac{2\zeta(1/2)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta(1/2+2it)\zeta(1/2-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2}\hat{\varphi}(t)dt - 2\frac{\zeta(0)}{\zeta(3/2)}\hat{\varphi}\left(\frac{1}{4i}\right),$$

где $\Sigma(1/2)$ задана в (5.40) и $\Sigma_B(1/2)$ в (5.44) с пропущенным слагаемым, содержащим $\zeta(2s-1)$.

Доказательство. Следующие два слагаемых

$$\zeta(2s)\varphi_0 - \frac{1}{\pi^2}\frac{(2\pi)^s}{\sqrt{\pi}}\zeta(2s-1)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s-1/2)\times \\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\frac{\Gamma(k-s/2)\Gamma(k+1/2-s/2)}{\Gamma(k+s/2)\Gamma(k-1/2+s/2)} \quad (5.58)$$

имеют простые полюса в $s = 1/2$. Для простоты положим $s = 1/2 + u$ с $u \to 0$. Применяя (5.19) и функциональное уравнение для дзета функции Римана, мы показываем, что (5.58) равно

$$\zeta(1+2u)\frac{-\cosh\beta}{2\pi^2\sinh^2\beta} - \frac{\zeta(1-2u)}{\pi^2}\frac{(2\pi)^{1/2+3u}}{\sqrt{\pi}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{2}\right)\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\times \\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta)\frac{\Gamma(k-1/4-u/2)\Gamma(k+1/4-u/2)}{\Gamma(k+1/4+u/2)\Gamma(k-1/4+u/2)}. \quad (5.59)$$

Заметим, что (5.59) голоморфно в $u = 0$. Это следует из тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\exp(-(2k-1)\beta) = \frac{\cosh\beta}{2\sinh^2\beta}.$$

Вычисляя предел (5.59) при u стремящимся 0 по правилу Лопиталя, мы доказываем лемму. □

Теорема 5.7.3. *Пусть $X > 5$. Тогда для $s = 1/2 + ir$ выполнена оценка*

$$M_1(s) \ll (1+|r|)^A T\log^3 T + \\ \frac{(1+|r|)^A X^\theta}{X^{1/4}}\left(X^{1/2}\min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{1/2} + \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2}\right). \quad (5.60)$$

Доказательство. Утверждение леммы является следствием (5.56), (5.6.3), (5.50) и (5.57). Для оценки интеграла, содержащего дзета функции Римана в (5.57), достаточно применить стандартную оценку $|\zeta^{-1}(1+it)| \ll \log t$, неравенство Коши-Буняковского и оценку на второй момент дзета функции Римана

$$\int_0^T |\zeta(1/2+it)|^2 dt \ll T\log T.$$

В результате,

$$\frac{2\zeta(s)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{|\zeta(1+2it)|^2}\hat{\varphi}(t)dt \ll (1+|r|)^A T\log^3 T.$$

Из (5.9) следует, что

$$2\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}\hat{\varphi}\left(\frac{1-s}{2i}\right) \ll (1+|r|)^A X^{1/4}.$$

Этот остаточный член поглощается другими слагаемыми в (5.60). □

5.8. Оценки спектральной экспоненциальной суммы

Теорема 5.8.1. *При $X > 5$ выполнены оценки*

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll S(X,T,\kappa(X)) \log^2 T, \tag{5.61}$$

где

$$S(X,T,\kappa(X)) = \begin{cases} X^{1/4+\theta/2}T^{1/2} & \text{если} \quad T \leqslant X^{1/2}; \\ X^{\theta/2}T & \text{если} \quad X^{1/2} < T \leqslant \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}; \\ X^{\theta/2}T^{1/4}\left(\frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/4} & \text{если} \quad \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)} < T \leqslant \frac{X^{1/2+2\theta/3}}{\kappa(X)}; \\ T & \text{если} \quad \frac{X^{1/2+2\theta/3}}{\kappa(X)} < T. \end{cases} \tag{5.62}$$

Доказательство. Подставляя (5.60) в (5.32), получаем

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll \frac{NX^{1/2}\log T}{(\max(1, NX^{1/2}/T))^{1/2}} + \sqrt{N/X}\log^2 N + T\log^2 T + \\ \frac{1}{N^{1/2}}\left(T\log^3 T + \frac{X^\theta}{X^{1/4}}\left(X^{1/2}\min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{1/2} + \min\left(T, \frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2}\right)\right).$$

Рассмотрим различные случаи.

Если $T \leqslant X^{1/2}$, то положив $N = X^\theta \log^{-1} T$, получаем оценку

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}\log^{1/2} T.$$

Если $X^{1/2} < T \leqslant X^{1/2}/\kappa(X)$, то выбрав $N = TX^{\theta-1/2}\log^{-1} T$, доказываем, что

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll X^{\theta/2}T\log^{1/2} T.$$

Если $X^{1/2}/\kappa(X) < T \leqslant X^{1/2+2\theta/3}/\kappa(X)$, то выбор

$$N = \frac{X^\theta}{T^{1/2}X^{1/2}\log T}\left(\frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/2}$$

приводит к оценке

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll X^{\theta/2}T^{1/4}\left(\frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/4}\log^{1/2} T + T\log^2 T \\ \ll X^{\theta/2}T^{1/4}\left(\frac{X^{1/2}}{\kappa(X)}\right)^{3/4}\log^2 T.$$

Если $X^{1/2+2\theta/3}/\kappa(X) < T$, то положив $N = X^{2\theta/3}/\kappa(X)$, находим, что

$$\sum_j X^{it_j} \exp(-t_j/T) \ll T\log^2 T + \frac{X^{1/2+2\theta/3}}{\kappa(X)}\log T \ll T\log^2 T.$$

□

Заметим, что достаточно использовать только оценку в (5.62) для доказательства (5.7). Другие оценки в (5.62), а также лемма 5.6.3, нужны для доказательства гипотезы (5.5) безусловно в некоторых областях.

Теорема 5.8.2. *При $X > 5$ выполнены оценки*

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll \max\left(X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}, X^{\theta/2}T\right)\log^3 T, \tag{5.63}$$

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll T\log^2 T, \quad \textit{if} \quad T > \frac{X^{1/2+7\theta/6}}{\kappa(X)}. \tag{5.64}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно подставить оценку (5.61) в уравнение (5.25). Следовательно,

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll \log^2 T \int_{-1}^{1} |\hat{g}(\xi)| S(X\exp(-2\pi\xi), T, \kappa(X\exp(-2\pi\xi)))d\xi. \tag{5.65}$$

Применяя оценку

$$S(X, T, \kappa(X)) \leqslant \max(X^{1/4+\theta/2}T^{1/2}, X^{\theta/2}T), \tag{5.66}$$

которая следует из (5.62), мы получаем (5.63). Оценка (5.64) может быть доказана при помощи

$$S(X, T, \kappa(X)) = T \quad \text{if} \quad X^{1/2+2\theta/3}/\kappa(X) < T. \tag{5.67}$$

Для этого разобьём интеграл (5.65) на две части. Первая будет по ξ, для которых

$$\kappa(X\exp(-2\pi\xi)) \leqslant \delta.$$

Для оценки этого интеграла мы применим (5.66). Второй интеграл мы оценим при помощи (5.67). В соответствии с этими оценками мы выберем оптимальное значение параметра δ.

Во-первых, замена переменных приводит к

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll \frac{\log^2 T}{X} \int_{X\exp(-2\pi)}^{X\exp(2\pi)} \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| S(Z, T, \kappa(Z))dZ.$$

Обозначим $Z_n = (n + \sqrt{n^2-4})^2/4$ и положим

$$Z_{n_1-1} < X\exp(-2\pi) \leqslant Z_{n_1}, \quad Z_{n_2} \leqslant X\exp(2\pi) < Z_{n_2+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll \frac{\log^2 T}{X} \int_I \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| S(Z, T, \kappa(Z))dZ$$
$$+ \frac{\log^2 T}{X} \sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} \int_{|Z-Z_n| \leqslant \delta\sqrt{Z_n}} \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| S(Z, T, \kappa(Z))dZ,$$

где

$$I = [X\exp(-2\pi), X\exp(2\pi)]\setminus \bigcup_{n_1\leqslant n\leqslant n_2} [Z_n - \delta\sqrt{Z_n}, Z_n + \delta\sqrt{Z_n}].$$

Для $Z \in I$ выполнена оценка $\kappa(Z) \gg \delta$. Для оценки интеграла по I применим (5.67). Оставшиеся интегралы оцениваются при помощи (5.66). Наконец, мы получаем, что при $T > X^{1/2+2\theta/3}/\delta$

$$\sum_{t_j\leqslant T} X^{it_j} \ll T\log^3 T + \frac{TX^{\theta/2}\log^2 T}{X} \sum_{n_1\leqslant n\leqslant n_2} \int_{|Z-Z_n|\leqslant\delta\sqrt{Z_n}} \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| dZ. \tag{5.68}$$

Из (5.24) следует, что

$$\left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| \ll T \quad \text{when} \quad |Z-X| \ll \frac{X}{T}.$$

Заметим, что если

$$\kappa(X) \gg \delta \quad \text{and} \quad \kappa(X)X^{1/2} \gg \frac{X}{T}, \tag{5.69}$$

то интервал $|Z - X| \ll \frac{X}{T}$ не пересекается с

$$\bigcup_{n_1\leqslant n\leqslant n_2} [Z_n - \delta\sqrt{Z_n}, Z_n + \delta\sqrt{Z_n}].$$

Применяя (5.24), получаем

$$\int_{|Z-Z_n|\leqslant\delta\sqrt{Z_n}} \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| dZ \ll X\int_{|X\exp(y)-Z_n|\leqslant\delta\sqrt{Z_n}} \frac{dy}{y}.$$

Пусть Z_{n_0} - это ближайшее из Z_n к X, и положим $Y_j = Z_{n_0+j}$. Тогда

$$\sum_{n_1\leqslant n\leqslant n_2} \int_{|Z-Z_n|\leqslant\delta\sqrt{Z_n}} \left|\hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| dZ \ll \sum_{|j|\ll X^{1/2}} X\int_{|X\exp(y)-Y_j|\leqslant\delta\sqrt{Y_j}} \frac{dy}{y}. \tag{5.70}$$

Интервал интегрирования в (5.70) равен

$$\log\left(\frac{Y_j}{X} - \frac{\delta\sqrt{Y_j}}{X}\right) \leqslant y \leqslant \log\left(\frac{Y_j}{X} + \frac{\delta\sqrt{Y_j}}{X}\right).$$

Поскольку точка Y_j очень близка к $X \pm \kappa(X)\sqrt{X} + j\sqrt{X}$, интервал имеет вид

$$\log\left(1 + \frac{j \pm \kappa(X) - \delta}{X^{1/2}}\right) \leqslant y \leqslant \log\left(1 + \frac{j \pm \kappa(X) + \delta}{X^{1/2}}\right).$$

Применяя тот факт, что для маленьких α

$$\int_{\log a}^{\log(a+\alpha)} \frac{dy}{y} \ll \frac{\alpha}{\log a},$$

а также используя оценку (5.69), мы доказываем

$$\int_{|X\exp(y)-Y_j|\leqslant\delta\sqrt{Y_j}} \frac{dy}{y} \ll \frac{\delta}{|j+\kappa(X)|}. \tag{5.71}$$

Подставляя (5.71) в (5.70), получаем

$$\sum_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} \int_{|Z-Z_n| \leqslant \delta\sqrt{Z_n}} \left| \hat{g}\left(\frac{\log(Z/X)}{2\pi}\right)\right| dZ \ll \frac{X\delta}{\kappa(X)} \log X. \tag{5.72}$$

Подставляя (5.72) в (5.68), мы приходим к оценке

$$\sum_{t_j \leqslant T} X^{it_j} \ll T\log^3 T + \frac{TX^{\theta/2}\log^3 T}{\kappa(X)}\delta$$

с условиями (5.69) и при $T > X^{1/2+2\theta/3}/\delta$. Выбрав $\delta = \kappa(X)X^{-\theta/2}$, мы доказываем, что (5.69) справедлива при выполнении условий леммы. Это завершает доказательство (5.64).

□

ГЛАВА 6

Формула спектрального разложения для сумм L-рядов Загира I

Напомним, что L-ряд Загира (0.37) определяется как

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho_q(n)}{q^s},$$

где $\zeta(s)$ дзета-функция Римана и $n \in \mathbb{Z}$

$$\rho_q(n) := \#\{x \pmod{2q} : x^2 \equiv n \pmod{4q}\}.$$

Пусть $\{u_{j,k} : 1 \leq j \leq \vartheta(k)\}$ – ортонормированный базис пространства голоморфных параболических форм веса $2k$ и уровня 1, состоящий из собственных функций всех операторов Гекке. Любой элемент базиса допускает разложение Фурье

$$u_{j,k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{j,k}(n) e(nz), \quad e(x) := \exp(2\pi i x),$$

где

$$\rho_{j,k}(n) = \rho_{j,k}(1)\lambda_{j,k}(n) n^{k-1/2}$$

и $\{\lambda_{j,k}(n)\}$ – собственные значения операторов Гекке, действующих на $u_{j,k}(z)$. Заметим, что

$$\lambda_{j,k}(n)\lambda_{j,k}(m) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_{j,k}\left(\frac{nm}{d^2}\right). \tag{6.1}$$

Введём нормализующий коэффициент

$$\alpha_{j,k} := \frac{16\Gamma(2k)}{(4\pi)^{2k+1}} |\rho_{j,k}(1)|^2,$$

где $\Gamma(s)$ – Гамма-функция. При $\operatorname{Re} s > 1$ определим L-функцию

$$L(\operatorname{sym}^2 u_{j,k}, s) := \zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{j,k}(n^2)}{n^s}.$$

Пусть $\{u_j\}$ ортонормированный базис форм Маасса, состоящий из общих собственных функций всех операторов Гекке и оператора Лапласа. Обозначим через $L(\operatorname{sym}^2 u_j, s)$ соответствующую L-функцию симметрического квадрата (0.20) с нормализующим коэффициентом α_j (0.23).

Главный результат данной главы – следующая формула, выражающая среднее значение L-рядов Загира через моменты L-функций симметрического квадрата $L(\operatorname{sym}^2 u_{j,k}, s)$

и $L(\mathrm{sym}^2 u_j, s)$ с весовыми функциями, содержащими J-функцию Бесселя и ядро Бесселя

$$k_0(x,v) := \frac{1}{2\cos\pi(1/2+v)}\left(J_{2v}(x) - J_{-2v}(x)\right). \tag{6.2}$$

Теорема 6.0.1. *Пусть $\omega \in C^\infty$ – функция с компактным носителем на $[a_1, a_2]$ при $0 < a_1 < a_2 < \infty$. Предположим, что $\mathrm{Re}\, s > 1$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = MT(s) + Z_C(s) + Z_H(s) + Z_D(s), \tag{6.3}$$

где

$$MT(s) = \sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)}\int_0^\infty \omega(x)dx,$$

$$Z_C(s) = \frac{\zeta(s)}{\pi^{1/2+s}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(l^2)}{l^{2ir}}\frac{\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}h(\omega;s;r)dr, \tag{6.4}$$

$$Z_H(s) = \pi^{1/2-s}\sum_{k\geq 6} g(\omega;s;k)\sum_{j\leq\vartheta(k)}\alpha_{j,k}\lambda_{j,k}(l^2)L(\mathrm{sym}^2 u_{j,k}, s), \tag{6.5}$$

$$Z_D(s) = \pi^{1/2-s}\sum_j \alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2 u_j, s)h(\omega;s;t_j), \tag{6.6}$$

$$f(\omega;s;x) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{x}{4l}\right)^s\int_0^\infty \omega(y)\cos\left(\frac{xy}{2l}\right)dy, \tag{6.7}$$

$$g(\omega;s;k) = \pi(-1)^k\int_0^\infty J_{2k-1}(x)\frac{f(\omega;s;x)}{x}dx, \tag{6.8}$$

$$h(\omega;s;r) = \pi\int_0^\infty k_0(x,ir)\frac{f(\omega;s;x)}{x}dx. \tag{6.9}$$

Кроме того, мы докажем аналитическое продолжение (6.3) в область, содержащую точки $s = 1/2$ и $s = 1$. Важность этого результата заключается в том, что специальные значения $\mathscr{L}_n(s)$ появляются в различных задачах.

Во-первых, функция $\mathscr{L}_n(s)$ возникает в разложении Фурье-Уиттекера для комбинации рядов Эйзенштейна-Мааса полуцелого веса и уровня 4 в параболических вершинах 0 и ∞, см. **[65, 86, 155]**.

Во-вторых, $\mathscr{L}_n(s)$ изучалась Загиром **[184]** в связи с дзета функцией

$$\zeta(s,\delta) = \sum_{\substack{\phi \pmod\Gamma \\ |\phi|=\delta}}\ \sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}^2/\mathrm{Aut}(\phi) \\ \phi(m,n)>0}}\frac{1}{\phi(m,n)^s},$$

где для полной модулярной группы Γ внешняя сумма ведется по всем Γ классам эквивалентности формы ϕ дискриминанта δ, а внутренняя сумма – по всем классам эквивалентности пар целых чисел по молулю группы автоморфизмов формы ϕ. В частности, Загир построил модулярную форму с коэффициентами Фурье равными бесконечным линейным

комбинациям дзета функций $\zeta(s,\delta)$ и доказал, что произведение Петерсона получившейся модулярной формы и произвольной примитивной параболической формы равно соответствующей дзета-функции Ранкина-Сельберга. Более того, применяя теорию бинарных квадратичных форм, Загир показал, что

$$\zeta(s,\delta)=\zeta(s)\mathscr{L}_{\delta}(s).$$

В-третьих, Кузнецов [**10**] исследовал связь $\mathscr{L}_n(s)$ и формулы следа Сельберга. А именно, основной результат работы [**10**] – новая версия формулы следа, где ряд, содержащий $\mathscr{L}_{n^2-4}(1)$, заменяет сумму по примитивным гиперболическим классам модулярной группы. Также Кузнецов доказал, что

$$\Psi_{\Gamma}(x)=2\sum_{n\leq X}\sqrt{n^2-4}\mathscr{L}_{n^2-4}(1),\quad X=x^{1/2}+x^{-1/2},\tag{6.10}$$

где $\Psi_{\Gamma}(x)=\sum_{NP\leq x}\Lambda(P)$, NP – норма класса сопряженности $\{P\}$ и $\Lambda(P)=\log NP_0$, если $\{P\}$ – степень примитивного гиперболического класса $\{P_0\}$.

Уравнение (6.10) играет важную роль в изучении теоремы о простых геодезических. Применяя (6.10), Быковский [**5**] доказал теорему о простых геодезических в коротких интервалах. Кроме того, доказательство Саундарараджана-Янга [**167**] с наилучшей на настоящий момент оценкой остатка в классической теореме о простых геодезических основана на (6.10).

В четвёртых, специальные значения $\mathscr{L}_{n^2-4}(1)$ связывают простые геодезические и суммы Клоостермана. Так, согласно [**167**, теореме 1.3] для гладкой чётной функции ω с компактным носителем и $\omega(x)=0$ при $|x|\leq 2$ выполнено равенство

$$\sum_{\{P\}}\Lambda(P)\frac{\omega(\mathrm{tr}(P))}{\sqrt{\mathrm{tr}(P)^2-4}}=\sum_{n=3}^{\infty}2\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4}(1)=\zeta(2)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}S(l^2,1;q)\breve{\omega}\left(\frac{l}{q}\right),\tag{6.11}$$

где суммирование $\sum_{\{P\}}$ ведётся по всем гиперболическим классам, $\mathrm{tr}(P)$ - след класса сопряженности $\{P\}$ и $\breve{\omega}(y)$ – преобразование Фурье функции $\omega(x)$. Заметим, что сходимость сумм по q и l в уравнении (6.11) не очевидна. Поэтому, как указали авторы работы [**167**], формулу (6.11) сложно применить для приложений. Подобная проблема может быть решена при дальнейшем изучении соответствующих сумм сумм Клоостермана. В данной главе мы доказываем следующий результат.

Теорема 6.0.2. *Пусть $\omega(x)$ будет как в теореме 6.0.1 с $a_1>2$. Тогда*

$$\frac{1}{2}\sum_{\{P\}}\Lambda(P)\frac{\omega(\mathrm{tr}(P))}{\sqrt{\mathrm{tr}(P)^2-4}}=\sum_{n=3}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4}(1)=\widetilde{\omega}(1)+Z_C(1)+Z_H(1)+Z_D(1),$$

где $Z_H(s)$, $Z_D(s)$ *определены в* (6.5), (6.6) *и*

$$Z_C(1) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}h(\omega;1;0) + \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}h\left(\omega;s;r\right)\Big|_1 dr + \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\zeta'(1+2ir)}{\zeta(1+2ir)} + \frac{\zeta'(1-2ir)}{\zeta(1-2ir)}\right)h(\omega;1;r)dr.$$

Наконец, специальные значения (7.2) в точке $s = 1$ появляются в эллиптической части формулы Артура-Сельберга, как показано Алтугом в [**20**].

Другое специальное значение $\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2)$ также связано с некоторыми важными задачами аналитической теории чисел. В том числе, точная формула для первого момента L-функций симметрического квадрата для голоморфных модулярных форм уровня 1 и большого веса содержит суммы вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2), \quad l \geq 1,$$

как показано в главе 1.

6.1. Обобщенные суммы Клоостермана

Определим обобщенную сумму Клоостермана как

$$S(m,n_1,n_2;q) := \sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-m)e\left(\frac{an_1+bn_2}{q}\right),$$

где $e(x) := \exp(2\pi i x)$ и

$$\delta_q(ab-m) = \begin{cases} 1 & \text{if } ab \equiv m \pmod q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Заметим, что

$$S(1,n_1,n_2;q) = S(n_1,n_2;q),$$

где $S(n_1,n_2;q)$ – классическая сумма Клоостермана.

Лемма 6.1.1. *(тождество Сельберга) Выполнено равенство*

$$S(m,n_1,n_2;q) = \sum_{d|(m,n_1,q)} dS\left(1,\frac{mn_1}{d^2},n_2;\frac{q}{d}\right).$$

Доказательство. См. уравнение 2.29 на странице 48 в [**58**] и страницу 100 в [**22**]. □

Лемма 6.1.2. *Сумма* $S(m,n_1,n_2;q)$ *инварианта относительно перестановки* m, n_1, n_2.

Доказательство. Требуемое свойство можно получить из равенства

$$S(m,n_1,n_2;q)=\frac{1}{q}\sum_{a,b,c=1}^{q}e\left(\frac{an_1+bn_2+cm-abc}{q}\right).$$

□

Лемма 6.1.3. *(формула следа Кузнецова) Для функции $\phi\in C^3(0,\infty)$ при $\nu=0,1,2,3$ и произвольно малой константы $\epsilon>0$ выполнены оценки*

$$\phi^{(\nu)}(x)\ll x^{1/2-\nu+\epsilon}\ as\ x\to+0,$$

$$\phi^{(\nu)}(x)\ll x^{-1-\nu-\epsilon}\ as\ x\to+\infty.$$

Тогда при всех $m,n\geq 1$

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(m,n_1,n_2;q)}{q}\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn_1n_2}}{q}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\lambda_j(m)\lambda_j(n_1)\lambda_j(n_2)\widehat{\phi}(t_j)$$
$$+\sum_{k\geq 6}\sum_{j\leq\vartheta(k)}\alpha_{j,k}\lambda_{j,k}(m)\lambda_{j,k}(n_1)\lambda_{j,k}(n_2)\widehat{\phi}(i(1/2-k))$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n_1)\sigma_{2ir}(n_2)}{(mn_1n_2)^{ir}|\zeta(1+2ir)|^2}\widehat{\phi}(r)dr,\quad(6.12)$$

где

$$\widehat{\phi}(r)=\pi\int_0^{\infty}k_0(x,ir)\phi(x)\frac{dx}{x},$$

$$\widehat{\phi}(i(1/2-k))=\pi(-1)^k\int_0^{\infty}J_{2k-1}(x)\phi(x)\frac{dx}{x}.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(m,n_1,n_2;q)}{q}\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn_1n_2}}{q}\right)$$
$$=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn_1n_2}}{q}\right)\sum_{d|(m,n_1,q)}dS(1,mn_1/d^2,n_2;q/d)$$
$$=\sum_{d|(m,n_1)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}S(1,mn_1/d^2,n_2;q)\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn_1n_2}}{qd}\right).$$

Применяя [**136**, лемму 1] к внутренней сумме и используя тождества (6.1) и (0.19), мы доказываем лемму.

□

6.2. Формула свёртки

В данной главе мы докажем формулу 6.0.1. Наш метод схож с тем, что использовал Кузнецов в работе [**11**] для изучения двойной дзета функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n^{(-)}(s)}{n^\alpha}, \quad L_n^{(-)}(s) := \sum_{c=1}^{\infty} \frac{a_n(c)}{c^s}, \quad \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re} s > 1,$$

где $a_n(c)$ – число целочисленных решений уравнения

$$x^2 + nx - 1 \equiv 0 \pmod{c}.$$

Основная идея – получить представление L-рядов Загира в терминах сумм сумм Клоостермана, а затем применить формулу следа Кузнецова.

Для абсолютной сходимости нам для начала нужно предположить, что $\operatorname{Re} s > 3/2$.

С целью изучения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)$ применим преобразование Меллина для функции $\omega(n)$. Таким образом, нам необходимо исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) n^{-\alpha}.$$

Лемма 6.2.1. *При* $\operatorname{Re} s > 3/2$ *и* $\operatorname{Re}\alpha > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\alpha+s}} \sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab - l^2) \zeta\left(-\frac{a+b}{q}, 0, \alpha\right).$$

Доказательство. Заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между решениями

$$x \pmod{2q} \text{ of } x^2 \equiv n^2 - 4l^2 \pmod{4q}$$

и решениями

$$y \pmod{q} \text{ of } y^2 + ny + l^2 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Поэтому

$$\rho_q(n^2 - 4l^2) = \sum_{\substack{y \pmod q \\ y^2+l^2+ny \equiv 0 \pmod q}} 1 = \sum_{\substack{x,y \pmod q \\ x+y \equiv -n \pmod q}} \delta_q(xy - l^2). \tag{6.13}$$

А значит,

$$\rho_q(n^2 - 4l^2) = \frac{1}{q} \sum_{x,y \pmod q} \delta_q(xy - l^2) \sum_{c \pmod q} e\left(\frac{cx + cy + cn}{q}\right) = \frac{1}{q} \sum_{c \pmod q} e\left(\frac{cn}{q}\right) S(c, c, l^2; q). \tag{6.14}$$

В соответствии с (7.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\rho_q(n^2 - 4l^2)}{q^s}.$$

Применяя (6.14) и оценку Вейля для сумм Клоостермана, мы доказываем, что суммы выше сходятся абсолютно. Меняя порядок суммирования и применяя (6.13), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)}{n^\alpha}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}\sum_{x,y \pmod q}\delta_q(xy-l^2)\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv -x-y \pmod q}}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}\sum_{x,y \pmod q}\delta_q(xy-l^2)\frac{1}{q^\alpha}\zeta\left(-\frac{x+y}{q},0,\alpha\right).$$

□

Для того чтобы упростить выражение, полученное в предыдущей лемме, нам потребуется следующий результат.

Лемма 6.2.2. *При* $\operatorname{Re} s>1$ *выполнено равенство*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)=\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(s)}{\zeta(1+s)}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)=S(l^2,0,0;q)=S(0,l^2,0;q)=\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab)e\left(\frac{al^2}{q}\right).$$

Тогда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{\substack{a,b=1\\ ab\equiv 0 \pmod q}}^{q}e\left(\frac{al^2}{q}\right)=$$

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a=1}^{q}\sum_{b\equiv 0 \pmod{q/(a,q)}}^{q}e\left(\frac{al^2}{q}\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a=1}^{q}e\left(\frac{al^2}{q}\right)(a,q).$$

Внутренняя сумма может быть записана в терминах сумм Рамануджана

$$\sum_{a=1}^{q}e\left(\frac{al^2}{q}\right)(a,q)=\sum_{d|q}d\sum_{\substack{a \pmod q\\ (a,q)=d}}e\left(\frac{al^2}{q}\right)=\sum_{d|q}dS(0,l^2;q/d).$$

Следовательно,

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{d|q}dS(0,l^2;q/d)$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(0,l^2;q)}{q^{1+s}}=\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(s)}{\zeta(1+s)}.$$

□

Комбинируя все результаты, мы выражаем суммы L-рядов Загира в терминах сумм сумм Клоостермана.

Лемма 6.2.3. *При* $\operatorname{Re} s > 3/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \widetilde{\omega}(1)\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)}+ \\ \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\pi^{1/2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}S(l^2,n,n;q)f\left(\omega;s;\frac{4\pi nl}{q}\right), \quad (6.15)$$

где для $\delta < 1$

$$f(\omega;s;x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\delta)}\frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\widetilde{\omega}(\alpha)\left(\frac{x}{4l}\right)^{\alpha+s-1}d\alpha. \quad (6.16)$$

Доказательство. Применяя лемму 6.2.1, доказываем, что при $\sigma > 1$ выполнено равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\widetilde{\omega}(\alpha)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\alpha+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)\zeta\left(-\frac{a+b}{q},0;\alpha\right)d\alpha.$$

Сдвигая контур интегрирования на $-\epsilon$ для произвольно малого $\epsilon > 0$, мы проходим полюс в точке $\alpha = 1$. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \widetilde{\omega}(1)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2) \\ + \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\epsilon)}\widetilde{\omega}(\alpha)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\alpha+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)\zeta\left(-\frac{a+b}{q},0;\alpha\right)d\alpha. \quad (6.17)$$

Из леммы 6.2.2 следует, что

$$\widetilde{\omega}(1)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2) = \widetilde{\omega}(1)\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)}. \quad (6.18)$$

Применяя функциональное уравнение (0.11) для дзета функции Лерха, получаем

$$\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)\zeta\left(-\frac{a+b}{q},0;\alpha\right) = (2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\times \\ \left(-ie(\alpha/4)\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)e\left(-\frac{na+nb}{q}\right)\right. \\ \left. + ie(-\alpha/4)\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)e\left(\frac{na+nb}{q}\right)\right).$$

Заметим, что

$$-ie(\alpha/4) + ie(-\alpha/4) = 2\sin\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\sum_{a,b=1}^{q}\delta_q(ab-l^2)\zeta\left(-\frac{a+b}{q},0;\alpha\right) = 2(2\pi)^{\alpha-1}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(l^2,n,n;q)}{n^{1-\alpha}}.$$

Тогда из [**151**, ур. 5.5.3, 5.5.5] следует, что

$$\sum_{a,b=1}^{q} \delta_q(ab-l^2)\zeta\left(-\frac{a+b}{q},0;\alpha\right) = \pi^{\alpha-1/2}\frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(l^2,n,n;q)}{n^{1-\alpha}}. \tag{6.19}$$

Подставляя (6.18) и (6.19) в (6.17), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \widetilde{\omega}(1)\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)} + \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^s}$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(l^2,n,n;q)}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{(-\epsilon)}\pi^{\alpha-1/2}\frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\left(\frac{n}{q}\right)^{\alpha}\widetilde{\omega}(\alpha)d\alpha.$$

Применяя (6.16), мы доказываем утверждение. □

В соответствии с [**151**, ур. 5.5.3, 5.5.5, 5.9.6] при $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$\int_0^{\infty}\cos(x)x^{s-1}dx = \Gamma(s)\cos(\pi s/2) = \sqrt{\pi}2^{s-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)}. \tag{6.20}$$

Применяя (6.16), (6.20) и обратное преобразование Меллина (см. [**151**, ур. 1.14.36]), получаем (6.7).

Для доказательства теоремы 6.0.1 вычислим суммы сумм Клоостермана в (6.15) при помощи формулы следа Кузнецова (6.12). Из (6.1) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{j,k}^2(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d|n}\lambda_{j,k}\left(\frac{n^2}{d^2}\right) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{j,k}(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}L(\operatorname{sym}^2 u_{j,k},s).$$

Аналогично

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{j}^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}L(\operatorname{sym}^2 u_{j},s).$$

Наконец,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}^2(n)}{n^{s+2ir}} = \frac{\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$

то завершает доказательство теоремы 6.0.1 при $\operatorname{Re} s > 3/2$. По принципу аналитического продолжения формула верна при $\operatorname{Re} s > 1$.

6.3. Некоторые свойства весовых функций

В этой главе мы рассмотрим весовые функции, возникающие в теореме 6.0.1, а именно $g(\omega;s;k)$ и $h(\omega;s;k)$. Свойства этих функций важны для аналитического продолжения формулы свёртки в теореме 6.0.1 в область, содержащую специальные значения $s = 1$ и $s = 1/2$.

Лемма 6.3.1. *При* $1-2k<\operatorname{Re}s<3/2$

$$g(\omega;s;k)=g_1(\omega;s;k)+g_2(\omega;s;k),$$

где

$$g_1(\omega;s;k)=(2l)^{2k-1}\sin\frac{\pi s}{2}\int_{2l}^{\infty}\omega(x)\Gamma(k+s/2-1/2)\\ \times\frac{\Gamma(k+s/2)}{\Gamma(2k)}x^{1-2k-s}F(k+s/2-1/2,k+s/2,2k;4l^2/x^2)dx. \quad (6.21)$$

$$g_2(\omega;s;k)=\frac{1}{(2l)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\int_{0}^{2l}\omega(x)\Gamma(k+s/2-1/2)\\ \times\frac{\Gamma(1/2+s/2-k)}{\Gamma(1/2)}F(k+s/2-1/2,1/2+s/2-k,1/2;x^2/(4l^2))dx. \quad (6.22)$$

Доказательство. В соответствии с (6.7) и (6.8) выполнено равенство

$$g(\omega;s;k)=\frac{2\pi^{1/2}(-1)^k}{(4l)^s}\int_0^{\infty}\omega(y)\int_0^{\infty}J_{2k-1}(x)x^{s-1}\cos\left(\frac{xy}{2l}\right)dxdy=g_1(\omega;s;k)+g_2(\omega;s;k),$$

где $g_1(\omega;s;k)$ соответствует интегралу по $y\geq 2l$, а $g_2(\omega;s;k)$ соответствует интегралу по $y>2l$.

Для начала рассмотрим $g_2(\omega;s;k)$. Применяя [**89**, ур. 6.699(2)], показываем, что при $1-2k<\operatorname{Re}s<3/2$

$$g_2(\omega;s;k)=\frac{\pi^{1/2}(-1)^k}{(2l)^s}\int_0^{2l}\omega(y)\frac{\Gamma(k+s/2-1/2)}{\Gamma(k+1/2-s/2)}\\ \times F(k+s/2-1/2,1/2+s/2-k,1/2;y^2/(4l^2))dy.$$

Используя [**151**, ур. 5.5.3 и 5.4.6], мы доказываем (6.22).

Далее рассмотрим $g_1(\omega;s;k)$. Из [**89**, ур. 6.699(2)] следует, что при $1-2k<\operatorname{Re}s<3/2$

$$g_1(\omega;s;k)=\frac{\pi^{1/2}2^{2-2k}(2l)^{2k+s-1}}{(4l)^s}\sin\frac{\pi s}{2}\int_{2l}^{\infty}\omega(y)\frac{\Gamma(2k+s-1)}{\Gamma(2k)}y^{1-2k-s}\\ \times F(k+s/2-1/2,k+s/2,2k;4l^2/y^2)dy.$$

Наконец, применяя [**151**, ур. 5.5.5] к $\Gamma(2k+s-1)$, мы доказываем (6.21). □

Лемма 6.3.2. *При* $0<\operatorname{Re}s<3/2$

$$h(\omega;s;r)=h_1(\omega;s;r)+h_1(\omega;s;-r)+h_2(\omega;s;r), \quad (6.23)$$

где

$$h_1(\omega;s;r)=\int_{2l}^{\infty}\frac{\omega(x)}{2x^s}\frac{\sin\pi(s/2-1/2+ir)}{\sin(\pi ir)}\Gamma(1/2+s/2+ir)$$
$$\times\frac{\Gamma(s/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)}\left(\frac{x}{2l}\right)^{-2ir}F(s/2+ir,s/2+1/2+ir,1+2ir;4l^2/x^2)dx, \quad (6.24)$$

$$h_2(\omega;s;r)=\int_0^{2l}\frac{\omega(x)}{(2l)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\frac{\Gamma(s/2+ir)\Gamma(s/2-ir)}{\Gamma(1/2)}$$
$$\times F(s/2+ir,s/2-ir,1/2;x^2/(4l^2))dx. \quad (6.25)$$

Доказательство. В соответствии с (6.7) и (6.9)

$$h(\omega;s;r)=\frac{2\pi^{1/2}}{(4l)^s}\int_0^{\infty}\omega(y)\int_0^{\infty}k_0(x,ir)x^{s-1}\cos\left(\frac{xy}{2l}\right)dxdy,$$

где $k_0(x,v)$ – ядро Бесселя (6.2). Применяя (6.2), получаем (6.23) с

$$h_1(\omega;s;r)=\frac{2\pi^{1/2}}{2(4l)^s\cos(\pi/2+\pi ir)}\int_{2l}^{\infty}\omega(y)\int_0^{\infty}J_{2ir}(x)x^{s-1}\cos\left(\frac{xy}{2l}\right)dxdy,$$

$$h_2(\omega;s;r)=\frac{2\pi^{1/2}}{2(4l)^s\cos(\pi/2+\pi ir)}\int_0^{2l}\omega(y)\int_0^{\infty}\left(J_{2ir}(x)-J_{-2ir}(x)\right)x^{s-1}\cos\left(\frac{xy}{2l}\right)dxdy.$$

Рассмотрим $h_2(\omega;s;r)$. Используя [**89**, ур. 6.699(2)], мы показываем, что при $0<\operatorname{Re}s<3/2$

$$h_2(\omega;s;r)=\frac{-2^{s-1}\pi^{1/2}}{(4l)^s\sin(\pi ir)}\int_0^{2l}\omega(y)F\left(\frac{s}{2}+ir,\frac{s}{2}-ir,\frac{1}{2};\frac{y^2}{4l^2}\right)$$
$$\times\left(\frac{\Gamma(s/2+ir)}{\Gamma(1-s/2+ir)}-\frac{\Gamma(s/2-ir)}{\Gamma(1-s/2-ir)}\right)dy.$$

Применяя [**151**, ур. 5.5.3] для $\Gamma(1-s/2\pm ir)$ и [**151**, ур. 5.4.6], доказываем (6.25).

Рассмотрим функцию $h_1(\omega;s;r)$. Применяя [**89**, ур. 6.699(2)], мы показываем, что при $0<\operatorname{Re}s<3/2$

$$h_1(\omega;s;r)=\frac{\pi^{1/2}2^{-2ir}}{(4l)^s}\int_{2l}^{\infty}\omega(y)F\left(\frac{s}{2}+ir,\frac{1+s}{2}+ir,1+2ir;\frac{4l^2}{y^2}\right)$$
$$\times\frac{\sin\pi(s/2-1/2+ir)}{\sin(\pi ir)}\left(\frac{y}{2l}\right)^{-s-2ir}\frac{\Gamma(s+2ir)}{\Gamma(1+2ir)}dy.$$

Наконец, при помощи [**151**, ур. 5.5.5] для $\Gamma(s+2ir)$, мы получаем (6.24).

□

Замечание 6.3.3. *Также возможно получить другие представления для тестовых функций $h(\omega;s;r)$ и $g(\omega;s;k)$. Например, вместо леммы 6.1.3 можно применить вариант формулы Кузнецова, доказанный Чамизо и Рабосо в* [**60**]. *В таком случае возможно получить более простые выражения, содержащие лишь интегралы типа Фурье.*

Следствие 6.3.4. *Предположим, что* $l = 1$. *Тогда*

$$h(\omega; 1; r) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \omega(2\cosh\xi) \cos(2r\xi) d\xi, \tag{6.26}$$

$$g(\omega; 1; k) = \pi^{1/2} \int_2^\infty \frac{\omega(x)}{\sqrt{x^2-4}} \frac{2^{2k-1}}{(x+\sqrt{x^2-4})^{2k-1}} dx. \tag{6.27}$$

Доказательство. Положим $s = l = 1$ в равенстве (6.24) и применим [**151**, ур. 5.5.5, 15.4.18], а именно

$$\Gamma(1+2ir) = \pi^{-1/2} 2^{2ir} \Gamma(1/2+ir)\Gamma(1+ir),$$

$$F\left(\frac{1}{2}+ir, 1+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) = \left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{1/2}\right)^{-2ir}.$$

Тогда

$$h(\omega; 1; r) = \pi^{1/2} \int_2^\infty \frac{\omega(x)}{\sqrt{x^2-4}} \cos\left(2r \log\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right) dx.$$

Из [**151**, ур. 4.37.19] следует, что

$$\log\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) = \operatorname{arcosh}\frac{x}{2}.$$

Подставляя это выражение в интеграл и выполнив замену переменных

$$\xi := \operatorname{arcosh}\frac{x}{2},$$

мы получаем (6.26). Доказательство (6.27) аналогично. □

Следствие 6.3.5. *При* $\operatorname{Re} s \leqslant 1$ *выполнено равенство*

$$h\left(\omega; s; \frac{s-1}{2i}\right) = \frac{\Gamma(s-1/2)}{(2l)^{1-s}} \sin\frac{\pi s}{2} \int_{2l}^\infty \omega(x)(x^2-4l^2)^{1/2-s} dx + \frac{\Gamma(s-1/2)}{(2l)^{1-s}} \cos\frac{\pi s}{2} \int_0^{2l} \omega(x)(4l^2-x^2)^{1/2-s} dx.$$

Доказательство. Положим $r = (s-1)/(2i)$ в (6.23). Тогда

$$h\left(\omega; s; \frac{s-1}{2i}\right) = \int_{2l}^\infty \frac{\omega(x)}{x^s} \cos\frac{\pi(s-1)}{2} \Gamma(s-1/2) \left(\frac{x}{2l}\right)^{1-s} F\left(s-\frac{1}{2}, s, s; \frac{4l^2}{x^2}\right) dx + \int_0^{2l} \frac{\omega(x)}{(2l)^s} \cos\frac{\pi s}{2} \Gamma(s-1/2) F\left(s-\frac{1}{2}, 1/2, 1/2; \frac{x^2}{4l^2}\right) dx.$$

Применяя [**151**, 15.4.6] для гипергеометрической функции, мы завершаем доказательство. □

Лемма 6.3.6. *Пусть* $\omega(2) = 0$. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^\infty h(\omega; 1; r) dr = 0.$$

Доказательство. Применяя [**151**, ур. 1.14.9 и 1.14.11], получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega;1;r)dr = \frac{\pi^{3/2}}{2}\omega(2) = 0.$$

□

6.4. Аналитическое продолжение

6.4.1. Формула свёртки в точке $s=1$. С целью получить аналитическое продолжение формулы свёртки в область, содержащую точку $s=1$, заметим, что непрерывный спектр в (6.4) содержит множитель $\zeta(s)$. В частности, требуется показать, что интеграл в (6.4) обращается в ноль в точке $s=1$. Для этого положим $l=1$ и применим следствие 6.3.4. В результате, мы получим точную формулу теоремы 6.0.2, связывающую нормы простых геодезических и моменты L-функций симметрического квадрата. Для доказательства теоремы 6.0.2 необходимо получить аналитическое продолжение $Z_C(s)$, заданного формулой (6.4).

Лемма 6.4.1. *Пусть $\omega(x)=0$ при $x\le 2$. Тогда*

$$\lim_{s\to 1}\frac{\zeta(s)}{\pi^{1/2+s}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta(s+2ir)|^2}{|\zeta(1+2ir)\,|^2}h(\omega;s;r)dr = \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}h(\omega;1;0)+\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}h\left(\omega;s;r\right)\Big|_1 dr \\ +\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\zeta'(1+2ir)}{\zeta(1+2ir)}+\frac{\zeta'(1-2ir)}{\zeta(1-2ir)}\right)h(\omega;1;r)dr.$$

Доказательство. Рассмотрим

$$I(s) := \frac{\zeta(s)}{\pi^{1/2+s}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(s+2ir)\zeta(s-2ir)}{\zeta(1+2ir)\zeta(1-2ir)}h(\omega;s;r)dr.$$

Наша цель – показать, что полюс $\zeta(s)$ в точке $s=1$ гасится обращающимся в ноль интегралом (см. лемму 6.3.6).

Сделав замену переменных $z := 2ir$, получаем

$$I(s) = \zeta(s)\pi^{1/2-s}\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}\frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\omega;s;\frac{z}{2i}\right)dz.$$

Подынтегральное выражение имеет полюса в точках $z=\pm(s-1)$, а также в нулях $\zeta(1\pm z)$. По теореме Коши

$$I(s) = \zeta(s)\pi^{1/2-s}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\omega;s;\frac{z}{2i}\right)dz + \pi^{1/2-s}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}h\left(\omega;s;\frac{1-s}{2i}\right),$$

где контур интегрирования определяется как

$$C_\delta = \gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3,$$

$$\gamma_1 = (-i\infty, -i\operatorname{Im}s - i\delta),\quad \gamma_3 = (-i\operatorname{Im}s + i\delta, i\infty),$$

и γ_2 – полуокружность радиуса $\delta > 0$ с центром в $-i \operatorname{Im} s$ при $\operatorname{Re} z < 0$. Параметр δ выбран так, что все нули $\zeta(1+z)$ расположены слева от C_δ.

Следующий шаг – вычислить предел при s стремящемся к 1. Вычисляя предел для второй суммы, находим

$$\lim_{s\to 1} \pi^{1/2-s} \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)} h\left(\omega; s; \frac{1-s}{2i}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} h(\omega; 1; 0).$$

Для простоты положим

$$F(s) := \pi^{1/2-s} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)} h\left(\omega; s; \frac{z}{2i}\right) dz.$$

Тогда предел первой суммы можно вычислить следующим образом

$$\lim_{s\to 1} \zeta(s)F(s) = F'(1) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\delta} \frac{\partial}{\partial s} h\left(\omega; s; \frac{z}{2i}\right)\Big|_1 dz + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{C_\delta} \left(\frac{\zeta'(1+z)}{\zeta(1+z)} + \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)} - \log \pi\right) h\left(\omega; 1; \frac{z}{2i}\right) dz.$$

Заметим, что выражения

$$\frac{\zeta'(1+z)}{\zeta(1+z)} + \frac{\zeta'(1-z)}{\zeta(1-z)}$$

является аналитической функцией в $z = 0$. Теперь сдвигая контур интегрирования на $\operatorname{Re} z = 0$, мы не проходим полюсов. Сделав замену переменных $r := z/(2i)$, получаем

$$\lim_{s\to 1} \zeta(s)F(s) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\zeta'(1+2ir)}{\zeta(1+2ir)} + \frac{\zeta'(1-2ir)}{\zeta(1-2ir)}\right) h(\omega; 1; r) dr + \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} h\left(\omega; s; r\right)\Big|_1 dr.$$

Заметим, что слагаемое с $\log \pi$ пропало, так как она равно нулю по лемме 6.3.6. Сходимость первого интеграла следует из (6.26) при помощи интегрирования по частям. Нам осталось проверить, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} h\left(\omega; s; r\right)\Big|_1 dr$$

сходится. Заметим, что $h_2(\omega; s; r) = 0$, поскольку $\omega(x) = 0$ при $x \le 2$ и $l = 1$. Дифференцируя (6.23), получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} h\left(\omega; s; r\right)\Big|_1 = h_3(\omega; r) + h_3(\omega; -r) + h_4(\omega; r),$$

где

$$h_3(\omega; r) := \int_{2l}^{\infty} \frac{\omega(x)}{2x} \left(\frac{x}{2}\right)^{-2ir} \frac{\partial}{\partial s}\Bigg(\Gamma(1/2 + s/2 + ir) \times \frac{\Gamma(s/2 + ir)}{\Gamma(1+2ir)} F(s/2 + ir, s/2 + 1/2 + ir, 1 + 2ir; 4l^2/x^2)\Bigg)\Big|_1 dx$$

и

$$h_4(\omega;r) := -\pi^{1/2}\int_0^\infty \frac{\omega(x)\log x}{\sqrt{x^2-4}}\cos\left(2r\log\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right)dx$$
$$-\frac{\pi^{3/2}}{2}\frac{\cosh\pi r}{\sinh\pi r}\int_0^\infty \frac{\omega(x)}{\sqrt{x^2-4}}\sin\left(2r\log\left(\frac{x}{2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)\right)dx.$$

Интегрируя по частям, показываем, что все интегралы в $h_4(\omega;r)$ быстро убывают. Сейчас рассмотрим $h_3(\omega;r)$. Применяя [**151**, 15.6.1], получаем

$$\Gamma(1/2+s/2+ir)\frac{\Gamma(s/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)}F(s/2+ir,s/2+1/2+ir,1+2ir;4l^2/x^2)$$
$$=\frac{\Gamma(1/2+s/2+ir)}{\Gamma(1-s/2+ir)}\int_0^1\frac{y^{s/2-1+ir}(1-y)^{-s/2+ir}}{(1-4y/x^2)^{1/2+s/2+ir}}.$$

Дифференцируя выражение выше по s в точке 1, меняя порядок интегрирования по x и y, вычисляя интеграл по x по частям, мы показываем, что $h_3(\omega;r)$ также быстро убывает, что завершает доказательство леммы 6.4.1.

□

Теперь теорема 6.0.2 следует из теоремы 6.0.1 и леммы 6.4.1. Для этого нам необходимо показать сходимость всех рядов и интегралов в $Z_H(1)$ и $Z_D(1)$. В случае $Z_H(1)$ это следует из (6.27). В случае $Z_D(1)$ – из (6.26) с применением интегрирования по частям.

6.4.2. Формула свёртки в точке $s=1/2$. Далее мы докажем формулу свёртки в точке. С этой целью мы сначала продолжим формулу в область $\operatorname{Re}s<1$, $s\neq 1/2$.

Теорема 6.4.2. *Предположим, что* $\operatorname{Re}s<1$, $s\neq 1/2$ *и* $\omega(2l)=0$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^\infty \omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)=\widetilde{\omega}(1)\sigma_{-s}(l^2)\frac{\zeta(2s)}{\zeta(1+s)}$$
$$+\frac{2^s\cos(\pi s/2)}{\pi^{s-1/2}}\sigma_{s-1}(l^2)\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}\Gamma(s-1/2)\int_0^{2l}\omega(x)(4l^2-x^2)^{1/2-s}dx$$
$$+\frac{2^s\sin(\pi s/2)}{\pi^{s-1/2}}\sigma_{s-1}(l^2)\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}\Gamma(s-1/2)\int_{2l}^\infty\omega(x)(x^2-4l^2)^{1/2-s}dx$$
$$+Z_C(s)+Z_H(s)+Z_D(s),\quad(6.28)$$

где $Z_C(s)$, $Z_H(s)$, $Z_D(s)$ *определены в* (6.4), (6.5) *и* (6.6).

Доказательство. Для аналитического продолжения в область $\operatorname{Re}s<1$ необходимо рассмотреть лишь $Z_C(s)$. А именно, требуется доказать аналитическое продолжение следующего интеграла (см. (6.4))

$$\zeta(s)\pi^{1/2-s}\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}\frac{\sigma_z(l^2)}{l^z}\frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\omega;s;\frac{z}{2i}\right)dz.$$

Подынтегральное выражение имеет полюса в точках $z = \pm(s-1)$, а также в нулях $\zeta(1 \pm z)$.

Выбрав достаточно маленькое $\delta > 0$, мы можем изменить контур интегрирования (не проходя полюсов) на следующий

$$C_\delta = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5,$$

$$\gamma_1 = (-i\infty, -i \operatorname{Im} s - i\delta), \quad \gamma_3 = (-i \operatorname{Im} s + i\delta, i \operatorname{Im} s - i\delta), \quad \gamma_5 = (i \operatorname{Im} s + i\delta, i\infty),$$

и γ_2 – полуокружность радиуса $\delta > 0$ с центром в $-i \operatorname{Im} s$ при $\operatorname{Re} z > 0$, γ_4 – полуокружность радиуса $\delta > 0$ с центром в $i \operatorname{Im} s$ при $\operatorname{Re} z < 0$. Из этого следует аналитическое продолжение $Z_C(s)$ в область $\operatorname{Re} s > 1 - \delta$. Возвращая контур интегрирования обратно на $\operatorname{Re} z = 0$ и применяя теорему Коши, мы получаем

$$\zeta(s)\pi^{1/2-s}\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{\sigma_z(l^2)}{l^z}\frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{\zeta(1+z)\zeta(1-z)}h\left(\omega; s; \frac{z}{2i}\right)dz + \\ 2\pi^{1/2-s}\frac{\sigma_{s-1}(l^2)}{l^{s-1}}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2-s)}h\left(\omega; s; \frac{s-1}{2i}\right).$$

Заметим, что мы использовали факт, что функция $h(\omega; s; r)$ чётна по r, что является следствием леммы 6.3.2. Из этого следует аналитическое продолжение в область $\operatorname{Re} s < 1$. Применяя следствие 6.3.5, мы доказываем теорему.

□

Теперь мы расширим область, включая точку $s = 1/2$, положив $s = 1/2 + u$ и вычислив предел при u стремящемся к нулю.

Теорема 6.4.3. *Пусть* $\omega(2l) = 0$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(n)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2) = \frac{\sigma_{-1/2}(l^2)}{2\zeta(3/2)}\int_0^\infty \omega(x)\Bigg(\log|x^2-4l^2| - \\ -\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-2l) + 3\gamma - 2\frac{\zeta'(3/2)}{\zeta(3/2)} - \log 8\pi - \frac{2}{\sigma_{-1/2}(l^2)}\sum_{d|l^2} d^{-1/2}\log d\Bigg) \\ + Z_C(1/2) + Z_H(1/2) + Z_D(1/2),$$

где $Z_C(s)$, $Z_H(s)$, $Z_D(s)$ *определены в* (6.4), (6.5) *и* (6.6).

Доказательство. Рассмотрим равенство (6.28) с $s = 1/2 + u$. Применяя функциональное уравнение для дзета функции Римана

$$\zeta(2u) = 2^{2u}\pi^{2u-1}\sin\pi u\Gamma(1-2u)\zeta(1-2u)$$

и функциональное уравнение для $\Gamma(u)$, главные члены в (6.28) преобразуются как

$$\frac{\zeta(1+2u)}{\zeta(3/2+u)}\sigma_{-1/2-u}(l^2)\int_0^\infty \omega(x) + \frac{\zeta(1-2u)}{\zeta(3/2-u)}\sigma_{-1/2+u}(l^2)2^{1/2+3u}\pi^u\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}$$
$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{2}\right)\int_{2l}^\infty \omega(x)(x^2-4l^2)^{-u} + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi u}{2}\right)\int_0^{2l}\omega(x)(4l^2-x^2)^{-u}\right).$$

Заметим, что выражение выше является голоморфным в $u=0$. Устремив $u\to 0$ и применяя правило Лопиталя, мы доказываем теорему.

□

ГЛАВА 7

Формула спектрального разложения для сумм L-рядов Загира II

Данная глава посвящена доказательству формулы спектрального разложения для суммы

$$\sum_{l=1}^{\infty} \omega(l) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s), \tag{7.1}$$

где ω - это некоторая тестовая функция, а L-ряд Загира определяется следующим образом

$$\mathscr{L}_n(s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q(n)}{q^s} \tag{7.2}$$

при $\operatorname{Re} s > 1$ и может быть продолжен на всю комплексную плоскость (см. [**184**, утверждение 3]). Здесь $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана, а

$$b_q(n) = \#\{x \pmod{2q} : x^2 \equiv n \pmod{4q}\}.$$

Похожая задача, заключающаяся в изучении суммы по n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(n) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s), \tag{7.3}$$

была рассмотрена в предыдущей главе. Близкие результаты также могут быть найдены в работах [**36**], [**39**], [**5**], [**167**], [**63**]. Кроме того, суммы вида (7.3) появляются в точных формулах для первых моментов L-функций симметрического квадрата голоморфных параболических форм (см. главы 1 и 2) и форм Маасса (см. главу 3). Данные точные формулы могут быть использованы для изучения вторых моментов L-функций симметрического квадрата. Например, рассмотрим первый момент L-функций симметрического квадрата для форм Маасса (0.20) над $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ умноженный на коэффициент Фурье $\lambda_j(l^2)$, а именно

$$\sum_j \lambda_j(l^2) L(s, \operatorname{sym}^2 u_j).$$

Домножив данное выражение на $\zeta(2s) l^{-s}$ и просуммировав по l от 1 до ∞, мы получаем второй момент

$$\sum_j L(s, \operatorname{sym}^2 u_j)^2.$$

Применяя подобную процедуру к точной формуле доказанной в главе 3 (см. теорему 3.1.1), мы приходим к выражениям следующего вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) f(n, l; s) \tag{7.4}$$

в правой части точной формулы для второго момента.

Для изучения двойной суммы (7.4) можно применить спектральные методы. Однако спектральное разложение для внутренней суммы по n приводит нашу задачу к зацикливанию, так как вновь получаются те же самые моменты, с которых мы начали. Для того чтобы избежать подобной ситуации, мы можем поменять порядки суммирования и сначала рассмотреть сумму по l. Таким образом можно мотивировать наш интерес к изучению спектрального разложения для суммы (7.1).

Несмотря на то что суммы (7.1) и (7.3) выглядят похоже, методы изучения каждой из них значительно различаются. Спектральное разложение суммы (7.3) является прямым следствием применения формулы следа Кузнецова к обобщенным суммам Клоостермана, в то время как в случае суммы (7.1) наше доказательство начинается с изучения различных свойств сумм Гаусса. А именно, вычисляя соответствующие суммы Гаусса, мы получаем суммы сумм Клоостермана для конгруэнц подгруппы $\Gamma_0(N)$ уровней $N = 4, 16, 64$ в различных параболических вершинах и скрученных с характером χ_4 (нетривиальный характер Дирихле по модулю 4). Далее, применяя формулу следа Кузнецова, мы приходим к спектральному разложению для суммы (7.1), которое содержит моменты L-функций симметрического квадрата для $\Gamma_0(N)$ уровней $N = 4, 16, 64$ скрученных с коэффициентом Фурье в параболических вершинах 0 и ∞.

Для того чтобы строго сформулировать основные результаты мы определим функцию

$$\psi(x) = \psi(x; n; s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{n}\right)^s \int_0^\infty \omega(y) \cos\left(\frac{2xy}{n}\right) dy$$

и обозначим $\psi_H(x)$ и $\psi_D(x)$ интегральные преобразования Бесселя от $\psi(x)$, которые появляются в формуле следа Кузнецова (см. (7.25) и (7.26)). Эти преобразования могут быть записаны в терминах гипергеометрических сумм Гаусса. Данное утверждение будет доказано в леммах 7.3.1 и 7.3.2. Пусть $\omega \in C^\infty$- это функция с компактным носителем на $[a_1, a_2]$ для некоторых чисел $0 < a_1 < a_2 < \infty$, а $\widehat{\omega}$ обозначает её преобразование Меллина. Нам также понадобится обобщенная функция делителей

$$\sigma_s(\chi; n) := \sum_{d|n} \chi(d) d^s. \tag{7.5}$$

Для параболической вершины $\mathfrak{a}$ группы $\Gamma_0(N)$ введём следующие обозначения:

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{a}(n, N, s) = \mathfrak{M}_\mathfrak{a}^{hol}(n, N, s) + \mathfrak{M}_\mathfrak{a}^{disc}(n, N, s), \tag{7.6}$$

где

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{a}^{hol}(n, N, s) := \sum_{\substack{k>1 \\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{f \in H_k(N,\chi_4)} \rho_{f_\mathfrak{a}}(n) \overline{L(s, \mathrm{sym}^2 f_\infty)},$$

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}^{disc}(n,N,s) := \sum_{f\in H(N,\chi_4)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(n)\overline{L(s,\mathrm{sym}^2 f_\infty)}$$

- это моменты L-функций симметрического квадрата для голоморфных параболических форм и форм Мааса уровня N и с характером χ_4, умноженные на коэффициент Фурье $\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(n)$ формы f в параболической вершине $\mathfrak{a}$. Черта над L-функцией обозначает комплексное сопряжение, а форма записи следующего вида f_∞ в аргументе L-функции указывает на то, что L-функция определена при помощи коэффициентов Фурье формы f в параболической вершине ∞.

Теорема 7.0.1. *Предположим, что n – чётное целое число. При $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ справедлива следующая точная формула:*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = M^D_{even}(n,s) + M^C(n,s) + \mathfrak{C}(n,s) - \frac{2^{1-s}\pi^{1/2-s}i}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_\infty(n^2/4,4,s) + \frac{2\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_0(n^2/4,4,s),$$

где

$$M^D_{even}(n,s) = \frac{\widehat{\omega}(1)\zeta(2s)}{L(\chi_4,1+s)}\left[n^{-2s}\sigma_s\left(\chi_4;n^2\right) + \sigma_{-s}(\chi_4;n^2)\right], \tag{7.7}$$

$$M^C(n,s) = \frac{\Gamma(s-1/2)}{2^{s-1}\pi^{s-1/2}}\left(\sigma_{s-1}(\chi_4;n^2) + \frac{\sigma_{1-s}(\chi_4;n^2)}{n^{2-2s}}\right) \times \frac{\zeta(2s-1)}{L(\chi_4,2-s)}\Bigg(\sin(\pi s/2)\int_0^{n/2}\omega(y)\left(\frac{n^2}{4}-y^2\right)^{1/2-s}dy + \cos(\pi s/2)\int_{n/2}^{\infty}\omega(y)\left(y^2-\frac{n^2}{4}\right)^{1/2-s}dy\Bigg), \tag{7.8}$$

$$\mathfrak{C}(n,s) = \frac{L(\chi_4,s)}{4\pi^{s-1/2}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)} \times \left(n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2) + n^{-2it}\sigma_{2it}(\chi_4;n^2)\right)\frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4,1+2it)L(\chi_4,1-2it)}dt. \tag{7.9}$$

Теорема 7.0.2. *Предположим, что n – нечётное целое число. При $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ справедлива следующая точная формула:*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = M^D_{odd}(n,s) + \frac{1}{2}M^C(n,s) + \frac{1}{2}\mathfrak{C}(n,s) + \frac{8\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_0(n^2,64,s) + \frac{4\pi^{1/2-s}}{1+2^{-s}}\mathfrak{M}_0(n^2,16,s),$$

где

$$M^D_{odd}(n,s) = \frac{\widehat{\omega}(1)\zeta(2s)}{L(\chi_4,1+s)}\sigma_{-s}(\chi_4;n^2), \tag{7.10}$$

$M^C(n,s)$ задаётся формулой (7.8)*, а $\mathfrak{C}(n,s)$ определена в* (7.9)*.*

Замечание 7.0.3. *Главные члены*

$$M^D_{even}(n,s)+M^C(n,s),\quad M^D_{odd}(n,s)+\frac{1}{2}M^C(n,s)$$

голоморфны в центральной точке $s=1/2$. Детальное доказательство этого утверждения дано в главе 7.7.2.

Глава организована следующим образом. В §7.1 мы собрали основные теоретические результаты, необходимые для наших вычислений. В §7.2, в предположении что $\operatorname{Re} s$ достаточно велико, мы изолируем диагональный и недиагональный члены для суммы (7.1), вычисляем диагональное слагаемое в явном виде, а недиагональное слагаемое преобразуем в выражение, к которому можно применить формулу следа Кузнецова. В §7.3 мы изучаем интегральные преобразований Бесселя $\psi_H(x)$ и $\psi_D(x)$, которые возникают в формуле следа Кузнецова. А именно, мы показываем как выразить $\psi_H(x)$ и $\psi_D(x)$ в терминах гипергеометрических сумм Гаусса. §7.4 и §7.5 содержат вычисления непрерывного спектра, в то время как голоморфный и дискретный спектры изучены в §7.6. Наконец, в §7.7 мы завершаем доказательство теорем 7.0.1 и 7.0.2 и вычисляем главные члены в центральной точке.

7.1. Основные теоретические сведения

7.1.1. Обобщенная функция делителей. В данной главе мы перечислим различные свойства функции $\sigma_s(\chi;n)$, которая задаётся формулой (7.5).

Заметим, что производная $\sigma_s(\chi;n)$ по переменной s вычисляется следующим образом:

$$\sigma_s'(\chi;n)=\sum_{d|n}\chi(d)d^s\log d.$$

Пусть χ_4 обозначает нетривиальный характер Дирихле по модулю 4, то есть

$$\chi_4(1)=1,\quad \chi_4(3)=-1,$$

и

$$\sigma_s\left(\chi_4;\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)=\sigma_s(\chi_4;n^2). \tag{7.11}$$

Лемма 7.1.1. *Для нечетного n выполнена следующая формула:*

$$\sigma_{1/2-u}(\chi_4;n^2)=n^{1-2u}\sigma_{-1/2+u}(\chi_4;n^2). \tag{7.12}$$

Доказательство. Предположим,что $n^2=bd$. Так как n нечётно, то

$$1=\chi_4(n^2)=\chi_4(bd).$$

Поэтому $\chi_4(b) = \chi_4(d)$. Таким образом,

$$\sigma_{1/2-u}(\chi_4; n^2) = \sum_{d|n^2} d^{1/2-u}\chi_4(d) = \sum_{bd=n^2} \left(\frac{n^2}{b}\right)^{1/2-u} \chi_4(d)$$
$$= n^{1-2u} \sum_{bd=n^2} b^{-1/2+u}\chi_4(b) = n^{1-2u}\sigma_{-1/2+u}(\chi_4; n^2).$$

□

Рассмотрим ряд Дирихле

$$Z(z, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; n^2)}{n^z}.$$

Лемма 7.1.2. *Справедлива следующая формула:*

$$Z(z, s) = \frac{1 - 2^{2s-z}}{1 - 2^{2s-2z}} \frac{L(\chi_4, z - s)\zeta(z)\zeta(z - 2s)}{\zeta(2z - 2s)}. \tag{7.13}$$

Доказательство. Для начала предположим, что $\operatorname{Re} z > 1 + 2\operatorname{Re} s$. Запишем произведение Эйлера для $Z(z, s)$:

$$Z(z, s) = \prod_p \left(1 + \frac{\sigma_s(\chi_4; p^2)}{p^z} + \frac{\sigma_s(\chi_4; p^4)}{p^{2z}} + \dots\right)$$
$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; 2^{2k})}{2^{kz}}\right) \prod_{p>2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; p^{2k})}{p^{kz}}\right). \tag{7.14}$$

Заметим, что $\chi_4(d) = 0$ для чётного d, и поэтому

$$\sigma_s(\chi_4; 2^{2k}) = \sum_{d|2^{2k}} d^s\chi_4(d) = 1.$$

Следовательно,

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; 2^{2k})}{2^{kz}} = \frac{1}{1 - 2^{-z}}. \tag{7.15}$$

Теперь вычислим второй множитель в правой части уравнения (7.14). Так как $p^2 \equiv 1 \pmod 4$, получаем

$$\chi_4(p^{2m}) = 1, \quad \chi_4(p^{2m+1}) = \chi_4(p) \text{ для любого } m \in \mathbf{N}.$$

Таким образом,

$$\sigma_s(\chi_4; p^{2k}) = \frac{(p^{2s})^{k+1} - 1}{p^{2s} - 1} + \frac{(p^{2s})^k - 1}{p^{2s} - 1}\chi_4(p)p^s.$$

Из этого следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; p^{2k})}{p^{kz}} = \frac{p^{2s} + \chi_4(p)p^s}{(p^{2s} - 1)(p^{z-2s} - 1)} - \frac{1 + \chi_4(p)p^s}{(p^{2s} - 1)(p^z - 1)}.$$

Используя свойство $\chi_4^2(p) = 1$, получаем равенство

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_s(\chi_4; p^{2k})}{p^{kz}} = \frac{1 + \chi_4(p)/p^{z-s}}{(1 - 1/p^{z-2s})(1 - 1/p^z)}$$

$$= \frac{1 - 1/p^{2(z-s)}}{(1 - 1/p^{z-2s})(1 - 1/p^z)(1 - \chi_4(p)/p^{z-s})}. \quad (7.16)$$

Наконец, подставляя выражения (7.15) и (7.16) в формулу (7.14), мы завершаем доказательство леммы. □

7.1.2. Параболические вершины и суммы Клоостермана. Пусть N – целое положительное число. Обозначим за $\Gamma = \Gamma_0(N)$ конгуэнц подгруппу Гекке уровня N.

Стабилизатор параболической вершины $\mathfrak{a}$ в группе Γ определяется следующим образом:

$$\Gamma_{\mathfrak{a}} := \{\gamma \in \Gamma : \gamma\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}.$$

Нормировочная матрица для параболической вершины $\mathfrak{a}$ – это матрица $\sigma_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ такая, что

$$\sigma_{\mathfrak{a}}\infty = \mathfrak{a}, \quad \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\Gamma_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} = \{\pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z}\} := B.$$

Заметим, что выбор нормировочной матрицы не единственный.

Пусть χ обозначает характер Дирихле по модулю N. Его определение может быть расширено на группу Γ следующим образом:

$$\chi(\gamma) = \chi(d), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Пусть $\lambda_{\mathfrak{a}}$ задаётся равенством

$$\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\lambda_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Параболическая вершина $\mathfrak{a}$ называется сингулярной относительно характера χ, если $\chi(\lambda_{\mathfrak{a}}) = 1$.

Предположим, что имеет место разложение $N = rs$, $(r, s) = 1$. Тогда параболическая вершина вида $\mathfrak{a} = 1/r$ называется параболической вершиной Аткина-Лехнера. Заметим, что параболические вершины Аткина-Лехнера сингулярны относительно любого характера Дирихле по модулю N, как показано на [**114**, стр. 395].

Пусть κ задаётся равенством $\chi(-1) = (-1)^{\kappa}$, и пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ - это две сингулярные параболические вершины относительно характера χ с нормировочными матрицами $\sigma_{\mathfrak{a}}$, $\sigma_{\mathfrak{b}}$.

Следуя [**114**, ур. 2.3], мы определим сумму Клоостермана для пары параболических вершин $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$

$$S_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(m,n;c;\chi) := \sum_{\gamma=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\Gamma\sigma_{\mathfrak{b}}/\Gamma_\infty} \chi(\mathrm{sgn}(c))\overline{\chi(\sigma_{\mathfrak{a}}\gamma\sigma_{\mathfrak{b}}^{-1})}e\left(\frac{am+dn}{c}\right). \tag{7.17}$$

Множество допустимых модулей определяется следующим образом:

$$C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(N) = \{\gamma > 0 \text{ такие, что } \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ \gamma & * \end{smallmatrix}\right) \in \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\Gamma\sigma_{\mathfrak{b}}\}. \tag{7.18}$$

7.1.3. Голоморфные формы и формы Мааса. Пусть $H_k(N,\chi)$ обозначает ортонормированный базис пространства голоморфных параболических форм веса $k>0$, $k\equiv\kappa \pmod 2$, уровня N, с характером χ. Разложение Фурье формы $f\in H_k(N,\chi)$ в параболической вершине $\mathfrak{a}$ с нормировочной матрицей $\sigma_{\mathfrak{a}}$ имеет следующий вид:

$$f(\sigma_{\mathfrak{a}}z)i(\sigma_{\mathfrak{a}},z)^{-k} = \sum_{m\geq 1}\frac{\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(m)}{\sqrt{m}}(4\pi m)^{k/2}e(mz),$$

где $i(\sigma_{\mathfrak{a}},z) := cz+d$ для $\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$.

Пусть $H(N,\chi)$ обозначает ортонормированный базис пространства параболических форм Мааса веса $\kappa\in\{0,1\}$. Для функции $f\in H(N,\chi)$, являющейся собственной функцией оператора Лапласа-Бельтрами с собственным значением $1/4+t_f^2$, можно записать разложение Фурье-Уиттекера в параболической вершине $\mathfrak{a}$ с нормировочной матрицей $\sigma_{\mathfrak{a}}$:

$$f(\sigma_{\mathfrak{a}}z)e^{-i\kappa\arg i(\sigma_{\mathfrak{a}},z)} = \sum_{m\neq 0}\frac{\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(m)}{\sqrt{m}}W_{\frac{|m|}{m}\frac{\kappa}{2},it_f}(4\pi|m|y)e(mx),$$

где $z=x+iy$, а $W_{\lambda,\mu}(z)$ – функция Уиттекера (см. [**89**, главу 9.22]).

Для $f\in H_k(N,\chi)$ или $f\in H(N,\chi)$ мы можем определить

$$L(s,\mathrm{sym}^2 f_\infty) = \zeta^{(N)}(2s)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\rho_{f_\infty}(l^2)}{l^s}, \quad \mathrm{Re}\, s>1, \tag{7.19}$$

где верхний индекс в $\zeta^{(N)}(2s)$ указывает, что в произведение Эйлера для данной дзета-функции Римана не входят множители с простыми числами, на которые делится N. Шимура [**165**] доказал аналитическое продолжение и функциональное уравнение для (7.19).

7.1.4. Ряды Эйзенштейна. Зафиксируем $\kappa=1$. Для $\Gamma=\Gamma_0(N)$ определим ряд Эйзенштейна в параболической вершине $\mathfrak{c}$ с характером χ следующим выражением:

$$E_{\mathfrak{c}}(z,s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathfrak{c}}\backslash\Gamma}\overline{\chi}(\gamma)j_{\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\gamma}(z)^{-1}\left(\mathrm{Im}\,(\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\gamma z)\right)^s,$$

где $\sigma_{\mathfrak{c}}$ – нормировочная матрица для параболической вершины $\mathfrak{c}$ и

$$j_\gamma(z) := \frac{cz+d}{|cz+d|} = e^{i\arg(cz+d)}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Теорема 7.1.3. *Пусть $\mathfrak{c}$ – сингулярная параболическая вершина для характера χ, а $\mathfrak{a}$ – параболическая вершина Аткина-Лехнера. Тогда справедливо следующее разложение Фурье-Уиттекера:*

$$E_{\mathfrak{c}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z, s) j_{\sigma_{\mathfrak{a}}}(z)^{-1} = \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} y^s + \rho_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(0,s) y^{1-s} + \sum_{m\neq 0} \rho_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,s) e(mx) W_{\frac{|m|}{2m}, s-1/2}(4\pi|m|y),$$

где

$$\rho_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(0,s) = -\frac{\sqrt{\pi} i \Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)} \phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(0,s,\chi),$$

$$\rho_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,s) = -\frac{\pi^s i |m|^{s-1}}{\Gamma(s+1/2)} \phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,s,\chi), \tag{7.20}$$

$$\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,s,\chi) = \sum_{\gamma=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty \backslash \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}} / \Gamma_\infty} \overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \gamma \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) \frac{e(md/c)}{c^{2s}} = \sum_{c \in C_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}(N)} \frac{S_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}(0,m;c;\chi)}{c^{2s}}. \tag{7.21}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Эйзентштейна

$$E_{\mathfrak{c}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{c}} \backslash \Gamma} \overline{\chi}(\gamma) j_{\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\gamma}(\sigma_{\mathfrak{a}} z)^{-1} \left(\operatorname{Im}(\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \gamma \sigma_{\mathfrak{a}} z)\right)^s.$$

Выполняя замену переменных $\tau := \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \gamma \sigma_{\mathfrak{a}}$ (так что $\tau \in B \setminus \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}}$), мы получаем

$$E_{\mathfrak{c}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z, s) = \sum_{\tau \in B \backslash \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}}} \overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \tau \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) j_{\tau \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z)^{-1} (\operatorname{Im}(\tau z))^s.$$

Используя свойство

$$j_{\tau\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z)^{-1} j_{\sigma_{\mathfrak{a}}}(z)^{-1} = j_\tau(z)^{-1},$$

преобразуем ряд Эйзенштейна к следующему виду:

$$E_{\mathfrak{c}}(\sigma_{\mathfrak{a}} z, s) j_{\sigma_{\mathfrak{a}}}(z)^{-1} = \sum_{\tau \in B \backslash \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}}} \overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \tau \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) j_\tau(z)^{-1} (\operatorname{Im}(\tau z))^s$$

$$= \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} y^s + \sum_{\gamma \in B \backslash \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1} \Gamma \sigma_{\mathfrak{a}} / B} \sum_{\tau \in B} \overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \gamma \tau \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) j_{\gamma\tau}(z)^{-1} (\operatorname{Im}(\gamma\tau z))^s.$$

Заметим, что $\overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \gamma \tau \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) = \overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}} \gamma \sigma_{\mathfrak{a}}^{-1})$, так как параболическая вершина $\mathfrak{a}$ является сингулярной. Для $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\tau = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ выполнено равенство

$$\gamma\tau z = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c(z+n)+d)}, \quad j_{\gamma\tau} = \frac{cz+cn+d}{|cz+cn+d|}.$$

Следовательно, для $z = x + iy$ получаем, что

$$\operatorname{Im}(\gamma\tau z) = \frac{y}{c^2} \frac{1}{(x+n+d/c)^2 + y^2}$$

и

$$E_{\mathfrak{c}}(\sigma_{\mathfrak{a}}z,s)j_{\sigma_{\mathfrak{a}}}(z)^{-1}=\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}y^s+\sum_{\gamma\in B\backslash\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\Gamma\sigma_{\mathfrak{a}}/B}\overline{\chi}(\sigma_{\mathfrak{c}}\gamma\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1})$$
$$\times\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{cz+cn+d}{|cz+cn+d|}\right)^{-1}\left(\frac{y}{c^2}\frac{1}{(x+n+d/c)^2+y^2}\right)^s. \quad (7.22)$$

Для вычисления суммы по n применим формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{cz+cn+d}{|cz+cn+d|}\right)^{-1}\left(\frac{y}{c^2}\frac{1}{(x+n+d/c)^2+y^2}\right)^s$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{c(z+v)+d}{|c(z+v)+d|}\right)^{-1}\frac{(yc^{-2})^s e(-mv)}{((x+d/c+v)+y^2)^s}dv.$$

Вводя новую переменную $t:=x+d/c+v$, получаем

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}e\left(mx+\frac{md}{c}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t+iy}{|t+iy|}\right)^{-1}\left(\frac{yc^{-2}}{t^2+y^2}\right)^s e(-mt)dt. \quad (7.23)$$

Вначале предположим, что $m=0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t+iy|}{t+iy}\frac{(yc^{-2})^s}{(t^2+y^2)^s}dt=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(yc^{-2})^s dt}{(y+it)^{s-1/2}(y-it)^{s+1/2}}$$
$$=\frac{(yc^{-2})^s}{i}\frac{2\pi(2y)^{1-2s}\Gamma(2s)}{(2s-1)\Gamma(s-1/2)\Gamma(s+1/2)}=-\frac{\sqrt{\pi}i\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)}\frac{y^{1-s}}{c^{2s}}.$$

Здесь мы применили [**89**, ур. 8.381.1] для вычисления интеграла. Если же $m\neq 0$, тогда интеграл в (7.23) может быть вычислен при помощи формулы [**89**, 3.384.9] следующим образом:

$$\frac{(yc^{-2})^s}{i}\int_{-\infty}^{\infty}(y+it)^{1/2-s}(y-it)^{-1/2-s}e(-mt)dt=\frac{(2\pi)^s 2^{-s}|m|^{s-1}}{ic^{2s}\Gamma(1/2+s)}W_{\frac{|m|}{2m},1/2-s}(4\pi y|m|).$$

Соответственно, выражение (7.23) преобразуется к виду

$$-\frac{\pi^{1/2}i\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)}y^{1-s}\frac{1}{c^{2s}}+\frac{\pi^s}{i\Gamma(1/2+s)}\frac{1}{c^{2s}}\sum_{m\neq 0}|m|^{s-1}e(mx+md/c)W_{\frac{|m|}{2m},1/2-s}(4\pi y|m|). \quad (7.24)$$

Для того чтобы завершить доказательство нам остаётся лишь заменить сумму по n в формуле (7.22) выражением (7.24). □

7.1.5. Формула следа Кузнецова. В данном параграфе мы выпишем в явном виде формулу следа Кузнецова для системы мультипликаторов Дирихле и произвольных параболических вершин. Для этого мы применим результаты работ [**71**], [**115**, главы 3.3] и [**74**, главы 4.1.3] в предположении, что $\kappa=1$ (то есть $\chi(1)=-1$).

Рассмотрим функцию $\psi\in C^\infty$, для которой выполнены условия:

$$\psi(0)=\psi'(0)=0,\quad \psi^{(j)}(x)\ll(1+x)^{-2-\eta},\quad j=0,1,2,3$$

для некоторого числа $\eta > 0$. Определим следующие интегральные преобразования:

$$\psi_H(k) := 4i^k \int_0^\infty J_{k-1}(x)\psi(x)\frac{dx}{x}, \tag{7.25}$$

$$\psi_D(t) := \frac{2\pi i t}{\sinh(\pi t)} \int_0^\infty (J_{2it}(x) + J_{-2it}(x))\psi(x)\frac{dx}{x}, \tag{7.26}$$

где J_α обозначает J-функцию Бесселя порядка α.

Для $m, n \geq 1$ выполнено равенство:

$$\sum_{c \in C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(N)} \frac{S_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(m,n;c;\chi)}{c} \psi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) = H + D + C, \tag{7.27}$$

где

$$H := \sum_{\substack{k>1 \\ k\equiv 1 \pmod 2}} \sum_{f \in H_k(N,\chi)} \psi_H(k)\Gamma(k)\overline{\rho_{f_\mathfrak{a}}(m)}\rho_{f_\mathfrak{b}}(n),$$

$$D := \sum_{f \in H(N,\chi)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}\overline{\rho_{f_\mathfrak{a}}(m)}\rho_{f_\mathfrak{b}}(n),$$

$$C := \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing.}} \frac{\sqrt{mn}}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_D(t)}{\cosh(\pi t)} \overline{\rho_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m, 1/2+it)}\rho_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(n, 1/2+it)dt.$$

В соответствии с формулой (7.20) непрерывная часть может быть записана в виде

$$C = \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing.}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_D(t)}{\cosh(\pi t)} \frac{\pi}{|\Gamma(1+it)|^2} m^{-it} n^{it} \overline{\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m, 1/2+it, \chi)}\phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(n, 1/2+it, \chi)dt.$$

Применяя свойство (см. [**151**, ур. 5.4.3])

$$\Gamma(1+it)\Gamma(1-it) = \frac{\pi t}{\sinh(\pi t)},$$

получаем

$$C = \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing.}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)} m^{-it} n^{it} \overline{\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m, 1/2+it, \chi)}\phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(n, 1/2+it, \chi)dt. \tag{7.28}$$

7.1.6. Суммы Гаусса. Для характера Дирихле χ по модулю q определим сумму Гаусса от χ следующим выражением:

$$g(\chi; q; m) := \sum_{\substack{u \pmod q \\ (u,q)=1}} \chi(u) e\left(\frac{mu}{q}\right), \quad \tau(\chi) := g(\chi; q; 1). \tag{7.29}$$

Пусть χ обозначает характер по модулю q, индуцированный примитивным характером χ^* по модулю q^*. Тогда из [**135**, леммы 3.1.3 (2)] следует, что

$$g(\chi; q; m) = \tau(\chi^*) \sum_{d|(m, q/q^*)} d\chi^*\left(\frac{q}{q^* d}\right) \overline{\chi^*}\left(\frac{m}{d}\right) \mu\left(\frac{q}{q^* d}\right). \tag{7.30}$$

Определим обобщенные квадратичные суммы Гаусса

$$G(a, n; q) := \sum_{x \pmod q} e\left(\frac{ax^2 + nx}{q}\right), \quad (a, q) = 1.$$

Пусть $G(a;q) := G(a,0;q)$.

Запись $\overline{a}_q$ обозначает, что $\overline{a}_q a \equiv 1 \pmod q$.

Лемма 7.1.4. *Для $(a,q)=1$ выполнена следующая формула:*

$$G^2(a;q) = \begin{cases} q\chi_4(q), & q \text{ нечётное число} \\ 0, & q \equiv 2 \pmod 4 \\ 2qi\chi_4(a), & q \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. Если число q нечётно, то из формулы [**14**, ур. 23] следует, что

$$G^2(a;q) = \left(\left(\frac{a}{q}\right) i^{(\frac{q-1}{2})^2}\sqrt{q}\right)^2 = q(-1)^{(\frac{a-1}{2})^2} = q\chi_4(q).$$

Если же $q \equiv 2 \pmod 4$, то применяя [**14**, ур. 25], получаем, что $G(a;q)=0$. Наконец, если $q \equiv 0 \pmod 4$, то равенство [**14**, ур. 25] позволяет сделать вывод о том, что

$$G^2(a;q) = q(1+i^a)^2 = 2qi^a = 2qi\chi_4(a).$$

□

Лемма 7.1.5. *Если n чётно, а q нечётно, то*

$$G(a,n;q) = e\left(-\frac{\overline{a}_q(n/2)^2}{q}\right) G(a;q) = e\left(-\frac{\overline{(4a)}_q n^2}{q}\right) G(a;q). \tag{7.31}$$

Доказательство. Утверждение следует из [**14**, ур. (26)]. □

Лемма 7.1.6. *Предположим, что оба числа n и q чётны.*

Если $q \equiv 2 \pmod 4$, то $G(a,n;q)=0$.

Если $q \equiv 0 \pmod 4$, то

$$G(a,n;q) = e\left(-\frac{\overline{a}_q(n/2)^2}{q}\right) G(a;q). \tag{7.32}$$

Доказательство. Формула (7.32) следует из [**14**, ур. (26)] для любых чётных n и q. Заметим также, что $G(a;q)=0$ для $q \equiv 2 \pmod 4$ из равенства [**14**, ур. (25)].

□

Лемма 7.1.7. *Предположим, что оба числа n и q нечётны. Тогда*

$$G(a,n;q) = e\left(-\frac{\overline{(4a)}_q n^2}{q}\right) G(a;q). \tag{7.33}$$

Доказательство. В данном случае из формулы [**14**, ур. (27)] следует, что

$$G(a,n;q) = e\left(-\frac{\overline{a}_q(\frac{n+q}{2})^2}{q}\right) G(a;q).$$

Применяя соотношение

$$n^2 \equiv (n+q)^2 \pmod{q},$$

получаем

$$\overline{(4a)}_q n^2 \equiv \overline{a}_q \left(\frac{n+q}{2}\right)^2 \pmod{q}.$$

Таким образом, утверждение леммы доказано. □

Лемма 7.1.8. *Предположим, что n нечётно, а q чётно. Если $q \equiv 0 \pmod 4$, то $G(a,n;q)=0$. В противном случае мы можем записать $q=2r$, r нечётно. Тогда*

$$G(a,n;q) = 2e\left(-\frac{\overline{(8a)}_r n^2}{r}\right) G(2a;r). \tag{7.34}$$

Доказательство. Если n нечётно, а $q \equiv 0 \pmod 4$, то $G(a,n;q)=0$ в соответствии с формулой [**14**, ур. (28)]. Предположим, что $q=2r$ и r нечётно. Применяя свойство мультипликативности сумм Гаусса, получаем

$$G(a,n;2r) = G(a\overline{2}_r, n\overline{2}_r; r)G(a\overline{r}_2, n\overline{r}_2; 2).$$

Заметим, что $G(a\overline{r}_2, n\overline{r}_2; 2) = 2$. Наконец,

$$G(a\overline{2}_r, n\overline{2}_r; r) = G(2a,n;r) = e\left(-\frac{\overline{(8a)}_r n^2}{r}\right) G(2a;r).$$

В последнем выражении мы применили уравнение (7.33) для вычисления суммы $G(2a,n;r)$. □

7.2. Диагональные и недиагональные слагаемые

Предполагая, что s достаточно велико, в данном параграфе мы получим точную формулу для суммы

$$\sum_{l=1}^{\infty} \omega(l) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s),$$

в которой будут выделены диагональные и недиагональные слагаемые. Применяя результаты §7.1.6, мы вычислим диагональные слагаемые в явном виде, а для недиагональных получим выражение в терминах сумм сумм Клоостермана, к которому применима формула следа Кузнецова.

Лемма 7.2.1. *При $\operatorname{Re} s > 3/2$ справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \omega(l) \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s) = \widehat{\omega}(1)\zeta(2s) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+s}} \sum_{c,d \pmod q} S(d^2,c^2;q) e\left(\frac{nc}{q}\right)$$
$$+ \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f(\omega,s;4\pi nl/q)}{q^2} \sum_{c,d \pmod q} S(d^2,c^2;q) e\left(\frac{nc+ld}{q}\right), \tag{7.35}$$

где $S(d,c;q)$ *– классическая сумма Клоостермана и при* $a<1$

$$f(\omega,s;x):=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\widehat{\omega}(\alpha)\frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\left(\frac{x}{4n}\right)^{\alpha+s-1}d\alpha. \tag{7.36}$$

Доказательство. Используя преобразование Меллина для функции ω, получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\widehat{\omega}(\alpha)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)}{l^{\alpha}}d\alpha, \tag{7.37}$$

где $a>1$. В соответствии с формулой [**31**, ур. 4-9] ряд $\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)$ может быть записан в виде сумм сумм Клоостермана, а именно

$$\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)=\zeta(2s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{c\pmod q}S(l^2,c^2;q)e\left(\frac{nc}{q}\right).$$

Подставляя данное выражение в (7.37), мы можем поменять порядок суммирования, суммируя сначала по q, а затем по l, предположив, что $\operatorname{Re}s>3/2$ для абсолютной сходимости. Далее разбивая область суммирования по l на арифметические прогрессии, получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty}\omega(l)\mathscr{L}_{n^2-4l^2}(s)=$$
$$\frac{\zeta(2s)}{2\pi i}\int_{(a)}\widehat{\omega}(\alpha)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{c,d\pmod q}S(d^2,c^2;q)e\left(\frac{nc}{q}\right)\sum_{l\equiv d\pmod q}^{l\geq 1}\frac{1}{l^{\alpha}}d\alpha. \tag{7.38}$$

Внутренняя сумма в правой части формулы (7.38) может быть записана в терминах дзета-функции Лерха $\zeta(a,b;\alpha)$, для которой выполнено функциональное уравнение:

$$\sum_{l\equiv d\pmod q}^{l\geq 1}\frac{1}{l^{\alpha}}=\frac{1}{q^{\alpha}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(l+d/q)^{\alpha}}=\frac{\zeta(d/q,0;\alpha)}{q^{\alpha}}=$$
$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{q^{\alpha}(2\pi)^{1-\alpha}}\left[-ie(\alpha/4)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e(ld/q)}{l^{1-\alpha}}+ie(-\alpha/4)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e(-ld/q)}{l^{1-\alpha}}\right]. \tag{7.39}$$

Чтобы применить данное функциональное уравнение мы сдвигаем контур интегрирования в выражении (7.38) в область $\operatorname{Re}\alpha<0$, пройдя простой полюс функции $\zeta(d/q,0;\alpha)$ в точке $\alpha=1$. Вычислим вклад этого полюса:

$$\widehat{\omega}(1)\zeta(2s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+s}}\sum_{c,d\pmod q}S(d^2,c^2;q)e\left(\frac{nc}{q}\right). \tag{7.40}$$

Далее, применяя функциональное уравнение (7.39) и принимая во внимание равенство

$$ie(-\alpha/4)-ie(\alpha/4)=2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

мы делаем вывод о том, что сумма (7.38) равна выражению (7.40) плюс

$$\frac{\zeta(2s)}{2\pi i}\int_{(a)}\widehat{\omega}(\alpha)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s+\alpha}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^{1-\alpha}}$$
$$\times\sum_{c,d\pmod q}S(d^2,c^2;q)e\left(\frac{nc+ld}{q}\right)\frac{2\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}{(2\pi)^{1-\alpha}}d\alpha,\quad a<0.\quad(7.41)$$

В соответствии с формулой [**151**, ур. 5.5.5, 5.5.3]

$$\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi\alpha/2)=\pi^{1/2}2^{-\alpha}\frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}.$$

Подставляя данный результат в (7.41), мы доказываем лемму. □

7.2.1. Внутренняя сумма. Для вычисления внутренней суммы в (7.35) мы выразим её через произведение двух сумм Гаусса

$$K(n,l;q):=\sum_{c,d\pmod q}S(c^2,d^2,q)e\left(\frac{nc+ld}{q}\right)$$
$$=\sum_{\substack{a,b\pmod q\\ab\equiv1\pmod q}}\sum_{c,d\pmod q}e\left(\frac{ac^2+db^2}{q}\right)e\left(\frac{nc+ld}{q}\right)$$
$$=\sum_{\substack{a,b\pmod q\\ab\equiv1\pmod q}}G(a,n;q)G(b,l;q).\quad(7.42)$$

Далее необходимо рассмотреть различные случаи в зависимости от чётности параметров n, l и q. Для этого мы воспользуемся результатами §7.1.6.

Лемма 7.2.2. *Предположим, что число q нечётно. Тогда*

$$K(n,l;q)=q\chi_4(q)\sum_{\substack{a,b\pmod q\\ab\equiv1\pmod q}}e\left(-\frac{\overline{4}_q bn^2+\overline{4}_q al^2}{q}\right).$$

Доказательство. Необходимо рассмотреть четыре случая в зависимости от чётности n и l. Для начала предположим, что оба числа n и l чётны. Применяя (7.42) и (7.31), получаем

$$K(n,l;q)=\sum_{\substack{a,b\pmod q\\ab\equiv1\pmod q}}e\left(-\frac{\overline{4}_q bn^2+\overline{4}_q al^2}{q}\right)G(a;q)G(b;q).$$

Заметим, что $G(a;q)=G(b;q)$, так как $ab\equiv1\pmod q$. Тогда из леммы 7.1.4 следует требуемый результат при чётных n и l. Остальные три случая доказываются аналогично вычислением суммы $G(a,n;q)$ при помощи формулы (7.31) при чётном n и формулы (7.33) при нечётном n. □

Лемма 7.2.3. *Предположим, что q чётно, а $n+l$ нечётно. Тогда*

$$K(n,l;q)=0.$$

Доказательство. По формуле (7.42)

$$K(n,l;q)=\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}} G(a,n;q)G(b,l;q),$$

где один из параметров n или l чётный, а другой нечётный. Без потери общности можно предположить, что n чётно, а l нечётно. Тогда в соответствии с леммой 7.1.6 делаем вывод о том, что $G(a,n;q)$ не обращается в ноль только если $q\equiv 0 \pmod 4$, но в этом случае $G(b,l;q)=0$ по лемме 7.1.8. □

Лемма 7.2.4. *Предположим, что числа q, n и l чётны. Тогда $K(n,l;q)=0$ при $q\equiv 2 \pmod 4$, а в остальных случаях*

$$K(n,l;q)=2iq\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}} \chi_4(a)e\left(-\frac{a(l/2)^2+b(n/2)^2}{q}\right). \tag{7.43}$$

Доказательство. Из формулы (7.42) и леммы 7.1.6 делаем вывод о том, что $K(n,l;q)\neq 0$ только при $q\equiv 0 \pmod 4$. В последнем случае равенство (7.43) является следствием лемм 7.1.6 и 7.1.4. □

Лемма 7.2.5. *Предположим, что число q чётно, а числа n и l нечётны. Тогда $K(n,l;q)=0$ если $q\equiv 0 \pmod 4$. Если же $q\equiv 2 \pmod 4$, то $r:=q/2$ нечётно и*

$$K(n,l;q)=2q\chi_4(r)S\left(\overline{(8)}_r n^2,\overline{(8)}_r l^2;r\right).$$

Доказательство. Если $q\equiv 0 \pmod 4$, то из формулы (7.42) и леммы 7.1.8 заключаем, что $K(n,l;q)=0$. В противном случае по формуле (7.34) и лемме 7.1.4

$$K(n,l;q)=2q\chi_4(r)\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}} e\left(-\frac{\overline{(8a)}_r n^2+\overline{(8b)}_r l^2}{r}\right),$$

где $r:=q/2$ – нечётное число. Данное выражение преобразуется к следующему виду:

$$K(n,l;q)=2q\chi_4(r)S(2\overline{(8)}_r n^2,2\overline{(8)}_r l^2;q).$$

Записывая $q=2r$ и применяя свойство мультипликативности сумм Клоостермана, получаем

$$K(n,l;q)=2q\chi_4(r)S\left(\overline{(8)}_r n^2,\overline{(8)}_r l^2;r\right)S\left(2\overline{(8)}_r\overline{(r)}_2 n^2,2\overline{(8)}_r\overline{(r)}_2 l^2;2\right).$$

Наконец, применяя формулу

$$S\left(2\overline{(8)}_r\overline{(r)}_2 n^2,2\overline{(8)}_r\overline{(r)}_2 l^2;2\right)=1,$$

мы доказываем утверждение леммы. □

7.2.2. Диагональные слагаемые. Рассмотрим диагональный член в формуле (7.35), а именно

$$M^D(n,s) := \widehat{\omega}(1)\zeta(2s)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+s}}K(n,0;q). \tag{7.44}$$

Мы будем использовать верхние индексы "even"и "odd"в обозначениях $M^D_{\text{even}}(n,s)$ и $M^D_{\text{odd}}(n,s)$ в зависимости от чётности или нечётности параметра n.

Лемма 7.2.6. *Если n чётно, то*

$$M^D_{even}(n,s) = \frac{\widehat{\omega}(1)\zeta(2s)}{L(\chi_4,1+s)}\left(n^{-2s}\sigma_s\left(\chi_4;n^2\right)+\sigma_{-s}(\chi_4;n^2)\right). \tag{7.45}$$

Если n нечётно, то

$$M^D_{odd}(n,s) = \frac{\widehat{\omega}(1)\zeta(2s)}{L(\chi_4,1+s)}\sigma_{-s}(\chi_4;n^2). \tag{7.46}$$

Доказательство. Предположим, что число n чётно. Мы можем разбить сумму по q в формуле (7.44) следующим образом:

$$\sum_{q=1}^{\infty} = \sum_{q\equiv 0 \pmod 2} + \sum_{q\equiv 1 \pmod 2}. \tag{7.47}$$

Если n и q чётны, то $K(n,0;q)=0$ во всех случаях кроме $q\equiv 0 \pmod 4$. При $q\equiv 0 \pmod 4$ выполнено равенство $\chi_4(a)=\chi_4(b)$ для $ab\equiv 1 \pmod q$. Тогда из леммы 7.2.4 следует, что

$$\frac{K(n,0;q)}{2iq} = \sum_{b \pmod q}^{*}\chi_4(b)e\left(-\frac{b(n/2)^2}{q}\right) = \chi_4(-1)g\left(\chi_4;q;(n/2)^2\right),$$

где звёздочка в сумме выше обозначает суммирование по $b \pmod q$ таким, что $(b,q)=1$. Таким образом, применяя формулу (7.30), находим

$$\begin{aligned}\sum_{q\equiv 0 \pmod 2}\frac{K(n,0;q)}{q^{2+s}} &= 2i\chi_4(-1)\sum_{q\equiv 0 \pmod 4}\frac{g(\chi_4;q;(n/2)^2)}{q^{1+s}}\\ &= \frac{2i\chi_4(-1)}{4^{1+s}}\tau(\chi_4)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{1+s}}\sum_{d\mid((n/2)^2,q)}d\chi_4\left(\frac{q}{d}\right)\chi_4\left(\frac{(n/2)^2}{d}\right)\mu\left(\frac{q}{d}\right).\end{aligned}$$

Вычислим сумму по q:

$$\begin{aligned}\sum_{q\equiv 0 \pmod 2}\frac{K(n,0;q)}{q^{2+s}} &= \frac{2i\chi_4(-1)\tau(\chi_4)}{4^{1+s}L(\chi_4,1+s)}\sum_{d\mid(n/2)^2}d^{-s}\chi_4\left(\frac{(n/2)^2}{d}\right)\\ &= \frac{2i\chi_4(-1)\tau(\chi_4)}{4^{1+s}L(\chi_4,1+s)}\left(\frac{n}{2}\right)^{-2s}\sigma_s\left(\chi_4;(n/2)^2\right) = \frac{\sigma_s\left(\chi_4;(n/2)^2\right)}{L(\chi_4,1+s)}n^{-2s}.\end{aligned} \tag{7.48}$$

Теперь рассмотрим сумму по нечётным q в формуле (7.47). Применяя лемму 7.2.2 для вычисления $K(n,0;q)$ и выполняя замену переменных $-\overline{4}_q b \to b$, вычисляем

$$\sum_{q\equiv 1 \pmod 2} \frac{K(n,0;q)}{q^{2+s}} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\chi_4(q)}{q^{1+s}} \sum_{b \pmod q} e\left(\frac{bn^2}{q}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\chi_4(q)}{q^{1+s}} \sum_{d|(q,n^2)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right)$$

$$= \sum_{d|n^2} d \sum_{q\equiv 0 \pmod d} \frac{\chi_4(q)\mu(q/d)}{q^{1+s}} = \frac{\sigma_{-s}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,1+s)}. \quad (7.49)$$

Объединив результаты формул (7.49) и (7.48), учитывая равенство $\sigma_s(\chi_4;(n/2)^2) = \sigma_s(\chi_4;n^2)$, мы доказываем формулу (7.45).

Аналогично для нечётного n равенство (7.46) следует из

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{K(n,0;q)}{q^{2+s}} = \frac{\sigma_{-s}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,1+s)}.$$

□

7.2.3. Недиагональные слагаемые. Рассмотрим недиагональный член в формуле (7.35), а именно

$$M^{ND} := \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f(\omega,s;4\pi nl/q)}{q^2} K(n,l;q).$$

Для простоты положим $\psi(x) := f(\omega,s;4x)$. Рассмотрим следующие две суммы Клоостермана (см. [**114**, ур. (2.20), (2.23)]) :

$$S_{\infty,0}(m,n;c\sqrt{N};\chi) = \overline{\chi}(c)S(\overline{N}m,n;c), \quad (c,N)=1, \quad (7.50)$$

$$S_{\infty,\infty}(m,n;c;\chi) = \sum_{ab\equiv 1 \pmod c} e\left(\frac{am+bn}{c}\right)\overline{\chi}(b). \quad (7.51)$$

Применяя формулы (7.18) и [**114**, ур. 2.15], получаем

$$C_{\infty,\infty}(4) = \{\gamma = q > 0, \quad q \equiv 0 \pmod 4\}, \quad (7.52)$$

$$C_{\infty,0}(4) = \{\gamma = 2q > 0, (q,4) = 1\},$$

$$C_{\infty,0}(16) = \{\gamma = 4q > 0, \quad (q,2) = 1\}, \quad (7.53)$$

$$C_{\infty,0}(64) = \{\gamma = 8s > 0, \quad (s,2) = 1\}.$$

Лемма 7.2.7. *Если n чётно (определим $n_1 := n/2$), тогда*

$$M^{ND} = -\frac{2i\zeta(2s)}{2^s\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,\infty}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{4\pi l n_1}{\gamma}\right)S_{\infty\infty}\left(l^2,n_1^2;\gamma;\chi_4\right) + \frac{2\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{4\pi l n_1}{\gamma}\right)S_{\infty 0}(l^2,n_1^2;\gamma;\chi_4). \quad (7.54)$$

Если n нечётно, тогда

$$M^{ND} = \frac{8\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(64)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{4\pi l n}{\gamma}\right)S_{\infty 0}(l^2,n^2;\gamma;\chi_4) + (1-2^{-s})\frac{4\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{4\pi l n}{\gamma}\right)S_{\infty 0}(l^2,n^2;\gamma;\chi_4). \quad (7.55)$$

Доказательство. Для начала предположим, что n чётно. Тогда применяя леммы 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4, находим

$$M^{ND} = \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l\equiv 0 \pmod 2}\frac{1}{l^s}\sum_{q\equiv 0 \pmod 4}\frac{2i}{q}f\left(\frac{4\pi nl}{q}\right) \times \sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}}\chi_4(a)e\left(-\frac{a(l/2)^2+b(n/2)^2}{q}\right) + \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\chi_4(q)}{q}f\left(\frac{4\pi nl}{q}\right)\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}}e\left(\frac{\overline{4}_q bn^2+\overline{4}_q al^2}{q}\right). \quad (7.56)$$

Так как $\chi_4(a)=\chi_4(b)$ при $q\equiv 0 \pmod 4$, первое слагаемое в (7.56) равно

$$-\frac{2i\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l\equiv 0 \pmod 2}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,\infty}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi l n}{\gamma}\right)S_{\infty\infty}\left(\frac{l^2}{4},\frac{n^2}{4};\gamma;\chi_4\right).$$

Применяя (7.50), получаем

$$\chi_4(q)\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}}e\left(\frac{\overline{4}_q bn^2+\overline{4}_q al^2}{q}\right) = S_{\infty 0}\left(l^2,n_1^2;q\sqrt{4};\chi_4\right).$$

Таким образом, второе слагаемое в (7.56) равняется выражению

$$\frac{2\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{4\pi l n_1}{\gamma}\right)S_{\infty 0}(l^2,n_1^2;\gamma;\chi_4).$$

Доказательство (7.54) завершено.

Далее будем предполагать, что n нечётно. Применяя леммы 7.2.2, 7.2.3, 7.2.5, находим

$$M^{ND} = \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{(l,2)=1} \frac{1}{l^s} \sum_{q\equiv 2 \pmod 4} \frac{2\chi_4(q/2)}{q} f\left(\frac{4\pi nl}{q}\right) \times \sum_{\substack{a,b \pmod r \\ ab\equiv 1 \pmod r}} e\left(\frac{a\overline{8}_r n^2 + b\overline{8}_r l^2}{r}\right) + \frac{\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\chi_4(q)}{q} f\left(\frac{4\pi nl}{q}\right) \sum_{\substack{a,b \pmod q \\ ab\equiv 1 \pmod q}} e\left(\frac{\overline{4}_q bn^2 + \overline{4}_q al^2}{q}\right), \quad (7.57)$$

где $r = q/2$. Заметим, что характер χ_4 может быть продолжен до характера χ_{16} следующим образом:

$$\chi_{16}(q) = \begin{cases} \chi_4(q), & \text{если} (q,16) = 1 \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, $\chi_4(q) = \chi_{16}(q)$ для всех $(q,2) = 1$. Поэтому второе слагаемое в (7.57) равняется выражению

$$\frac{4\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)} \frac{1}{\gamma} \psi\left(\frac{4\pi ln}{\gamma}\right) S_{\infty 0}(l^2, n^2; \gamma, \chi_4).$$

Для вычисления первого слагаемого в (7.57) разобьем сумму по l на две части

$$\sum_{(l,2)=1} = \sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l\equiv 0 \pmod 2},$$

которые приводят к следующему выражению:

$$\frac{8\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(64)} \frac{1}{\gamma} \psi\left(\frac{4\pi ln}{\gamma}\right) S_{\infty 0}(l^2, n^2; \gamma, \chi_4) - \frac{4\zeta(2s)}{2^s \pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)} \frac{1}{\gamma} \psi\left(\frac{4\pi ln}{\gamma}\right) S_{\infty 0}(l^2, n^2; \gamma, \chi_4).$$

Доказательство завершено. □

7.3. Специальные функции

Рассмотрим преобразования Бесселя $\psi_H(k)$ и $\psi_D(t)$, которые задаются формулами (7.25) и (7.26) соответственно. Наша цель – доказать интегральные представления для этих функций в терминах гипергеометрической функции Гаусса.

Напомним, что в нашем случае $\kappa = 1$ и $k \equiv \kappa \pmod 2$. Таким образом, справедливо представление $k = 2m + 1$ для $m \in \mathbf{N}$, и мы получаем формулы:

$$\psi_H(k) = 4i^{2m+1} \int_0^{\infty} J_{2m}(x)\psi(x)\frac{dx}{x}, \quad (7.58)$$

$$\psi_D(t) = \frac{2\pi i t}{\sinh(\pi t)} \int_0^\infty (J_{2it}(x) + J_{-2it}(x))\psi(x)\frac{dx}{x}, \tag{7.59}$$

где для $a < 0$ (см. (7.36))

$$\psi(x) = f(\omega, s; 4x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \frac{\Gamma(1/2-\alpha/2)}{\Gamma(\alpha/2)}\widehat{\omega}(\alpha)\left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha+s-1} d\alpha.$$

Функция $\psi(x)$ имеет также другое интегральное представление:

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{n}\right)^s \int_0^\infty \omega(y)\cos\left(\frac{2xy}{n}\right) dy, \tag{7.60}$$

доказательство которого может быть найдено в [**29**, ур. (1.7)] и [**29**, стр. 1984].

Лемма 7.3.1. *Справедлива следующая формула:*

$$\psi_H(k) = \frac{4i}{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}+m\right)\left[\frac{\Gamma(s/2-m)}{\Gamma(1/2)}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{2^s}{n^s}\times \right.$$
$$\int_0^{n/2}\omega(y)F\left(\frac{s}{2}+m, \frac{s}{2}-m; \frac{1}{2}; \left(\frac{2y}{n}\right)^2\right)dy + \frac{\Gamma(m+s/2+1/2)}{\Gamma(2m+1)}\times$$
$$\left.\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\frac{n^{2m}}{2^{2m}}\int_{n/2}^\infty \omega(y)F\left(m+\frac{s}{2}, m+\frac{s+1}{2}; 2m+1; \left(\frac{n}{2y}\right)^2\right)dy\right]. \tag{7.61}$$

Доказательство. Подставляя формулу (7.60) в (7.58), находим

$$\psi_H(k) = \frac{8i^{2m+1}}{\sqrt{\pi}n^s}\int_0^\infty \omega(y)\int_0^\infty J_{2m}(x)x^{s-1}\cos\left(x\frac{2y}{n}\right)dxdy.$$

Внешний интеграл по y может быть разбит на две части: $\int_0^\infty = \int_0^{n/2} + \int_{n/2}^\infty$. Для каждой из этих частей вычислим внутренний интеграл по x. При $2y/n < 1$ применяем равенство [**89**, 6.699 (2)] и формулу отражения Эйлера, из чего заключаем, что

$$\int_0^\infty J_{2m}(x)x^{s-1}\cos\left(x\frac{2y}{n}\right)dx = \frac{2^{s-1}(-1)^m\sin(\pi s/2)}{\pi}$$
$$\times\Gamma(s/2+m)\Gamma(s/2-m)F\left(\frac{s}{2}+m, \frac{s}{2}-m; \frac{1}{2}; \left(\frac{2y}{n}\right)^2\right).$$

Таким образом получено первое слагаемое в (7.61). Второе слагаемое вычисляется аналогично с использованием равенства [**89**, 6.699 (2)] при $2y/n \geq 1$. □

Лемма 7.3.2. *Справедливо следующее выражение:*

$$\psi_D(t) = \frac{2\pi i t}{\sinh(\pi t)}\left(h_1(t) + h_1(-t) + h_2(t)\right), \tag{7.62}$$

где

$$h_1(t) = \frac{\cos(\pi(s/2+it))}{\pi}\frac{\Gamma(s/2+it)\Gamma(s/2+1/2+it)}{\Gamma(1+2it)}$$
$$\times\int_{n/2}^\infty \frac{\omega(y)}{y^s}\left(\frac{2y}{n}\right)^{-2it}F\left(\frac{s}{2}+it, \frac{s+1}{2}+it; 1+2it; \left(\frac{n}{2y}\right)^2\right)dy, \tag{7.63}$$

$$h_2(t) = \frac{2\cosh(\pi t)}{\pi}\frac{\sin(\pi s/2)}{(n/2)^s}\frac{\Gamma(s/2+it)\Gamma(s/2-it)}{\Gamma(1/2)} \times \int_0^{n/2} \omega(y) F\left(\frac{s}{2}+it, \frac{s}{2}-it; \frac{1}{2}; \left(\frac{2y}{n}\right)^2\right) dy.$$

Доказательство. Подставляя (7.60) в (7.59), мы показываем, что

$$\psi_D(t) = \frac{2\pi i t}{\sinh(\pi t)}\left(h_1(t) + h_1(-t) + h_2(t)\right),$$

где

$$h_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^s}\int_{n/2}^{\infty}\omega(y)\int_0^{\infty} J_{2it}(x)x^{s-1}\cos\left(\frac{2xy}{n}\right)dxdy,$$

$$h_2(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^s}\int_0^{n/2}\omega(y)\int_0^{\infty}(J_{2it}(x)+J_{-2it}(x))x^{s-1}\cos\left(\frac{2xy}{n}\right)dxdy.$$

Вычисляя внутренние интегралы по x в $h_1(t)$ и $h_2(t)$ при помощи [**89**, ур. 6.699 (2)], мы завершаем доказательство.

□

Лемма 7.3.3. *Справедливы следующие равенства:*

$$h_1\left(\frac{1-s}{2i}\right) = 0, \tag{7.64}$$

$$h_1\left(\frac{s-1}{2i}\right) = \frac{\Gamma(s-1/2)\sin(\pi s)}{\pi(n/2)^{1-s}}\int_{n/2}^{\infty}\omega(y)(y^2-n^2/4)^{1/2-s}dy, \tag{7.65}$$

$$h_2\left(\frac{1-s}{2i}\right) = h_2\left(\frac{s-1}{2i}\right) = \frac{2}{\pi}\sin^2(\pi s/2)\frac{\Gamma(s-1/2)}{(n/2)^{1-s}}\int_0^{n/2}\omega(y)(n^2/4-y^2)^{1/2-s}dy. \tag{7.66}$$

Доказательство. Равенство (7.64) следует напрямую из формулы (7.63). Для доказательства (7.65) и (7.66) мы воспользуемся уравнением [**151**, ур. 15.4.6], в соответствии с которым получаем

$$F\left(s-\frac{1}{2}, s, s; \left(\frac{n}{2y}\right)^2\right) = \frac{(y^2-n^2/4)^{1/2-s}}{y^{1-2s}},$$

$$F\left(\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \left(\frac{2y}{n}\right)^2\right) = \frac{(n^2/4-y^2)^{1/2-s}}{(n/2)^{1-2s}}.$$

Лемма доказана. □

Следствие 7.3.4. *Справедливо следующее равенство:*

$$\frac{\psi_D\left(\frac{1-s}{2i}\right)\sinh\left(\pi\frac{1-s}{2i}\right)}{(1-s)\cosh\left(\pi\frac{1-s}{2i}\right)} = \frac{2\Gamma(s-1/2)}{(n/2)^{1-s}}\left(\sin(\pi s/2)\int_0^{n/2}\omega(y)\left(\frac{n^2}{4}-y^2\right)^{1/2-s}dy + \cos(\pi s/2)\int_{n/2}^{\infty}\omega(y)\left(y^2-\frac{n^2}{4}\right)^{1/2-s}dy\right). \tag{7.67}$$

Доказательство. Данное равенство следует из леммы 7.3.3 и уравнения (7.62). □

7.4. Коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна

Для того чтобы понять структуру непрерывного спектра, возникающего из формулы Кузнецова, мы вычислим в явном виде коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна групп $\Gamma_0(4)$, $\Gamma_0(16)$ и $\Gamma_0(64)$. С этой целью мы определим список сингулярных параболических вершин для рассматриваемых групп и вычислим различные характеры, являющиеся составной частью коэффициентов Фурье.

7.4.1. Сингулярные параболические вершины для $\Gamma_0(4)$, $\Gamma_0(16)$ и $\Gamma_0(64)$. Пусть $\sigma_{\mathfrak{a}}$ – это нормировочная матрица для параболической вершины $\mathfrak{a}$ и пусть $\lambda_{\mathfrak{a}}$ определяется равенством $\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}\lambda_{\mathfrak{a}}\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Напомним, что $\mathfrak{a}$ называется сингулярной для характера χ, если $\chi(\lambda_{\mathfrak{a}}) = 1$. Из [**114**, утверждения 3.3] следует, что если $\mathfrak{c} = 1/\omega$ – параболическая вершина $\Gamma = \Gamma_0(N)$ и

$$N = (N, \omega)N', \quad \omega = (N, \omega)\omega', \quad N' = (N', \omega)N'',$$

то

$$\lambda_{1/\omega} = \begin{pmatrix} 1 - \omega N'' & N'' \\ -\omega^2 N'' & 1 + \omega N'' \end{pmatrix}. \tag{7.68}$$

Лемма 7.4.1. *Следующие параболические вершины сингулярны для* $\Gamma_0(4)$*:*

$$0, \infty.$$

Следующие параболические вершины сингулярны для $\Gamma_0(16)$*:*

$$0, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12, \infty.$$

Следующие параболические вершины сингулярны для $\Gamma_0(64)$*:*

$$0, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12, 1/16, 1/24, 1/32, 1/40, 1/48, 1/56, \infty.$$

Доказательство. В соответствии со [**114**, следствием 3.2] все неэквивалентные параболические вершины для $\Gamma = \Gamma_0(N)$ могут быть записаны как $\frac{1}{w} = \frac{1}{uf}$, где f пробегает все делители N, а u пробегает приведённую систему вычетов по модулю $(f, N/f)$ и выбрано так, что $(u, N) = 1$ после добавления нужного количества $(f, N/f)$.

Следовательно, для группы $\Gamma_0(4)$ существуют три неэквивалентные параболические вершины:

$$\frac{1}{1} \sim 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \sim \infty.$$

Для группы $\Gamma_0(16)$ существует шесть неэквивалентных параболических вершин:

$$\frac{1}{1} \sim 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16} \sim \infty,$$

а для группы $\Gamma_0(64)$ их двенадцать:

$$\frac{1}{1} \sim 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}, \frac{1}{32}, \frac{1}{40}, \frac{1}{48}, \frac{1}{56}, \frac{1}{64} \sim \infty.$$

Для того чтобы понять какие из параболических вершин являются сингулярными мы применим (7.68). Соответственно, параболическая вершина сингулярна, если

$$\chi_4(1 + wN'') = 1.$$

Проверяя это условие, мы приходим к выводу, что для $\Gamma_0(16)$ и $\Gamma_0(64)$ все параболические вершины перечисленные выше сингулярны. Для $\Gamma_0(4)$ параболические вершины 0 и ∞ сингулярны, а вершина $1/2$ таковой не является, так как $\chi_4(1 + wN'') = \chi_4(3) = -1$. $\square$

7.4.2. Вычисления характеров.

Лемма 7.4.2. *Пусть $\mathfrak{c} = 1/w$ – произвольная параболическая вершина и $\mathfrak{a} = 1/r$ – параболическая вершина Аткина-Ленера для $\Gamma_0(N)$. Выберем нормировочные матрицы следующим образом:*

$$\sigma_{\mathfrak{c}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{N''} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{N''} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & (\overline{s}s - 1)/r \\ r & \overline{s}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{s} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\Gamma\sigma_{\mathfrak{a}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{A}{N''}\sqrt{N''s} & \frac{B}{N''}\sqrt{\frac{N''}{s}} \\ C\sqrt{N''s} & D\sqrt{\frac{N''}{s}} \end{pmatrix} : \begin{matrix} C \equiv -wA \pmod{r} \\ D \equiv -wB \pmod{s} \\ AD - BC = 1 \end{matrix} \right\} \tag{7.69}$$

и для $\rho \in \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\Gamma\sigma_{\mathfrak{a}}$ выполнено равенство:

$$\chi_4(\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1}) = \chi_4\left((wA + C)\frac{1 - s\overline{s}}{r} + wB + D\right). \tag{7.70}$$

В частности,

$$\chi_4(\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_{\infty}^{-1}) = \chi_4\left(wB + D\right), \tag{7.71}$$

$$\chi_4(\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_{0}^{-1}) = \chi_4\left(wA + C\right). \tag{7.72}$$

Доказательство. Доказательство (7.69) приведено в [**114**, лемме 3.5].

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_{\mathfrak{a}}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & (wA + C)\frac{1 - \overline{s}s}{r} + WB + D \end{pmatrix}.$$

Из этого следует формула (7.70). Если $\mathfrak{a} = \infty$, то формулу можно упростить, заметив, что в этом случае $r = N$, $s = 1$, и поэтому

$$\frac{1 - \overline{s}s}{r} = 0.$$

Аналогично для $\mathfrak{a} = 0$ получаем $r = 1$, $s = N$ и

$$\frac{1 - \overline{s}s}{r} = 1 - N\overline{N} = 1 - N.$$

Тогда, применяя соотношение $wB + D \equiv 0 \pmod{N}$ в формуле (7.70), доказываем (7.72).

□

Следствие 7.4.3. *Для группы* $\Gamma_0(4)$ *выполнены следующие равенства:*

$$\chi_4(\sigma_\infty \rho \sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D), \quad \chi_4(\sigma_0 \rho \sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(-C),$$

$$\chi_4(\sigma_\infty \rho \sigma_0^{-1}) = \chi_4(C), \quad \chi_4(\sigma_0 \rho \sigma_0^{-1}) = \chi_4(D).$$

Доказательство. Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = \infty$, тогда $w = N = 4$, и из формулы (7.71) получаем $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(D)$.

Если $\mathfrak{a} = \infty$, $\mathfrak{c} = 0$, то $w = 1$, и из формулы (7.71) получаем $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(B + D)$. Из (7.69) следует, что

$$\begin{cases} AD - BC = 1 \\ C \equiv -A \pmod{N} \end{cases}.$$

Поэтому $A(B + D) \equiv 1 \pmod{N}$ и $B + D \equiv \overline{A} \pmod{N} \equiv -\overline{C} \pmod{N}$. Следовательно, $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(-\overline{C}) = \chi_4(-C)$.

Если $\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{c} = \infty$, то $w = N = 4$, и из формулы (7.72) получаем $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(C)$.

Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} = 0$, то $w = 1$, и из формулы (7.72) получаем $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(A + C)$. Применяя (7.69), находим

$$\begin{cases} AD - BC = 1 \\ D \equiv -B \pmod{N} \end{cases}.$$

Таким образом, $D(A + C) \equiv 1 \pmod{N}$ и $\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\mathfrak{a}^{-1}) = \chi_4(\overline{D}) = \chi_4(D)$.

□

Следствие 7.4.4. *Для групп* $\Gamma_0(16)$ *и* $\Gamma_0(64)$ *выполнены равенства:*

$$\chi_4(\sigma_0 \rho \sigma_0^{-1}) = \chi_4(D), \quad \chi_4(\sigma_0 \rho \sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(-C),$$

$$\chi_4(\sigma_{1/2} \rho \sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(-C/2), \quad \chi_4(\sigma_{1/2} \rho \sigma_0^{-1}) = \chi_4(D/2).$$

Для всех других сингулярных параболических вершин $\mathfrak{c}$ *групп* $\Gamma_0(16)$ *и* $\Gamma_0(64)$

$$\chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D), \quad \chi_4(\sigma_\mathfrak{c} \rho \sigma_0^{-1}) = \chi_4(C).$$

Доказательство. Заметим, что если $w \equiv 0 \pmod 4$, то

$$\chi_4(\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D), \quad \chi_4(\sigma_{\mathfrak{c}}\rho\sigma_0^{-1}) = \chi_4(C).$$

Данные равенства справедливы для всех сингулярных параболических вершин групп $\Gamma_0(16)$ и $\Gamma_0(64)$ за исключением вершин $\mathfrak{c} = 1/1 \sim 0$ и $\mathfrak{c} = 1/2$.

Для $\mathfrak{c} = 1/1 \sim 0$ все вычисления аналогичны тем, что были проведены в следствии 7.4.3.

Рассмотрим $\mathfrak{c} = 1/2$. Из формулы (7.71)

$$\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(2B + D).$$

Применяя (7.69), находим

$$\begin{cases} AD - BC = 1 \\ C \equiv -2A \pmod N, \end{cases}$$

из чего следует, что $A(D + 2B) \equiv 1 \pmod N$ и $\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(\overline{A})$. Так как $A\overline{A} \equiv 1 \pmod 4$ и $A \equiv -C/2 \pmod{N/2}$, мы получаем

$$\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(\overline{A}) = \chi_4(A) = \chi_4(-C/2).$$

Из формулы (7.72) находим

$$\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_0^{-1}) = \chi_4(2A + C).$$

Применяя (7.69), показываем, что

$$\begin{cases} AD - BC = 1 \\ D \equiv -2B \pmod N. \end{cases}$$

Таким образом, $-B(2A + C) \equiv 1 \pmod N$ и

$$\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_0^{-1}) = \chi_4(-\overline{B}) = \chi_4(-B) = \chi_4(D/2).$$

□

7.4.3. Коэффициенты Фурье. В этом параграфе мы предполагаем, что m – положительное число. Для удобства записи введем следующие обозначения:

$$\delta_n(m) := \begin{cases} 1, & \text{если } n|m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases},$$

$$s(m) := \frac{\sigma_{1-2s}(\chi_4; m)}{L(\chi_4, 2s)}, \tag{7.73}$$

$$t(m) := \frac{\tau(\chi_4)\sigma_{2s-1}(\chi_4; m)m^{1-2s}}{L(\chi_4, 2s)}, \tag{7.74}$$

$$\sum_{a \pmod m}^{*} := \sum_{\substack{a \pmod m \\ (a,m)=1}}.$$

Также мы будем часто использовать следующую лемму, которая является прямым следствием китайской теоремы об остатках.

Лемма 7.4.5. *Для $(m,n)=1$ выполнено равенство*

$$\sum_{c \pmod{mn}}^{*} f(c) = \sum_{a \pmod m}^{*} \sum_{b \pmod n}^{*} f(an\overline{n}_m + bm\overline{m}_n),$$

где $n\overline{n}_m \equiv 1 \pmod m$ и $m\overline{m}_n \equiv 1 \pmod n$.

Наша следующая цель – вычислить коэффициенты Фурье (7.21) для $N = 4, 16, 64$ и $\mathfrak{a} = 0, \infty$. Мы представим полное доказательство в случае $N = 64$ и $\mathfrak{a} = \infty$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Лемма 7.4.6. *Пусть $N = 64$ и $\mathfrak{a} = \infty$. Тогда*

$$\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-1)\frac{s(m)}{8^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,1/2}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-1)e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4u}}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{4}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad u = 1,3,$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8u}}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{8}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad u = 1,3,5,7, \tag{7.75}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{16u}}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-u)4\delta_4(m)e\left(-\frac{mu}{16}\right)\frac{s(m)}{16^{2s}}, \quad u = 1,3, \tag{7.76}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m,s,\chi_4) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_8(m)t\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right), \tag{7.77}$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_4) = \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right). \tag{7.78}$$

Доказательство. Нам нужно вычислить (7.21) для $\mathfrak{a} = \infty$. Соответственно, выражение [**114**, ур. 3.20] может быть упрощено в случае $r = N = 64$:

$$\Gamma_\infty \setminus \sigma_{\mathfrak{c}}^{-1}\Gamma\sigma_\infty/\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ C\sqrt{N''} & D\sqrt{N''} \end{pmatrix} : \begin{array}{r} D \pmod C, \quad (D,C)=1, \quad (C,N)=f \\ D \equiv -\overline{(C/f)}u \pmod{(f,N/f)} \end{array} \right\}.$$

Если $\mathfrak{c} = 0$, то из следствия 7.4.4 следует, что $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(-C)$, а также

$$f = 1, \quad (f, N/f) = 1, \quad N'' = 64, \quad D \equiv -\overline{C} \pmod 1.$$

В результате

$$\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_4) = \sum_{(C,2)=1} \frac{\chi_4(-C)}{(8C)^{2s}} \sum_{D \pmod C}^{*} e\left(\frac{mD}{C}\right).$$

Условие $(C,2)=1$ может быть опущено, так как $\chi_4(-C)=0$, если оно не выполнено. Далее мы применим для внутренней суммы следующее равенство:

$$\sideset{}{^*}\sum_{D \pmod C} e\left(\frac{mD}{C}\right) = \sum_{d\mid(m,C)} d\mu(C/d),$$

и поменяем порядки суммирования, из чего получаем

$$\begin{aligned}\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_4) &= \frac{\chi_4(-1)}{8^{2s}}\sum_{d\mid m} d \sum_{C\equiv 0 \pmod d} \frac{\chi_4(C)}{C^{2s}}\mu(C/d)\\ &= \frac{\chi_4(-1)}{8^{2s}}\sum_{d\mid m}\frac{\chi_4(d)}{d^{2s-1}}\sum_{C}\frac{\chi_4(C)}{C^{2s}}\mu(C) = \chi_4(-1)\frac{s(m)}{8^{2s}}.\end{aligned}$$

Если $\mathfrak{c}=\frac{1}{2}$, то из следствия 7.4.4 получаем $\chi_4(\sigma_{1/2}\rho\sigma_\infty^{-1})=\chi_4(-\overline{C/2})$, а также

$$f=2,\quad (f,N/f)=2,\quad N''=16,\quad D\equiv -\overline{C/2} \pmod 2.$$

Поэтому

$$\phi_{\infty,\frac12}(m,s,\chi_4) = \sum_{(C,2)=1}\frac{\chi_4(-C)}{(8C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{D \pmod{2C}} e\left(\frac{mD}{2C}\right).$$

Применяя лемму 7.4.5, находим

$$\begin{aligned}\sideset{}{^*}\sum_{D \pmod{2C}} e\left(\frac{mD}{2C}\right) &= \sideset{}{^*}\sum_{d_1 \pmod 2}\ \sideset{}{^*}\sum_{d_2(C)} e\left(\frac{md_1\overline{C}_2}{2}\right) e\left(\frac{md_2\overline{2}_C}{C}\right)\\ &= e\left(\frac{m}{2}\right)\sideset{}{^*}\sum_{d_2(C)} e\left(\frac{md_2\overline{2}_C}{C}\right) = e\left(\frac{m}{2}\right)\sum_{d\mid(m,C)} d\mu(C/d).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\phi_{\infty,\frac12}(m,s,\chi_4) = \chi_4(-1)e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}.$$

Если $\mathfrak{c}=\frac{1}{4u}$ при $u=1,3$, тогда из следствия 7.4.4 находим $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1})=\chi_4(D)$, а также

$$f=4,\quad (f,N/f)=4,\quad N''=4,\quad D\equiv -u\overline{C/4} \pmod 4.$$

Таким образом,

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4u}}(m,s,\chi_4) = \sum_{(C,2)=1}\frac{\chi_4(-u\overline{C})}{(8C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{D \pmod{4C}\\ D\equiv -u\overline{C} \pmod 4}} e\left(\frac{mD}{4C}\right).$$

Применяя лемму 7.4.5, получаем

$$\begin{aligned}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{D \pmod{4C}\\ D\equiv -u\overline{C} \pmod 4}} e\left(\frac{mD}{4C}\right) &= \sum_{\substack{d_1 \pmod 4\\ d_1\overline{C}_4\equiv -u \pmod 4}} e\left(\frac{md_1\overline{C}_4}{4}\right)\\ &\quad\times \sum_{d_2 \pmod C} e\left(\frac{md_2}{C}\right) = e\left(-\frac{mu}{4}\right)\sum_{d\mid(m,C)} d\mu(C/d).\end{aligned}$$

Поэтому для $u = 1, 3$ верна формула

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4u}}(m, s, \chi_4) = \chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{4}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}.$$

Если $\mathfrak{c} = \frac{1}{8u}$ при $u = 1, 3, 5, 7$, тогда из следствия 7.4.4 находим $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D)$, а также

$$f = 8, \quad (f, N/f) = 8, \quad N'' = 1, \quad D \equiv -u\overline{C/8} \pmod 8.$$

Кроме того, как и в предыдущих случаях получаем

$$\begin{aligned}\phi_{\infty,\frac{1}{8u}}(m, s, \chi_4) &= \sum_{(C,8)=1} \frac{\chi_4(-u\overline{C})}{(8C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{D \pmod{8C} \\ D\equiv -u\overline{C} \pmod 8}} e\left(\frac{mD}{8C}\right) \\ &= \chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{8}\right)\sum_{C=1}^{\infty}\frac{\chi_4(C)}{(8C)^{2s}}\sum_{d|(m,C)} d\mu\left(\frac{C}{d}\right) \\ &= \chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{8}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}.\end{aligned}$$

Если $\mathfrak{c} = \frac{1}{16u}$ при $u = 1, 3$, тогда из следствия 7.4.4 находим $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D)$, а также

$$f = 16, \quad (f, N/f) = 4, \quad N'' = 1, \quad D \equiv -u\overline{C/16} \pmod 4.$$

Таким образом,

$$\phi_{\infty,\frac{1}{16u}}(m, s, \chi_4) = \sum_{(C,4)=1} \frac{\chi_4(-u\overline{C})}{(16C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{D \pmod{16C} \\ D\equiv -u\overline{C} \pmod 4}} e\left(\frac{mD}{16C}\right).$$

Внутренняя сумма вычисляется при помощи леммы 7.4.5 следующим образом:

$$\begin{aligned}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{D \pmod{16C} \\ D\equiv -u\overline{C} \pmod 4}} e\left(\frac{mD}{16C}\right) &= \sideset{}{^*}\sum_{\substack{d_1 \pmod{16} \\ d_1\equiv -u\overline{C}_4 \pmod 4}} \sideset{}{^*}\sum_{d_2 \pmod C} e\left(\frac{md_1\overline{C}_{16}}{16}\right)e\left(\frac{md_2\overline{16}_C}{C}\right) \\ &= \sideset{}{^*}\sum_{\substack{d_1 \pmod{16} \\ Cd_1\equiv -u\overline{C}_4 \pmod 4}} e\left(\frac{md_1}{16}\right)\sideset{}{^*}\sum_{d_2 \pmod C} e\left(\frac{md_2}{C}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что $\overline{C}_4 \equiv C \pmod 4$, и поэтому условие $Cd_1 \equiv -u\overline{C}_4 \pmod 4$ может быть заменено на $d_1 \equiv -u \pmod 4$.

Выполняя замену переменных $d_3 := -u + 4d_3$, $d_3 \pmod 4$, получаем

$$\sum_{\substack{d_1 \pmod{16} \\ d_1\equiv -u \pmod 4}} e\left(\frac{md_1}{16}\right) = \sum_{d_3 \pmod 4} e\left(-\frac{mu}{16}\right)e\left(\frac{md_3}{4}\right) = 4\delta_4(m)e\left(-\frac{mu}{16}\right).$$

Следовательно,

$$\phi_{\infty,\frac{1}{16u}}(m, s, \chi_4) = \chi_4(-u)4\delta_4(m)e\left(-\frac{mu}{16}\right)\frac{s(m)}{16^{2s}}.$$

Если $\mathfrak{c} = \frac{1}{32}$, тогда из следствия 7.4.4 находим $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D)$, а также

$$f = 32, \quad (f, N/f) = 2, \quad N'' = 1, \quad D \equiv -u\overline{C/32} \pmod 2.$$

Таким образом,

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_4) = \sum_{(C,2)=1} \frac{1}{(32C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{D \pmod{32C}} \chi_4(D) e\left(\frac{mD}{32C}\right),$$

где внутренняя сумма – это сумма Гаусса $g(\chi_4; 32C; m)$, заданная формулой (7.29). Тогда из формулы (7.30) получаем

$$\begin{aligned}\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_4) &= \frac{\tau(\chi_4)}{(32)^{2s}} \sum_{d|m} d\chi_4\left(\frac{m}{d}\right) \sum_{\substack{(C,2)=1 \\ C\equiv 0 \pmod{d/(8,d)}}} \frac{\chi_4\left(\frac{8C}{d}\right)\mu\left(\frac{8C}{d}\right)}{C^{2s}} \\ &= \frac{\tau(\chi_4)}{(32)^{2s}} \sum_{\substack{d|m \\ (d/(8,d),2)=1}} d\chi_4\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{(8,d)}{d}\right)^{2s} \sum_{(C,2)=1} \frac{\chi_4\left(\frac{8C}{(8,d)}\right)\mu\left(\frac{8C}{(8,d)}\right)}{C^{2s}}.\end{aligned}$$

Так как $\chi_4\left(\frac{8C}{(8,d)}\right) = 0$ кроме случая $(8, d) = 8$, выражение выше можно упростить:

$$\begin{aligned}\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_4) &= \frac{\tau(\chi_4)}{(32)^{2s}} \sum_{\substack{d|m \\ d\equiv 0 \pmod 8 \\ (d/8,2)=1}} d\chi_4\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{8}{d}\right)^{2s} \sum_{(C,2)=1} \frac{\chi_4(C)\mu(C)}{C^{2s}} \\ &= \frac{\tau(\chi_4)}{(32)^{2s}L(\chi_4, 2s)} 8\delta_8(m) \sum_{\substack{d|\frac{m}{8} \\ (d,2)=1}} d^{1-2s}\chi_4\left(\frac{m/8}{d}\right).\end{aligned}$$

Если $m/8$ нечётно, тогда условие $(d, 2) = 1$ можно убрать, а если $m/8$ чётно, то $\chi_4\left(\frac{m/8}{d}\right) = 0$ для нечётного d. Следовательно,

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_4) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_8(m)(1 - \delta_{16}(m))t\left(\frac{m}{8}\right). \tag{7.79}$$

При $m \equiv 0 \pmod{16}$ выполнено следующее равенство:

$$\left(\frac{m}{8}\right)^{1-2s}\sigma_{2s-1}(\chi_4; m/8) = 2^{1-2s}\left(\frac{m}{16}\right)^{1-2s}\sigma_{2s-1}(\chi_4; m/16),$$

и поэтому

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_4) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_8(m)t\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right).$$

Если $\mathfrak{c} = \frac{1}{64}$, то из следствия 7.4.4 получаем $\chi_4(\sigma_0\rho\sigma_\infty^{-1}) = \chi_4(D)$, а также

$$f = 64, \quad (f, N/f) = 1, \quad N'' = 1, \quad D \equiv -u\overline{C/64} \pmod 1.$$

Поэтому

$$\phi_{\infty,\infty}(m, s, \chi_4) = \sum_{C} \frac{1}{(64C)^{2s}} \sideset{}{^*}\sum_{D \pmod{64C}} \chi_4(D) e\left(\frac{mD}{64C}\right).$$

Внутренняя сумма – это сумма Гаусса $g(\chi_4; 64C; m)$, определенная формулой (7.29). Используя для этой суммы представление (7.30), находим

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_4) = \frac{\tau(\chi_4)}{(64)^{2s}} \sum_{C=1}^{\infty} \frac{1}{C^{2s}} \sum_{d|(m,16C)} d\chi_4\left(\frac{16C}{d}\right)\chi_4\left(\frac{n}{d}\right)\mu\left(\frac{16C}{q}\right)$$

$$= \frac{\tau(\chi_4)}{(64)^{2s}} \sum_{d|m} d\chi_4\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{(16,d)}{d}\right)^{2s} \sum_{C=1}^{\infty} \frac{\chi_4\left(\frac{16C}{(16,d)}\right)\mu\left(\frac{16C}{(16,d)}\right)}{C^{2s}}.$$

Заметим, что $\chi_4\left(\frac{16C}{(16,d)}\right) = 0$ во всех случаях кроме $\frac{(16,d)}{d} = 1$. Таким образом, мы можем предположить, что $d \equiv 0 \pmod{16}$ и

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_4) = \frac{\tau(\chi_4)}{(64)^{2s}} \sum_{\substack{d|m \\ d\equiv 0 \pmod{16}}} d\chi_4\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{16}{d}\right)^{2s} \sum_{C=1}^{\infty} \frac{\chi_4(C)\,\mu(C)}{C^{2s}}$$

$$= \frac{\tau(\chi_4)}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m) \sum_{d|\frac{m}{16}} \chi_4\left(\frac{m/16}{d}\right)\frac{16d^{-2s+1}}{L(\chi_4,2s)} = \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right).$$

□

Лемма 7.4.7. *Пусть* $N = 64$ *и* $\mathfrak{a} = 0$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m,s,\chi_4) = \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right),$$

$$\phi_{0,1/2}(m,s,\chi_4) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_8(m)t\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right), \tag{7.80}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{4u}}(m,s,\chi_4) = 4\delta_4(m)e\left(\frac{mu}{16}\right)\frac{s(m)}{16^{2s}}, \quad u = 1,3,$$

$$\phi_{0,\frac{1}{8u}}(m,s,\chi_4) = e\left(\frac{mu}{8}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad u = 1,3,5,7, \tag{7.81}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{16u}}(m,s,\chi_4) = e\left(\frac{mu}{4}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad u = 1,3, \tag{7.82}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{32}}(m,s,\chi_4) = e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}},$$

$$\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_4) = \frac{s(m)}{8^{2s}}. \tag{7.83}$$

Лемма 7.4.8. *Пусть* $N = 16$ *и* $\mathfrak{a} = 0$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m,s,\chi_4) = \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right), \tag{7.84}$$

$$\phi_{0,1/2}(m,s,\chi_4) = \frac{2}{8^{2s}}\delta_2(m)t\left(\frac{m}{2}\right) - \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right), \tag{7.85}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{4u}}(m,s,\chi_4) = e\left(\frac{mu}{4}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}}, \quad u = 1,3, \tag{7.86}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_4)=e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}},$$

$$\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_4)=\frac{s(m)}{4^{2s}}. \tag{7.87}$$

Лемма 7.4.9. *Пусть* $N=16$ *и* $\mathfrak{a}=\infty$. *Тогда*

$$\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-1)\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-1)\frac{s(m)}{4^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,1/2}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-1)\phi_{0,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-1)e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4u}}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-u)\phi_{0,\frac{1}{4(-u)}}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-u)e\left(-\frac{mu}{4}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}},\quad u=1,3, \tag{7.88}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_4)=\phi_{0,1/2}(m,s,\chi_4)=\frac{2}{8^{2s}}\delta_2(m)t\left(\frac{m}{2}\right)-\frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right), \tag{7.89}$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_4)=\phi_{0,0}(m,s,\chi_4)=\frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right). \tag{7.90}$$

Лемма 7.4.10. *Пусть* $N=4$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m,s,\chi_4)=\frac{t(m)}{4^{2s}},\quad \phi_{0,\infty}(m,s,\chi_4)=\frac{s(m)}{2^{2s}}, \tag{7.91}$$

$$\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_4)=\chi_4(-1)\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_4), \tag{7.92}$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_4)=\phi_{0,0}(m,s,\chi_4). \tag{7.93}$$

Следствие 7.4.11. *При* $N=64$ *выполнено равенство:*

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m^2,s,\chi_4)=\phi_{0,\frac{1}{2}}(m^2,s,\chi_4)=0. \tag{7.94}$$

При $N=16$ *выполнено равенство:*

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8}}(m^2,s,\chi_4)=\phi_{0,\frac{1}{2}}(m^2,s,\chi_4)=0. \tag{7.95}$$

Доказательство. Равенство (7.94) является следствием формул (7.79), (7.77) и (7.80). Аналогично (7.95) следует из (7.89) и (7.85). □

7.5. Вклад непрерывного спектра

Применяя формулу следа Кузнецова (7.27) к суммам сумм Клоостермана в (7.54), мы находим, что для чётного n непрерывный спектр (7.28) может быть записан как сумма двух слагаемых:

$$C^1_{\text{even}}:=-\frac{2i\zeta(2s)}{2^s\pi^{s-1/2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}\sum_{\mathfrak{c}\text{ sing. }\Gamma_0(4)}\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}$$
$$\times\, l^{-2it}\overline{\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(l^2,1/2+it,\chi_4)}n_1^{2it}\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(n_1^2,1/2+it,\chi_4)dt \tag{7.96}$$

и

$$C^2_{\text{even}} := \frac{2\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing. } \Gamma_0(4)} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n_1^{2it} \phi_{0,\mathfrak{c}}(n_1^2, 1/2+it, \chi_4) dt. \quad (7.97)$$

Аналогично, применяя (7.55) для нечётного n, нам необходимо изучить

$$C^1_{\text{odd}} := \frac{8\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing. } \Gamma_0(64)} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n^{2it} \phi_{0,\mathfrak{c}}(n^2, 1/2+it, \chi_4) dt, \quad (7.98)$$

$$C^2_{\text{odd}} := \frac{4\zeta(2s)}{\pi^{s-1/2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing. } \Gamma_0(16)} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times (1-2^{-s}) l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n^{2it} \phi_{0,\mathfrak{c}}(n^2, 1/2+it, \chi_4) dt. \quad (7.99)$$

Для того чтобы вычислить суммы по l и $\mathfrak{c}$ в данных выражениях мы применим результаты из предыдущего параграфа. Чётный и нечётный случаи требуют отдельного рассмотрения.

7.5.1. Чётный случай.

Лемма 7.5.1. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *справедливо равенство:*

$$C^1_{even} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2} 2^s (1-2^{-2s})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it) L(\chi_4, 1-2it)} \left((1-2^{2it-s}) n_1^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n_1^2) + (1-2^{-2it-s}) n_1^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n_1^2) \right) dt.$$

Доказательство. Для $\Gamma_0(4)$ существует две неэквивалентные сингулярные параболические вершины: 0 и ∞.

Для начала рассмотрим $\mathfrak{c} = \infty$. Применяя (7.93), (7.74), (7.13) с $z := s - 2it$ и $s := -2it$, мы вычислим сумму по l в (7.96):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,\infty}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n_1^{2it} \phi_{\infty,\infty}(n_1^2, 1/2+it, \chi_4) = \frac{|\tau(\chi_4)|^2}{16} \frac{1-2^{-2it-s}}{1-2^{-2s}} n_1^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n_1^2) \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s) L(\chi_4, 1+2it) L(\chi_4, 1-2it)}.$$

Теперь рассмотрим случай $\mathfrak{c} = 0$. Используя (7.92), (7.73), (7.13) с $z := s + 2it$ $s := 2it$, находим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,0}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n_1^{2it} \phi_{\infty,0}(n_1^2, 1/2+it, \chi_4)$$
$$= \frac{1}{4} \frac{1-2^{2it-s}}{1-2^{-2s}} n_1^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n_1^2) \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)}.$$

Для завершения доказательства осталось просуммировать два последних выражения и заметить, что $|\tau(\chi_4)|^2 = 4$. □

Лемма 7.5.2. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *выполнено равенство:*

$$C_{even}^2 = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}(1-2^{-2s})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)}$$
$$\times \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} \left((1-2^{-2it-s})(2n_1)^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n_1^2) + (1-2^{2it-s})(2n_1)^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n_1^2) \right) dt.$$

Доказательство. Также как и в предыдущей лемме сумма по $\mathfrak{c}$ в (7.97) содержит только два слагаемых: 0 и ∞.

Начнем с $\mathfrak{c} = \infty$. Применяя (7.93), (7.91), (7.74), (7.73), (7.13) с $z := s - 2it$ и $s := -2it$, находим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,\infty}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n_1^{2it} \phi_{0,\infty}(n_1^2, 1/2+it, \chi_4)$$
$$= \frac{\overline{\tau(\chi_4)}}{2^{3-2it}} \frac{1-2^{-2it-s}}{1-2^{-2s}} n_1^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n_1^2) \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)}.$$

Теперь рассмотрим $\mathfrak{c} = 0$. Используя (7.92), (7.91), (7.74), (7.73), (7.13) с $z := s + 2it$ и $s := 2it$, получаем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s} l^{-2it} \overline{\phi_{\infty,0}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n_1^{2it} \phi_{0,0}(n_1^2, 1/2+it, \chi_4)$$
$$= \frac{\tau(\chi_4)\chi_4(-1)}{2^{3+2it}} \frac{1-2^{2it-s}}{1-2^{-2s}} n_1^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n_1^2) \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)}.$$

Для завершения доказательства просуммируем последние два выражения и заметим, что $\tau(\chi_4) = 2i$ и $\chi_4(-1) = -1$.

□

Применяя (7.11), а также леммы 7.5.1 и 7.5.2, получаем следующий результат.

Следствие 7.5.3. *При $Re s > 1$ справедливо выражение:*

$$C^1_{even} + C^2_{even} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} \left(n^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2) + n^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n^2) \right) dt. \quad (7.100)$$

Наконец, мы докажем справедливость полученных результатов в критической полосе, используя следующее утверждение.

Лемма 7.5.4. *Предположим, что функция $F(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет интегральное представление*

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} f(s, z) dz,$$

где у $f(s, z)$ есть два простых полюса в точках $z_1 = 1 - s$ и $z_2 = s - 1$. Тогда при $\operatorname{Re} s < 1$ получаем

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} f(s, z) dz + Res_{z_1} f(s, z) - Res_{z_2} f(s, z).$$

Доказательство. Предположим, что $1 < \operatorname{Re} s < 1 + \epsilon/2$ и $\operatorname{Im} s > 0$. Выберем новый контур интегрирования

$$\gamma_1 = (-i\infty, -i \operatorname{Im} s - i\epsilon) \cup C^-_\epsilon \cup (-i \operatorname{Im} s + i\epsilon, i \operatorname{Im} s - i\epsilon) \cup C^+_\epsilon \cup (i \operatorname{Im} s + i\epsilon, i\infty),$$

где C^-_ϵ – это полуокружность в левой полуплоскости радиуса ϵ, а C^+_ϵ – полуокружность в правой полуплоскости радиуса ϵ. Меняя контур интегрирования на γ_1, мы проходим полюса в точках z_1 и z_2. Таким образом,

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} f(s, z) dz + \operatorname{Res}_{z_1} f(s, z) - \operatorname{Res}_{z_2} f(s, z).$$

При $\operatorname{Re} s < 1$ мы можем изменить контур обратно на $\operatorname{Re} z = 0$. Доказательство завершено. □

Лемма 7.5.5. *При $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $s \neq 1/2$ выполнено равенство:*

$$C^1_{even} + C^2_{even} = M^C(n, s) + \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} \left(n^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2) + n^{-2it} \sigma_{2it}(\chi_4; n^2) \right) dt, \quad (7.101)$$

где выражение $M^C(n, s)$ определено формулой (7.8).

Доказательство. Выполняя замену переменных $z := 2it$ в (7.100), получаем

$$C^1_{\text{even}} + C^2_{\text{even}} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{\psi_D\left(\frac{z}{2i}\right) \sinh\left(\pi \frac{z}{2i}\right)}{z \cosh\left(\pi \frac{z}{2i}\right)} \times \frac{\zeta(s+z)\zeta(s-z)}{L(\chi_4, 1+z)L(\chi_4, 1-z)} \left(n^z \sigma_{-z}(\chi_4; n^2) + n^{-z} \sigma_z(\chi_4; n^2) \right) dt.$$

Тогда (7.101) следует из леммы 7.5.4 и формулы (7.67).

□

7.5.2. Нечётный случай.

Лемма 7.5.6. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *справедливо равенство:*

$$C^1_{odd} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}(1-2^{-2s})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \times \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} n^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2) \times \left((1-2^{2it-s})(1-2^{-2it-s}) + \frac{2^{-2it} + 2^{2it} - 2^{1-s}}{2^{2s}} \right) dt.$$

Доказательство. Разобьем сумму по l в (7.98) на две части:

$$\sum_{l=1}^{\infty} = \sum_{l \equiv 1 \pmod 2} + \sum_{l \equiv 0 \pmod 2},$$

так что $C^1_{\text{odd}} = C^{1,1}_{\text{odd}} + C^{1,2}_{\text{odd}}$.

Для начала рассмотри $C^{1,1}_{\text{odd}}$. По лемме 7.4.7 для нечётного n

$$\phi_{0,\mathfrak{c}}(n^2, 1/2 + it, \chi_4) = 0, \quad \mathfrak{c} = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}. \tag{7.102}$$

Если l нечётно, то из леммы 7.4.6 получаем

$$\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(l^2, 1/2 + it, \chi_4) = 0, \quad \mathfrak{c} = \infty, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{48}.$$

Осталось рассмотреть случай $\mathfrak{c} = \frac{1}{8u}$, $u = 1, 3, 5, 7$. Заметим, что для нечётного n выполнено равенство $e(n^2 u/8) = e(u/8)$. Следовательно, применяя (7.73), (7.75) и (7.81), находим

$$\sum_{(l,2)=1} \frac{1}{l^{s+2it}} \overline{\phi_{\infty,1/(8u)}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} n^{2it} \phi_{0,1/(8u)}(n^2, 1/2+it, \chi_4) = \frac{n^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2) \chi_4(-u) e(u/4)}{64 L(\chi_4, 1+2it) L(\chi_4, 1-2it)} \sum_{(l,2)=1} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}. \tag{7.103}$$

Используя формулу (7.13) с $z := s + 2it$, $s := 2it$, получаем

$$\sum_{(l,2)=1} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} = \left(1 - 2^{-s-2it}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}$$
$$= \left(1 - 2^{-s-2it}\right) \frac{1 - 2^{2it-s}}{1 - 2^{-2s}} \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s + 2it)\zeta(s - 2it)}{\zeta(2s)}. \quad (7.104)$$

Подставляя (7.104) в (7.103), суммируя по $u = 1, 3, 5, 7$ и применяя равенство

$$\sum_{u=1,3,5,7} \chi_4(-u)e(u/4) = -4i,$$

находим

$$C_{\text{odd}}^{1,1} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}(1 - 2^{-2s})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2)$$
$$\times n^{2it} \frac{\zeta(s + 2it)\zeta(s - 2it)}{L(\chi_4, 1 + 2it)L(\chi_4, 1 - 2it)} (1 - 2^{2it-s})(1 - 2^{-2it-s}) dt. \quad (7.105)$$

Теперь вычислим $C_{\text{odd}}^{1,2}$. Из (7.102) следует, что нам необходимо рассмотреть случаи: $\mathfrak{c} = \frac{1}{8u}$, $u = 1, 3, 5, 7$ и $\mathfrak{c} = \frac{1}{16}, \frac{1}{48}$, $\mathfrak{c} = \frac{1}{32}$, $\mathfrak{c} = \infty$.

Предположим что $\mathfrak{c} = \frac{1}{8u}$. Так как $e(n^2 u/8) = e(u/8)$ для нечётного n, применяя (7.73), (7.75) и (7.81), получаем

$$\sum_{l \equiv 0 \pmod 2} \frac{1}{l^{s+2it}} \overline{\phi_{\infty,1/(8u)}(l^2, 1/2 + it, \chi_4)} n^{2it} \phi_{0,1/(8u)}(n^2, 1/2 + it, \chi_4)$$
$$= \frac{n^{2it} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2) \chi_4(-u) e(u/8)}{64 L(\chi_4, 1 + 2it) L(\chi_4, 1 - 2it)} \sum_{l \equiv 0 \pmod 2} \frac{e(l^2 u/8) \sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}.$$

Заметим, что $e(m^2 u/2) = 1$ для чётного m и $e(m^2 u/2) = -1$ для нечётного m. Таким образом,

$$\sum_{l \equiv 0 \pmod 2} \frac{e(l^2 u/8) \sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} = \frac{1}{2^{s+2it}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e(l^2 u/2) \sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}$$
$$= \frac{1}{2^{s+2it}} \sum_{l \equiv 0 \pmod 2} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} - \frac{1}{2^{s+2it}} \sum_{l \equiv 1 \pmod 2} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}.$$

Так как

$$\sum_{u=1,3,5,7} \chi_4(-u)e(u/8) = 0,$$

вклад слагаемых с $\mathfrak{c} = \frac{1}{8u}$, $u = 1, 3, 5, 7$ в $C_{\text{odd}}^{1,2}$ равняется нулю.

Теперь предположим, что $\mathfrak{c} = \frac{1}{16u}$, $u = 1, 3$. Применяя (7.73), (7.76) и (7.82), получаем

$$\sum_{(l,2)=1} \frac{n^{2it}}{l^{s+2it}} \overline{\phi_{\infty,1/(16u)}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} \phi_{0,1/(16u)}(n^2, 1/2+it, \chi_4)$$
$$= \frac{n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4; n^2)\chi_4(-u)e(u/4)}{2^{5-2it}L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} \sum_{l\equiv 0 \pmod 2} \frac{e(l^2u/16)\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}. \quad (7.106)$$

Используя (7.11), находим

$$\sum_{l\equiv 0 \pmod 2} \frac{e(l^2u/16)\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} = \frac{1}{2^{s+2it}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e(l^2u/4)\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}$$
$$= \frac{1}{4^{s+2it}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} + \frac{e(u/4)}{2^{s+2it}} \sum_{(l,2)=1} \frac{\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}}.$$

Записывая сумму по l как

$$\sum_{(l,2)=1} = \sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l\equiv 0 \pmod 2}$$

и применяя (7.13) с $z := s + 2it$ и $s := 2it$, получаем

$$\sum_{l\equiv 0 \pmod 2} \frac{e(l^2u/16)\sigma_{2it}(\chi_4; l^2)}{l^{s+2it}} = \frac{1 - 2^{2it-s}}{2^{s+2it}(1-2^{-2s})}$$
$$\times \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)} \left(2^{-s-2it} + e(u/4)\left(1 - 2^{-s-2it}\right)\right). \quad (7.107)$$

Подставляя (7.107) в (7.106) и суммируя по $u = 1, 2$, мы показываем, что вклад слагаемых с $\mathfrak{c} = \frac{1}{16u}$, $u = 1, 2$ в $C_{\text{odd}}^{1,2}$ равен

$$\frac{n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4; n^2)}{16i} \frac{1 - 2^{2it-s}}{2^{2s+2it}(1-2^{-2s})} \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)}. \quad (7.108)$$

Далее рассмотрим $\mathfrak{c} = \frac{1}{32}$. Из следствия 7.4.11

$$\phi_{\infty,1/(32)}(l^2, 1/2+it, \chi_4) = 0.$$

Наконец, рассмотрим $\mathfrak{c} = \infty$. Применяя (7.78), (7.83), (7.73), (7.74), (7.13), находим

$$\sum_{l\equiv 0 \pmod 2} \frac{n^{2it}}{l^{s+2it}} \overline{\phi_{\infty,\infty}(l^2, 1/2+it, \chi_4)} \phi_{0,\infty}(n^2, 1/2+it, \chi_4) =$$
$$\frac{n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4; n^2)}{16i} \frac{1 - 2^{-2it-s}}{2^{2s-2it}(1-2^{-2s})} \frac{L(\chi_4, s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)}. \quad (7.109)$$

Комбинируя (7.98), (7.108), (7.109), приходим к следующему выражению:

$$C_{\text{odd}}^{1,2} = \frac{L(\chi_4, s)}{4\pi^{s-1/2}(1-2^{-2s})} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)} \sigma_{-2it}(\chi_4; n^2)$$
$$\times n^{2it} \frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4, 1+2it)L(\chi_4, 1-2it)} \left(\frac{2^{-2it} + 2^{2it} - 2^{1-s}}{2^{2s}}\right) dt. \quad (7.110)$$

Для завершения доказательства осталось лишь сложить (7.105) и (7.110).

□

Лемма 7.5.7. *При* $\operatorname{Re} s > 1$ *выполнено равенство:*

$$C_{odd}^2 = \frac{L(\chi_4,s)(1-2^{-s})}{4\pi^{s-1/2}(1-2^{-2s})}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2) \times n^{2it}\frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4,1+2it)L(\chi_4,1-2it)}\frac{2^{-2it}+2^{2it}-2^{1-s}}{2^s}dt.$$

Доказательство. Список сингулярных параболических вершин для $\Gamma_0(16)$ приведён в лемме 7.4.1.

Рассмотрим $\mathfrak{c} = 0$ и $\mathfrak{c} = 1/2$. Из (7.84) и следствия 7.4.11 для нечётного n получаем

$$\phi_{0,0}(n^2, 1/2+it, \chi_4) = \phi_{0,1/2}(n^2, 1/2+it, \chi_4) = 0.$$

Рассмотрим $\mathfrak{c} = \frac{1}{8}$. Из следствия 7.4.11

$$\phi_{\infty,1/8}(l^2, 1/2+it, \chi_4) = 0.$$

Рассмотрим $\mathfrak{c} = \frac{1}{4u}$, $u = 1, 3$. Применяя (7.88), (7.73), вычисляем сумму по l в (7.99)

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\overline{\phi_{\infty,1/(4u)}(l^2,1/2+it,\chi_4)}}{l^{s+2it}} = \frac{\chi_4(-u)}{4^{1-2it}L(\chi_4,1-2it)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)e(l^2u/4)}{l^{s+2it}}. \tag{7.111}$$

Последняя сумма может быть разбита на две части:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)e(l^2u/4)}{l^{s+2it}} = \frac{1}{2^{s+2it}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;4l^2)}{l^{s+2it}} + e(u/4)\sum_{l\equiv 1 \pmod 2}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)}{l^{s+2it}}.$$

Кроме того,

$$\sum_{l\equiv 1 \pmod 2}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)}{l^{s+2it}} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)}{l^{s+2it}} - \frac{1}{2^{s+2it}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;4l^2)}{l^{s+2it}}.$$

Заметим, что $\sigma_{2it}(\chi_4;4l^2) = \sigma_{2it}(\chi_4;l^2)$, и поэтому

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;l^2)e(l^2u/4)}{l^{s+2it}} = \left(\frac{1}{2^{s+2it}} + e(u/4)(1-2^{-s-2it})\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_4;4l^2)}{l^{s+2it}}. \tag{7.112}$$

Подставляя (7.112) в (7.111) и применяя (7.13) с $z := s+2it$ и $s := 2it$, находим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\overline{\phi_{\infty,1/(4u)}(l^2,1/2+it,\chi_4)}}{l^{s+2it}} = \left(\frac{1}{2^{s+2it}} + e(u/4)(1-2^{-s-2it})\right) \times \frac{\chi_4(-u)}{4^{1-2it}L(\chi_4,1-2it)}\frac{1-2^{2it-s}}{1-2^{-2s}}\frac{L(\chi_4,s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)}.$$

Используя (7.86), (7.73) и учитывая, что n нечётно, приходим к формуле:

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\overline{\phi_{\infty,1/(4u)}(l^2,1/2+it,\chi_4)}}{l^{s+2it}}n^{2it}\phi_{0,1/(4u)}(n^2,1/2+it,\chi_4)$$
$$=\left(\frac{1}{2^{s+2it}}+e(u/4)(1-2^{-s-2it})\right)n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2)$$
$$\times\frac{\chi_4(-u)e(u/4)}{16}\frac{1-2^{2it-s}}{1-2^{-2s}}\frac{L(\chi_4,s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4,1-2it)L(\chi_4,1+2it)}. \quad (7.113)$$

Рассмотрим $\mathfrak{c}=\infty$. Для вычисления суммы по l в этом случае применим (7.90), (7.74), а также (7.13) с $z:=s-2it$ и $s:=-2it$. Кроме того, используя (7.87), (7.73) и учитывая, что $\tau(\chi_4)=2i$, находим

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^s}l^{-2it}\overline{\phi_{\infty,\infty}(l^2,1/2+it,\chi_4)}n^{2it}\phi_{0,\infty}(n^2,1/2+it,\chi_4)$$
$$=\frac{-i}{2^{3+s-2it}}\frac{1-2^{-2it-s}}{1-2^{-2s}}n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2)\frac{L(\chi_4,s)\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{\zeta(2s)L(\chi_4,1+2it)L(\chi_4,1-2it)}. \quad (7.114)$$

Суммируя (7.114), (7.113) по $u=1,3$ и учитывая, что

$$\sum_{u=1,3}\chi_4(-u)=0,\quad \sum_{u=1,3}\chi_4(-u)e(u/4)=-2i,$$

мы доказываем лемму.

□

На основе двух предыдущих лемм доказываем следующие результаты.

Следствие 7.5.8. *При* $\operatorname{Re}s>1$ *выполнено следующее равенство:*

$$C^1_{odd}+C^2_{odd}=\frac{L(\chi_4,s)}{4\pi^{s-1/2}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}$$
$$\times\frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4,1+2it)L(\chi_4,1-2it)}n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2)dt.$$

Лемма 7.5.9. *При* $0<\operatorname{Re}s<1$, $s\neq 1/2$ *выполнено следующее равенство:*

$$C^1_{odd}+C^2_{odd}=\frac{1}{2}M^C(n,s)+\frac{L(\chi_4,s)}{4\pi^{s-1/2}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}$$
$$\times\frac{\zeta(s+2it)\zeta(s-2it)}{L(\chi_4,1+2it)L(\chi_4,1-2it)}n^{2it}\sigma_{-2it}(\chi_4;n^2)dt,$$

где $M^C(n,s)$ *определено формулой* (7.8).

Доказательство. Лемма доказывается аналогично лемме 7.5.5. □

7.6. Вклад дискретного и голоморфного спектра

Применяя формулу следа Кузнецова (7.27) к суммам сумм Клоостермана в (7.54) для чётного n, мы показываем, что дискретный спектр – это сумма двух скрученных моментов L-функций симметрического квадрата для форм Мааса уровня 4 с характером χ_4, а именно

$$D_1^{\text{even}} = -\frac{2^{1-s}\pi^{1/2-s}i}{1-2^{-2s}} \sum_{f\in H(4,\chi_4)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)} \rho_{f_\infty}(n^2/4)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}$$

и

$$D_2^{\text{even}} = \frac{2\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}} \sum_{f\in H(4,\chi_4)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)} \rho_{f_0}(n^2/4)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}.$$

Аналогично голоморфный спектр – это сумма двух скрученных моментов L-функций симметрического квадрата голоморфных параболических форм уровня 4 с характером χ_4, а именно

$$H_1^{\text{even}} = -\frac{2^{1-s}\pi^{1/2-s}i}{1-2^{-2s}} \sum_{\substack{k>1\\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{f\in H_k(4,\chi_4)} \rho_{f_\infty}\left(\frac{n^2}{4}\right)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}$$

и

$$H_2^{\text{even}} = \frac{2\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}} \sum_{\substack{k>1\\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{f\in H_k(4,\chi_4)} \rho_{f_0}\left(\frac{n^2}{4}\right)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}.$$

Теперь рассмотрим случай нечётного n. Главное отличие от предыдущего случая заключается в том, что мы получаем моменты L-функций уровней 64 и 16. Так, применяя формулу следа Кузнецова (7.27) к суммам сумм Клоостермана в (7.55), мы показываем, что дискретный спектр состоит из

$$D_1^{\text{odd}} = \frac{8\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}} \sum_{f\in H(64,\chi_4)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)} \rho_{f_0}(n^2)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}$$

и

$$D_2^{\text{odd}} = \frac{4\pi^{1/2-s}}{1+2^{-s}} \sum_{f\in H(16,\chi_4)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)} \rho_{f_0}(n^2)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}.$$

Аналогично голоморфный спектр – это сумма следующих двух слагаемых:

$$H_1^{\text{odd}} = \frac{8\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}} \sum_{\substack{k>1\\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{f\in H_k(64,\chi_4)} \rho_{f_0}(n^2)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)},$$

$$H_2^{\text{odd}} = \frac{4\pi^{1/2-s}}{1+2^{-s}} \sum_{\substack{k>1\\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{f\in H_k(16,\chi_4)} \rho_{f_0}(n^2)\overline{L(s,\text{sym}^2 f_\infty)}.$$

7.7. Доказательство основных теорем

7.7.1. Доказательство теорем 7.0.1 и 7.0.2. Диагональные главные члены в теоремах 7.0.1 и 7.0.2 вычислены в лемме 7.2.6. Для вычисления недиагональной части применим формулу следа Кузнецова (7.27) к суммам сумм Клоостермана в (7.54) и (7.55). Из лемм 7.5.5 м 7.5.9 следует, что вклад непрерывного спектра равен $M^C(n,s)+\mathfrak{C}(n,s)$ в случае чётного n и $1/2M^C(n,s)+1/2\mathfrak{C}(n,s)$ в случае нечётного n, где

$$\mathfrak{C}(n,s)=C^1_{\text{even}}+C^2_{\text{even}}-M^C(n,s).$$

Наконец, вклад дискретного и голоморфного спектров вычислен в §7.6. Для удобства записи мы выразим конечный результат в виде суммы моментов (7.6) при помощи следующих равенств:

$$D^1_{\text{even}}+H^1_{\text{even}}=-\frac{2^{1-s}\pi^{1/2-s}i}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_\infty(n^2/4,4,s),$$

$$D^2_{\text{even}}+H^2_{\text{even}}=\frac{2\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_0(n^2/4,4,s),$$

$$D^1_{\text{odd}}+H^1_{\text{odd}}=\frac{8\pi^{1/2-s}}{1-2^{-2s}}\mathfrak{M}_0(n^2,64,s),$$

$$D^2_{\text{odd}}+H^2_{\text{odd}}=\frac{4\pi^{1/2-s}}{1+2^{-s}}\mathfrak{M}_0(n^2,16,s).$$

7.7.2. Главные члены в центральной точке. В завершении доказательства покажем, что главные члены в теоремах 7.0.1 и 7.0.2 голоморфны в центральной точке.

Лемма 7.7.1. *При чётном n выполнено следующее равенство:*

$$\begin{aligned}M^C(n,1/2)+M^D_{even}(n,1/2)=&\\ &\frac{\sigma_{-1/2}(\chi_4;n^2)+n^{-1}\sigma_{1/2}(\chi_4;n^2)}{2L(\chi_4,3/2)}\int_0^\infty\omega(y)\\ \times\left(\log|y^2-n^2/4|+\frac{\pi}{2}sgn(y-n/2)-2\frac{L'(\chi_4,3/2)}{L(\chi_4,3/2)}-\log(2\pi)+3\gamma\right)dy&\\ -\frac{\sigma'_{-1/2}(\chi_4;n^2)-n^{-1}\sigma'_{1/2}(\chi_4;n^2)+2\log(n)n^{-1}\sigma_{1/2}(\chi_4;n^2)}{2L(\chi_4,3/2)}\int_0^\infty\omega(y)dy.&\end{aligned}$$

Доказательство. Применяя функциональное уравнение для дзета-функции Римана и для гамма функции, получаем

$$\zeta(2u)\Gamma(u)=(2\pi)^{2u}\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\zeta(1-2u). \tag{7.115}$$

Из (7.7), (7.8) и (7.115) следует, что

$$M^C(n,1/2+u)+M^D_{\text{even}}(n,1/2+u)=$$
$$\zeta(1+2u)\frac{\sigma_{-1/2-u}(\chi_4;n^2)+n^{-1-2u}\sigma_{1/2+u}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,3/2+u)}\int_0^\infty\omega(y)dy$$
$$+\zeta(1-2u)(2\pi)^u\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\frac{\sigma_{-1/2+u}(\chi_4;n^2)+n^{-1+2u}\sigma_{1/2-u}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,3/2-u)}$$
$$\times\sqrt{2}\Bigg(\sin(\pi/4+\pi u/2)\int_0^{n/2}\omega(y)\left(\frac{n^2}{4}-y^2\right)^{-u}dy$$
$$+\cos(\pi/4+\pi u/2)\int_{n/2}^\infty\omega(y)\left(y^2-\frac{n^2}{4}\right)^{-u}dy\Bigg).$$

Данное выражение голоморфно в $u=0$. Поэтому устремляя u к нулю и применяя правило Лопиталя, мы завершаем доказательство леммы. □

Лемма 7.7.2. *Для нечётного n выполнено равенство:*

$$\frac{1}{2}M^C(n,1/2)+M^D_{odd}(n,1/2)=\frac{\sigma_{-1/2}(\chi_4;n^2)}{2L(\chi_4,3/2)}\int_0^\infty\omega(y)\times$$
$$\left(\log|y^2-n^2/4|+\frac{\pi}{2}sgn(y-n/2)-2\frac{L'(\chi_4,3/2)}{L(\chi_4,3/2)}-\log(2\pi)+3\gamma\right)dy$$
$$-\frac{\sigma'_{-1/2}(\chi_4;n^2)}{2L(\chi_4,3/2)}\int_0^\infty\omega(y)dy.$$

Доказательство. Применяя (7.8), (7.10), (7.12) и (7.115), получаем

$$\frac{1}{2}M^C(n,1/2+u)+M^D_{\text{odd}}(n,1/2+u)=$$
$$\zeta(1+2u)\frac{\sigma_{-1/2-u}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,3/2+u)}\int_0^\infty\omega(y)dy$$
$$+\zeta(1-2u)(2\pi)^u\frac{\Gamma(1-2u)}{\Gamma(1-u)}\frac{\sigma_{-1/2+u}(\chi_4;n^2)}{L(\chi_4,3/2-u)}$$
$$\times\sqrt{2}\Bigg(\sin(\pi/4+\pi u/2)\int_0^{n/2}\omega(y)\left(\frac{n^2}{4}-y^2\right)^{-u}dy$$
$$+\cos(\pi/4+\pi u/2)\int_{n/2}^\infty\omega(y)\left(y^2-\frac{n^2}{4}\right)^{-u}dy\Bigg).$$

Данное выражение голоморфно в $u=0$. Таким образом, устремляя u к нулю и применяя правило Лопиталя, мы доказываем требуемый результат. □

ГЛАВА 8

Точная формула для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса

Основной результат данной главы – точная формулу для второго момента L-функций симметрического квадрата форм Мааса (0.20). Пусть

$$\mathcal{M}_2(h;u,v) := \sum_j h(t_j)\alpha_j L(\mathrm{sym}^2 u_j, s_-)L(\mathrm{sym}^2 u_j, s_+), \tag{8.1}$$

где α_j – нормализующий множитель (0.23),

$$s_+ = 1/2 + u + v, \quad s_- = 1/2 + u - v, \tag{8.2}$$

и $h(t)$ – функция, удовлетворяющая условиям:

C1: $h(t)$ чётная;

C2: $h(t)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im}(t)| < \Delta$ для некоторого $\Delta > 1/2$;

C3: $h(t)$ быстро убывает, а именно $h(t) \ll (1+|t|)^{-2-\epsilon}$ в полосе $|\operatorname{Im}(t)| < \Delta$;

C4: $h(\pm(m+1/2)i) = 0$ при $m = 0, 1, \dots M-1$, где $0 < M < \Delta - 1/2$.

Обозначим через $\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v)$ четвёртый момент дзета функции Римана

$$\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v) \;=\; \frac{\zeta(s_+)\zeta(s_-)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(r)\zeta(s_+ + 2ir)\zeta(s_+ - 2ir)\zeta(s_- + 2ir)\zeta(s_- - 2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2}dr. \tag{8.3}$$

Пусть $H_k^*(M,\chi_{-4})$ – ортонормированный базис голоморфных новых форм Гекке нечётного веса $k > 0$, уровня M и с характером χ_{-4}. Пусть $B_1^*(M,\chi_{-4})$ – ортонормированный базис новых форм Гекке-Мааса веса 1, уровня $M \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ и с характером χ_{-4}. Пусть $1/4 + t_f^2$ – собственное значение оператора Лапласа для функции $f \in B_1^*(M,\chi_{-4})$.

Для параболических вершин $\mathfrak{b} = \infty$ и $\mathfrak{b} = 0$ группы $\Gamma_0(N)$ с $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ положим

$$\mathfrak{M}_{\infty,\mathfrak{b}}(N,u,v) = \mathfrak{M}^{hol}_{\infty,\mathfrak{b}}(N,u,v) + \mathfrak{M}^{disc}_{\infty,\mathfrak{b}}(N,u,v), \tag{8.4}$$

где голоморфная и дискретная части определяются как

$$\mathfrak{M}^{hol}_{\infty,\infty}(N,u,v) :=$$
$$\sum_{\substack{k>1\\ k \text{ odd}}} \psi_H(k)\Gamma(k) \sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} \sum_{f\in H_k^*(M,\chi_{-4})} |\rho_{f_\infty}(1)|^2 L(\overline{\mathrm{sym}^2 f}, s_-)L(\mathrm{sym}^2 f, s_+)P_{\infty,\infty},$$

$$\mathfrak{M}^{hol}_{\infty,0}(N,u,v):=$$
$$\sum_{\substack{k>1\\ k\text{ odd}}}\psi_H(k)\Gamma(k)\sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\sum_{f\in H^*_k(M,\chi_{-4})}\varepsilon_0\overline{\rho_{f_\infty}(1)}^2L(\overline{\mathrm{sym}^2 f},s_-)L(\overline{\mathrm{sym}^2 f},s_+)P_{\infty,0},$$

$$\mathfrak{M}^{disc}_{\infty,\infty}(N,u,v):=\sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\sum_{f\in B^*_1(M,\chi_{-4})}|\rho_{f_\infty}(1)|^2\frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}L(\overline{\mathrm{sym}^2 f},s_-)L(\mathrm{sym}^2 f,s_+)P_{\infty,\infty},$$

$$\mathfrak{M}^{disc}_{\infty,0}(N,u,v):=\sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)}}\sum_{f\in B^*_1(M,\chi_{-4})}\varepsilon_0\overline{\rho_{f_\infty}(1)}^2\frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}L(\overline{\mathrm{sym}^2 f},s_-)L(\mathrm{sym}^2 f,s_+)P_{\infty,0}.$$

Заметим, что L-функции симметрического квадрата $L(\mathrm{sym}^2 f,s)$ определены в (8.23), коэффициент ε_0 связывает коэффициенты Фурье в параболических вершинах ∞ и 0 (см. (8.32)), а $P_{\infty,\infty}$, $P_{\infty,0}$ – некоторые сложные выражения, которые будут определены в (8.45) и (8.46).

Функции $\psi_D(t)$ и $\psi_H(k)$ – интегральные преобразования от $h(r)$, определённые в (8.84) и (8.89) с условиями (8.12), (8.8).

Наконец, непрерывная часть равна

$$\mathfrak{M}^{con}(F;u,v)=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\times$$
$$\frac{\zeta(s_++2it)\zeta(s_+-2it)\zeta(s_-+2it)\zeta(s_--2it)}{L(\chi_{-4},1+2it)L(\chi_{-4},1-2it)}F(t)dt. \quad (8.5)$$

Теорема 8.0.1. *При $0\leqslant \mathrm{Re}(u)<1/2, \mathrm{Re}(v)=0$ выполнено тождество*

$$\mathcal{M}_2(h;u,v)+\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v)=\mathcal{FMT}(u,v)+$$
$$\frac{L(\chi_{-4},s_+)L(\chi_{-4},s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\mathfrak{M}^{con}(F,u,v)+$$
$$\frac{(1-2^{-2s_+})^{-1}(1-2^{-2s_-})^{-1}}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}}\Bigg(-4i\mathfrak{M}_{\infty,\infty}(4,u,v)+2^{1-2u}\mathfrak{M}_{\infty,0}(4,u,v)+$$
$$\left(8-2^{3-s_-}-2^{3-s_+}\right)\mathfrak{M}_{\infty,0}(16,u,v)+16\mathfrak{M}_{\infty,0}(64,u,v)\Bigg), \quad (8.6)$$

где $\mathcal{FMT}(u,v)$ определена в (8.142), *s_- и s_+ заданы в* (8.2), *а определение $F=F(t)$ дано в* (8.136).

Теорема 8.0.1 является аналогом точной формулы для четвёртого момента L-функций форм Маасса, которая была получена Кузнецовым [**119**] и Мотохаши [**137**], [**141**]. Кроме того, спектральные тождества подобного вида были доказаны Биро [**43**].

Формула (8.6) также дополняет коллекцию различных формул взаимности, которые выражают один момент L-функций через другие моменты. Одна из самых известных

формул такого типа, доказанная Мотохаши [**139**] (см. также [**140**, теорему 4.2]), выражает четвёртый момент дзета функции Римана через третьи моменты $GL(2)$ автоморфных L-функций. Как и следовало ожидать, эти третьи моменты в свою очередь можно выразить через четвёртый момент дзета функции Римана, как показано Фроленковым в работе [**84**]. Обобщения данных результатов в различных направлениях были недавно получены Петровым [**156**], Блумером-Хампфрисом-Кханом-Милиновичем [**46**], Нельсоном [**146**], Ву [**180**], Балкановой-Фроленковым-Ву [**37**], Канеко [**109**].

Формулы взаимности известны также и для других семейств L-функций. Более того, в последнее время было получено огромное количество результатов в этом направлении.

Например, статьи Беттина [**42**], Конри [**66**] и Янга [**182**] содержат формулы взаимности для второго момента L-функций Дирихле.

Для семейства автоморфных L-функций подобные формулы можно классифицировать на два типа. Первый тип связан с L-функциями форм Мааса с большим спектральным параметром. Второй тип относится к скрученным моментам L-функций для форм большого уровня.

Пример формулы первого типа был недавно получен Блумером-Ли-Миллером [**50**] для случая $GL(4) \times GL(2)$ L-функций Ранкина-Сельберга. Другой пример можно найти в работе Хамфриса и Кхана [**95**], где спектральная формула взаимности доказана для смешанного момента в связи с приложениями к изучению арифметического квантового хаоса для форм Мааса. Кроме того, Кван [**120**] получил спектральную формулу взаимности для for $GL(3) \times GL(2)$ L-функций Ранкина-Сельберга.

Теперь перечислим некоторые недавние работы, содержащие формулы взаимности второго типа. Андерсен и Кирал [**21**] доказали формулу взаимности в аспекте уровня для скрученного второго момента $GL(2) \times GL(2)$ L-функций Ранкина-Сельберга. Этот результат был обобщен Захариасом [**183**] на случай произвольных числовых полей. Блумер-Кхан (см. [**47**] и [**48**]) доказали формулы взаимности для различных скрученных четвёртых моментов $GL(2)$ автоморфных L-функций. Результаты работы [**47**] были обобщены Нюнсом [**149**] на случай числовых полей. Кроме того, в работах Мьяо [**130**] и Яны-Нюнса [**106**] было получено обобщение на случай групп высшего ранга.

Стандартные приложения формул взаимности включают в себя оценки пропорции ненулевых центральных L-значений (см. [**50**], [**106**]) и нетривиальные оценки на L-функции (см. [**47**], [**46**], [**48**]). Кроме того, в некоторых случаях формулы взаимности позволяют доказать оценки на моменты L-функций в коротких интервалах. К сожалению, теорема 8.0.1 не приводит к каким-либо прямым следствиям, как поясняется в § 8.5.

Рассмотрим схему доказательства теоремы 8.0.1. Мы воспользуемся методом аналитического продолжения и будем изучать левую часть (8.6) в предположении, что $\mathrm{Re}(u) > 1, \mathrm{Re}(v) = 0$ (см. § 8.2). При выполнении данных условий можно записать L-функции в (8.1) через ряды Дирихле (0.20). После этого мы применим формулу следа Кузнецова к суммам коэффициентов Фурье форм Мааса. В результате, мы получим суммы сумм Клоостермана с весовой специальной функцией. Однако, также как и в работах [**137**] и [**141**], данная функция не является достаточно хорошей для наших целей. Поэтому необходимо модифицировать формулу суммирования Кузнецова с применением метода регуляризации, см. § 8.1.1. Такой подход позволяет получить выражение вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u+s}} \frac{S(m^2,n^2;q)}{q^{1-s}} \frac{ds}{(4\pi)^s}.$$

Разбивая суммы по m и n в арифметические прогрессии по модулю q, получаем произведение двух дзета функций Лерха, для каждой из которых мы применим функциональное уравнение. Таким образом, после некоторых преобразований мы сведём нашу задачу к изучению сумм

$$K(n,l;q) = \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2,q) e\left(\frac{nc+ld}{q}\right).$$

Данную двойную сумму можно выразить через суммы Гаусса, что позволяет вычислить её в явном виде. В результате, получается выражение для $K(n,l;q)$ в терминах обобщенных сумм Клоостермана (7.17). Таким образом, при $\mathrm{Re}(u) > 1, \mathrm{Re}(v) = 0$ левая часть формулы (8.6) записывается через суммы обобщенных сумм Клоостермана. На следующем шаге для каждой из этих сумм мы применим одну из версий формулы следа Кузнецова из § 8.1.3. Для этого необходимо проверить, что получившаяся весовая функция удовлетворяет условиям применимости формулы Кузнецова, а слагаемые, получившиеся после применения формулы следа, в правой части (8.6) сходятся абсолютно. Последний шаг – аналитическое продолжение формулы (8.6) из области $\mathrm{Re}(u) > 1, \mathrm{Re}(v) = 0$ в область $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/2, \mathrm{Re}(v) = 0$ описан в § 8.4. Комбинируя все полученные результаты, мы завершаем доказательство теоремы 8.0.1 в § 8.5.

8.1. Обозначения и основные теоретические сведения

8.1.1. Формула следа Кузнецова и регуляризация. В конце 1970х Кузнецов [**9**] открыл формулу, связывающую суммы коэффициентов Фурье форм Мааса и суммы сумм

Клоостермана. Предположим, что $m, n > 0$. Тогда для любой функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям (C1)-(C3), выполнено равенство

$$\sum_j h(t_j)\alpha_j\lambda_j(m)\lambda_j(n) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}}\frac{h(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2}dr$$
$$= \frac{\delta_{m,n}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)dr + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{S(m,n;q)}{q}\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q}\right), \quad (8.7)$$

где $\delta_{m,n} = 1$ при $m = n$ и $\delta_{m,n} = 0$ при $m \neq n$, а функция $\phi(x)$ задаётся как интегральное преобразование от $h(r)$:

$$\phi(x) = \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_{2ir}(x)\frac{rh(r)dr}{\cosh(\pi r)}. \quad (8.8)$$

Приблизительно в то же время аналогичный результат был доказан независмо Брюггеманом [**56**]. Заметим, что Брюггеман получил лишь формулу вида (8.7), в то время как Кузнецов доказал также и обратную формулу к (8.7), позволяющую вычислять суммы Клоостермана с заданной весовой функцией.

Можно показать (см. доказательство [**140**, теоремы 2.2]), что преобразование Меллина от функции $\phi(x)$ равно

$$\hat{\phi}(s) = \frac{2^s i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\frac{\Gamma(s/2+ir)}{\Gamma(1-s/2+ir)}dr.$$

Если функция $h(t)$ удовлетворяет не только условиям (C1)-(C3), но и условию (C4), тогда при $-1-2M < \operatorname{Re} s < 3/2$ выполнена оценка (см. [**26**, лемму 4]):

$$\hat{\phi}(s) \ll (1+|\operatorname{Im} s|)^{\operatorname{Re} s - 1}. \quad (8.9)$$

Применение формулы следа Кузнецова (8.7) – первый шаг в доказательстве точных формул для моментов L-функций форм Мааса. Далее необходимо просуммировать правую часть формулы (8.7) по m и по n. С этой целью полезно отделить арифметическую часть, а именно $S(m,n;q)$, от аналитической части $\phi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q}\right)$, что достигается путём применения обратного преобразования Меллина для функции $\phi(x)$. В результате, задача сводится к изучению множественных сумм и интегралов, содержащих обратное преобразование Меллина $\hat{\phi}(s)$. Оказывается, что оценка (8.9) недосточна для абсолютной сходимости полученного выражения. Этот факт впервые заметил Мотохаши в статье [**137**] (см. также [**141**]). Чтобы обойти данную проблему, можно регуляризовать формулу Кузнецова путём вычитания из неё нескольких формул следа Петерсона

$$\sum_{f\in H_{2l}(1)}\alpha_f\lambda_f(m)\lambda_f(n) = \delta_{m,n} + 2\pi i^{2l}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(m,n;c)}{c}J_{2l-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right), \quad (8.10)$$

$$\alpha_f := \frac{12\zeta(2)}{(2l-1)L(\operatorname{sym}^2 f, 1)}$$

для пространства голоморфных параболических форм уровня 1 и веса $2l$, где l принадлежит множеству $\mathcal{L}$, умноженных на специально выбранный коэффициент $c(l)$. Роль данного коэффициента заключается в том, чтобы сделать преобразование Меллина от весовой функции (которая появляется в суммах сумм Клоостермана после вычитания формулы Петерсона)

$$\Phi_{\mathcal{N}}(x) = \phi(x) - \sum_{l\in\mathcal{L}} c(l) J_{2l-1}(x),$$

убывающим быстрее чем (8.9). Данный процесс называется регуляризацией формулы Кузнецова. Впервые идея регуляризации была сформулирована Мёрти [**145**] (см. также заключительное замечание на стр. 18 в статье [**141**] относительно версий регуляризации Кузнецова и Мотохаши). Здесь мы опишем наиболее общую форму регуляризации формулы следа Кузнецова, предложенную Кузнецовым в [**13**, лемме 3.14].

Лемма 8.1.1. *Пусть $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_{\mathcal{N}}\}$ – конечное множество чисел, удовлетворяющих условию $1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_{\mathcal{N}}$. Предположим, что $h(\cdot)$ – функция, для которой выполнены условия (C1)-(C4). Определим $\mathcal{N}$ коэффициенты $c(l)$ как решения следующей системы линейных уравнений*

$$\sum_{l\in\mathcal{L}} (l-1/2)^{2m}(-1)^l c(l) = \frac{2(-1)^m}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^{2m+1} h(r)\tanh(\pi r)dr, \tag{8.11}$$

где $0 \leqslant m \leqslant \mathcal{N}-1$. Пусть

$$\Phi_{\mathcal{N}}(x) := \phi(x) - \sum_{l\in\mathcal{L}} c(l) J_{2l-1}(x). \tag{8.12}$$

Тогда для любых $m, n \geqslant 1$ выполнено тождество

$$\sum_j h(t_j)\alpha_j\lambda_j(m)\lambda_j(n) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(m)\sigma_{2ir}(n)}{(mn)^{ir}} \frac{h(r)}{|\zeta(1+2ir)|^2} dr =$$
$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(m,n;q)}{q} \Phi_{\mathcal{N}}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{q}\right) + \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in\mathcal{L}} (-1)^l c(l) \sum_{f\in H_{2l}(1)} \alpha_f \lambda_f(m)\lambda_f(n). \tag{8.13}$$

Кроме того, для $\max(-1-2M, 1-2l_1) < \operatorname{Re} s < 3/2$

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) \ll (1+|\operatorname{Im} s|)^{\operatorname{Re} s - 1 - \mathcal{N}}.$$

Если $0 < \operatorname{Re} s < 3/2$, *то*

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) = \hat{\phi}(s) - 2^{s-1}\sum_{l\in\mathcal{L}} c(l)\frac{\Gamma((s-1)/2+l)}{\Gamma(l+(1-s)/2)} =$$
$$\hat{\phi}(s) - \frac{2^s\cos(\pi s/2)}{2\pi}\sum_{l\in\mathcal{L}} (-1)^l c(l)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-l\right), \tag{8.14}$$

где

$$\hat{\phi}(s) = \frac{2^s \cos(\pi s/2)}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} r \tanh(\pi r) h(r) \Gamma(s/2 - ir) \Gamma(s/2 + ir) dr. \tag{8.15}$$

Множество весов $\mathcal{L}$ можно выбрать как подмножество $\{2, 3, 4, 5, 7\}$. Известно, что для таких значений l пространство голоморфных параболических форм пусто, а значит в правой части (8.13) не будет суммы по голоморфным параболическим формам.

Заметим, что правая часть (8.13) не содержит диагонального слагаемого с $\delta_{m,n}$, поскольку после комбинирования (8.7) и сумм формул следа Петерсона (8.10), слагаемые с $\delta_{m,n}$ сократились друг с другом благодаря нашего выбору $c(l)$ как в (8.11).

Кузнецов также доказал (см. [**13**, (3.130), (3.131)]) точную формулу для коэффициентов $c(l)$, заданных системой (8.11). А именно, он показал, что

$$(-1)^l c(l) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_l(r) r h(r) \tanh(\pi r) dr, \tag{8.16}$$

где

$$m_l(r) = \prod_{\substack{k \in \mathcal{L} \\ k \neq l}} \frac{r^2 + (k-1/2)^2}{(k-1/2)^2 - (l-1/2)^2} = \prod_{\substack{k \in \mathcal{L} \\ k \neq l}} \frac{r^2 + (k-1/2)^2}{(k-l)(k+l-1)}. \tag{8.17}$$

8.1.2. Голоморфные параболические формы, формы Мааса и ряды Эйзенштейна. Пусть χ – примитивный характер по модулю q_χ, где $q_\chi | N$. Обозначим через $S_k(N, \chi)$ – пространство голоморфных параболических форм веса $k > 0$, уровня N, с характером χ. Пространство $S_k(N, \chi)$ непустое только при $k \equiv \kappa (\mathrm{mod}\ 2)$, где κ – знак χ, для которого $\chi(-1) = (-1)^\kappa$.

Пусть $H_k(N, \chi)$ – ортонормированный базис голоморфных параболических форм веса $k > 0$, уровня N и с характером χ. Пусть $H_k^*(N, \chi)$ – ортонормированный базис новых форм Гекке веса $k > 0$, уровня N и с характером χ. Каждая форма $f \in H_k^*(N, \chi)$ является собственной функцией любого оператора Гекке T_n с собственным значением $\lambda_f(n)$. Выполнено равенство

$$\lambda_f(m) \lambda_f(n) = \sum_{d | (m,n)} \chi(d) \lambda \left(\frac{mn}{d^2} \right). \tag{8.18}$$

В соответствии с теорией Аткина-Лехнера

$$S_k(N, \chi) = \bigoplus_{\substack{LM = N \\ M \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ q_\chi)}} \bigoplus_{f \in H_k^*(M, \chi)} S_k^{\mathrm{old}}(L, \chi),$$

где

$$S_k^{\mathrm{old}}(L, \chi) = \mathrm{span}\{l^{k/2} f(lz) : l | L\}.$$

Для пространства $S_k^{\text{old}}(L,\chi)$ выберем ортонормированный базис, построенный в [**163**, теореме 9]. Таким образом, справедливо разложение

$$H_k(N,\chi) = \coprod_{\substack{LM=N \\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \coprod_{f\in H_k^*(M,\chi)} \coprod_{g|L} \{f^{(g)}(z) = \sum_{d|g} \xi_g(d) d^{k/2} f(dz)\}, \tag{8.19}$$

где коэффициенты $\xi_g(d)$ заданы явно на странице 2490 в [**157**], а $f \in H_k^*(M,\chi)$ является $L^2(\Gamma_0(N)\backslash H)$ нормализованной.

Рассмотрим сингулярную параболическую вершину $\mathfrak{a}$. Пусть $\sigma_{\mathfrak{a}}$ обозначает нормировочную матрицу для $\mathfrak{a}$. Тогда форма $f \in H_k(N,\chi)$ допускает разложение Фурье

$$f(\sigma_{\mathfrak{a}} z) i(\sigma_{\mathfrak{a}}, z)^{-k} = \sum_{m\geq 1} \frac{\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(m)}{\sqrt{m}} (4\pi m)^{k/2} e(mz),$$

где $i(\sigma_{\mathfrak{a}}, z) := cz + d$ для $\sigma_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$. Если f – это новая форма, то $\rho_{f_\infty}(n) = \rho_{f_\infty}(1)\lambda_f(n)$. Применяя определение $f^{(g)}$ в (8.19), получаем

$$\rho_{f_\infty^{(g)}}(n) = \sum_{d|(g,n)} \xi_g(d)\sqrt{d}\lambda_f(n/d)\rho_{f_\infty}(1). \tag{8.20}$$

Обозначим через $A_\kappa(N,\chi)$ пространство форм Мааса уровня N, характера χ и веса $\kappa \in \{0,1\}$ с условием $\chi(-1) = (-1)^\kappa$, а через $B_\kappa(N,\chi)$ обозначим ортонормированный базис этого пространства. Пусть $B_\kappa^*(N,\chi)$ – ортонормированный базис новых форм Гекке веса $\kappa \in \{0,1\}$, уровня N и с характером χ. Каждая форма $f \in B_\kappa^*(N,\chi)$ является собственной функцией любого оператора Гекке T_n с собственным значением $\lambda_f(n)$. В соответствии с теорией Аткина-Лехнера

$$A_\kappa(N,\chi) = \bigoplus_{\substack{LM=N \\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \bigoplus_{f\in B_\kappa^*(M,\chi)} A_\kappa^{\text{old}}(L,\chi),$$

где

$$A_\kappa^{\text{old}}(L,\chi) = \text{span}\{f(dz) : d|L\}.$$

Для пространства $A_\kappa^{\text{old}}(L,\chi)$ выберем базис, построенный в [**94**, лемме 3.15] и позволяющий записать разложение

$$B_\kappa(N,\chi) = \coprod_{\substack{LM=N \\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \coprod_{f\in B_\kappa^*(M,\chi)} \coprod_{d|L} \{f^{(d)} = \sum_{l|d} \xi_f(l,d) f(lz)\}, \tag{8.21}$$

где коэффициенты $\xi_f(l,d)$ заданы явно в [**94**, лемме 3.15], а $f \in B_\kappa^*(M,\chi)$ является $L^2(\Gamma_0(N)\backslash H)$ нормализованной. Заметим, что коэффициенты $\xi_f(l,d)$ в (8.21) свопадают с $\xi_g(d)$ в (8.19) , а именно $\xi_f(l,d) = \xi_d(l)$.

Пусть $1/4+t_f^2$ – собственное значение Лапласа для функции $f\in B_\kappa(N,\chi)$. Каждая $f\in B_\kappa(N,\chi)$ допускает разложение Фурье-Уиттекера следующего вида

$$f(\sigma_{\mathfrak{a}}z)e^{-i\kappa\arg i(\sigma_{\mathfrak{a}},z)}=\sum_{m\neq 0}\frac{\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(m)}{\sqrt{m}}W_{\frac{|m|}{m}\frac{\kappa}{2},it_f}(4\pi|m|y)e(mx).$$

Здесь $z=x+iy$ и $W_{\lambda,\mu}(z)$ – функция Уиттекера (см. [**89**, §9.22]). Если f – новая форма, то $\rho_{f_\infty}(n)=\rho_{f_\infty}(1)\lambda_f(n)$. Используя определение $f^{(d)}$ в (8.21), получаем

$$\rho_{f_\infty^{(d)}}(n)=\sum_{l|(d,n)}\xi_f(l,d)\sqrt{l}\lambda_f(n/l)\rho_{f_\infty}(1). \tag{8.22}$$

Для $f\in H_k^*(N,\chi)$ или $f\in B_\kappa^*(N,\chi)$, вещественного характера $\chi \pmod N$ и $\operatorname{Re}s>1$ ассоциированная L-функция симметрического квадрата определяется рядом (см. [**165**])

$$L(\operatorname{sym}^2 f,s)=\zeta^{(N)}(2s)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(l^2)}{l^s},\quad L(\overline{\operatorname{sym}^2 f},s)=\zeta^{(N)}(2s)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(l^2)}}{l^s}, \tag{8.23}$$

где

$$\zeta^{(N)}(z)=\prod_{p\nmid N}(1-p^{-z})^{-1}.$$

8.1.3. Формула следа Кузнецова для обобщенных сумм Клоостермана. Запишем формулу следа Кузнецова для обобщенных сумм Клоостермана (7.17) из §7.1.5. Мы рассматриваем только случай нечётных характеров (т.е. $\kappa=1$), необходимый для наших вычислений.

Предположим, что функция $\psi\in C^\infty$ удовлетворяет условиям

$$\psi(0)=\psi'(0)=0,\quad \psi^{(j)}(x)\ll(1+x)^{-2-\eta},\quad j=0,1,2,3 \tag{8.24}$$

для некоторого $\eta>0$.

Определим интегральные преобразования, которые возникают в формуле следа Кузнецова

$$\psi_H(k):=4i^k\int_0^\infty J_{k-1}(x)\psi(x)\frac{dx}{x}, \tag{8.25}$$

$$\psi_D(t):=\frac{2\pi it}{\sinh(\pi t)}\int_0^\infty(J_{2it}(x)+J_{-2it}(x))\psi(x)\frac{dx}{x}, \tag{8.26}$$

где $J_\nu(x)$ – это J-функция Бесселя порядка ν. Для $m,n>0$ положим

$$K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi):=\sum_{c\in C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(N)}\frac{S_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(m,n;c;\chi)}{c}\psi\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right). \tag{8.27}$$

Справедлива следующая формула следа Кузнецова для обобщенных сумм Клоостермана

$$K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi)=H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi)+D_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi)+C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi), \tag{8.28}$$

где

$$H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi):=\sum_{\substack{k>1\\ k\equiv 1 \pmod 2}}\sum_{f\in H_k(N,\chi)}\psi_H(k)\Gamma(k)\overline{\rho_{f_{\mathfrak{a}}}(m)}\rho_{f_{\mathfrak{b}}}(n), \tag{8.29}$$

$$D_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi) := \sum_{f\in B_\kappa(N,\chi)} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)} \overline{\rho_{f_\mathfrak{a}}(m)}\rho_{f_\mathfrak{b}}(n), \tag{8.30}$$

$$C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m,n,N;\psi) := \sum_{\mathfrak{c}\text{ sing.}} \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)} m^{-it}n^{it}\times$$
$$\overline{\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,1/2+it,\chi)}\phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(n,1/2+it,\chi)dt, \tag{8.31}$$

где $\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m,s,\chi)$ – коэффициенты Фурье (7.21), а суммирование в (8.31) ведётся по всем сингулярным параболическим вершинам $\mathfrak{c}$ группы $\Gamma=\Gamma_0(N)$ относительно характера χ.

Мы будем применять формулу Кузнецова (8.28) только для $\mathfrak{a}=\infty$, $\mathfrak{b}=\infty$ или 0. В этих случаях благодаря выбору специального базиса (8.19) и (8.21) можно записать (8.29) и (8.30) в терминах собственных значений Гекке $\lambda_f(n)$. Применяя (8.20), (8.22) и тождество [**158**, (6.9)] (см. также [**101**, (13.43)])

$$\rho_{f_0}(n) = \varepsilon_0\overline{\rho_{f_\infty}(n)}, \quad \text{with} \quad |\varepsilon_0|=1, \tag{8.32}$$

получаем

$$H_{\infty,\infty}(m,n,N;\psi) = \sum_{\substack{k>1\\ k\equiv 1 \pmod 2}} \sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \sum_{f\in H_k^*(M,\chi)} \sum_{g|L} \psi_H(k)\Gamma(k)\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(m)}\rho_{f_\infty^{(g)}}(n), \tag{8.33}$$

$$H_{\infty,0}(m,n,N;\psi) = \sum_{\substack{k>1\\ k\equiv 1 \pmod 2}} \sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \sum_{f\in H_k^*(M,\chi)} \sum_{g|L} \psi_H(k)\Gamma(k)\varepsilon_0\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(m)}\,\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(n)}, \tag{8.34}$$

где $\rho_{f_\infty^{(g)}}(n)$ заданы в (8.20) и

$$D_{\infty,\infty}(m,n,N;\psi) = \sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \sum_{f\in B_\kappa^*(M,\chi)} \sum_{d|L} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}\overline{\rho_{f_\infty^{(d)}}(m)}\rho_{f_\infty^{(d)}}(n), \tag{8.35}$$

$$D_{\infty,0}(m,n,N;\psi) = \sum_{\substack{LM=N\\ M\equiv 0 \pmod{q_\chi}}} \sum_{f\in B_\kappa^*(M,\chi)} \sum_{d|L} \frac{\psi_D(t_f)}{\cosh(\pi t_f)}\varepsilon_0\overline{\rho_{f_\infty^{(d)}}(m)}\,\overline{\rho_{f_\infty^{(d)}}(n)}, \tag{8.36}$$

где $\rho_{f_\infty^{(d)}}(n)$ заданы в (8.22). Заметим, что (8.34) и (8.36) совпадают с [**158**, (6.27),(6.25)].

Если d – чётная степень 2, положим $\delta_f(d,s) := 1$. Если d – нечётная степень 2, положим

$$\delta_f(d,s) := \frac{\lambda_f(2)}{2^{s/2}}, \quad \delta_{\overline{f}}(d,s) := \frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{s/2}}. \tag{8.37}$$

Наконец, пусть

$$P_{\infty,\infty} = P_{\infty,\infty}(s_-,s_+,L;f) := \sum_{g|L}\sum_{d_1|g}\sum_{d_2|g} \overline{\xi_g(d_1)}\xi_g(d_2)d_1^{\frac{1-s_-}{2}}d_2^{\frac{1-s_+}{2}}\delta_{\overline{f}}(d_1,s_-)\delta_f(d_2,s_+), \tag{8.38}$$

и

$$P_{\infty,0} = P_{\infty,0}(s_-,s_+,L;f) := \sum_{g|L}\sum_{d_1|g}\sum_{d_2|g} \overline{\xi_g(d_1)}\,\overline{\xi_g(d_2)}d_1^{\frac{1-s_-}{2}}d_2^{\frac{1-s_+}{2}}\delta_{\overline{f}}(d_1,s_-)\delta_{\overline{f}}(d_2,s_+).$$

Лемма 8.1.2. *Пусть $N = ML = 2^a$, $g|L$ и $f \in H_k^*(M, \chi_{-4})$ с $4|M$. Тогда*

$$\zeta^N(2s_-)\zeta^N(2s_+)\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(m^2)}\rho_{f_\infty^{(g)}}(n^2)}{m^{s_-}n^{s_+}} = |\rho_{f_\infty}(1)|^2 P_{\infty,\infty}L(\overline{sym^2 f}, s_-)L(sym^2 f, s_+), \quad (8.39)$$

$$\zeta^N(2s_-)\zeta^N(2s_+)\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(m^2)}\,\overline{\rho_{f_\infty^{(g)}}(n^2)}}{m^{s_-}n^{s_+}} = \overline{\rho_{f_\infty}(1)}^2 P_{\infty,0}L(\overline{sym^2 f}, s_-)L(\overline{sym^2 f}, s_+).$$

Доказательство. Подставляя (8.20) вместо $\rho_{f_\infty^{(g)}}(n^2)$ и $\rho_{f_\infty^{(g)}}(m^2)$, мы сводим задачу вычисления (8.39) к изучению

$$\zeta^N(2s_-)\zeta^N(2s_+)|\rho_f(1)|^2\sum_{d_1|g}\sum_{d_2|g}\overline{\xi_g(d_1)}\xi_g(d_2)\sqrt{d_1 d_2}$$
$$\times\sum_{\substack{m=1\\ m^2\equiv 0 \pmod{d_1}}}^{\infty}\sum_{\substack{n=1\\ n^2\equiv 0 \pmod{d_2}}}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(m^2/d_1)}\lambda_f(n^2/d_2)}{m^{s_-}n^{s_+}}. \quad (8.40)$$

Поскольку $g|L|N$ и N – степень двойки, d_1 и d_2 равны либо 2^{2j+1}, либо 2^{2j}. Предположим, что $d_1 = 2^{2j}$. В этом случае условие $m^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d_1)$ означает, что $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \sqrt{d_1})$. Поэтому

$$\zeta^N(2s_-)\sum_{\substack{m=1\\ m^2\equiv 0 \pmod{d_1}}}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(m^2/d_1)}}{m^{s_-}} = \frac{\zeta^N(2s_-)}{\sqrt{d_1^{s_-}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(m^2/d_1)}}{m^{s_-}} = \frac{L(\overline{\mathrm{sym}^2 f}, s_-)}{d_1^{s_-/2}}. \quad (8.41)$$

Если $d_1 = 2^{2j+1}$, то $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \sqrt{2d_1})$. Поскольку из (8.18) следует тождество $\lambda_f(2m) = \lambda_f(2)\lambda_f(m)$, то

$$\zeta^N(2s_-)\sum_{\substack{m=1\\ m^2\equiv 0 \pmod{d_1}}}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(m^2/d_1)}}{m^{s_-}} = \frac{\zeta^N(2s_-)}{\sqrt{2d_1^{s_-/2}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(2m^2)}}{m^{s_-}} = \frac{L(\overline{\mathrm{sym}^2 f}, s_-)\overline{\lambda_f(2)}}{\sqrt{2d_1^{s_-/2}}}. \quad (8.42)$$

Комбинируя (8.41) и (8.42), получаем

$$\zeta^N(2s_-)\sum_{\substack{m=1\\ m^2\equiv 0 \pmod{d_1}}}^{\infty}\frac{\overline{\lambda_f(m^2/d_1)}}{m^{s_-}} = L(\overline{\mathrm{sym}^2 f}, s_-)\delta_{\overline{f}}(d_1, s_-), \quad (8.43)$$

где $\delta_{\overline{f}}(d_1, s_1)$ определена в (8.37). Аналогично

$$\zeta^N(2s_+)\sum_{\substack{n=1\\ n^2\equiv 0 \pmod{d_2}}}^{\infty}\frac{\lambda_f(n^2/d_2)}{n^{s_+}} = L(\mathrm{sym}^2 f, s_-)\delta_f(d_2, s_+). \quad (8.44)$$

Подставляя (8.43) и (8.44) в (8.40), мы доказываем (8.39). Второе тождество доказывается аналогично. □

Такие же формулы справедливы и в случае форм Мааса, так как выражения (8.20) и (8.22) совпадают ввиду равенства $\xi_f(l,d)=\xi_d(l)$.

Когда L – степень 2 и $4|M$, мы можем вычислить $P_{\infty,\infty}$ и $P_{\infty,0}$ в явном виде через $\lambda_f(2)$, поскольку в данном случае необходимы только значения $\xi_g(d)$, где g и d – степени 2. Эти значения даны на стр. 2490 в работе **[157]**, а именно при $\nu\geqslant 1$

$$\xi_1(1)=1,\quad \xi_{2^\nu}(2^\nu)=\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)^{-1/2},\quad \xi_{2^\nu}(2^{\nu-1})=\frac{-\overline{\lambda_f(2)}}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)^{-1/2}$$

и равны нулю во всех остальных случаях. Поэтому слагаемые в T (8.38) не равны нулю только, когда d_1 и d_2 равны либо g, либо $g/2$. Таким образом, применяя (8.37) для g равного чётной степени 2 мы получаем

$$\sum_{d_1|g}\overline{\xi_g(d_1)}d_1^{\frac{1-s_-}{2}}\delta_{\overline{f}}(d_1,s_-)=g^{\frac{1-s_-}{2}}\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)^{1/2},$$

а для g равного нечётной степени 2

$$\sum_{d_1|g}\overline{\xi_g(d_1)})d_1^{\frac{1-s_-}{2}}\delta_{\overline{f}}(d_1,s_-)=g^{\frac{1-s_-}{2}}\frac{\frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{s_-/2}}-\frac{\lambda_f(2)}{2^{-s_-/2}}}{\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)^{1/2}}.$$

Поэтому

$$P_{\infty,\infty}=1+\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)\sigma^{ev}_{1-\frac{s_-+s_+}{2}}(L)+\frac{\left(\frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{s_-/2}}-\frac{\lambda_f(2)}{2^{-s_-/2}}\right)\left(\frac{\lambda_f(2)}{2^{s_+/2}}-\frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{-s_+/2}}\right)}{\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)}\sigma^{od}_{1-\frac{s_-+s_+}{2}}(L),\quad (8.45)$$

где

$$\sigma^{ev}_s(L)=\sum_{\substack{g|L\\ \log_2 g \text{ is even}}}g^s,\quad \sigma^{od}_s(L)=\sum_{\substack{g|L\\ \log_2 g \text{ is odd}}}g^s.$$

Аналогично

$$P_{\infty,0}=1+\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)\sigma^{ev}_{1-\frac{s_-+s_+}{2}}(L)+\frac{\left(\frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{s_-/2}}-\frac{\lambda_f(2)}{2^{-s_-/2}}\right)\left(\frac{\lambda_f(2)}{2^{s_+/2}}-\frac{\overline{\lambda_f(2)}}{2^{-s_+/2}}\right)}{\left(1-\frac{|\lambda_f(2)|^2}{2}\right)}\sigma^{od}_{1-\frac{s_-+s_+}{2}}(L).\quad (8.46)$$

8.1.4. Ряды Эйзенштейна для $\Gamma_0(4)$, $\Gamma_0(16)$ и $\Gamma_0(64)$. Для наших вычислений требуется рассмотреть только случай с уровнем $4,16,64$, параболическими вершинами $\infty,0$ и характером χ_{-4}. Более точно, в нашем доказательстве возникнут следующие суммы Клоостермана

$$K_{\infty,\infty}(m^2,n^2,4;\psi),\quad K_{\infty,0}(m^2,n^2,4;\psi),$$

$$K_{\infty,0}(m^2,n^2,16;\psi),\quad K_{\infty,0}(m^2,n^2,64;\psi).$$

После применения формулы Кузнецова, мы получим (8.31), а значит нам необходимы вычислить коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна для всех сингулярных параболических вершин, что было сделано в §7.4.3. Для удобства читателя выпишем здесь конечный результат.

Лемма 8.1.3. *Следующие параболические вершины группы* $\Gamma_0(4)$ *являются сингулярными относительно* χ_{-4}*:*

$$0, \infty.$$

Следующие параболические вершины группы $\Gamma_0(16)$ *являются сингулярными относительно* χ_{-4}*:*

$$0, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12, \infty.$$

Следующие параболические вершины группы $\Gamma_0(64)$ *являются сингулярными относительно* χ_{-4}*:*

$$0, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12, 1/16, 1/24, 1/32, 1/40, 1/48, 1/56, \infty.$$

Введём обозначения

$$\delta_n(m) := \begin{cases} 1 & \text{if } n|m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$$s(m) := \frac{\sigma_{1-2s}(\chi_{-4}; m)}{L(\chi_{-4}, 2s)}, \tag{8.47}$$

$$t(m) := \frac{\tau(\chi_{-4})\sigma_{2s-1}(\chi_{-4}; m)m^{1-2s}}{L(\chi_{-4}, 2s)}, \tag{8.48}$$

где $\tau(\chi_{-4})$– сумма Гаусса равная $2i$.

Лемма 8.1.4. *Пусть* $N = 64$ *и* $\mathfrak{a} = \infty$*. Тогда*

$$\phi_{\infty,0}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \tag{8.49}$$

$$\phi_{\infty,1/2}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4\Upsilon}}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-\Upsilon)e\left(-\frac{m\Upsilon}{4}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad \Upsilon = 1, 3, \tag{8.50}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8\Upsilon}}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-\Upsilon)e\left(-\frac{m\Upsilon}{8}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad \Upsilon = 1, 3, 5, 7, \tag{8.51}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{16\Upsilon}}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-\Upsilon)4\delta_4(m)e\left(-\frac{m\Upsilon}{16}\right)\frac{s(m)}{16^{2s}}, \quad \Upsilon = 1, 3, \tag{8.52}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m, s, \chi_{-4}) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_8(m)t\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right),$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m, s, \chi_{-4}) = \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right). \tag{8.53}$$

Лемма 8.1.5. *Пусть* $N = 64$ *и* $\mathfrak{a} = 0$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right), \tag{8.54}$$

$$\phi_{0,1/2}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{8}{(32)^{2s}}\delta_{8}(m)t\left(\frac{m}{8}\right) - \frac{16}{(64)^{2s}}\delta_{16}(m)t\left(\frac{m}{16}\right),$$

$$\phi_{0,\frac{1}{4\Upsilon}}(m,s,\chi_{-4}) = 4\delta_4(m)e\left(\frac{m\Upsilon}{16}\right)\frac{s(m)}{16^{2s}}, \quad \Upsilon = 1,3, \tag{8.55}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{8\Upsilon}}(m,s,\chi_{-4}) = e\left(\frac{m\Upsilon}{8}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad \Upsilon = 1,3,5,7, \tag{8.56}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{16\Upsilon}}(m,s,\chi_{-4}) = e\left(\frac{m\Upsilon}{4}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}}, \quad \Upsilon = 1,3, \tag{8.57}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{32}}(m,s,\chi_{-4}) = e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{8^{2s}},$$

$$\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{s(m)}{8^{2s}}. \tag{8.58}$$

Лемма 8.1.6. *Пусть* $N = 16$ *и* $\mathfrak{a} = 0$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right), \tag{8.59}$$

$$\phi_{0,1/2}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{2}{8^{2s}}\delta_2(m)t\left(\frac{m}{2}\right) - \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right),$$

$$\phi_{0,\frac{1}{4\Upsilon}}(m,s,\chi_{-4}) = e\left(\frac{m\Upsilon}{4}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}}, \quad \Upsilon = 1,3, \tag{8.60}$$

$$\phi_{0,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_{-4}) = e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}},$$

$$\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{s(m)}{4^{2s}}. \tag{8.61}$$

Лемма 8.1.7. *Пусть* $N = 16$ *и* $\mathfrak{a} = \infty$. *Тогда*

$$\phi_{\infty,0}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)\phi_{0,\infty}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)\frac{s(m)}{4^{2s}}, \tag{8.62}$$

$$\phi_{\infty,1/2}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_4(-1)\phi_{0,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)e\left(\frac{m}{2}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}},$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{4\Upsilon}}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_{-4}(-\Upsilon)\phi_{0,\frac{1}{4(-\Upsilon)}}(m,s,\chi_{-4}) = \chi_{-4}(-\Upsilon)e\left(-\frac{m\Upsilon}{4}\right)\frac{s(m)}{4^{2s}}, \quad \Upsilon = 1,3, \tag{8.63}$$

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8}}(m,s,\chi_{-4}) = \phi_{0,1/2}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{2}{8^{2s}}\delta_2(m)t\left(\frac{m}{2}\right) - \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right),$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m,s,\chi_{-4}) = \phi_{0,0}(m,s,\chi_{-4}) = \frac{4}{(16)^{2s}}\delta_4(m)t\left(\frac{m}{4}\right). \tag{8.64}$$

Лемма 8.1.8. *Пусть* $N = 4$. *Тогда*

$$\phi_{0,0}(m, s, \chi_{-4}) = \frac{t(m)}{4^{2s}}, \quad \phi_{0,\infty}(m, s, \chi_{-4}) = \frac{s(m)}{2^{2s}}, \tag{8.65}$$

$$\phi_{\infty,0}(m, s, \chi_{-4}) = \chi_{-4}(-1)\phi_{0,\infty}(m, s, \chi_{-4}), \tag{8.66}$$

$$\phi_{\infty,\infty}(m, s, \chi_{-4}) = \phi_{0,0}(m, s, \chi_{-4}). \tag{8.67}$$

Следствие 8.1.9. *При* $N = 64$ *выполнено равенство*

$$\phi_{\infty,\frac{1}{32}}(m^2, s, \chi_{-4}) = \phi_{0,\frac{1}{2}}(m^2, s, \chi_{-4}) = 0. \tag{8.68}$$

При $N = 16$ *выполнено равенство*

$$\phi_{\infty,\frac{1}{8}}(m^2, s, \chi_{-4}) = \phi_{0,\frac{1}{2}}(m^2, s, \chi_{-4}) = 0. \tag{8.69}$$

8.2. Точная формула для больших значений u

Рассмотрим второй момент L-функций симметрического квадрата

$$\mathcal{M}_2(h; u, v) := \sum_j h(t_j)\alpha_j L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2 + u - v)L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2 + u + v). \tag{8.70}$$

Введём обозначение

$$R(u, v) := \frac{\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(1/2 - u + v)}{(4\pi)^{1/2-u+v}}\zeta(1 + 2u)\zeta(1 + 2v)\zeta(1 + 2u + 2v)\frac{L(\chi_{-4}, 1/2 + u - v)}{L(\chi_{-4}, 3/2 + u + v)}, \tag{8.71}$$

$$I(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha_1)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s)\left(\cos(\pi v) + \sin(\pi(u + s))\right) \times \Gamma(1/2 - u + v - s)\Gamma(1/2 - u - v - s)x^s ds, \tag{8.72}$$

где $\max(-1 - 2M, 1 - 2l_1) < \alpha_1 < 1/2 - \mathrm{Re}(u)$. Положим

$$\psi(x) := x^{2u} I(x). \tag{8.73}$$

Теорема 8.2.1. *Пусть* $1 < \mathrm{Re}(u) < 1/2 + \min(1 + 2M, 2l_1 - 1), \mathrm{Re}(v) = 0$. *Тогда*

$$\mathcal{M}_2(h; u, v) = -\mathcal{M}_4^{(c)}(h; u, v) + R(u, v) + R(u, -v) + \frac{\zeta(2s_+)\zeta(2s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\Bigg(-4iK_{\infty,\infty}(m^2, n^2, 4; \psi) + 2^{1-2u}K_{\infty,0}(m^2, n^2, 4; \psi) + \left(8 - 2^{3-s_-} - 2^{3-s_+}\right)K_{\infty,0}(m^2, n^2, 16; \psi) + 16K_{\infty,0}(m^2, n^2, 64; \psi)\Bigg), \tag{8.74}$$

где s_+, s_- *определены в* (8.2), $\mathcal{M}_4^{(c)}(h; u, v)$ *в* (8.3), *а* $K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m, n, N; \psi)$ *в* (8.27).

Доказательство. Для вычисления (8.70) воспользуемся представлением в виде ряда (0.20) для L-функций и применим регуляризованную формулу следа Кузнецова (8.13) с $\mathcal{L} \subseteq \{2,3,4,5,7\}$ (что соответствует весам $\{4,6,8,10,14\}$). В результате,

$$\mathcal{M}_2(h;u,v) = -\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v) + \zeta(2s_-)\zeta(2s_+)TS(u,v), \tag{8.75}$$

$$TS(u,v) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(m^2,n^2;q)}{q} \Phi_{\mathcal{N}}\left(\frac{4\pi mn}{q}\right). \tag{8.76}$$

Заметим, что $\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v)$ получено с применением формулы (0.6).

Следующий шаг – показать, что условия теоремы гарантируют абсолютную сходимость тройной суммы в (8.76). Так, оценивая (8.8) по модулю, мы показываем, что $\phi(x) \ll x^{-1/2}$. Сдвигая контур интегрирования в (8.8) на прямую $\mathrm{Im}(r) = \delta = -\Delta + \epsilon$ и оценивая получившийся интеграл по модулю, получаем оценку $\phi(x) \ll x^{2\delta}$. Комбинируя две доказанные оценки на функцию $\phi(x)$ и применяя стандартные оценки для функции Бесселя $J_{2l-1}(x) \ll \min(x^{2l-1}, x^{-1/2})$, мы приходим к выводу, что при $c > 1$ (см. (8.12))

$$\Phi_{\mathcal{N}}(x) \ll \min(x^c, x^{-1/2}). \tag{8.77}$$

Применяя (0.9) и (8.77), делаем вывод, что тройная сумма в правой части (8.75) сходится абсолютно при $\mathrm{Re}(u) > 1$. Используя обратное преобразование Меллина для функции $\Phi_N(x)$, получаем

$$TS(u,v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u+s}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(m^2,n^2;q)}{q^{1-s}} \frac{ds}{(4\pi)^s}, \tag{8.78}$$

где $-1/2 - \mathrm{Re}(u) < \alpha < -1/2$. Эти ограничения на α достаточны для абсолютной сходимости сумм и интегралов в (8.78). Следовательно, мы можем изменить порядок суммирования в (8.78) так, чтобы сумма по q была внешней. После этого разобьём суммы по m и n на арифметические прогрессии по модулю q, что позволит применить (0.10) и получить дзета функции Лерха

$$\sum_{m \equiv c \pmod q} \sum_{n \equiv d \pmod q} \frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u+s}} = \frac{1}{q^{1+2u+2s}} \zeta\left(\frac{c}{q}, 0; 1/2+u-v+s\right) \zeta\left(\frac{d}{q}, 0; 1/2+u+v+s\right).$$

Таким образом, (8.78) можно записать как

$$TS(u,v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+2u+s}} \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q) \times \zeta\left(\frac{c}{q}, 0; 1/2+u-v+s\right) \zeta\left(\frac{d}{q}, 0; 1/2+u+v+s\right) \frac{ds}{(4\pi)^s}.$$

Сдвигая контур интегрирования влево, а именно на прямую $\mathrm{Re}(s) = \alpha_1$ с $\max(-1-2M, 1-2l_1) < \alpha_1 < 1/2 - \mathrm{Re}(u)$, мы пройдём полюса дзета функции Лерха в точках $s_1 = 1/2 - u + v$ и $s_2 = 1/2 - u - v$. Обозначим вклад от этих полюсов через $R_1(u,v)$ и $R_1(u,-v)$, соответственно. Тогда

$$TS(u,v) = R_1(u,v) + R_1(u,-v) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha_1)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s) \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+2u+s}} \times \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{c}{q},0;1/2+u-v+s\right)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1/2+u+v+s\right)\frac{ds}{(4\pi)^s}. \quad (8.79)$$

Вычисляя вычет в точке $s_1 = 1/2 - u + v$, получаем

$$R_1(u,v) = \frac{\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(1/2-u+v)}{(4\pi)^{1/2-u+v}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{5/2+u+v}} \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1+2v\right).$$

Применяя (0.44), мы показываем, что

$$R_1(u,v) = \frac{\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(1/2-u+v)}{(4\pi)^{1/2-u+v}} \frac{\zeta(1+2u)\zeta(1+2v)}{\zeta(1+2u-2v)} \frac{L(\chi_{-4},1/2+u-v)}{L(\chi_{-4},3/2+u+v)}.$$

Рассмотрим интеграл в (8.79). Для каждой из двух дзета функций Лерха мы применяем функциональное уравнение (0.11). Следовательно, мы получаем четыре комбинации с различными знаками в произведениях

$$\zeta(0,\pm c/q;\cdot)\,\zeta(0,\pm d/q;\cdot).$$

Заменяя переменные $-c$ на c и $-d$ на d, мы приходим к единому выражению следующего вида

$$\zeta(0,c/q;\cdot)\,\zeta(0,d/q;\cdot).$$

Более точно, мы показываем, что

$$\sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{c}{q},0;1/2+u-v+s\right)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1/2+u+v+s\right) = 2\left(\cos(\pi v)+\sin(\pi(u+s))\right)\frac{\Gamma(1/2-u+v-s)\Gamma(1/2-u-v-s)}{(2\pi)^{1-2u-2s}} \times \sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(0,\frac{c}{q};1/2-u+v-s\right)\zeta\left(0,\frac{d}{q};1/2-u-v-s\right).$$

Используя определение (0.10) для дзета функции Лерха

$$\sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)\zeta\left(\frac{c}{q},0;1/2+u-v+s\right)\zeta\left(\frac{d}{q},0;1/2+u+v+s\right)=$$
$$2\left(\cos(\pi v)+\sin(\pi(u+s))\right)\frac{\Gamma(1/2-u+v-s)\Gamma(1/2-u-v-s)}{(2\pi)^{1-2u-2s}}\times$$
$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(mn)^s(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{c,d \pmod q} S(c^2,d^2;q)e\left(\frac{md+nc}{q}\right). \quad (8.80)$$

Подставляя (8.80) в (8.79) и применяя (7.42), мы показываем, что

$$TS(u,v)=R_1(u,v)+R_1(u,-v)+$$
$$2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{2+2u}}K(n,m;q)I\left(\frac{\pi mn}{q}\right),$$

где $I(x)$ определён в (8.72). Для вычисления $K(n,m;q)$ мы применим леммы 7.2.2-7.2.5, показывая, что

$$TS(u,v)=R_1(u,v)+R_1(u,-v)+2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n\equiv 0(2)}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\times$$
$$\sum_{q\equiv 0(4)}\frac{2i}{q^{1+2u}}I\left(\frac{\pi mn}{q}\right)\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}}\chi_{-4}(a)e\left(-\frac{a(m/2)^2+b(n/2)^2}{q}\right)+$$
$$2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\chi_{-4}(q)}{q^{1+2u}}I\left(\frac{\pi mn}{q}\right)\sum_{\substack{a,b \pmod q\\ ab\equiv 1 \pmod q}}e\left(-\frac{\overline{4}_q bn^2+\overline{4}_q am^2}{q}\right)+$$
$$2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n\equiv 1(2)}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{\substack{q=2r\\ (r,2)=1}}\frac{2\chi_{-4}(r)}{q^{1+2u}}I\left(\frac{\pi mn}{q}\right)S\left(\overline{(8)}_r m^2,\overline{(8)}_r n^2;r\right). \quad (8.81)$$

Заменяя переменные a и b на $-a$ и $-b$, а затем применяя (7.51) и (7.52) для первой суммы в (8.81), (7.50) и (7.53) для второй суммы в (8.81), получаем

$$TS(u,v)=R_1(u,v)+R_1(u,-v)-$$
$$\frac{4i(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n\equiv 0(2)}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,\infty}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,\infty}(m^2/4,n^2/4;\gamma;\chi_{-4})+$$
$$\frac{8(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,0}(m^2,n^2;\gamma;\chi_{-4})+$$
$$2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n\equiv 1(2)}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{\substack{q=2r\\ (r,2)=1}}\frac{2\chi_{-4}(r)}{q^{1+2u}}I\left(\frac{\pi mn}{q}\right)S\left(\overline{(8)}_r m^2,\overline{(8)}_r n^2;r\right), \quad (8.82)$$

где $\psi(x)=x^{2u}I(x)$. Для того чтобы записать третью сумму в (8.82) аналогично первой и второй сумме мы разобьём суммирование по m,n на четыре разных случая с применением

соотношения

$$\sum_{m,n\equiv 1(2)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{m,n\equiv 0(2)} - \sum_{m\equiv 0(2)}\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\equiv 0(2)}.$$

Для сумм по чётным m мы заменяем переменную m на $2m$ (ту же операцию проводим для сумм по чётным n). Тогда

$$2(2\pi)^{2u-1}\sum_{m,n\equiv 1(2)}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2-u}}\sum_{\substack{q=2r\\(r,2)=1}}\frac{2\chi_{-4}(r)}{q^{1+2u}}I\left(\frac{\pi mn}{q}\right)S\left(\overline{(8)}_r n^2, \overline{(8)}_r m^2; r\right) =$$

$$\frac{16(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(64)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,0}(m^2,n^2;\gamma;\chi_{-4}) +$$

$$\frac{2^{1-2u}(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(4)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,0}(m^2,n^2;\gamma;\chi_{-4}) -$$

$$\frac{2^{5/2-u+v}(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,0}(m^2,n^2;\gamma;\chi_{-4}) -$$

$$\frac{2^{5/2-u-v}(2\pi)^{2u-1}}{\pi^{2u}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(m/n)^v}{(mn)^{1/2+u}}\sum_{\gamma\in C_{\infty,0}(16)}\frac{1}{\gamma}\psi\left(\frac{\pi mn}{\gamma}\right)S_{\infty,0}(m^2,n^2;\gamma;\chi_{-4}). \quad (8.83)$$

Подставляя (8.83) в (8.82), применяя (8.27) и (8.75), мы доказываем (8.74). □

8.3. Специальные функции

Следующий шаг в доказательстве теоремы 8.0.1 – применение формулы следа Кузнецова (8.28) к слагаемым в правой части (8.74).

Для этого необходимо доказать, что функция (8.73) удовлетворяет условиям применимости формулы Кузнецова. Кроме того, необходимо показать, что интегральные преобразования (8.25) и (8.26) убывают достаточно быстро для абсолютной сходимости правой части равенства (8.28). Заметим, что именно по этой причине мы используем регуляризованную версию формулы следа Кузнецова в лемме 8.1.1.

Для этого мы воспользуемся результатами Фроленкова из [**33**, §4].

Лемма 8.3.1. *([**33**, лемма 4.1]) Пусть* $\max(2, 2l_1-1-\mathcal{N}) < 2\,\mathrm{Re}(u) < \min(2l_1-3, 2l_1-\mathcal{N})$ *и* $\mathrm{Re}(v) = 0$. *Функция* $\psi(x)$ *из* (8.73) *при* $x \to 0$ *удовлетворяет оценке*

$$\psi(x) \ll x^{1/2+\mathrm{Re}(u)-\epsilon},$$

а при $x \to \infty$

$$\psi(x) \ll \frac{1}{x^{2l_1-1-2\,\mathrm{Re}(u)-\epsilon}}, \quad \psi^{(j)}(x) \ll \frac{1}{x^{N-\epsilon}},$$

где $j = 1, 2, 3$.

Выберем параметры N и l_1 в лемме 8.1.1 следующим образом

$$\mathcal{N} = 3, \quad l_1 = 3.$$

Тогда из леммы 8.3.1 следует, что при $1 < \mathrm{Re}(u) < 3/2 - \delta$ и $\mathrm{Re}(v) = 0$ функция $\psi(x)$ из (8.73) удовлетворяет условиям (8.24) применимости формулы следа Кузнецова.

Далее выпишем оценки на преобразования (8.25) и (8.26) от функции $\psi(x)$, определённой в (8.73).

Лемма 8.3.2. *([**33**, лемма 4.2]) При $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 3/2 - \delta$ и $\mathrm{Re}(v) = 0$ выполнено тождество*

$$\psi_D(t) = \frac{t\cosh(\pi t)}{\pi\sinh(\pi t)} \int_{(a)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s)\Gamma(1/2-u+v-s)\Gamma(1/2-u-v-s)\Gamma\left(\frac{s+2u}{2}+it\right) \times \Gamma\left(\frac{s+2u}{2}-it\right)(\cos(\pi v)+\sin(\pi(u+s)))\sin\left(\frac{\pi(s+2u)}{2}\right)2^{s+2u}ds, \quad (8.84)$$

где $-2\,\mathrm{Re}(u) < a < 1/2 - \mathrm{Re}(u)$. Кроме того, при $|t| \to \infty$

$$\psi_D(t) \ll \frac{1}{(1+|t|)^{\mathcal{N}}}. \quad (8.85)$$

Для удобства записи введём обозначение

$$I_0(u,v) := \frac{1}{\pi}\int_{(0)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s)\Gamma(1/2-u+v-s)\Gamma(1/2-u-v-s)\Gamma\left(\frac{s+u+v+1/2}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{s+3u-v-1/2}{2}\right)(\cos(\pi v)+\sin(\pi(u+s)))\sin\left(\frac{\pi(s+2u)}{2}\right)2^{s+2u}ds. \quad (8.86)$$

Лемма 8.3.3. *([**33**, лемма 4.3]) При $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/6$ и $\mathrm{Re}(v) = 0$ выполнено тождество*

$$\left.\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\right|_{2it=1-s_-} = i2^{5/2-u+v}\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(1/2-3u+v)\Gamma(2u)\Gamma(2u-2v) \times \Gamma(1/2-u+v)(\cos(\pi v)+\sin(\pi(1/2-2u+v)))\sin\left(\frac{\pi(1/2-u+v)}{2}\right)+I_0(u,v). \quad (8.87)$$

Лемма 8.3.4. *([**33**, лемма 4.4]) При $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/6$ и $\mathrm{Re}(v) = 0$ выполнено тождество*

$$\left.\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\right|_{2it=1-s_+} = i2^{5/2-u-v}\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(1/2-3u-v)\Gamma(2u)\Gamma(2u+2v) \times \Gamma(1/2-u-v)(\cos(\pi v)+\sin(\pi(1/2-2u-v)))\sin\left(\frac{\pi(1/2-u-v)}{2}\right)+I_0(u,-v). \quad (8.88)$$

Лемма 8.3.5. *([**33**, лемма 4.5]) При $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 3/2 - \delta$ и $\mathrm{Re}(v) = 0$*

$$\psi_H(k) = \frac{2^{2u+1}i^k}{2\pi i}\int_{(a)} \hat{\Phi}_{\mathcal{N}}(s)\Gamma(1/2-u+v-s)\Gamma(1/2-u-v-s) \times \frac{\Gamma\left((k-1+2u+s)/2\right)}{\Gamma\left((k+1-2u-s)/2\right)}(\cos(\pi v)+\sin(\pi(u+s)))\,2^s ds, \quad (8.89)$$

где $\max(1-2l_1, 1-k-2\operatorname{Re}(u)) < a < 1/2 - \operatorname{Re}(u)$. *Кроме того, при* $k \to \infty$ *выполнена оценка*

$$\psi_H(k) \ll \frac{1}{k^{N+1}} + \frac{1}{k^{2l_1}}. \tag{8.90}$$

Оценки (8.84) и (8.90) гарантируют, что ряды (8.4), возникающие после применения формулы Кузнецова, сходятся абсолютно.

8.4. Вклад непрерывного спектра

Напомним (см. (8.2)), что

$$s_+ = 1/2 + u + v, \quad s_- = 1/2 + u - v.$$

Определим

$$P_{L,\zeta}(u,v,t) = \frac{L(\chi_{-4}, s_+)L(\chi_{-4}, s_-)}{\zeta(2s_+)\zeta(2s_-)} \frac{\zeta(s_+ + 2it)\zeta(s_+ - 2it)\zeta(s_- + 2it)\zeta(s_- - 2it)}{L(\chi_{-4}, 1+2it)L(\chi_{-4}, 1-2it)}. \tag{8.91}$$

После применения формулы следа Кузнецова (8.28) к правой части (8.74), мы получаем следующую сумму как часть непрерывного спектра

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(u,v) = \frac{\zeta(2s_+)\zeta(2s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_-} n^{s_+}} \\ \times \Bigg(-4iC_{\infty,\infty}(m^2, n^2, 4; \psi) + 2^{1-2u} C_{\infty,0}(m^2, n^2, 4; \psi) + \\ \left(8 - 2^{3-s_-} - 2^{3-s_+}\right) C_{\infty,0}(m^2, n^2, 16; \psi) + 16 C_{\infty,0}(m^2, n^2, 64; \psi) \Bigg).\end{aligned} \tag{8.92}$$

Для удобства также определим

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathfrak{c}, N; t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\overline{\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}(m^2, 1/2+it, \chi_{-4})} \phi_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}(n^2, 1/2+it, \chi_{-4})}{m^{s_- + 2it} n^{s_+ - 2it}}.$$

Тогда из (8.31) следует, что при $C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m^2, n^2, N; \psi)$ выполнено тождество

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_-} n^{s_+}} C_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m^2, n^2, N; \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \sum_{\mathfrak{c} \text{ sing.}} \mathcal{D}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathfrak{c}, N; t) dt. \tag{8.93}$$

Лемма 8.4.1. *При* $\operatorname{Re}(u) > 1/2$, $\operatorname{Re}(v) = 0$ *выполнено тождество*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_-} n^{s_+}} C_{\infty,\infty}(m^2, n^2, 4; \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_D(t) \sinh(\pi t)}{t \cosh(\pi t)} \frac{P_{L,\zeta}(u,v,t) F_1(t)}{4(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})} dt, \tag{8.94}$$

где

$$F_1(t) = (1 - 2^{-2it-s_-})(1 - 2^{2it-s_+}) + (1 - 2^{2it-s_-})(1 - 2^{-2it-s_+}). \tag{8.95}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 8.1.3 следующие параболические вершины являются сингулярными: 0, ∞. Применяя (8.67), (8.65), (8.48) и (7.13), получаем

$$\mathcal{D}_{\infty,\infty}(\infty,4;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{4(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.96}$$

Используя (8.66), (8.65), (8.47) и (7.13), мы показываем, что

$$\mathcal{D}_{\infty,\infty}(0,4;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{4(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.97}$$

Наконец, из (8.96), (8.97) и (8.93) следует, что (8.94). □

Лемма 8.4.2. *При* $\mathrm{Re}(u)>1/2$, $\mathrm{Re}(v)=0$ *выполнено тождество*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_-}n^{s_+}}C_{\infty,0}(m^2,n^2,4;\psi)\;=\;\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\frac{-iP_{L,\zeta}(u,v,t)F_2(t)}{4(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}dt, \tag{8.98}$$

где

$$F_2(t)=(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})2^{2it}+(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})2^{-2it}. \tag{8.99}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 8.1.3 следующие параболические вершины являются сингулярными: 0, ∞. Применяя (8.67), (8.65), (8.48), (8.47) и (7.13), получаем

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(\infty,4;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{2-2it}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.100}$$

Как следствии (8.66), (8.65), (8.48), (8.47) и (7.13), мы доказываем, что

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(0,4;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2+2it}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.101}$$

Наконец, подставляя (8.100) и (8.101) в (8.93), мы доказываем (8.98). □

Лемма 8.4.3. *При* $\mathrm{Re}(u)>1/2$, $\mathrm{Re}(v)=0$ *выполнено тождество*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_-}n^{s_+}}C_{\infty,0}(m^2,n^2,16;\psi)\;=\;\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\frac{-iP_{L,\zeta}(u,v,t)F_3(t)dt}{8(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}, \tag{8.102}$$

где

$$\begin{aligned}F_3(t)=&\frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+s_+}}+\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+s_+}}+\\&\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+s_-}}+\frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+s_-}}-\\&\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-4it+s_++s_-}}-\frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{4it+s_++s_-}}.\end{aligned} \tag{8.103}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 8.1.3 следующие параболические вершины являются сингулярными

$$0,1/2,1/4,1/8,1/12,\infty.$$

Из (8.69) следует, что

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(1/2,16;t)=\mathcal{D}_{\infty,0}(1/8,16;t)=0. \tag{8.104}$$

Для начала рассмотрим случай $\mathfrak{c}=0$. Применяя (8.59), (8.62), (8.48), (8.47) и (7.13), мы находим, что

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(0,16;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{3+s_++2it}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.105}$$

Рассмотрим случай $\mathfrak{c}=\infty$. Используя (8.64), (8.61), (8.48), (8.47) и (7.13), мы показываем, что

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(\infty,16;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{3+s_--2it}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \tag{8.106}$$

Рассмотрим случай $\mathfrak{c}=1/(4\Upsilon)$ при $\Upsilon=1,3$. Из (8.63) и (8.60) следует, что

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_-+2it}n^{s_+-2it}}\overline{\phi_{\infty,1/4\Upsilon}(m^2,1/2+it,\chi_{-4})}\phi_{0,1/4\Upsilon}(n^2,1/2+it,\chi_{-4})=$$
$$\frac{\chi_{-4}(-\Upsilon)}{16L(\chi_{-4},1+2it)L(\chi_{-4},1-2it)}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)\sigma_{-2it}(\chi_{-4};n^2)}{m^{s_-+2it}n^{s_+-2it}}e\left(\frac{(m^2+n^2)\Upsilon}{4}\right).$$

Если m и n одновременно чётные или нечётные, то

$$\sum_{\Upsilon=1,3}\chi_{-4}(-\Upsilon)e\left(\frac{(m^2+n^2)\Upsilon}{4}\right)=0.$$

В противном случае

$$\sum_{\Upsilon=1,3}\chi_{-4}(-\Upsilon)e\left(\frac{(m^2+n^2)\Upsilon}{4}\right)=-2i.$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(1/4,16;t)+\mathcal{D}_{\infty,0}(1/12,16;t)=\frac{-i}{8L(\chi_{-4},1+2it)L(\chi_{-4},1-2it)}\times$$
$$\left(\sum_{m\equiv1(2)}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}\sum_{n\equiv0(2)}\frac{\sigma_{-2it}(\chi_{-4};n^2)}{n^{s_+-2it}}+\sum_{m\equiv0(2)}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}\sum_{n\equiv1(2)}\frac{\sigma_{-2it}(\chi_{-4};n^2)}{n^{s_+-2it}}\right).$$

Применяя (7.11), находим, что

$$\sum_{m\equiv1(2)}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}-\sum_{m\equiv0(2)}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}=$$
$$(1-2^{-s_--2it})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma_{2it}(\chi_{-4};m^2)}{m^{s_-+2it}}. \tag{8.107}$$

Сумму по нечётным n можно изучать аналогично. Используя (7.13) для вычисления сумм по m и n, получаем выражение

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(1/4,16;t)+\mathcal{D}_{\infty,0}(1/12,16;t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^3(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\\ \times\left(\frac{1-2^{-s_--2it}}{2^{s_+-2it}}+\frac{1-2^{-s_++2it}}{2^{s_-+2it}}\right). \quad (8.108)$$

Сейчас требуемое тождество (8.102) следует из (8.104), (8.105), (8.106), (8.108) и (8.93). □

Лемма 8.4.4. *При* $\mathrm{Re}(u)>1/2$, $\mathrm{Re}(v)=0$ *выполнено тождество*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_-}n^{s_+}}C_{\infty,0}(m^2,n^2,64;\psi)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\frac{-iP_{L,\zeta}(u,v,t)F_4(t)dt}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}, \quad (8.109)$$

где

$$F_4(t)=(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})+\\ \frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+2s_+}}+\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+2s_+}}+\\ \frac{(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{2it-s_-})}{2^{2it+2s_-}}+\frac{(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{-2it-s_-})}{2^{-2it+2s_-}}+\\ \frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+s_++s_-}}+\frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+s_++s_-}}. \quad (8.110)$$

Доказательство. В соответствии с 8.1.3 следующие параболические вершины являются сингулярными

$$0,1/2,1/(4\Upsilon_4),1/(8\Upsilon_8),1/(16\Upsilon_4),1/32,\infty,$$

где $\Upsilon_4=1,3$ и $\Upsilon_8=1,3,5,7$. Разобьём каждую из сумм по m и n на части в зависимости от чётности переменных суммирования. Тогда

$$\mathcal{D}_{\infty,0}(\mathfrak{c},64;t)=\mathcal{E}_{11}(\mathfrak{c};t)+\mathcal{E}_{10}(\mathfrak{c};t)+\mathcal{E}_{01}(\mathfrak{c};t)+\mathcal{E}_{00}(\mathfrak{c};t), \quad (8.111)$$

где

$$\mathcal{E}_{kj}(\mathfrak{c};t)=\sum_{m\equiv k(2)}\sum_{n\equiv j(2)}\frac{\overline{\phi_{\infty,\mathfrak{c}}(m^2,1/2+it,\chi_{-4})}\phi_{0,\mathfrak{c}}(n^2,1/2+it,\chi_{-4})}{m^{s_-+2it}n^{s_+-2it}}.$$

Вычислим $\mathcal{E}_{11}(\mathfrak{c};t)$. Поскольку суммирование ведётся по нечётным n, из леммы 8.1.5 следует, что

$$\mathcal{E}_{11}(0;t)=\mathcal{E}_{11}(1/2;t)=\mathcal{E}_{11}(1/(4\Upsilon_4);t)=0. \quad (8.112)$$

Так как суммирование ведётся по нечётным m, из леммы 8.1.4 следует, что

$$\mathcal{E}_{11}(1/(16\Upsilon_4);t)=\mathcal{E}_{11}(1/32;t)=\mathcal{E}_{11}(\infty;t)=0. \quad (8.113)$$

Поэтому нам осталось вычислить

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \mathcal{E}_{11}(1/(8\Upsilon_8);t).$$

Применим (8.51), (8.56) и (8.47) для вычисления коэффициентов Фурье. Для подсчёта суммы по Υ_8 мы используем

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8}{4}\right) = -4i.$$

Суммы по m и n вычисляются при помощи (8.107) и (7.13). В результате,

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \mathcal{E}_{11}(1/(8\Upsilon_8);t) = P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \quad (8.114)$$

Комбинируя (8.112), (8.113) и (8.114), получаем

$$\sum_{\mathfrak{c}\text{ sing.}} \mathcal{E}_{11}(\mathfrak{c};t) = P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}. \quad (8.115)$$

Вычислим $\mathcal{E}_{10}(\mathfrak{c};t)$. Ввиду (8.68) мы знаем, что

$$\mathcal{E}_{10}(1/2;t) = \mathcal{E}_{10}(1/32;t) = 0. \quad (8.116)$$

Поскольку в $\mathcal{E}_{10}(\mathfrak{c};t)$ суммирование ведётся по нечётным m, то из (8.52) и (8.53) получаем

$$\mathcal{E}_{10}(1/(16\Upsilon_4);t) = \mathcal{E}_{10}(\infty;t) = 0. \quad (8.117)$$

Применяя (8.49), (8.54), (8.47), (8.48), (8.107) и (7.13), мы доказываем, что

$$\mathcal{E}_{10}(0;t) = P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{2it+2s_+}}. \quad (8.118)$$

Далее вычислим

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \mathcal{E}_{10}(1/(4\Upsilon_4);t).$$

Ввиду (8.50) и (8.55), нам необходимо исследовать сумму

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4)e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{4}\right)e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{16}\right).$$

Заметим, что m нечётно, а n чётно. Если $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4)e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{4}\right)e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{16}\right) = \sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4)e\left(\frac{\Upsilon_4}{2}\right) = 0.$$

Если $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4)e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{4}\right)e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{16}\right) = \sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4)e\left(\frac{\Upsilon_4}{4}\right) = -2i.$$

Комбинируя полученные результаты с (8.50), (8.55), (8.47), (8.107) и (7.13), мы приходим к выводу, что

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3}\mathcal{E}_{10}(1/(4\Upsilon_4);t)=P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{-2it+2s_+}}. \tag{8.119}$$

Рассмотрим

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\mathcal{E}_{10}(1/(8\Upsilon_8);t).$$

Ввиду (8.51) и (8.56) нам необходимо вычислить сумму

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8(m^2+n^2)}{8}\right).$$

Мы знаем, что m нечётно, а n чётно. Заметим, что для нечётных m выполнено $e\left(\frac{\Upsilon_8 m^2}{8}\right)=e\left(\frac{\Upsilon_8}{8}\right)$. Если $n\equiv 0(mod 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8(m^2+n^2)}{8}\right)=\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8}{8}\right)=0.$$

Если $n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8(m^2+n^2)}{8}\right)=-\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\chi_{-4}(-\Upsilon_8)e\left(\frac{\Upsilon_8}{8}\right)=0.$$

Таким образом,

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\mathcal{E}_{10}(1/(8\Upsilon_8);t)=0. \tag{8.120}$$

Комбинируя (8.116), (8.117), (8.118), (8.119) и (8.120), находим

$$\sum_{\mathfrak{c}\text{ sing.}}\mathcal{E}_{10}(\mathfrak{c};t)=$$

$$P_{L,\zeta}(u,v,t)\frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_-})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\left(\frac{(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+2s_+}}+\frac{(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+2s_+}}\right). \tag{8.121}$$

Вычислим $\mathcal{E}_{01}(\mathfrak{c};t)$. В соответствии с (8.68)

$$\mathcal{E}_{01}(1/2;t)=\mathcal{E}_{01}(1/32;t)=0. \tag{8.122}$$

Поскольку в $\mathcal{E}_{01}(\mathfrak{c};t)$ суммирование ведётся по нечётным n, то из (8.54) и (8.55) получаем

$$\mathcal{E}_{01}(0;t)=\mathcal{E}_{10}(1/(4\Upsilon_4);t)=0. \tag{8.123}$$

Аналогично (8.120) мы доказываем, что

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7}\mathcal{E}_{01}(1/(8\Upsilon_8);t)=0. \tag{8.124}$$

Теперь вычислим

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3}\mathcal{E}_{01}(1/(16\Upsilon_4);t).$$

В соответствии с (8.52) и (8.57), необходимо изучать

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{16}\right) e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{4}\right).$$

Мы знаем, что m чётно, а n нечётно. Если $m \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{16}\right) e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{4}\right) = \sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_4}{2}\right) = 0.$$

Если $m \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_4 m^2}{16}\right) e\left(\frac{\Upsilon_4 n^2}{4}\right) = \sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_4}{4}\right) = -2i.$$

Комбинируя данные результаты с (8.52), (8.57), (8.47), (8.107) и (7.13), мы доказываем, что

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \mathcal{E}_{01}(1/(4\Upsilon_4); t) = P_{L,\zeta}(u, v, t) \frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{-2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{2it+2s_-}}. \tag{8.125}$$

Применяя (8.53), (8.58), (8.47), (8.48), (8.107) и (7.13), получаем

$$\mathcal{E}_{01}(\infty; t) = P_{L,\zeta}(u, v, t) \frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{-2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{-2it+2s_-}}. \tag{8.126}$$

Суммируя (8.122), (8.123), (8.124), (8.125) и (8.126), мы доказываем, что

$$\sum_{\mathfrak{c}\ \text{sing.}} \mathcal{E}_{10}(\mathfrak{c}; t) =$$

$$P_{L,\zeta}(u, v, t) \frac{-i(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})} \left(\frac{(1-2^{-2it-s_-})}{2^{-2it+2s_-}} + \frac{(1-2^{2it-s_-})}{2^{2it+2s_-}}\right). \tag{8.127}$$

Вычислим $\mathcal{E}_{00}(\mathfrak{c}; t)$. В соответствии с (8.68)

$$\mathcal{E}_{00}(1/2; t) = \mathcal{E}_{00}(1/32; t) = 0. \tag{8.128}$$

Из (8.49), (8.54), (8.47), (8.48) и (7.13) следует, что

$$\mathcal{E}_{00}(0; t) = P_{L,\zeta}(u, v, t) \frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{4it+2s_++s_-}}. \tag{8.129}$$

Ввиду (8.53), (8.58), (8.47), (8.48) и (7.13) получаем

$$\mathcal{E}_{00}(\infty; t) = P_{L,\zeta}(u, v, t) \frac{-i(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{-4it+2s_-+s_+}}. \tag{8.130}$$

Далее рассмотрим

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \mathcal{E}_{00}(1/(8\Upsilon_8); t).$$

В соответствии с (8.51) и (8.56) нам необходимо вычислить сумму

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \chi_{-4}(-\Upsilon_8) e\left(\frac{\Upsilon_8(m^2+n^2)}{8}\right)$$

в предположении, что m и n чётны. В этом случае

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \chi_{-4}(-\Upsilon_8) e\left(\frac{\Upsilon_8(m^2+n^2)}{8}\right) = 0,$$

а значит

$$\sum_{\Upsilon_8=1,3,5,7} \mathcal{E}_{00}(1/(8\Upsilon_8);t) = 0. \tag{8.131}$$

Вычислим

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \mathcal{E}_{00}(1/(4\Upsilon_4);t).$$

В соответствии с (8.50) и (8.55), нам необходимо рассмотреть сумму

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_8 m^2}{4}\right) e\left(\frac{\Upsilon_8 n^2}{16}\right)$$

в предположении чётности m и n. Если $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_8 m^2}{4}\right) e\left(\frac{\Upsilon_8 n^2}{16}\right) = 0.$$

Если $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \chi_{-4}(-\Upsilon_4) e\left(\frac{\Upsilon_8 m^2}{4}\right) e\left(\frac{\Upsilon_8 n^2}{16}\right) = -2i.$$

Комбинируя эти результаты с (8.47) и (7.13), мы показываем, что

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \mathcal{E}_{00}(1/(4\Upsilon_4);t) = P_{L,\zeta}(u,v,t) \frac{-i(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})(1-2^{-2it-s_+})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{2it+s_-+s_+}}. \tag{8.132}$$

Аналогично

$$\sum_{\Upsilon_4=1,3} \mathcal{E}_{00}(1/(16\Upsilon_4);t) = P_{L,\zeta}(u,v,t) \frac{-i(1-2^{-2it-s_+})(1-2^{2it-s_-})(1-2^{-2it-s_-})}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})2^{-2it+s_-+s_+}}. \tag{8.133}$$

Суммируя (8.128), (8.129), (8.130), (8.131), (8.132) и (8.133), получаем

$$\sum_{\mathfrak{c}\ \text{sing.}} \mathcal{E}_{00}(\mathfrak{c};t) = P_{L,\zeta}(u,v,t) \frac{-i}{16(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})} \times \left(\frac{(1-2^{2it-s_-})(1-2^{2it-s_+})}{2^{2it+s_-+s_+}} + \frac{(1-2^{-2it-s_-})(1-2^{-2it-s_+})}{2^{-2it+s_-+s_+}}\right). \tag{8.134}$$

Подставляя (8.115), (8.121), (8.127), (8.134) в (8.111), мы устанавливаем справедливость (8.109), что завершает доказательство. □

Подставляя (8.94), (8.98), (8.102) и (8.109) в (8.92), и применяя (8.91), мы доказываем следующую лемму.

Лемма 8.4.5. *При* $\mathrm{Re}(u) > 1/2$, $\mathrm{Re}(v) = 0$ *выполнено тождество*

$$\mathcal{C}(u,v) = \frac{L(\chi_{-4}, s_+)L(\chi_{-4}, s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\mathfrak{M}^{con}(F;u,v), \tag{8.135}$$

где $\mathfrak{M}^{con}(F;u,v)$ *определено в* (8.5), *и*

$$F(t) = F_1(t) + 2^{-1-2u}F_2(t) + \left(1 - 2^{-1/2-u+v} - 2^{-1/2-u-v}\right)F_3(t) + F_4(t), \tag{8.136}$$

где $F_j(t)$ *задана в* (8.95), (8.99), (8.103) *и* (8.110).

Применяя (8.135), получаем выражение для $\mathcal{C}(u,v)$, которое справедливо в области $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/2, \mathrm{Re}(v) = 0$.

Лемма 8.4.6. *При* $0 \leq \mathrm{Re}(u) < 1/2$, $\mathrm{Re}(v) = 0$ *выполнено тождество*

$$\mathcal{C}(u,v) = \mathcal{S}_-(u,v) + \mathcal{S}_+(u,v) + \frac{L(\chi_{-4}, s_+)L(\chi_{-4}, s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\mathfrak{M}^{con}(u,v), \tag{8.137}$$

где $\mathfrak{M}^{con}(F;u,v)$ *определено в* (8.5), *и*

$$\mathcal{S}_-(u,v) = \frac{-iF((1-s_-)/(2i))}{2(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\Bigg|_{2it=1-s_-}$$
$$\times \frac{L(\chi_{-4}, s_+)}{L(\chi_{-4}, 2-s_-)}\zeta(1+s_+-s_-)\zeta(2s_- - 1)\zeta(s_- + s_+ - 1), \tag{8.138}$$

$$\mathcal{S}_+(u,v) = \frac{-iF((1-s_+)/(2i))}{2(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\frac{\psi_D(t)\sinh(\pi t)}{t\cosh(\pi t)}\Bigg|_{2it=1-s_+}$$
$$\times \frac{L(\chi_{-4}, s_-)}{L(\chi_{-4}, 2-s_+)}\zeta(1+s_--s_+)\zeta(2s_+ - 1)\zeta(s_- + s_+ - 1), \tag{8.139}$$

$$F\left(\frac{1-s_-}{2i}\right) = -2^{-4u-2v-2}\left((3\cdot 2^{2u+1}-2)2^{4v} + (3\cdot 2^{2u} - 5\cdot 2^{4u+1} - 1)2^{2v} + 2^{2u} + 2^{4u+1}\right),$$

$$F\left(\frac{1-s_+}{2i}\right) = -2^{-4u-2v-2}\left((2^{2u}+2^{4u+1})2^{4v} + (3\cdot 2^{2u} - 5\cdot 2^{4u+1} - 1)2^{2v} + 3\cdot 2^{2u+1} - 2\right).$$

Доказательство. В интеграле (8.5) сделаем замену переменных $z = 2it$, из чего следует, что

$$\mathcal{C}(u,v) = \frac{L(\chi_{-4}, s_+)L(\chi_{-4}, s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\frac{-1}{8\pi}\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_D(z/(2i))\sinh(\pi z/(2i))}{z/(2i)\cosh(\pi z/(2i))}\frac{\zeta(s_+ + z)\zeta(s_+ - z)\zeta(s_- + z)\zeta(s_- - z)}{L(\chi_{-4}, 1+z)L(\chi_{-4}, 1-z)}F(z/(2i))dt. \tag{8.140}$$

Заметим, что произведение четырёх дзета функций Римана в (8.140) имеет четыре полюса (см. (8.2)) в точках

$$z = 1/2 - u \pm v, \quad z = 1/2 + u \pm v. \tag{8.141}$$

Меняя $\mathrm{Re}(u)$ с $\mathrm{Re}(u) > 1/2$ на $\mathrm{Re}(u) < 1/2$, эти полюса “перепрыгивают"через линию интегрирования, в результате чего возникают дополнительные вычеты. Вычисляя вычеты в точках (8.141) и используя чётность функции $F(t)$, мы доказываем (8.137). $\square$

8.5. Доказательство теоремы 8.0.1 и заключительные замечания

Рассмотрим

$$\mathcal{FMT}(u,v) := R(u,v) + R(u,-v) + \mathcal{S}_-(u,v) + \mathcal{S}_+(u,v) - \mathcal{S}(u,v) - \mathcal{S}(u,-v), \tag{8.142}$$

где $R(u,v)$ определена в (8.71), $\mathcal{S}_\pm(u,v)$ в (8.138) и (8.139), а также

$$\mathcal{S}(u,v) = 2h\left(\frac{1/2-u+v}{2i}\right)\frac{\zeta(1/2+u+v)\zeta(2u-2v)\zeta(1+2v)\zeta(2u)}{\zeta(3/2-u+v)}. \tag{8.143}$$

Теорема 8.5.1. *При* $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/2, \mathrm{Re}(v) = 0$ *справедливо тождество*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2(h;u,v) + \mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v) = \mathcal{FMT}(u,v) + \\ \frac{L(\chi_{-4},s_+)L(\chi_{-4},s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\mathfrak{M}^{con}(F,u,v) + \\ \frac{(1-2^{-2s_-})^{-1}(1-2^{-2s_+})^{-1}}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}}\Bigg(-4i\mathfrak{M}_{\infty,\infty}(4,u,v) + 2^{1-2u}\mathfrak{M}_{\infty,0}(4,u,v) + \\ \left(8-2^{3-s_-}-2^{3-s_+}\right)\mathfrak{M}_{\infty,0}(16,u,v) + 16\mathfrak{M}_{\infty,0}(64,u,v)\Bigg),\end{aligned} \tag{8.144}$$

где $\mathfrak{M}_{\mathfrak{ab}}(N,u,v)$, $\mathfrak{M}^{con}(F,u,v)$ *определены в* (8.4) *и* (8.5).

Доказательство. Применяя формулу следа Кузнецова (8.28) к (8.74), используя выражения (8.33), (8.34), (8.35), (8.36), и наконец применяя лемму 8.1.2, мы показываем, что при

$$1 < \mathrm{Re}(u) < 3/2, \quad \mathrm{Re}(v) = 0$$

выполнено тождество

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2(h;u,v) + \mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v) = R(u,v) + R(u,-v) + \\ \frac{L(\chi_{-4},s_+)L(\chi_{-4},s_-)}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}(1-2^{-2s_-})(1-2^{-2s_+})}\mathfrak{M}^{con}(F,u,v) + \\ \frac{(1-2^{-2s_-})^{-1}(1-2^{-2s_+})^{-1}}{(2\pi)^{1-2u}\pi^{2u}}\Bigg(-4i\mathfrak{M}_{\infty,\infty}(4,u,v) + 2^{1-2u}\mathfrak{M}_{\infty,0}(4,u,v) + \\ \left(8-2^{3-s_-}-2^{3-s_+}\right)\mathfrak{M}_{\infty,0}(16,u,v) + 16\mathfrak{M}_{\infty,0}(64,u,v)\Bigg).\end{aligned} \tag{8.145}$$

Из оценок (8.84), (8.90) следует, что слагаемые $\mathfrak{M}_{\mathfrak{ab}}(N,u,v)$ в правой части (8.145) – голоморфные функции переменных u и v. Для аналитического продолжения формулы (8.145)

в область $0 \leqslant \mathrm{Re}(u) < 1/2$ применим (8.137). Аналогично можно заменить $\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v)$ на $\mathcal{M}_4^{(c)}(h;u,v)+\mathcal{S}(u,v)+\mathcal{S}(u,-v)$. Функция $\mathcal{FMT}(u,v)$ голоморфна по u и v, поскольку левая часть (8.144), а также все слагаемые (кроме $\mathcal{FMT}(u,v)$) в правой части (8.144) голоморфны по двум переменным u и v. □

Детально рассмотрим самый сложный и важный случай, когда $u=v=0$. Естественно ожидать, что $\mathcal{FMT}(0,0)$ содержит главный член для момента $\mathcal{M}_2(h;u,v)$. К сожалению, как будет показано ниже, это не так.

Из [**30**, теоремы 1.3] известно, что если $h(r)$ – гладкая характеристическая функция интервала $(T,2T)$, то

$$\mathcal{M}_2(h;0,0) \asymp T^2 \log^3 T. \tag{8.146}$$

Лемма 8.5.2. *Выполнена асимптотическая формула*

$$\mathcal{FMT}(0,0) = \sum_{l\in\mathcal{L}} c(l)a_l + O(T), \tag{8.147}$$

где a_l - некоторые абсолютные константы, а $c(l)$ определены в (8.11), (8.16), (8.17).

Доказательство. Используя (8.143) и свойства дзета функции Римана, получаем

$$\lim_{u,v\to(0,0)} (\mathcal{S}(u,v)+\mathcal{S}(u,-v)) = 2\frac{\zeta(1/2)\zeta^2(0)}{\zeta(3/2)}\left(\frac{h'(1/(4i))}{2i} + \left(2\gamma + \frac{\zeta'(1/2)}{\zeta(1/2)} - 2\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{\zeta'(3/2)}{\zeta(3/2)}\right) h\left(\frac{1}{4i}\right)\right).$$

Следовательно, слагаемые $\mathcal{S}(u,v)+\mathcal{S}(u,-v)$ дают пренебрежимо малый вклад в $\mathcal{FMT}(0,0)$. Применяя (8.71), (8.138), (8.139), (8.88), (8.87) и некоторые свойства дзета функции Римана, мы показываем, что

$$\lim_{u,v\to(0,0)} (R(u,v)+R(u,-v)+\mathcal{S}_-(u,v)+\mathcal{S}_+(u,v)) = \sum_{j=0}^{3} d_1(j)\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}^{(j)}(1/2) + d_2 I_0(0,0) + d_3\frac{\partial}{\partial v} I_0(0,v)\Big|_{v=0},$$

где $d_1(j)$, d_2, d_3 – некоторые абсолютные константы, а $I_0(u,v)$ определён в (8.86). Таким образом,

$$\mathcal{FMT}(0,0) = \sum_{j=0}^{3} d_1(j)\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}^{(j)}(1/2) + d_2 I_0(0,0) + d_3\frac{\partial}{\partial v} I_0(0,v)\Big|_{v=0} + O(T^{-A}).$$

Из (8.86), (8.12) и (8.15) следует, что

$$I_0(0,0)=\frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty r\tanh(\pi r)h(r)\int_{(\epsilon)}\Gamma(s/2-ir)\Gamma(s/2+ir)\Gamma^2(1/2-s)$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{s+1/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1/2}{2}\right)(1+\sin(\pi s))\sin(\pi s)2^{2s}dsdr+\sum_{l\in\mathcal{L}}c(l)b_1(l),$$

где $b_1(l)$ – некоторые константы, которые не зависят от T. Оценивая по модулю интеграл по s с применением формулы Стирлинга, мы показываем, что этот интеграл ограничен величиной $(1+|r|)^{-1}$. В результате,

$$I_0(0,0)=\sum_{l\in\mathcal{L}}c(l)b_1(l)+O(T).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial v}I_0(0,v)\bigg|_{v=0}=\sum_{l\in\mathcal{L}}c(l)b_2(l)+O(T).$$

Таким образом,

$$\mathcal{FMT}(0,0)=\sum_{j=0}^{3}d_1(j)\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}^{(j)}(1/2)+\sum_{l\in\mathcal{L}}c(l)b_3(l)+O(T). \tag{8.148}$$

Из (8.14) следует, что

$$\sum_{j=0}^{3}d_1(j)\hat{\Phi}_{\mathcal{N}}^{(j)}(1/2)=\sum_{j=0}^{3}b_4(l)c(l)+\sum_{j=0}^{3}d_1(j)\hat{\phi}^{(j)}(1/2). \tag{8.149}$$

Применяя (8.15), мы показываем, что

$$\sum_{j=0}^{3}d_1(j)\hat{\phi}^{(j)}(1/2)=O(T^{-A}). \tag{8.150}$$

Подставляя (8.149) и (8.150) в (8.148), мы завершаем доказательство (8.147). □

Из (8.16) и (8.17) следует, что $c(l)=P_{l,2\mathcal{N}-1}(T)$, где $P_{l,2\mathcal{N}-1}(x)$ – многочлен степени $2\mathcal{N}-1$. Следовательно, ввиду (8.147) получаем формулу

$$\mathcal{FMT}(0,0)=Q_{2\mathcal{N}-1}(T)+O(T), \tag{8.151}$$

где $Q_{2\mathcal{N}-1}(x)$ – некоторый многочлен, степень которого не превосходит $2\mathcal{N}-1$. Сравнивая (8.151) и (8.146), мы видим, что $\mathcal{FMT}(0,0)$ – неподходящий кандидат (даже с учётом возможного обнуления старшего коэффициента многочлена $Q_{2\mathcal{N}-1}(x)$) на роль главного члена в асимптотической формуле для второго момента $\mathcal{M}_2(h;0,0)$, поскольку выражение в (8.151) не содержит степеней $\log T$.

Заметим, что коэффициенты $c(l)$ возникают во всех слагаемых в правой части (8.6). Применяя (8.85) и (8.90), с пренебрежимо малым остатком мы можем обрезать суммирование в (8.4) до $k, t_f \ll T^A$ и область интегрирования в (8.5) до $|t| \ll T^A$ (здесь $A > 0$ – достаточно большое число).

В оставшихся конечных суммах и в интеграле мы можем разделить части, содержащие $c(l)$. С этой целью подставим (8.12) в (8.84) и (8.89) и выделим из функций $\psi_D(t)$, $\psi_H(k)$ части с $c(l)$, а именно

$$\psi_D(t) = \phi_D(t) + \sum_{l\in\mathcal{L}} c(l)\psi_D(l;t), \quad \psi_H(k) = \phi_H(k) + \sum_{l\in\mathcal{L}} c(l)\psi_H(l;k).$$

Можно показать, что функции $\psi_D(l;t)$, $\psi_H(l;k)$ очень быстро убывают по t и k. Соответственно, моменты (8.4) и (8.5) с функциями $\psi_D(l;t)$, $\psi_H(l;k)$ ограничены некоторой абсолютной константой (без логарифмического роста по T). А значит, эти выражения не подходят на роль главного члена в асимптотической формуле для $\mathcal{M}_2(h;0,0)$.

Таким образом, слагаемые в правой части (8.6), появляющиеся после применения регуляризованной формулы Кузнецова (8.13), не содержат главный член для $\mathcal{M}_2(h;0,0)$. Так, возникает естественный вопрос о возможности применения вместо регуляризованной стандартной версии формулы следа Кузнецова.

Например, в случае L-функций форм Мааса ответ на данный вопрос положительный. Однако, для того чтобы стандартная версия работала необходимо изучать вместо моментов

$$M_{gen}(n) = \sum_j \alpha_j L^n(u_j, 1/2)h(t_j),$$

следующую их модификацию

$$M_{sign}(n) = \sum_j \epsilon_j\alpha_j L^n(u_j, 1/2)h(t_j),$$

где $\epsilon_j = \pm 1$ – знак формы Мааса u_j. Поскольку $L(u_j, 1/2) = 0$ при $\epsilon_j = -1$, эти два момента совпадают! Насколько нам известно, данный трюк с ϵ_j впервые применил Мотохаши [**138**] для изучения вторых моментов L-fфункций форм Мааса. Позже Кузнецов [**12**] также использовал аналогичную технику для доказательства асимптотической формулы для четвёртого момента L-функций форм Мааса. Однако, данный метод не работает для

$$\sum_j h(t_j)\alpha_j L^2(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2).$$

ГЛАВА 9

Формула суммирования Вороного

Формулой Вороного мы называем тождество для суммы следующего вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e\left(\frac{an}{c}\right) F(n), \tag{9.1}$$

где $(a,c) = 1$, $e(x) := e^{2\pi i x}$, $F(n)$ – весовая функция (обычно с компактным носителем или из пространства Шварца $S(\mathbb{R})$ с некоторыми условиями на поведение в нуле и на бесконечности), а a_n – некоторая последовательность, обычно удовлетворяющая некоторым арифметическим свойствам. Изначально Вороной изучал случай $a_n = \tau(n)$ (функция числа делителей n). Исторический обзор формул Вороного можно найти в работе Миллера и Шмидта [**131**], а также во введении другой их статьи [**132**]. Когда a_n равно $\tau(n)$, можно доказать формулу Вороного для (9.1) при помощи формулы суммирования Пуассона, см. [**103**, теорему 4.10]. Также можно построить доказательство, основываясь на том, что $\tau(n)$ является коэффициентом Фурье рядов Эйзенштейна для группы GL(2). Такой подход является более универсальным, позволяя доказать формулы Вороного с a_n равным коэффициентам Фурье различных автоморфных форм. Общая стратегия доказательства формул Вороного для GL(2) описана в [**132**, главе 1].

Наиболее общая версия GL(2) формулы Вороного доказана Ковальским, Мишелем и Вандеркамом в [**118**, аппендиксе A] для голоморфных форм и форм Маасса произвольного уровня D. В этом случае формула Вороного имеет следующий вид (см. [**118**, теорема A.4])

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_g(n) e\left(\frac{an}{c}\right) F(n) \rightsquigarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{g_{D_2}}(n) e\left(\pm\frac{\overline{aD_2}}{c} n\right) F_{\pm}^{\diamond}(n), \tag{9.2}$$

где $D_2 = D/(c,D)$, $F_{\pm}^{\diamond}(n)$ – интегральное преобразование функции $F(x)$ и $g_{D_2}(z)$ – другая автоморфная форма, связанная с формой $g(z)$ при помощи оператора Аткина-Лехнера. Оказывается, что правая часть (9.2) зависит от значения наибольшего общего делителя (c,D). В частных случаях, когда $c \equiv 0 \pmod{D}$ и $(c,D) = 1$, формула проще, чем в общем виде. Заметим, что можно доказать формулу Вороного для любой дроби $\frac{a}{c}$ без условия взаимной простоты, как показано в недавней работе Букера, Милиновича и Нг (см. [**51**]). Также возможно получить обобщение формулы Вороного на случай различных параболических вершин (вместо бесконечности). Формула Вороного такого типа была доказана в работе Ассинга и Корбетта [**23**].

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в изучении формул Вороного для групп высшего ранга. Первый общий результат для GL(3) параболических форм был получен Миллером и Шмидтом [**132**]. Кроме того, различные случаи формул Вороного для GL(n) были доказаны в работах Голфельда–Ли [**87**] и [**88**], Миллера–Шмидта [**133**], Миллера–Жу [**134**], Жу [**185**], Ичино–Темплие [**96**], Корбетта [**69**]. Заметим, что для GL(n) форм формула Вороного имеет вид отличный от (9.2), поскольку в этом случае в правой части тождества (или же сразу в двух частях тождества) возникают гиперсуммы Клоостермана.

Причина такого интереса к формулам Вороного заключается в огромном количестве задач, которые можно решить с их помощью. Например, нетривиальные оценки на центральные значения L-функций и асимптотические формулы для их моментов. В частности, GL(3) формула Вороного нашла приложения в работах [**124**], [**49**], [**143**], [**144**], [**47**]. Хотя применение GL(n) формул Вороного представляет большую сложность, в этом направлении также был достигнут определенный прогресс в работах [**50**], [**61**].

Основной результат данной главы – формула суммирования Вороного вида (9.2) с коэффициентами a_n равными значениям L-рядов Загира

$$\mathscr{L}_n(s) := \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^s} \left(\sum_{1\le t\le 2q;\, t^2\equiv n \pmod{4q}} 1 \right), \quad \operatorname{Re} s = 1/2.$$

Напомним, что $\mathscr{L}_0(s) \neq 0$ только при $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, $\mathscr{L}_0(s) = \zeta(2s-1)$, и если n – фундаментальный дискриминант, то $\mathscr{L}_n(s) = L(s, \chi_n)$, где $L(s, \chi_n)$ – L-функция Дирихле примитивного квадратичного характера χ_n. Как показано в предыдущих главах, эти L-ряды тесно связаны с теоремой о простых геодезических и с первыми моментами L-функций симметрического квадрата. Кроме того, изучение второго момента L-функций симметрического квадрата можно свести к суммам L-рядов Загира следующего вида

$$\sum_l \sum_n \mathscr{L}_{n^2-4l^2}(1/2+it) f(n,l),$$

где $f = f(n,l)$ – некоторая весовая функция. Сделав замену переменных и выполнив некоторые преобразования, можно привести двойную сумму выше к виду, который допускает применение формулы суммирования Вороного, полученной в данной главе.

Известно, что значения $\mathscr{L}_n(s)$ возникают в разложение Фурье–Уиттекера для комбинации рядов Эйзенштейна–Мааса веса $1/2$ и уровня 4 (см. [**27**, лемму 2.2]). Поэтому мы для начала докажем формулу Вороного в общем виде для неголоморфных форм Мааса веса $1/2$ и уровня 4.

Формула Вороного для голоморфных параболических форм полуцелого веса и уровня $N \equiv 0 \pmod 4$ была доказана Дьюком и Иванцом, см. [**76**, теорему 4]. Этот результат

также можно вывести из работы Быковского [**6**]. Заметим, что обе статьи содержат условие $c \equiv 0 \pmod N$. Точная формулировка формулы Вороного для форм Мааса веса 1/2 и уровня 4 дана в [**45**, лемме 10]. Случай форм без параболических вершин изучался в работе Диамантиса и Голфельда [**73**]. Тем не менее, в данной работе не выписана формула Вороного в виде (9.2). Наконец, общий случай формулы Вороного для параболических форм полуцелого веса и уровня $N \equiv 0 \pmod 4$ и с характером Дирихле $\chi \pmod N$ был недавно доказан в работе Ассинга и Корбетта [**24**] методами теории представлений.

Пусть $\mathscr{F}_k(4) := \mathscr{F}(\Gamma_0(4), \vartheta, k, \lambda)$ – пространство форм Мааса полуцелого веса $k \in \{1/2, 3/2\}$, уровня $N = 4$, с тета системой мультикаторов ϑ (определение дано в (9.22), (9.23)) и собственным значением оператора Лапласа $\lambda = 1/4 - \rho^2$.

Базовые сведения о формах Мааса произвольного веса с различными системами мультипликаторов содержатся в [**19**, главе 2], [**168**], а также в различных источниках, на которые ссылается данная работа.

Основной результат данной главы – формула Вороного для формы $f \in \mathscr{F}_k(4)$ и произвольного c. Запишем разложение Фурье–Уиттекера для $f \in \mathscr{F}_k(4)$

$$f(z) = A_0(y) + \sum_{n \neq 0} a_n W_{(\operatorname{sgn} n)\frac{k}{2},\rho}(4\pi|n|y) e(nx), \tag{9.3}$$

где $z = x + iy$, $e(nx) = \exp(2\pi i n x)$, $W_{\nu,\mu}(y)$ – классическая функция Уиттекера и

$$A_0(y) := \begin{cases} a_0 y^{1/2+\rho} + b_0 y^{1/2-\rho} & \rho \neq 0, \\ a_0 y^{1/2} + b_0 y^{1/2} \log y & \rho = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Пусть

$$\mathscr{F}_k^+(4) := \left\{ f \in \mathscr{F}_k(4) : \, a_n = 0 \quad \text{for} \quad (-1)^{k-1/2} n \equiv 2, 3 \pmod 4 \right\}$$

– неголоморфный аналог пространства Конена (см. [**116**], [**159**, (14)]).

Пусть $\phi = \phi(y)$ обозначает "достаточно хорошую функцию". Это означает, что ϕ – функция с компактным носителем в $\mathbb{R}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ или ϕ из пространства Шварца $S(\mathbb{R}')$ бесконечно дифференцируемых функций убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степенной функции при y стремящемся к 0 или ∞ (обычно достаточно того, чтобы ϕ быстро убывала на бесконечности и в нуле для абсолютной сходимости всех интегралов и сумм).

Для ϕ определим два преобразования Меллина

$$\phi^+(s) := \int_0^\infty \phi(y) y^{s-1} dy, \quad \phi^-(s) := \int_0^\infty \phi(-y) y^{s-1} dy. \tag{9.5}$$

Пусть

$$R^\pm(a, x, s) := a \phi^\pm(s) \frac{\pi^s x^{-2s}}{\Gamma(s \pm k/2)}, \tag{9.6}$$

$$\mathcal{R}_f(x,\rho) := R^+(a_0,x,1/2+\rho) + R^+(b_0,x,1/2-\rho) \\ + R^-(a_0,x,1/2+\rho) + R^-(b_0,x,1/2-\rho), \quad (9.7)$$

где a_0, b_0 определены в (9.3), (9.4).

Обозначим через $\Phi^{(+,+)}(x)$ и $\Phi^{(-,-)}(x)$ следующие выражения, содержащие J-функции Бесселя,

$$\Phi^{(\pm,\pm)}(x) := \frac{\cos\pi(k/2\mp\rho)}{\sin(2\pi\rho)}\sqrt{x}J_{-2\rho}(2\sqrt{x}) - \frac{\cos\pi(k/2\pm\rho)}{\sin(2\pi\rho)}\sqrt{x}J_{2\rho}(2\sqrt{x}), \quad (9.8)$$

а также введём обозначения $\Phi^{(+,-)}(x)$, $\Phi^{(-,+)}(x)$ для функций

$$\Phi^{(\pm,\mp)}(x) := \frac{2\sqrt{x}K_{2\rho}(2\sqrt{y})}{\Gamma(1/2\mp k/2-\rho)\Gamma(1/2\mp k/2+\rho)}. \quad (9.9)$$

Наконец, определим интегральные преобразования

$$\widehat{\phi}(y) := \int_0^\infty \left(\frac{\phi(x)}{x}\Phi^{(+,+)}(xy) + \frac{\phi(-x)}{x}\Phi^{(+,-)}(xy)\right)dx, \quad (9.10)$$

$$\widehat{\phi}(-y) := \int_0^\infty \left(\frac{\phi(x)}{x}\Phi^{(-,+)}(xy) + \frac{\phi(-x)}{x}\Phi^{(-,-)}(xy)\right)dx. \quad (9.11)$$

Чтобы записать основной результат в явном виде, необходимо рассмотреть четыре разных случая, поскольку вид формулы суммирования Вороного незначительно меняется в зависимости от условий делимости.

Для простоты записи введём следующие обозначения

$$\mathbf{w}_k := \frac{\sqrt{2}}{i^{(k-1/2)(k+1/2)}}.$$

Теорема 9.0.1. *При* $(c,2)=1$ *и* $4ad \equiv -1 \pmod c$ *определим*

$$M_1 := \begin{pmatrix} \frac{4ad+1}{c} & a \\ 4d & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4). \quad (9.12)$$

Тогда для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнено тождество*

$$\sum_{n\neq 0}\phi(n)a_n e\left(\frac{an}{c}\right) = \vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\mathcal{R}_f(4c,\rho) + \vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{\pi^2 n}{c^2}\right)a_{4n}e\left(\frac{dn}{c}\right). \quad (9.13)$$

Теорема 9.0.2. *При* $c \equiv 0 \pmod 4$ *и* $ad \equiv 1 \pmod 4$ *определим*

$$M_2 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4). \quad (9.14)$$

Тогда для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнено тождество*

$$\sum_{n\neq 0}\phi(n)a_n e\left(\frac{an}{c}\right) = \vartheta(M_2)i^k\mathcal{R}_f(c,\rho) + \vartheta(M_2)i^k\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right)a_n e\left(-\frac{dn}{c}\right). \quad (9.15)$$

Теорема 9.0.3. *При* $(c,2)=1$ *и* $4ad\equiv -1 \pmod c$ *определим*

$$M_3 := \begin{pmatrix} \frac{4ad+1}{c} & d \\ 4a & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4). \tag{9.16}$$

Тогда для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнено тождество*

$$\sum_{n\neq 0} \phi(n) a_{4n} e\left(\frac{an}{c}\right) = \frac{1}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k}\mathcal{R}_f(2c,\rho) + \frac{1}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k}\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{\pi^2 n}{c^2}\right) a_n e\left(\frac{dn}{c}\right). \tag{9.17}$$

Теорема 9.0.4. *При* $c\equiv 2 \pmod 4$ *введём обозначение* $c_1 = c/2$. *При* $2ad_5 \equiv -1 \pmod{c_1}$, $8ad_4 \equiv -1 \pmod{c_1}$ *определим*

$$M_4 := \begin{pmatrix} \frac{8ad_4+1}{c_1} & d_4 \\ 8a & c_1 \end{pmatrix}, \quad M_5 := \begin{pmatrix} \frac{2(a+c_1)d_5+1}{c_1} & \frac{a+c_1}{2} \\ 4d_5 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнено тождество*

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq 0} \phi(n) a_n e\left(\frac{an}{c}\right) = {} & \frac{2}{\vartheta(M_4)\mathbf{w}_k}\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{\pi^2 n}{4c_1^2}\right) a_n e\left(\frac{d_4 n}{c_1}\right) \\ & + \frac{2}{\vartheta(M_4)\mathbf{w}_k}\mathcal{R}_f(4c_1,\rho) - \vartheta(M_5)\mathbf{w}_k\mathcal{R}_f(4c_1,\rho) \\ & - \vartheta(M_5)\mathbf{w}_k\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{\pi^2 n}{c_1^2}\right) a_{4n} e\left(\frac{d_5 n}{c_1}\right). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Заметим, что теоремы 9.0.2–9.0.4 отличаются от более общего случая, который изучали Ассинг и Корбетт [**24**], в двух аспектах. Во-первых, мы рассматриваем не только параболические формы Мааса, но также и непараболические. Во-вторых, четыре теоремы, которые приведены выше, покрывают все возможные значения c.

Формула суммирования Вороного для L-рядов Загира непосредственно следует из предыдущих теорем.

Следствие 9.0.5. *При* $k=1/2$ *формулы* (9.15), (9.13), (9.17) *и* (9.18) *справедливы для*

$$a_n = \frac{\pi^\rho \Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\frac{\operatorname{sgn} n}{4}\right)\mathscr{L}_n\left(\frac{1}{2}+2\rho\right)}{2^{1+2\rho}\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\rho\right)|n|^{1/2-\rho}},$$

$$a_0 = \zeta(1+4\rho), \quad b_0 = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(2\rho)\zeta(4\rho)}{4^{2\rho}\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\rho\right)},$$

если $\rho\neq 0$, *и для*

$$a_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sgn} n}{4}\right)\mathscr{L}_n\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi|n|}}, \quad a_0 = \gamma - \log(4\pi), \quad b_0 = \frac{1}{2},$$

если $\rho = 0$.

Доказательство теорем 9.0.2–9.0.4 следует классической схеме. Записывая тестовую функцию $\phi = \phi(n)$ через обратное преобразование Меллина, мы сводим нашу задачу к изучению рядов Дирихле

$$L^+(f,s,a/c) := \sum_{n>0} \frac{a_n}{n^s} e\left(\frac{an}{c}\right), \quad L^-(f,s,a/c) := \sum_{n<0} \frac{a_n}{|n|^s} e\left(\frac{an}{c}\right), \tag{9.19}$$

$$L_4^+(f,s,a/c) := \sum_{n>0} \frac{a_{4n}}{n^s} e\left(\frac{an}{c}\right), \quad L_4^-(f,s,a/c) := \sum_{n<0} \frac{a_{4n}}{|n|^s} e\left(\frac{an}{c}\right). \tag{9.20}$$

Нам необходимо получить функциональные уравнения для данных рядов (см. раздел 9.6), а также определить местоположение их полюсов (см. раздел 9.5). Для этого в разделе 9.3 мы применяем метод Мюллера с небольшими изменениями. Основная идея – выразить L-функции в терминах

$$T(f,s,a/c) := \int_0^\infty \left(f(yi + a/c) - A_0(y)\right) y^{s-1} dy$$

и $T(E_k f, s, a/c)$, где E_k обозначает понижающий оператор Мааса (см. (9.25), (9.26)). Тогда функциональные уравнения, связывающие L-функции в (9.19) и (9.20) следуют из функциональных уравнений для $T(f,s,a/c)$ и $T(E_k f, s, a/c)$, которые доказаны в разделе 9.4 при помощи некоторых отношений модулярности из раздела 9.2. Мы хотели бы подчеркнуть, что именно в этом месте доказательства необходимо рассматривать четыре различных случая в зависимости от условий на c как в теоремах 9.0.2–9.0.4.

9.1. Основные теоретические сведения

В этом разделе мы собрали необходимые для нашего доказательства результаты о формах Мааса полуцелого веса в основном из [**159**, раздела 4.1], также см. [**19**, главу 2], [**168**] и ссылки из этих работ.

Для матрицы $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и $k = 1/2$ определим оператор

$$\left(f\big|_k M\right)(z) := \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^{-k} f(Mz). \tag{9.21}$$

Для $M \in \Gamma_0(4)$ система мультипликаторов определяется для $k = 1/2$ как на [**168**, стр. 2380], а именно

$$\vartheta_{1/2}(M) := \bar{\epsilon_d} \left(\frac{c}{d}\right), \tag{9.22}$$

где $\left(\frac{c}{d}\right)$ определён на [**164**, стр.442], $\epsilon_d = 1$ при $d \equiv 1 \pmod 4$ и $\epsilon_d = i$ при $d \equiv -1 \pmod 4$. Для $k = 3/2$ мультипликатор является сопряжением (9.22) и определён как

$$\vartheta_{3/2}(M) := \left(\frac{-1}{d}\right) \bar{\epsilon_d} \left(\frac{c}{d}\right). \tag{9.23}$$

В соответствии с [**101**, разделом 2.6]

$$\vartheta(M)\vartheta(M^{-1}) = 1,$$

если $M \in \Gamma_0(4)$ и имеет вид отличный от $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ с $d < 0$.

При $M \in \Gamma_0(4)$ запишем свойство модулярности

$$\left(f\big|_k M\right)(z) = \vartheta(M) f(z). \tag{9.24}$$

Далее определим понижающий оператор Мааса

$$\mathbf{E}_k := y\left(i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{k}{2}. \tag{9.25}$$

Выполнено следующее разложение Фурье на бесконечности [**142**, (46)]

$$\mathbf{E}_k f(z) = \mathbf{E}_k(A_0(y)) + \gamma(k/2,\rho)\sum_{n>0} a_n W_{k/2-1,\rho}(4\pi n y)e(nx) + \sum_{n<0} a_n W_{1-k/2,\rho}(4\pi|n|y)e(nx), \tag{9.26}$$

где

$$\gamma(\alpha,\rho) := \rho^2 - (\alpha - 1/2)^2.$$

Из [**168**, раздела 4.4] следует, что $\mathbf{E}_k f \in \mathscr{F}_{k-2}(4)$. Применяя (9.21), находим, что для $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ выполнено тождество

$$(\mathbf{E}_k f\big|_{k-2} M)(z) = \left(\frac{cz+d}{|cz+d|}\right)^{-k+2} \mathbf{E}_k f(Mz). \tag{9.27}$$

Выполнено свойство (см. [**160**, лемму 3.1], [**75**, (4.6)])

$$\mathbf{E}_k(f\big|_k \gamma) = (\mathbf{E}_k f)\big|_{k-2}\gamma, \quad \gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}). \tag{9.28}$$

Определим на пространстве форм Мааса полуцелого веса для группы $\Gamma_0(4)$ следующие операторы

$$(f\big|U)(z) := \frac{2^k}{4}\sum_{v=0}^{3} f\left(\frac{z+v}{4}\right),$$

$$(f\big|W)(z) := \left(\frac{-iz}{|z|}\right)^{-k} f\left(\frac{-1}{4z}\right). \tag{9.29}$$

Лемма 9.1.1. *Для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ с разложением в ряд Фурье* (9.3) *выполнены тождества*

$$(f\big|U)(z) = 2^k\left(A_0(y/4) + \sum_{n\neq 0} a_{4n} W_{(\operatorname{sgn} n)\frac{k}{2},\rho}(4\pi|n|y)e(nx)\right), \tag{9.30}$$

$$(f\big|W)(z) = \mathbf{w}_k \left(A_0(y/4) + \sum_{n\neq 0} a_{4n} W_{(\operatorname{sgn} n)\frac{k}{2},\rho}(4\pi|n|y) e(nx) \right), \tag{9.31}$$

где

$$\mathbf{w}_k = \frac{\sqrt{2}}{i^{(k-1/2)(k+1/2)}}.$$

Доказательство. Тождество (9.30) совпадает с [**159**, (18)]. В соответствии [**159**, утверждением 4.1]

$$f\big|U\big|W = 2^{k-1/2} i^{(k+1/2)(k-1/2)} f. \tag{9.32}$$

Из прямых вычислений

$$f\big|W\big|W = f. \tag{9.33}$$

Применяя оператор $\big|W$ к левой и правой частям (9.32) и применяя (9.33), получаем

$$f\big|U = 2^{k-1/2} i^{(k+1/2)(k-1/2)} f\big|W.$$

Тогда (9.31) следует из (9.30). □

9.2. Основные тождества

Лемма 9.2.1. *Предположим, что* $M_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(4)$. *Тогда для* $f \in \mathscr{F}_k(4)$

$$f\left(\frac{a}{c} + iy\right) = \vartheta(M_2) i^k f\left(-\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 y}\right), \tag{9.34}$$

$$\mathbf{E}_k f\left(\frac{a}{c} + iy\right) = -\vartheta(M_2) i^k \mathbf{E}_k f\left(-\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 y}\right). \tag{9.35}$$

Доказательство. Пусть

$$z_1 := \frac{a}{c} + iy, \quad z_2 := -\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 y}.$$

Тогда $z_1 = M_2 z_2$. Применяя (9.21) и (9.24), получаем

$$f(z_1) = f(M_2 z_2) = \left(\frac{cz_2 + d}{|cz_2 + d|}\right)^k (f\big|_k M_2)(z_2) = \vartheta(M_2) i^k f(z_2). \tag{9.36}$$

Свойство (9.34) следует из (9.36).

Используя (9.27), (9.28) и (9.24), мы доказываем тождество

$$\mathbf{E}_k f(z_1) = \mathbf{E}_k f(M_2 z_2) = i^{k-2}((\mathbf{E}_k f)\big|_{k-2} M_2)(z_2) = i^{k-2} \mathbf{E}_k (f\big|_k M_0)(z_2) = \vartheta(M_2) i^{k-2} \mathbf{E}_k f(z_2)$$

и завершаем доказательство (9.35).

□

Лемма 9.2.2. *Предположим, что* $(c,2)=1$ *и* $4ad\equiv -1 \pmod{c}$. *Пусть*

$$M_1=\begin{pmatrix} \frac{4ad+1}{c} & a \\ 4d & c \end{pmatrix}\in\Gamma_0(4).$$

Тогда для $f\in\mathscr{F}_k(4)$

$$f\left(\frac{a}{c}+iy\right)=\vartheta(M_1)(f\big|W)\left(\frac{d}{c}+\frac{i}{4c^2y}\right), \tag{9.37}$$

$$\mathbf{E}_k f\left(\frac{a}{c}+iy\right)=-\vartheta(M_1)\mathbf{E}_k\left(f\big|W\right)\left(\frac{d}{c}+\frac{i}{4c^2y}\right). \tag{9.38}$$

Доказательство. Пусть

$$z_1:=\frac{a}{c}+iy,\quad z_4:=\frac{d}{c}+\frac{i}{4c^2y},\quad A:=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{pmatrix},\quad z_3:=Az_4.$$

Аналогично [**77**, главе 4] и [**113**, главе 2] получаем тождество

$$z_1=M_1Az_4=M_1z_3.$$

С его помощью, а также применяя (9.21),(9.24) и (9.29), доказываем, что

$$f(z_1)=f(M_1z_3)=\vartheta(M_1)\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^k f(z_3)$$
$$=\vartheta(M_1)\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^k\left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^k\left(f\big|W\right)(z_4).$$

Непосредственные вычисления приводят к равенству

$$\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^k\left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^k=\left(\frac{i|z_4|}{z_4}\right)^k\left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^k=1.$$

Это завершает доказательство (9.37).

Применяя (9.27), (9.28) и (9.24), получаем

$$\mathbf{E}_kf(z_1)=\mathbf{E}_kf(M_1z_3)=\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^{k-2}\left((\mathbf{E}_kf)\big|_{k-2}M_1\right)(z_3)$$
$$=\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^{k-2}\mathbf{E}_k\left(f\big|_kM_1\right)(z_3)=\vartheta(M_1)\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^{k-2}\mathbf{E}_kf(z_3). \tag{9.39}$$

Заметим, что для любого $z\in\mathbf{H}$ и $W_2:=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ выполнено равенство

$$f(Az)=f\left(-\frac{1}{4z}\right)=f(W_2z).$$

Из (9.21) и (9.29) следует, что

$$\left(f\big|_kW_2\right)(z)=\left(\frac{z}{|z|}\right)^{-k}\left(\frac{-iz}{|z|}\right)^k\left(f\big|W\right)(z).$$

Применяя (9.27) и (9.28) ещё раз, находим

$$\mathbf{E}_k f(z_3) = \mathbf{E}_k f(Az_4) = \mathbf{E}_k f(W_2 z_4) = \left(\frac{2z_4}{|2z_4|}\right)^{k-2} \left((\mathbf{E}_k f)\big|_{k-2} W_2\right)(z_4)$$
$$= \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{k-2} \mathbf{E}_k\left(f\big|_k W_2\right)(z_4) = \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{-2} \left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^{k} \mathbf{E}_k\left(f\big|W\right)(z_4). \quad (9.40)$$

Подставляя (9.40) в (9.39) и применяя тождество

$$\left(\frac{4dz_3+c}{|4dz_3+c|}\right)^{k-2} \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{-2} \left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^{k}$$
$$= \left(\frac{i|z_4|}{z_4}\right)^{k-2} \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{-2} \left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^{k} = \left(\frac{z_4}{|z_4|}\right)^{-2} \left(\frac{-iz_4}{|z_4|}\right)^{2} = -1,$$

мы доказываем (9.38). □

Лемму 9.2.2 можно записать также в обратном порядке.

Лемма 9.2.3. *Предположим, что* $(c,2)=1$ *и* $4ad \equiv -1 \pmod{c}$. *Пусть*

$$M_3 = \begin{pmatrix} \frac{4ad+1}{c} & d \\ 4a & c \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4).$$

Тогда для $f \in \mathscr{F}_k(4)$ *выполнены тождества*

$$\left(f\big|W\right)\left(\frac{a}{c}+iy\right) = \frac{1}{\vartheta(M_3)} f\left(\frac{d}{c}+\frac{i}{4c^2 y}\right), \quad (9.41)$$

$$\mathbf{E}_k\left(f\big|W\right)\left(\frac{a}{c}+iy\right) = \frac{-1}{\vartheta(M_3)} \mathbf{E}_k f\left(\frac{d}{c}+\frac{i}{4c^2 y}\right).$$

9.3. Некоторые результаты Мюллера

В этом разделе мы выразим L-функции $L^{\pm}(f,s,a/c)$ и $L_4^{\pm}(f,s,a/c)$, которые определены в (9.19) и (9.20) соответственно, через регуляризованный интеграл

$$T(f,s,a/c) := \int_0^\infty \left(f(yi+a/c) - A_0(y)\right) y^{s-1} dy$$
$$= \sum_{n\neq 0} \frac{a_n e(an/c)}{(2\pi|n|)^s} \int_0^\infty W_{(\operatorname{sgn} n)\frac{k}{2},\rho}(2y) y^{s-1} dy. \quad (9.42)$$

Заметим, что мы вычли из $f(yi+a/c)$ его нулевой коэффициент в разложении Фурье.

С этой целью мы воспользуемся методом и некоторыми результатами Мюллера. Фактически, единственное отличие в нашем случае – наличие множителя $e(an/c)$, который возникает в (9.19)-(9.20), а также в (9.42).

Рассмотрим интеграл

$$\Gamma_{\alpha,\rho}(s) := \int_0^\infty W_{\alpha,\rho}(2y) y^{s-1} dy,$$

где $W_{\alpha,\rho}(y)$ – стандартная функция Уиттекера, см. [**142**, главу 3]. В соответствии с [**142**, (22)]

$$\Gamma_{\alpha,\rho}(s) = 2^{\alpha}\frac{\Gamma(s+\rho+1/2)\Gamma(s-\rho+1/2)}{\Gamma(s+1-\alpha)} \times {}_2F_1\left(1/2+\rho-\alpha, 1/2-\rho-\alpha, s+1-\alpha; 1/2\right). \quad (9.43)$$

Выполнено тождество

$$T(f,s,a/c) = \frac{\Gamma_{k/2,\rho}(s)}{(2\pi)^s}L^+(f,s,a/c) + \frac{\Gamma_{-k/2,\rho}(s)}{(2\pi)^s}L^-(f,s,a/c), \quad (9.44)$$

и, рассуждая как при доказательстве [**142**, (47)], мы показываем, что

$$T(\mathbf{E}_k f,s,a/c) = \frac{\gamma(k/2,\rho)}{(2\pi)^s}\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)L^+(f,s,a/c) + \frac{\Gamma_{1-k/2,\rho}(s)}{(2\pi)^s}L^-(f,s,a/c). \quad (9.45)$$

Для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$, применяя (9.31), получаем

$$T(f\big|W,s,a/c) = \frac{\mathbf{w}_k\Gamma_{k/2,\rho}(s)}{(2\pi)^s}L_4^+(f,s,a/c) + \frac{\mathbf{w}_k\Gamma_{-k/2,\rho}(s)}{(2\pi)^s}L_4^-(f,s,a/c), \quad (9.46)$$

$$T(\mathbf{E}_k(f\big|W),s,a/c) = \frac{\mathbf{w}_k\gamma(k/2,\rho)}{(2\pi)^s}\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)L_4^+(f,s,a/c) + \frac{\mathbf{w}_k}{(2\pi)^s}\Gamma_{1-k/2,\rho}(s)L_4^-(f,s,a/c). \quad (9.47)$$

Пусть (см. [**142**, (27)])

$$\Delta_\rho(s) := \Gamma_{\alpha,\rho}(s)\Gamma_{1-\alpha,\rho}(s) - \gamma(\alpha,\rho)\Gamma_{\alpha-1,\rho}(s)\Gamma_{-\alpha,\rho}(s), \quad (9.48)$$

где $\gamma(\alpha,\rho) := \rho^2 - (\alpha-1/2)^2$. Тогда (см. [**142**, (30)])

$$\Delta_\rho(s) = 2\Gamma(s+\rho+1/2)\Gamma(s-\rho+1/2). \quad (9.49)$$

Из [**142**, (48), (49)] следует, что

$$(2\pi)^{-s}\Delta_\rho(s)L^+(f,s,a/c) = \Gamma_{1-k/2,\rho}(s)T(f,s,a/c) - \Gamma_{-k/2,\rho}(s)T(\mathbf{E}_k f,s,a/c), \quad (9.50)$$

и

$$(2\pi)^{-s}\Delta_\rho(s)L^-(f,s,a/c) = -\gamma(k/2,\rho)\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)T(f,s,a/c) + \Gamma_{k/2,\rho}(s)T(\mathbf{E}_k f,s,a/c). \quad (9.51)$$

Аналогично, применяя (9.46) и (9.47), мы доказываем, что для $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ выполнены тождества

$$(2\pi)^{-s}\Delta_\rho(s)\mathbf{w}_k L_4^+(f,s,a/c) = \Gamma_{1-k/2,\rho}(s)T(f\big|W,s,a/c) - \Gamma_{-k/2,\rho}(s)T(\mathbf{E}_k(f\big|W),s,a/c), \quad (9.52)$$

и

$$(2\pi)^{-s}\Delta_\rho(s)\mathbf{w}_k L_4^-(f,s,a/c)$$
$$= -\gamma(k/2,\rho)\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)T(f\big|W,s,a/c) + \Gamma_{k/2,\rho}(s)T(\mathbf{E}_k(f\big|W),s,a/c). \quad (9.53)$$

9.4. Функциональные уравнения для $T(f,s,a/c)$ и $T(E_kf,s,a/c)$

Лемма 9.4.1. *Пусть* $c\equiv 0 \pmod 4$, $ad\equiv 1 \pmod c$.

Для $f\in\mathscr{F}_k(4)$ *выполнены тождества*

$$T(f,s,a/c) = \frac{\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}T(f,-s,-d/c), \quad (9.54)$$

$$T(\mathbf{E}_kf,s,a/c) = -\frac{\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}T(\mathbf{E}_kf,-s,-d/c), \quad (9.55)$$

где M_2 *определена в* (9.14).

Доказательство. Применяя (9.34), находим

$$\int_0^{1/c} f\left(iy+\frac{a}{c}\right)y^{s-1}dy = \vartheta(M_2)i^k\int_0^{1/c} f\left(\frac{i}{yc^2}-\frac{d}{c}\right)y^{s-1}dy$$
$$= \frac{\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}\int_{1/c}^{\infty} f\left(iy-\frac{d}{c}\right)y^{-s-1}dy. \quad (9.56)$$

Аналогично получаем тождество

$$\int_0^{1/c} f\left(iy-\frac{d}{c}\right)y^{-s-1}dy = \frac{c^{2s}}{\vartheta(M_2)i^k}\int_{1/c}^{\infty} f\left(iy+\frac{a}{c}\right)y^{s-1}dy. \quad (9.57)$$

Следовательно, разбивая интеграл в (9.42) на две части (одна по $0<y<1/c$ и другая по $y>1/c$) и применяя (9.56) для преобразования первой части, мы доказываем, что при $\operatorname{Re}s > 1/2+|\operatorname{Re}\rho|$

$$T(f,s,a/c) = \frac{\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}\int_{1/c}^{\infty}\left(f\left(iy-\frac{d}{c}\right)-A_0(y)\right)y^{-s-1}dy$$
$$+\int_{1/c}^{\infty}\left(f\left(iy+\frac{a}{c}\right)-A_0(y)\right)y^{s-1}dy + \frac{\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}\int_{1/c}^{\infty}A_0(y)y^{-s-1}dy$$
$$-\int_0^{1/c}A_0(y)y^{s-1}dy. \quad (9.58)$$

После вычисления интеграла с $A_0(y)$ правая часть (9.58) позволяет получить мероморфное продолжение $T(f,s,a/c)$ на всю комплексную плоскость. Рассуждая аналогично, но с

применением (9.57), мы находим, что при $\operatorname{Re} s < -1/2 - |\operatorname{Re}\rho|$

$$T(f,-s,-d/c) = \int_{1/c}^{\infty}\left(f\left(iy-\frac{d}{c}\right)-A_0(y)\right)y^{-s-1}dy + \frac{c^{2s}}{\vartheta(M_2)i^k}\int_{1/c}^{\infty}\left(f\left(iy+\frac{a}{c}\right)-A_0(y)\right)y^{s-1}dy + \frac{c^{2s}}{\vartheta(M_2)i^k}\int_{1/c}^{\infty}A_0(y)y^{s-1}dy - \int_0^{1/c}A_0(y)y^{-s-1}dy. \quad (9.59)$$

Сравнивая (9.58) и (9.59) (заметим, что интегралы с $A_0(y)$ были вычислены), мы доказываем (9.54). Аналогично, применяя (9.35), получаем (9.55). □

Те же рассуждения, но с применением леммы 9.2.2 вместо леммы 9.2.1 приводят к доказательству следующего результата.

Лемма 9.4.2. *Предположим, что* $(c,2)=1$ *и* $4ad \equiv -1 \pmod c$. *Для* $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнены тождества*

$$T(f,s,a/c) = \frac{\vartheta(M_1)}{(2c)^{2s}}T(f\big|W,-s,d/c), \quad (9.60)$$

$$T(\mathbf{E}_k f,s,a/c) = \frac{-\vartheta(M_1)}{(2c)^{2s}}T(\mathbf{E}_k(f\big|W),-s,d/c), \quad (9.61)$$

где M_1 *определена в* (9.12).

Доказательство. Метод доказательства совпадает с леммой 9.4.1, но теперь вместо интеграла по $(0,1/c)$ необходимо рассматривать интеграл по $(0,1/(2c))$. Так, применяя (9.37), мы получаем следующий аналог (9.58)

$$T(f,s,a/c) = \frac{\vartheta(M_1)}{(2c)^{2s}}\int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\big|W\left(\frac{d}{c}+iy\right)-\mathbf{w}_k A_0\left(\frac{y}{4}\right)\right)y^{-s-1}dy + \int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\left(\frac{a}{c}+iy\right)-A_0(y)\right)y^{s-1}dy + \frac{\vartheta(M_1)}{(2c)^{2s}}\int_{1/(2c)}^{\infty}\mathbf{w}_k A_0(y/4)y^{-s-1}dy - \int_0^{1/(2c)}A_0(y)y^{s-1}dy, \quad (9.62)$$

где $\operatorname{Re} s$ предполагается достаточно большой. После вычисления интеграла с $A_0(y)$ правая часть (9.62) позволяет получить мероморфное продолжение $T(f,s,a/c)$ на всю комплексную плоскость. Таким образом, для $\operatorname{Re} s$ равного достаточно большому отрицательному

числу мы доказали

$$T(f\big|W,-s,d/c)=\frac{(2c)^{2s}}{\vartheta(M_1)}\int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\left(\frac{a}{c}+iy\right)-A_0\left(y\right)\right)y^{s-1}dy$$
$$+\int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\big|W\left(\frac{d}{c}+iy\right)-\mathbf{w}_kA_0(y/4)\right)y^{-s-1}dy+\frac{(2c)^{2s}}{\vartheta(M_1)}\int_{1/(2c)}^{\infty}A_0(y)y^{s-1}dy$$
$$-\mathbf{w}_k\int_0^{1/(2c)}A_0(y/4)y^{-s-1}dy. \quad (9.63)$$

Наконец, (9.60) следует из (9.62) и (9.63) после вычисления всех интегралов с $A_0(y)$. □

Можно перезаписать лемму 9.4.2 в обратном порядке.

Лемма 9.4.3. *Предположим, что* $(c,2)=1$ *и* $4ad\equiv -1 \pmod c$. *Тогда для* $f\in\mathscr{F}_k^+(4)$ *выполнены тождества*

$$T(f\big|W,s,a/c)=\frac{1}{(2c)^{2s}\vartheta(M_3)}T(f,-s,d/c), \quad (9.64)$$

$$T(\mathbf{E}_k(f\big|W),s,a/c)=\frac{-1}{(2c)^{2s}\vartheta(M_3)}T(\mathbf{E}_kf,-s,d/c), \quad (9.65)$$

где M_3 *определена в* (9.16).

Доказательство. Несмотря на то, что тождества (9.64) и (9.65) следуют из (9.60) и (9.61), стоит заметить, что возможно также и прямое доказательство, основанное на следующем аналоге тождества (9.63)

$$T(f\big|W,s,a/c)=\frac{1}{(2c)^{2s}\vartheta(M_3)}\int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\left(\frac{d}{c}+iy\right)-A_0\left(y\right)\right)y^{-s-1}dy$$
$$+\int_{1/(2c)}^{\infty}\left(f\big|W\left(\frac{a}{c}+iy\right)-\mathbf{w}_kA_0(y/4)\right)y^{s-1}dy+\frac{1}{(2c)^{2s}\vartheta(M_3)}\int_{1/(2c)}^{\infty}A_0(y)y^{-s-1}dy$$
$$-\mathbf{w}_k\int_0^{1/(2c)}A_0(y/4)y^{s-1}dy, \quad (9.66)$$

полученном с применением (9.41). □

9.5. Вычисление вычетов

Рассмотрим первый случай $c\equiv 0 \pmod 4$.

Лемма 9.5.1. *Предположим, что* $\rho\neq 0$ *и* $c\equiv 0 \pmod 4$. *Для* $f\in\mathscr{F}_k(4)$ *функции* $L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)$ *голоморфны на* $\mathbb{C}$ *за исключением двух простых полюсов в точках* $s=1/2+\rho$ *и* $s=1/2-\rho$. *Вычеты в них равны*

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi^{1/2+\rho}\vartheta(M_2)i^kc^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2+\rho\pm k/2)}a_0,$$

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi^{1/2-\rho}\vartheta(M_2)i^kc^{-1+2\rho}}{\Gamma(1/2-\rho\pm k/2)}b_0.$$

Доказательство. В соответствии с (9.4) для $\rho \neq 0$ о

$$A_0(y) = a_0 y^{1/2+\rho} + b_0 y^{1/2-\rho}. \tag{9.67}$$

Поэтому с применением (9.25) получаем

$$E_k(A_0(y)) = a_0 y^{1/2+\rho}(k/2 - 1/2 - \rho) + b_0 y^{1/2-\rho}(k/2 - 1/2 + \rho). \tag{9.68}$$

Из (9.58) следует, что

$$\begin{aligned} T(f, s, a/c) = \text{entire function} \\ - \left(\frac{a_0}{1/2 + \rho + s} c^{-1/2-\rho-s} + \frac{b_0}{1/2 - \rho + s} c^{-1/2+\rho-s} \right) \\ - \frac{\vartheta(M_2) i^k}{c^{2s}} \left(\frac{a_0}{1/2 + \rho - s} c^{-1/2-\rho+s} + \frac{b_0}{1/2 - \rho - s} c^{-1/2+\rho+s} \right). \end{aligned} \tag{9.69}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} T(\mathbf{E}_k f, s, a/c) = \text{entire function} \\ - \left(\frac{a_0(k/2 - 1/2 - \rho)}{1/2 + \rho + s} c^{-1/2-\rho-s} + \frac{b_0(k/2 - 1/2 + \rho)}{1/2 - \rho + s} c^{-1/2+\rho-s} \right) \\ + \frac{\vartheta(M_2) i^k}{c^{2s}} \left(\frac{a_0(k/2 - 1/2 - \rho)}{1/2 + \rho - s} c^{-1/2-\rho+s} + \frac{b_0(k/2 - 1/2 + \rho)}{1/2 - \rho - s} c^{-1/2+\rho+s} \right). \end{aligned} \tag{9.70}$$

Применяя (9.50) и (9.51) вместе с (9.43), (9.48) и учитывая, что $\Gamma_{\alpha,\rho}(s)/\Delta_\rho(s)$ – целая функция (см. [**142**, (22) и лемму 3.1]), мы приходим к выводу, что расположение полюсов $L^{\pm}(f, s, a/c)$ совпадает с $T(f, s, a/c)$ и $T(\mathbf{E}_k f, s, a/c)$, а именно они находятся в точках

$$s = 1/2 + \rho, \quad 1/2 - \rho, \quad -1/2 + \rho, \quad -1/2 - \rho.$$

Для $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, +1\}$ положим

$$h^{\mathrm{sgn}(\epsilon_1)}_{\mathrm{sgn}(\epsilon_2)}(s) := \frac{\Gamma_{1-k/2,\rho}(s) + \epsilon_1 \Gamma_{-k/2,\rho}(s)(k/2 - 1/2 + \epsilon_2 \rho)}{\Delta_\rho(s)}. \tag{9.71}$$

Применяя (9.50), (9.69) и (9.70), находим

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho} L^+ \left(f, s, \frac{a}{c} \right) = (2\pi)^{1/2+\rho} \vartheta(M_2) i^k a_0 c^{-1-2\rho} h^+_-(1/2 + \rho).$$

В соответствии со [**142**, стр. 137] (так как $h^+_-(s)$ совпадает с $h^+(s)$, определённой на [**142**, стр. 136 строка -1])

$$h^+_-(1/2 + \rho) = \frac{2^{-1/2-\rho}}{\Gamma(1/2 + \rho + k/2)}. \tag{9.72}$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho} L^+ \left(f, s, \frac{a}{c} \right) = \frac{\pi^{1/2+\rho} \vartheta(M_2) i^k c^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2 + \rho + k/2)} a_0.$$

Далее вычислим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(2\pi)^{-1/2+\rho}b_0h_+^-(-1/2+\rho). \tag{9.73}$$

В соответствии со [**142**, стр. 137] (так как $h_+^-(s)$ совпадает с $h^-(s)$, определённой на [**142**, стр. 137 строка 8]) выполнено равенство $h_+^-(-1/2+\rho)=0$, а значит $L^+(f,s,a/c)$ голоморфна в точке $s=-1/2+\rho$.

Далее вычислим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(2\pi)^{-1/2-\rho}a_0h_-^-(-1/2-\rho).$$

Повторяя рассуждения со [**142**, стр. 137], получаем

$$h_-^-(-1/2-\rho)=\left.\frac{(s+\rho+\frac{1}{2})\Gamma_{\frac{-k}{2},\rho}(s)+\Gamma_{\frac{-k}{2},\rho}(s+1)}{\Delta_\rho(s)}\right|_{s=-1/2-\rho}$$
$$=\left.\frac{\Gamma_{\frac{-k}{2},\rho}(s+1)}{\Delta_\rho(s)}\right|_{s=-1/2-\rho}=0. \tag{9.74}$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=0.$$

Далее вычислим

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\vartheta(M_2)i^kb_0h_+^+(1/2-\rho)}{(2\pi)^{-1/2+\rho}c^{1-2\rho}}.$$

Аналогично [**142**, стр. 137] (см. также [**151**, 15.4.6]) показываем, что

$$h_+^+(1/2-\rho)=\left.\frac{(s+\rho-\frac{1}{2})(s-\rho-\frac{1}{2})\Gamma_{\frac{-k}{2},\rho}(s-1)+(s+\rho-\frac{1}{2})\Gamma_{\frac{-k}{2},\rho}(s)}{\Delta_\rho(s)}\right|_{s=1/2-\rho}$$
$$=\frac{2^{-k/2-1}}{\Gamma(s+k/2)}{}_2F_1\left(\frac{k+1}{2}+\rho,\frac{k+1}{2}-\rho,\frac{k}{2}+s;1/2\right)\Bigg|_{s=1/2-\rho}=\frac{2^{\rho-1/2}}{\Gamma(1/2-\rho+k/2)}. \tag{9.75}$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi^{1/2-\rho}\vartheta(M_2)i^kb_0}{c^{1-2\rho}\Gamma(1/2-\rho+k/2)}.$$

Вычислим полюса $L^-(f,s,a/c)$. Для $\epsilon_1,\epsilon_2\in\{-1,+1\}$ положим

$$g_{\mathrm{sgn}(\epsilon_2)}^{\mathrm{sgn}(\epsilon_1)}(s):=\frac{\gamma(k/2,\rho)\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)+\epsilon_1\Gamma_{k/2,\rho}(s)(k/2-1/2+\epsilon_2\rho)}{\Delta_\rho(s)}. \tag{9.76}$$

Выполнено тождество

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^-\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{-(2\pi)^{1/2+\rho}\vartheta(M_2)i^ka_0g_-^+(1/2+\rho)}{c^{1+2\rho}}.$$

Применяя [**142**, (25), (24)], находим

$$\gamma(k/2,\rho)\Gamma_{k/2-1,\rho}(s)+\Gamma_{k/2,\rho}(s)(k/2-1/2-\rho)$$
$$=(s-1/2-\rho)\Gamma_{k/2,\rho}(s)-(s+\rho-1/2)(s-\rho-1/2)\Gamma_{k/2,\rho}(s-1).$$

Из [**142**, (22)] и [**151**, 15.4.6] следует, что

$$g_-^+(1/2+\rho) = \frac{-2^{k/2-1}}{\Gamma(s-k/2)}{}_2F_1\left(\frac{1-k}{2}+\rho, \frac{1-k}{2}-\rho, s-\frac{k}{2}; 1/2\right)\Bigg|_{s=1/2+\rho} = \frac{-2^{-1/2-\rho}}{\Gamma(1/2+\rho-k/2)}. \quad (9.77)$$

Таким образом,

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^-\left(f, s, \frac{a}{c}\right) = \frac{\pi^{1/2+\rho}\vartheta(M_2)i^k c^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2+\rho-k/2)}a_0.$$

Аналогично, применяя ещё раз [**151**, 15.4.6], получаем, что

$$g_+^+(1/2-\rho) = \frac{-2^{k/2-1}}{\Gamma(s-k/2)}{}_2F_1\left(\frac{1-k}{2}+\rho, \frac{1-k}{2}-\rho, s-\frac{k}{2}; 1/2\right)\Bigg|_{s=1/2-\rho} = \frac{-2^{-1/2+\rho}}{\Gamma(1/2-\rho-k/2)} \quad (9.78)$$

и

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^-\left(f, s, \frac{a}{c}\right) = \frac{-(2\pi)^{1/2-\rho}\vartheta(M_2)i^k b_0 g_+^+(1/2-\rho)}{c^{1-2\rho}} = \frac{\pi^{1/2-\rho}\vartheta(M_2)i^k c^{-1+2\rho}}{\Gamma(1/2-\rho-k/2)}b_0.$$

Далее рассмотрим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^-\left(f, s, \frac{a}{c}\right) = (2\pi)^{-1/2-\rho}a_0 g_-^-(-1/2-\rho).$$

Применяя [**142**, (25)], находим

$$g_-^-(s) = \frac{(s+1/2+\rho)\Gamma_{k/2,\rho}(s) - \Gamma_{k/2,\rho}(s+1)}{\Delta_\rho(s)}. \quad (9.79)$$

Из (9.48) и (9.43) следует, что $g_-^-(-1/2-\rho) = 0$, а значит

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^-\left(f, s, \frac{a}{c}\right) = 0.$$

Аналогично, поскольку

$$g_+^-(-1/2+\rho) = \frac{(s+1/2-\rho)\Gamma_{k/2,\rho}(s) - \Gamma_{k/2,\rho}(s+1)}{\Delta_\rho(s)}\Bigg|_{s=-1/2+\rho} = 0, \quad (9.80)$$

выполнено равенство

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L^-\left(f, s, \frac{a}{c}\right) = (2\pi)^{-1/2+\rho}b_0 g_+^-(-1/2+\rho) = 0.$$

□

Далее рассмотрим случай нечётного c.

Лемма 9.5.2. *Предположим, что* $\rho \neq 0$ *и* $(c,2)=1$. *Для* $f \in \mathscr{F}_k^+(4)$ *функции* $L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)$ *голоморфны на* $\mathbb{C}$ *за исключением двух простых полюсов в точках* $s=1/2+\rho$ *и* $s=1/2-\rho$. *Вычислим вычеты*

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2+\rho}(4c)^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2+\rho\pm k/2)}a_0,$$

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2-\rho}(4c)^{-1+2\rho}}{\Gamma(1/2-\rho\pm k/2)}b_0.$$

Доказательство. Применяя (9.62) и (9.67), находим

$$T(f,s,a/c)=\text{entire function}$$
$$-\left(\frac{a_0(2c)^{-1/2-\rho-s}}{1/2+\rho+s}+\frac{b_0(2c)^{-1/2+\rho-s}}{1/2-\rho+s}\right)$$
$$-\frac{\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k}{4^s(2c)^{2s}}\left(\frac{a_0(8c)^{-1/2-\rho+s}}{1/2+\rho-s}+\frac{b_0(8c)^{-1/2+\rho+s}}{1/2-\rho-s}\right).$$

Аналогично, используя (9.68) и

$$E_k(A_0(y/4))=a_0(y/4)^{1/2+\rho}(k/2-1/2-\rho)+b_0(y/4)^{1/2-\rho}(k/2-1/2+\rho),\tag{9.81}$$

мы доказываем, что

$$T(\mathbf{E}_kf,s,a/c)=\text{entire function}$$
$$-\left(\frac{a_0(k/2-1/2-\rho)}{1/2+\rho+s}(2c)^{-1/2-\rho-s}+\frac{b_0(k/2-1/2+\rho)}{1/2-\rho+s}(2c)^{-1/2+\rho-s}\right)$$
$$+\frac{\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k}{4^s(2c)^{2s}}\left(\frac{a_0(k/2-1/2-\rho)}{(1/2+\rho-s)(8c)^{1/2+\rho-s}}+\frac{b_0(k/2-1/2+\rho)}{(1/2-\rho-s)(8c)^{1/2-\rho-s}}\right).$$

Далее (9.50) и (9.51) вместе с (9.43), (9.48) позволяют сделать вывод, что расположение полюсов функций $L^{\pm}(f,s,a/c)$ совпадает с $T(f,s,a/c)$ и $T(\mathbf{E}_kf,s,a/c)$, а именно полюса находятся в точках

$$s=1/2+\rho,\quad 1/2-\rho,\quad -1/2+\rho,\quad -1/2-\rho.$$

Применяя (9.50), (9.71) и (9.72), находим

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{(2\pi)^{1/2+\rho}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_ka_0}{(4c)^{1+2\rho}}h_-^+(1/2+\rho)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2+\rho}(4c)^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2+\rho+k/2)}a_0.$$

Комбинируя (9.50), (9.71) и (9.72), получаем

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(2\pi)^{-1/2+\rho}b_0h_+^-(-1/2+\rho).$$

Поэтому этот вычет совпадает с (9.73), а значит он равен нулю. Применяя (9.50), (9.71) и (9.74), мы доказываем, что

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(2\pi)^{-1/2-\rho}a_0h_-^-(-1/2+\rho)=0.$$

А из (9.50), (9.71) и (9.75) следует, что

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^+\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{(2\pi)^{1/2-\rho}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k b_0}{(4c)^{1-2\rho}}h_+^+(1/2-\rho)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2-\rho}(4c)^{-1+2\rho}}{\Gamma(1/2-\rho+k/2)}b_0.$$

Приступим к вычислению полюсов $L^-(f,s,a/c)$. Применяя (9.51), (9.76) и (9.77), получаем

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L^-\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{-(2\pi)^{1/2+\rho}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k a_0}{(4c)^{1+2\rho}}g_-^+(1/2+\rho)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2+\rho}(4c)^{-1-2\rho}}{\Gamma(1/2+\rho-k/2)}a_0.$$

Из (9.51), (9.76) и (9.80) следует, что

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L^-\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=(2\pi)^{-1/2+\rho}b_0 g_+^-(-1/2+\rho)=0.$$

Комбинируя (9.51), (9.76) и (9.79), находим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L^-\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=(2\pi)^{-1/2-\rho}b_0 g_-^-(-1/2-\rho)=0.$$

Используя (9.51), (9.76) и (9.78), делаем вывод, что

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L^-\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{-(2\pi)^{1/2-\rho}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k b_0}{(4c)^{1-2\rho}}g_+^+(1/2+\rho)=\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\frac{\pi^{1/2-\rho}(4c)^{-1+2\rho}}{\Gamma(1/2-\rho-k/2)}b_0.$$

□

Лемма 9.5.3. *Предположим, что $\rho\neq 0$ и $(c,2)=1$. Для $f\in\mathscr{F}_k^+(4)$ функции $L_4^\pm\left(f,s,\frac{a}{c}\right)$ голоморфны на $\mathbb{C}$ за исключением двух простых полюсов в точках $s=1/2+\rho$ и $s=1/2-\rho$ с вычетами*

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L_4^\pm\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi^{1/2+\rho}(2c)^{-1-2\rho}a_0}{\mathbf{w}_k\vartheta(M_3)\Gamma(1/2+\rho\pm k/2)},$$

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L_4^\pm\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi^{1/2-\rho}(2c)^{-1+2\rho}b_0}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k\Gamma(1/2-\rho\pm k/2)}.$$

Доказательство. Применяя (9.66) и (9.67), находим

$$T(f\big|W,s,a/c)=\text{entire function}$$
$$-\mathbf{w}_k 4^s\left(\frac{a_0(8c)^{-1/2-\rho-s}}{1/2+\rho+s}+\frac{b_0(8c)^{-1/2+\rho-s}}{1/2-\rho+s}\right)$$
$$-\frac{1}{\vartheta(M_3)(2c)^{2s}}\left(\frac{a_0(2c)^{-1/2-\rho+s}}{1/2+\rho-s}+\frac{b_0(2c)^{-1/2+\rho+s}}{1/2-\rho-s}\right).$$

Аналогично из (9.68) и (9.81) следует, что

$$T(\mathbf{E}_k(f\big|W),s,a/c)=\text{entire function}$$
$$-\mathbf{w}_k 4^s\left(\frac{a_0(k/2-1/2-\rho)}{1/2+\rho+s}(8c)^{-1/2-\rho-s}+\frac{b_0(k/2-1/2+\rho)}{1/2-\rho+s}(8c)^{-1/2+\rho-s}\right)$$
$$+\frac{1}{\vartheta(M_3)(2c)^{2s}}\left(\frac{a_0(k/2-1/2-\rho)}{(1/2+\rho-s)(2c)^{1/2+\rho-s}}+\frac{b_0(k/2-1/2+\rho)}{(1/2-\rho-s)(2c)^{1/2-\rho-s}}\right).$$

В соответствии с (9.52), (9.53), (9.43) и (9.48) функции $L_4^{\pm}(f,s,a/c)$ имеют возможные полюса в тех же точках, что и функции $T(f\Big|W,s,a/c)$ а $T(\mathbf{E}_k(f\Big|W),s,a/c)$, а именно

$$s=1/2+\rho,\quad 1/2-\rho,\quad -1/2+\rho,\quad -1/2-\rho.$$

Применяя (9.52), (9.71) and (9.72), получаем

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L_4^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{(2\pi)^{1/2+\rho}a_0}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k(2c)^{1+2\rho}}h_-^{+}(1/2+\rho)=\frac{\pi^{1/2+\rho}(2c)^{-1-2\rho}}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k\Gamma(1/2+\rho+k/2)}a_0.$$

Комбинируя (9.52), (9.71) и (9.72), мы доказываем, что

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L_4^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(8\pi)^{-1/2+\rho}b_0h_+^{-}(-1/2+\rho)=0.$$

Применяя (9.52), (9.71) и (9.74), находим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L_4^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=-(8\pi)^{-1/2-\rho}a_0h_-^{-}(-1/2+\rho)=0.$$

Из (9.52), (9.71) и (9.75) следует, что

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L_4^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{(2\pi)^{1/2-\rho}b_0}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k(2c)^{1-2\rho}}h_+^{+}(1/2-\rho)=\frac{\pi^{1/2-\rho}(2c)^{-1+2\rho}}{\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k\Gamma(1/2-\rho+k/2)}b_0.$$

Вычислим полюса $L_4^{-}(f,s,a/c)$. Применяя (9.53), (9.76) и (9.77), получаем

$$\mathcal{R}_{s=1/2+\rho}L_4^{-}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{-(2\pi)^{1/2+\rho}a_0}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k(2c)^{1+2\rho}}g_-^{+}(1/2+\rho)=\frac{\pi^{1/2+\rho}(2c)^{-1-2\rho}}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k\Gamma(1/2+\rho-k/2)}a_0.$$

В соответствии с (9.53), (9.76) и (9.80), находим

$$\mathcal{R}_{s=-1/2+\rho}L_4^{-}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=(8\pi)^{-1/2+\rho}b_0g_+^{-}(-1/2+\rho)=0.$$

Используя (9.53), (9.76) и (9.79), мы вычисляем

$$\mathcal{R}_{s=-1/2-\rho}L_4^{-}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=(8\pi)^{-1/2-\rho}a_0h_-^{-}(-1/2+\rho)=0.$$

Наконец, из (9.53), (9.76) и (9.78) следует, что

$$\mathcal{R}_{s=1/2-\rho}L_4^{-}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)=\frac{-(2\pi)^{1/2-\rho}b_0}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k(2c)^{1-2\rho}}g_+^{+}(1/2-\rho)=\frac{\pi^{1/2-\rho}(2c)^{-1+2\rho}}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k\Gamma(1/2-\rho-k/2)}b_0.$$

□

9.6. Функциональные уравнения

Пусть

$$U^+_{\alpha,\rho}(s) := \Gamma_{1-\alpha,\rho}(s)\Gamma_{\alpha,\rho}(-s) + \gamma(\alpha,\rho)\Gamma_{\alpha-1,\rho}(-s)\Gamma_{-\alpha,\rho}(s),$$

$$U^-_{\alpha,\rho}(s) := \Gamma_{1-\alpha,\rho}(s)\Gamma_{-\alpha,\rho}(-s) + \Gamma_{1-\alpha,\rho}(-s)\Gamma_{-\alpha,\rho}(s).$$

В соответствии с [**142**, леммой 3.1] для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\rho \in \mathbb{C}$ выполнены тождества

$$U^+_{\alpha,\rho}(s) = 2\pi \frac{\sin\pi(s+\alpha)}{\sin\pi(s-\rho+1/2)\sin\pi(s+\rho+1/2)}, \tag{9.82}$$

$$U^-_{\alpha,\rho}(s) = 2\pi^2 \frac{(\Gamma(\alpha+\rho+1/2)\Gamma(\alpha-\rho+1/2))^{-1}}{\sin\pi(s-\rho+1/2)\sin\pi(s+\rho+1/2)}. \tag{9.83}$$

Используя (9.50) и (9.51), затем применяя (9.54) и (9.55), и наконец (9.44) и (9.45), мы находим (см. также [**142**, теорему 4.1]), что для $c \equiv 0 \pmod 4$

$$L^+(f,s,a/c) = \frac{(2\pi)^{2s}\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}\Delta_\rho(s)}\left(L^+(f,-s,-d/c)U^+_{k/2,\rho}(s) + L^-(f,-s,-d/c)U^-_{k/2,\rho}(s)\right),$$

$$L^-(f,s,a/c) = \frac{(2\pi)^{2s}\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}\Delta_\rho(s)} \times \left(-L^+(f,-s,-d/c)\gamma(k/2,\rho)U^-_{1-k/2,\rho}(-s) - L^-(f,-s,-d/c)U^+_{k/2,\rho}(-s)\right).$$

В соответствии со [**142**, стр. 136]

$$-\gamma(\alpha,\rho)U^-_{1-\alpha,\rho}(-s) = U^-_{-\alpha,\rho}(s), \quad -U^+_{\alpha,\rho}(-s) = U^+_{-\alpha,\rho}(s).$$

Применяя (9.49), (9.82) и (9.83), получаем

$$\mathbf{G}^+(k,s) := \frac{U^+_{k/2,\rho}(s)}{\Delta_\rho(s)} = \frac{\sin\pi(s+k/2)}{\pi}\Gamma(1/2-\rho-s)\Gamma(1/2+\rho-s), \tag{9.84}$$

$$\mathbf{G}^-(k,s) := \frac{U^-_{k/2,\rho}(s)}{\Delta_\rho(s)} = \frac{\Gamma(1/2-\rho-s)\Gamma(1/2+\rho-s)}{\Gamma(1/2-\rho+k/2)\Gamma(1/2+\rho+k/2)}. \tag{9.85}$$

Лемма 9.6.1. *Для $f \in \mathscr{F}_k(4)$, $c \equiv 0 \pmod 4$ и $ad \equiv 1 \pmod 4$ выполнены функциональные уравнения*

$$L^+(f,s,a/c) = \frac{(2\pi)^{2s}\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^+(k,s)L^+(f,-s,-d/c) + \mathbf{G}^-(k,s)L^-(f,-s,-d/c)\Big), \tag{9.86}$$

$$L^-(f,s,a/c) = \frac{(2\pi)^{2s}\vartheta(M_2)i^k}{c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^-(-k,s)L^+(f,-s,-d/c) + \mathbf{G}^+(-k,s)L^-(f,-s,-d/c)\Big). \tag{9.87}$$

Теперь рассмотрим случай $(c,2)=1$. Используя (9.50), (9.51), применяя (9.60), (9.61), и наконец (9.46), (9.47), мы доказываем (см. также [**142**, теорему 4.1]) следующий результат.

Лемма 9.6.2. *Для $f\in\mathscr{F}_k^+(4)$, $(c,2)=1$ и $4ad\equiv -1 \pmod c$ выполнены функциональные уравнения*

$$L^+(f,s,a/c)=\frac{\pi^{2s}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k}{c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^+(k,s)L_4^+(f,-s,d/c)+\mathbf{G}^-(k,s)L_4^-(f,-s,d/c)\Big),$$

$$L^-(f,s,a/c)=\frac{\pi^{2s}\vartheta(M_1)\mathbf{w}_k}{c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^-(-k,s)L_4^+(f,-s,d/c)+\mathbf{G}^+(-k,s)L_4^-(f,-s,d/c)\Big).$$

Аналогично, используя (9.52), (9.53), (9.64), (9.65), и наконец (9.44), (9.45), мы доказываем (см. также [**142**, теорему 4.1]) следующую лемму.

Лемма 9.6.3. *Для $f\in\mathscr{F}_k^+(4)$, $(c,2)=1$ и $4ad\equiv -1 \pmod c$ выполнены функциональные уравнения*

$$L_4^+(f,s,a/c)=\frac{\pi^{2s}}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^+(k,s)L^+(f,-s,d/c)+\mathbf{G}^-(k,s)L^-(f,-s,d/c)\Big),$$

$$L_4^-(f,s,a/c)=\frac{\pi^{2s}}{\vartheta(M_3)\mathbf{w}_k c^{2s}}\Big(\mathbf{G}^-(-k,s)L^+(f,-s,d/c)+\mathbf{G}^+(-k,s)L^-(f,-s,d/c)\Big).$$

9.7. Специальные функции

Напомним обозначение для преобразования Меллина от функции ϕ

$$\phi^+(s):=\int_0^\infty \phi(y)y^{s-1}dy,\quad \phi^-(s):=\int_0^\infty \phi(-y)y^{s-1}dy.$$

Применяя обратную формулу Меллина, получаем, что для любого $y\in(0,\infty)$

$$\phi(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\phi^+(s)y^{-s}ds,\quad \phi(-y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\phi^-(s)y^{-s}ds, \tag{9.88}$$

где μ – произвольное число. Для $y\in(0,\infty)$ и $\mu>|\rho|-1/2$ положим

$$\widehat{\phi}(y):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}y^{-s}(\mathbf{G}^+(k,-s)\phi^+(-s)+\mathbf{G}^-(-k,-s)\phi^-(-s))ds, \tag{9.89}$$

$$\widehat{\phi}(-y):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}y^{-s}(\mathbf{G}^-(k,-s)\phi^+(-s)+\mathbf{G}^+(-k,-s)\phi^-(-s))ds, \tag{9.90}$$

где $\mathbf{G}^-(\pm k,-s)$, $\mathbf{G}^+(\pm k,-s)$ определены в (9.85), (9.84).

Лемма 9.7.1. *Выполнены следующие тождества*

$$\widehat{\phi}(y)=\int_0^\infty\left(\frac{\phi(x)}{x}\Phi^{(+,+)}(xy)+\frac{\phi(-x)}{x}\Phi^{(+,-)}(xy)\right)dx, \tag{9.91}$$

$$\widehat{\phi}(-y)=\int_0^\infty\left(\frac{\phi(x)}{x}\Phi^{(-,+)}(xy)+\frac{\phi(-x)}{x}\Phi^{(-,-)}(xy)\right)dx. \tag{9.92}$$

Доказательство. Из формулы типа Парсеваля для преобразования Меллина (см. [**151**, (1.14.36)]) следует, что (9.91) и (9.92) выполнены с

$$\Phi^{(+,+)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}x^{-s}\mathbf{G}^{+}(k,-s)ds,\ \Phi^{(+,-)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}x^{-s}\mathbf{G}^{-}(-k,-s)ds,$$

$$\Phi^{(-,-)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}x^{-s}\mathbf{G}^{+}(-k,-s)ds,\ \Phi^{(-,+)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}x^{-s}\mathbf{G}^{-}(k,-s)ds.$$

Подставляя (9.84), сдвигая линию интегрирования влево и вычисляя вычеты в точках

$$s_{+}=-\frac{1}{2}+\rho-j,\quad s_{-}=-\frac{1}{2}-\rho-j,$$

получаем

$$\begin{aligned}\Phi^{(+,+)}(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\frac{\sin\pi(-s+k/2)}{\pi x^{s}}\Gamma(1/2-\rho+s)\Gamma(1/2+\rho+s)ds\\&=\frac{\cos\pi(k/2-\rho)}{\sin(2\pi\rho)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}x^{1/2-\rho+j}}{j!\Gamma(1-2\rho+j)}+\frac{\cos\pi(k/2+\rho)}{\sin(-2\pi\rho)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}x^{1/2+\rho+j}}{j!\Gamma(1+2\rho+j)}.\end{aligned}$$

Применяя [**151**, 10.2.2], устанавливаем верность (9.8).

Подставляя (9.85), вычисляя вычеты в точках s_{+}, s_{-} и применяя [**151**, 10.25.2], мы показываем, что

$$\begin{aligned}\Phi^{(-,+)}(x)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}x^{-s}\frac{\Gamma(1/2-\rho+s)\Gamma(1/2+\rho+s)}{\Gamma(1/2-\rho+k/2)\Gamma(1/2+\rho+k/2)}ds\\&=\frac{\pi\sqrt{x}}{\Gamma(1/2-\rho+k/2)\Gamma(1/2+\rho+k/2)}\frac{I_{-2\rho}(2\sqrt{x})-I_{2\rho}(2\sqrt{x})}{\sin(2\pi\rho)}.\end{aligned}$$

Наконец, применяя [**151**, 10.27.4], мы завершаем доказательство (9.9). □

9.8. Доказательство теорем 9.0.2–9.0.4

9.8.1. Доказательство теорем 9.0.2–9.0.3. Рассмотрим левую часть (9.15). Применяя (9.88) и (9.19), получаем

$$\begin{aligned}S_{\phi}:=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(n)a_{n}e\left(\frac{an}{c}\right)&=\sum_{n>0}a_{n}e\left(\frac{an}{c}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\phi^{+}(s)n^{-s}ds\\&\quad+\sum_{n<0}a_{n}e\left(\frac{an}{c}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\phi^{-}(s)|n|^{-s}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=\mu}\left(\phi^{+}(s)L^{+}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)+\phi^{-}(s)L^{-}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)\right)ds.\end{aligned}$$

Сдвигая контур интегрирования на $\operatorname{Re}s=-\mu$, мы проходим полюса функции $L^{\pm}\left(f,s,\frac{a}{c}\right)$ в точках $s=1/2+\rho$ и $s=1/2-\rho$ и вычисляем соответствующие вычеты при помощи

леммы 9.5.1. Таким образом, получается четыре слагаемых равных $\vartheta(M_2)i^k\mathcal{R}_f(c,\rho)$ ввиду (9.6), (9.7). Наконец, мы меняем s на $-s$ и применяем (9.86), (9.87), доказывая, что

$$\begin{aligned}S_\phi &= \vartheta(M_2)i^k\mathcal{R}_f(c,\rho)\\ &+\frac{\vartheta(M_2)i^k}{2\pi i}\int_{(\mu)}\left(\phi^+(-s)\mathbf{G}^+(k,-s)+\phi^-(s)\mathbf{G}^-(-k,-s)\right)L^+\left(f,s,\frac{-d}{c}\right)\frac{c^{2s}ds}{(2\pi)^{2s}}\\ &+\frac{\vartheta(M_2)i^k}{2\pi i}\int_{(\mu)}\left(\phi^+(-s)\mathbf{G}^-(k,-s)+\phi^-(s)\mathbf{G}^+(-k,-s)\right)L^-\left(f,s,\frac{-d}{c}\right)\frac{c^{2s}ds}{(2\pi)^{2s}}.\end{aligned}$$

Записывая L-функции через определение (9.19) и используя (9.89), (9.90) вместе с леммой 9.7.1, мы доказываем (9.15), что завершает доказательство теоремы 9.0.2.

Тем же методом, но с применением леммы 9.5.2 и леммы 9.6.2 мы доказываем теорему 9.0.1, а используя леммы 9.5.3 и 9.6.3, устанавливаем справедливость теоремы 9.0.3.

9.8.2. Доказательство теоремы 9.0.4. Аналогично работе [**51**] мы запишем дробь a/c следующим образом

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}+\frac{a}{2},\quad a_1=-a\frac{c_1-1}{2},\quad c_1=\frac{c}{2}.$$

Поскольку $(a,c)=1$ и c чётно, то a нечётно, и поэтому,

$$e\left(\frac{an}{c}\right)=e\left(\frac{a_1n}{c_1}\right)e\left(\frac{an}{2}\right)=(-1)^ne\left(\frac{a_1n}{c_1}\right).$$

Поскольку $f\in\mathscr{F}_k^+(4)$, выполнено равенство

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq0}\phi(n)a_ne\left(\frac{an}{c}\right)&=\sum_{\substack{n\neq0\\ n\equiv0(mod4)}}\phi(n)a_ne\left(\frac{a_1n}{c_1}\right)-\sum_{\substack{n\neq0\\ n\equiv1(mod2)}}\phi(n)a_ne\left(\frac{a_1n}{c_1}\right)\\ &=2\sum_{n\neq0}\phi(4n)a_{4n}e\left(\frac{4a_1n}{c_1}\right)-\sum_{n\neq0}\phi(n)a_ne\left(\frac{a_1n}{c_1}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$e\left(\frac{4a_1n}{c_1}\right)=e\left(-2an+\frac{2an}{c_1}\right)=e\left(\frac{2an}{c_1}\right),$$

и поскольку a нечётно, то

$$e\left(\frac{a_1n}{c_1}\right)=e\left(-\frac{an}{2}+\frac{an}{2c_1}\right)=e\left(\frac{n}{2}+\frac{an}{2c_1}\right)=e\left(\frac{n(a+c_1)/2}{c_1}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n\neq0}\phi(n)a_ne\left(\frac{an}{c}\right)=2\sum_{n\neq0}\phi(4n)a_{4n}e\left(\frac{2an}{c_1}\right)-\sum_{n\neq0}\phi(n)a_ne\left(\frac{n(a+c_1)/2}{c_1}\right).\tag{9.93}$$

Для вычисления первого слагаемого в правой части (9.93) применим теорему 9.0.3 с весовой функцией $\phi(4n)$ вместо $\phi(n)$, что влечёт несколько изменений.

Для простоты введём обозначение $\phi_4(x) := \phi(4x)$. Заметим, что

$$\phi_4^{\pm}(s) = \frac{1}{4^s}\phi^{\pm}(s),$$

где $\phi^{\pm}(s)$ определены в (9.5). В результате,

$$\frac{1}{4^{1/2+\rho}}\sum_{\pm} R^{\pm}(a_0, 2c_1, 1/2+\rho) + \frac{1}{4^{1/2-\rho}}\sum_{\pm} R^{\pm}(b_0, 2c_1, 1/2-\rho) = \mathcal{R}_f(4c_1, \rho).$$

Аналогично для преобразований (9.10) и (9.11) получаем $\widehat{\phi_4}(\pm y) = \widehat{\phi}(\pm y/4)$.

Наконец,

$$2\sum_{n\neq 0}\phi(4n)a_{4n}e\left(\frac{2an}{c_1}\right) = \frac{2}{\vartheta(M_4)\mathbf{w}_k}\sum_{n\neq 0}\widehat{\phi}\left(\frac{\pi^2 n}{4c_1^2}\right)a_n e\left(\frac{d_4 n}{c_1}\right) + \frac{2}{\vartheta(M_4)\mathbf{w}_k}\mathcal{R}_f(4c_1,\rho), \quad (9.94)$$

где d_4, M_4 определены в условиях теоремы 9.0.4.

Подставляя (9.94) в (9.93) и применяя теорему 9.0.1 для вычисления второго слагаемого в правой части (9.93), мы завершаем доказательство.

9.8.3. Доказательство следствия 9.0.5. Пусть $E_{\mathfrak{a}}(z; s; 1/2)$ обозначает ряд Эйзенштейна веса $1/2$ для группы $\Gamma_0(4)$ в параболической вершине $\mathfrak{a}$ относительно системы мультипликаторов ϑ (см. [**155**, главу 3], где выписаны определение и различные свойства). Из [**27**, леммы 2.2] и [**155**, главы 3A] следует, что линейная комбинация рядов Эйзенштейна-Мааса в параболических вершинах ∞ и 0

$$f(z; 1/2+\rho) := \zeta(1+4\rho)\left(E_\infty(z; 1/2+\rho; 1/2) + \frac{1+i}{4^{1/2+\rho}}E_0(z; 1/2+\rho; 1/2)\right)$$

допускает следующее разложение Фурье-Уиттекера

$$f(z; 1/2+\rho) = \zeta(1+4\rho)y^{1/2+\rho} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\rho)\zeta(4\rho)}{4^{2\rho}\Gamma(1/2+2\rho)}y^{1/2-\rho} + \sum_{n\neq 0}\frac{\pi^\rho\Gamma\left(\frac{1}{2}+\rho-\frac{\operatorname{sgn} n}{4}\right)\mathscr{L}_n\left(\frac{1}{2}+2\rho\right)}{2^{1+2\rho}\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\rho\right)|n|^{1/2-\rho}}W_{\operatorname{sgn} n/4,\rho}(4\pi|n|y)\,e(nx), \quad (9.95)$$

$$f(z; 1/2) = \frac{1}{2}y^{1/2}\log y + (\gamma - \log 4\pi)y^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{n\neq 0}\frac{\mathscr{L}_n(1/2)}{|n|^{1/2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{sgn} n}{4}\right)W_{\operatorname{sgn} n/4,0}(4\pi|n|y)\,e(nx). \quad (9.96)$$

Из [**184**, утверждения 3] известно, что $\mathscr{L}_n(s) = 0$ при $n \equiv 2, 3 \pmod 4$. Поэтому $f(z; 1/2+\rho) \in \mathscr{F}^+_{1/2}(4)$. Сравнивая (9.95) и (9.96) с (9.3) и (9.4), мы доказываем следствие.

ГЛАВА 10

Асимптотика гипергеометрической функции Гаусса, возникающей в моментах L-функций симметрического квадрата

Данная глава посвящена доказательству асимптотической формулы для функции

$$ {}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right), \quad 0<z<1,\ r\to\infty,\ \alpha=t/r\to 0. \quad (10.1) $$

Это один из двух частных случаев гипергеометрической функции Гаусса, возникающих в точной формуле для первого момента L-функций симметрического квадрата форм Маасса на критической прямой $\rho=1/2+2it$, как показано в главе 3. Наша цель — использовать данную точную формулу в качестве отправной точки для изучения второго момента на коротких интервалах, чтобы в конечном итоге доказать новые гибридные оценки подвыпуклости для L-функций симметрического квадрата. Для этого требуется иметь следующее равномерное асимптотическое разложение для (10.1).

Теорема 10.0.1. *Предположим, что* $0<z<1$, $r\to\infty$ *и* $r^{-1+\delta}<\alpha<r^{-\delta}$, $\delta>0$. *Тогда*

$$ {}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right) = $$
$$ = \frac{\exp\left(2irl_1(\alpha,z)\right)}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}}\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j(\alpha,r)}{(\alpha r)^j}\right)+O((\alpha r)^{-N-1}), \quad (10.2) $$

где

$$ l_1(\alpha,z)=\log 2-\alpha\log(1+\alpha)-\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z})+\alpha\log(\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}). \quad (10.3) $$

Данная формула обобщает [**30**, лемму 4.6], где был рассмотрен случай $\alpha=0$. Заметим, что при $\alpha=0$ и $z=4/x^2$ главный член в (10.2) приводится к следующему выражению (см. [**151**, 4.37.19]):

$$ \frac{\exp\left(2ir\left(\log 2-\log(1+\sqrt{1-4/x^2})\right)\right)}{(1-4/x^2)^{1/4}}=x^{2ir}\exp(-2ir\operatorname{arcosh}x/2)\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/4}, $$

которое совпадает с главным членом в [**30**, лемме 4.6].

10.1. Первый случай: $0<z<1-\delta$

Начнём доказательство формулы (10.2) с рассмотрения случая $0<z<1-\delta$. В этой ситуации для вывода требуемой асимптотической формулы можно использовать несколько методов, включая метод Лиувилля-Грина (обобщая [**8**, лемму 2.4] и [**29**, следствие 7.3]) и

классический метод перевала (обобщая [**26**, лемму 20]). Однако общая проблема этих двух методов заключается в том, что они, по-видимому, неприменимы, когда z очень близко к 1. Ниже мы приведём некоторые пояснения, связанные с этой проблемой, начав с метода Лиувилля-Грина и позже обсудив метод перевала.

Метод Лиувилля-Грина основан на изучении решений дифференциальных уравнений, см. [**150**, главу 6, стр. 10–12]. А именно, применяя [**41**, стр.96, (7)–(9)], мы заключаем, что функция

$$Y(z) = z^{1/2+ir}(1-z)^{1/2-ir\alpha}{}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha), 3/4+ir(1-\alpha), 1+2ir; z\right) \tag{10.4}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y''(z) = \left((ir)^2 h(\alpha,z) + g(\alpha,z)\right) Y(z), \tag{10.5}$$

где

$$h(\alpha,z) = \frac{1-(1-\alpha^2)z}{z^2(1-z)^2},\ g(\alpha,z) = -\frac{1-3z/4+3z^2/4}{4z^2(1-z)^2}.$$

Функция $h(\alpha,z)$ имеет полюса второго порядка в точках 0 и 1, а также точку поворота в $z_0 = (1-\alpha^2)^{-1}$. Если z не близко к 1, тогда эта точка поворота не играет роли, и, следовательно, можно применить методы [**150**, главы 6 пар. 5.3, главы 10 пар. 4.1]. Так, в соответствии с [**150**, главой 10, (1.01), (2.01)-(2.03), (2.09), (2.10)] и [**150**, главой 10, теоремы 3.1 и 4.1] получаем

$$Y(z)h^{1/4}(\alpha,z) = C_1 W_{n,1}(r,\xi) + C_2 W_{n,2}(r,\xi), \tag{10.6}$$

где

$$\xi = \int \sqrt{h(\alpha,z)}dz, \tag{10.7}$$

и

$$W_{n,1}(r,\xi) = e^{ir\xi}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{A_j(z)}{(ir)^j} + O(r^{-n}), \quad W_{n,2}(r,\xi) = e^{-ir\xi}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j A_j(z)}{(ir)^j} + O(r^{-n}),$$

$$A_{j+1}(z) = \frac{-A_j'(z)}{2\sqrt{h(\alpha,z)}} + \int \Lambda(z)A_j(z)dz, \tag{10.8}$$

$$\Lambda(z) = \frac{16g(\alpha,z)h^2(\alpha,z) + 4h(\alpha,z)h''(\alpha,z) - 5(h'(\alpha,z))^2}{32h^{5/2}(\alpha,z)}, \quad A_0(z) = 1.$$

Применяя [**89**, 2.225.1, 2.224.5], доказываем, что

$$\xi = -2\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}) + 2\alpha\log(\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}) + \\ + \log(z) - \alpha\log(1-z) + (1-\alpha)\log(1-\alpha^2). \tag{10.9}$$

Заметим, что интегралы в (10.7) и (10.8) несобственные. В (10.7) постоянная интегрирования для удобства выбирается равной 0, а в (10.8) формально постоянные интегрирования

могут выбираться произвольно. Подробнее выбор параметров интегрирования описан в [**150**, главе 10, пар. 4 и 5].

Для определения значений C_1 и C_2 сравним левую и правую части уравнения (10.6) при $z \to 0$. Из (10.4) следует, что $Y(z)h^{1/4}(\alpha, z) \sim z^{ir}$. Таким образом, применяя (10.9), находим, что $C_2 = 0$ и

$$C_1 = e^{ir\left(2\log 2 - 2\alpha\log(1+\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha^2)\right)}.$$

Наконец,

$${}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) = \frac{e^{2irl_1(\alpha,z)}}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}}\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{A_j(z)}{(ir)^j}\right) + O(r^{-n}),$$

где $l_1(\alpha, z)$ задаётся формулой (10.3), что завершает доказательство (10.2) при $z < 1 - \delta$.

Случай $z \to 1$ является более сложным, так как в этой ситуации точка поворота сливается с полюсом при $\alpha \to 0$. Асимптотические решения таких дифференциальных уравнений были исследованы Бойдом и Данстером [**54**] и Данстером [**78**]. В частности, дифференциальное уравнение (10.5) удовлетворяет условиям в [**78**]. Тем не менее, не очевидно, как применить результаты [**78**] для изучения (10.4). Проблема в том, что в [**78**] рассматривались только действительные решения дифференциального уравнения, а наша функция $Y(z)$ недействительна. Заметим, что Данстер [**78**] применил свой результат к изучению функций Феррерса, которые в общем случае недействительны. По этой причине вместо отдельных функций Данстер изучал их сложную комбинацию [**78**, (5.15)], которая в конечном итоге является действительной функцией.

В нашем случае, мы не нашли способа преодолеть эту проблему, поэтому решили применить метод перевала для доказательства формулы (10.2) для значений z близких к 1. Начнём с рассмотрения случая $z < 1 - \delta$. Применяя формулу [**151**, 15.6.1], получаем

$${}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) = \frac{\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(3/4 + ir(1-\alpha)\right)\Gamma\left(1/4 + ir(1+\alpha)\right)}\int_0^1 \frac{y^{-1/4}\exp(irf(\alpha, y))}{(1-y)^{3/4}(1-zy)^{1/4}}dy,$$

где

$$f(\alpha, y) = (1-\alpha)\log y + (1+\alpha)\log(1-y) - (1-\alpha)\log(1-zy).$$

Найдём точки перевала (решения уравнения $\frac{\partial}{\partial y}f(\alpha, y) = 0$):

$$y_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1+\alpha)z}.$$

При $z \to 1$ и $\alpha \to 0$ обе точки y_+ and y_- стремятся к конечной точке отрезка интегрирования и сливается при $z = 1, \alpha = 0$. В такой ситуации классический метод перевала неприменим.

При $0 < z < 1 - \delta$ точка y_+ расположена вне интервала интегрирования, в то время как точка y_- расположена внутри интервала интегрирования и не близка к его конечным точкам. Таким образом, классический метод перевала позволяет получить следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{\Gamma\left(3/4 + ir(1-\alpha)\right)\Gamma\left(1/4 + ir(1+\alpha)\right)}{\Gamma(1+2ir)} {}_2F_1\left(\frac{1}{4} + ir(1-\alpha), \frac{3}{4} + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right)$$
$$= \frac{y_-^{-1/4} e^{irf(\alpha,y_-)+\pi i/4}\sqrt{2\pi}}{(1-y_-)^{3/4}(1-zy_-)^{1/4}\sqrt{rf''(\alpha,y_-)}}\left(1 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{c_j}{r^j}\right) + O(r^{-N-1/2}). \quad (10.10)$$

Прямые вычисления показывают, что

$$f(\alpha, y_-) = (1-\alpha)\log(1-\alpha^2) - 2\log(1 + \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}) +$$
$$+ 2\alpha\log(\alpha + \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}), \quad (10.11)$$

$$\frac{y_-^{-1/4}(1-y_-)^{-3/4}}{(1-zy_-)^{1/4}} = \frac{(1+\alpha)^{1/4}(1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z})}{(1-\alpha)^{1/4}(\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z})},$$

$$f''(\alpha, y_-) = -2\frac{(1+\alpha)\left(1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}\right)^2\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha)\left(\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}\right)^2}.$$

Наконец, применяя формулу Стирлинга, доказываем, что равенство

$$\Gamma(\sigma+it) = \sqrt{2\pi}|t|^{\sigma-1/2}\exp(-\pi|t|/2)\exp\left(i\left(t\log|t| - t + \frac{\pi t(\sigma-1/2)}{2|t|}\right)\right)$$
$$\times\left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} a_j/t^j + O(|t|^{-N})\right) \quad (10.12)$$

выполнено при $|t| \to \infty$ и фиксированном σ. Заметим, что

$$\frac{\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(3/4+ir(1-\alpha)\right)\Gamma\left(1/4+ir(1+\alpha)\right)} = O(r^{-N+1/2}) +$$
$$+ \frac{(1+\alpha)^{1/4}\sqrt{r}}{(1-\alpha)^{1/4}\sqrt{\pi}} e^{\pi i/4 + ir(2\log 2 - (1+\alpha)\log(1+\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha))}\left(1 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{c_j}{r^j}\right). \quad (10.13)$$

Подставляя (10.11), (10.13) в (10.10), завершаем доказательство (10.2).

10.2. Второй случай: $1-\delta<z<1$

Нам осталось доказать (10.2) при $1-\delta<z<1$. Для начала преобразуем выражение (10.1) аналогично [**30**, лемме 4.6]. А именно, применяя [**41**, ур. 16, стр. 112] и [**151**, ур. 15.8.1], получаем

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right)=\\
&\qquad(1-z)^{-1/4-ir(1-\alpha)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+2ir(1-\alpha),\frac{1}{2}+2ir(1+\alpha),1+2ir;\frac{\sqrt{1-z}-1}{2\sqrt{1-z}}\right)=\\
&\qquad(1-z)^{-1/4-ir(1-\alpha)}\left(\frac{\sqrt{1-z}+1}{2\sqrt{1-z}}\right)^{-2ir}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+2ir\alpha,\frac{1}{2}-2ir\alpha,1+2ir;\frac{\sqrt{1-z}-1}{2\sqrt{1-z}}\right).
\end{aligned}
$$

Пусть $Y=\frac{1-\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1-z}}$. Заметим, что $Y\to+\infty$ при $z\to 1$. При помощи [**151**, 15.6.1] приходим к равенству:

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+2ir\alpha,\frac{1}{2}-2ir\alpha,1+2ir;-Y\right)=\\
&\qquad\frac{\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(1/2+2ir\alpha\right)\Gamma\left(1/2+2ir(1-\alpha)\right)}\int_0^1\frac{t^{-1/2+2ir\alpha}(1-t)^{-1/2+2ir(1-\alpha)}}{(1+Yt)^{1/2-2ir\alpha}}dt.
\end{aligned}
$$

Следующий шаг – замена переменных: $t:=1-e^{-x}$. В результате

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right)=\\
&\qquad\frac{(1-z)^{-1/4-ir(1-\alpha)}(1+Y)^{-2ir}\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(1/2+2ir\alpha\right)\Gamma\left(1/2+2ir(1-\alpha)\right)}\int_0^\infty e^{2ir(-x+\alpha\log q(x))}\frac{dx}{\sqrt{q(x)}},
\end{aligned}
\tag{10.14}
$$

где

$$
q(x)=\left(1-e^{-x}\right)\left((Y+1)e^x-Y\right). \tag{10.15}
$$

Положим $w:=2ir,\lambda:=\alpha w=2it$, тогда интеграл в правой части (10.14) записывается как

$$
\int_0^\infty e^{-w(x-\alpha\log q(x))}\frac{dx}{\sqrt{q(x)}}=\int_0^\infty q(x)^{\lambda-1}e^{-wx}\sqrt{q(x)}dx. \tag{10.16}
$$

Подобные интегралы изучались Тимме в работах [**173**], [**174**], [**175**, глава 25], [**176**], а также возникали в работе [**37**]. Найдём точки перевала (10.16) (решения уравнения $q(x)=\alpha q'(x)$):

$$
x_0=\log\frac{1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha)\left(1+\sqrt{1-z}\right)}. \tag{10.17}
$$

Все дальнейшие вычисления будем проводить в предположении, что $\operatorname{Re}w,\operatorname{Re}\lambda>0$, а затем применим метод аналитического продолжения для доказательства требуемого результата в желаемой области. Первый шаг в методе Тимме состоит в замене переменных следующего вида:

$$
x-\alpha\log q(x)=t-\alpha\log t+A(\alpha).
$$

Такое преобразование должно перевести точку $x = 0$ в точку $t = 0$, точку $x = x_0$ в $t = \alpha$, и точку $x = +\infty$ в $t = +\infty$. Регулярность и другие свойства данного преобразования доказаны в [**174**, главе 2]. Заметим (см. [**174**, (2.5), (2.7), (2.15)]), что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q(x)(t-\alpha)}{t\,(q(x) - \alpha q'(x))},$$

$$\left.\frac{dt}{dx}\right|_{x_0} = \sqrt{1 - \alpha^2 \frac{q''(x_0)}{q(x_0)}}, \tag{10.18}$$

$$A(\alpha) = x_0 - \alpha \log q(x_0) - \alpha + \alpha \log \alpha. \tag{10.19}$$

После замены переменных получаем

$$\int_0^\infty e^{-w(x-\alpha\log q(x))} \frac{dx}{\sqrt{q(x)}} = e^{-wA(\alpha)} \int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)} f(t) \frac{dt}{t}, \quad f(t) = \frac{t}{\sqrt{q(x)}} \frac{dx}{dt}. \tag{10.20}$$

Следующий шаг метода Тимме ([**173**, глава 5]), являющийся модификацией процедуры, разработанной Франклином и Фридманом ([**173**, глава 4]), заключается в том, чтобы записать функцию $f(t)$ как

$$f(t) = f(\alpha) + (f(t) - f(\alpha)),$$

а затем выполнить интегрирование по частям

$$\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)} f(t) \frac{dt}{t} = f(\alpha) \frac{\Gamma(\lambda)}{w^\lambda} + \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)} \widetilde{f}_1(t) \frac{dt}{t},$$

где

$$\widetilde{f}_1(t) = t \left(\frac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} \right)'.$$

Повторяя данную процедуру, получаем

$$\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)} f(t) \frac{dt}{t} = \Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\widetilde{f}_k(\alpha)}{w^{\lambda+k}} + \frac{1}{w^n} \int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)} \widetilde{f}_n(t) \frac{dt}{t}, \tag{10.21}$$

где

$$\widetilde{f}_0(t) = f(t), \quad \widetilde{f}_{k+1}(t) = t \left(\frac{\widetilde{f}_k(t) - \widetilde{f}_k(\alpha)}{t - \alpha} \right)'. \tag{10.22}$$

Заметим, что значения $\widetilde{f}_k(\alpha)$ можно записать в терминах коэффициентов рядов Тейлора функции $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\alpha)(t-\alpha)^j.$$

Применяя [**174**, (3.35)] и [**175**, (25.1.6), (25.2.26)], приходим к равенствам:

$$\widetilde{f}_0(\alpha) = a_0(\alpha), \quad \widetilde{f}_1(\alpha) = \alpha a_2(\alpha), \quad \widetilde{f}_2(\alpha) = \alpha\,(3\alpha a_4(\alpha) + 2a_3(\alpha))\,.$$

Для оценки интеграла в (10.21) будем рассуждать аналогично [**37**, лемме 6.18]. Для начала разобьём интеграл на две части: $|t-\alpha| < \alpha/100$ и $|t-\alpha| > \alpha/100$. Когда t близко к α применим [**173**, стр. 241-242]:

$$\widetilde{f}_k(t) = \frac{t}{2}\widetilde{f}''_{k-1}(\xi), \quad \text{если} \quad \xi \quad \text{лежит между} \quad t \quad \text{и} \quad \alpha,$$

$$\widetilde{f}_k(t) = t\sum_{r=1}^{k} a_k^{(r)}\alpha^{r-1}f^{(r+k)}(t_r), \quad \text{если} \quad t_r \quad \text{лежит между} \quad t \quad \text{и} \quad \alpha,$$

где $a_k^{(r)} \ll 1$. Так как $f(t) \sim t^{1/2}$ для маленьких t, то $\widetilde{f}_k(t) \ll \alpha^{1/2-k}$ при t близких к α. Поэтому

$$\frac{1}{w^n}\int_{|t-\alpha|<\alpha/100} e^{-w(t-\alpha\log t)}\widetilde{f}_n(t)\frac{dt}{t} \ll \frac{1}{(w\alpha)^{n-1}w\sqrt{\alpha}}. \tag{10.23}$$

Если $t \to 0$, применяя метод индукции, основанный на (10.22), получаем $\widetilde{f}_k(t) \ll \alpha^{-k}\sqrt{t}$. Соответственно, так как $\widetilde{f}_n(t)$ убывает экспоненциально на бесконечности, выполнена оценка:

$$\frac{1}{w^n}\int_{|t-\alpha|>\alpha/100} e^{-w(t-\alpha\log t)}\widetilde{f}_n(t)\frac{dt}{t} \ll \frac{1}{(w\alpha)^{n-1}w\sqrt{\alpha}}. \tag{10.24}$$

Комбинируя (10.21), (10.23) и (10.24), доказываем, что

$$\int_0^\infty e^{-w(t-\alpha\log t)}f(t)\frac{dt}{t} = \Gamma(\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{f}_k(\alpha)}{w^{\lambda+k}} + O\left(\frac{1}{(w\alpha)^{n-1}w\sqrt{\alpha}}\right). \tag{10.25}$$

Применяя (10.25) к интегралу в (10.14) (учитывая, что $w = 2ir, \lambda = \alpha w = 2it$), приходим к равенству:

$$\int_0^\infty e^{2ir(-x+\alpha\log q(x))}\frac{dx}{\sqrt{q(x)}} = e^{-2irA(\alpha)}\frac{\Gamma(2it)}{(2ir)^{2it}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\widetilde{f}_k(\alpha)}{(2ir)^k} + O\left(\frac{1}{(r\alpha)^{n-1}r\sqrt{\alpha}}\right). \tag{10.26}$$

Нам осталось вычислить главный член и доказать, что он совпадает с главным членом в (10.2). В соответствии с (10.18), (10.19) и (10.20) главный член в (10.26) равен

$$e^{-2ir(x_0-\alpha\log q(x_0)-\alpha+\alpha\log\alpha)}\frac{\Gamma(2it)}{(2ir)^{2it}}\frac{\alpha}{\sqrt{q(x_0)-\alpha^2q''(x_0)}}, \tag{10.27}$$

где x_0 задаётся формулой (10.17), и $q(x)$ определяется выражением (10.15). Применяя (10.12), получаем

$$\frac{\Gamma(2it)}{(2ir)^{2it}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r\alpha}}e^{-\pi i/4+2ir(\alpha\log\alpha-\alpha)}\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}\frac{c_j}{t^j}\right) + O(t^{-N-1/2}). \tag{10.28}$$

Прямые вычисления приводят к равенствам:

$$q(x_0)-\alpha^2q''(x_0) = \frac{\alpha\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{\sqrt{1-z}}, \tag{10.29}$$

$$x_0-\alpha\log q(x_0)-\alpha+\alpha\log\alpha = \log\frac{1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha)(1+\sqrt{1-z})}-\alpha\log\frac{\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha^2)\sqrt{1-z}}-\alpha. \tag{10.30}$$

Подставляя (10.28), (10.29) и (10.30) в (10.27), доказываем, что главный член в (10.26) равен

$$\frac{e^{-\pi i/4}\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}}\frac{(1-z)^{1/4}}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}}e^{2ir\left(\alpha\log\alpha-\log\frac{1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha)(1+\sqrt{1-z})}+\alpha\log\frac{\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha^2)\sqrt{1-z}}\right)}. \tag{10.31}$$

Подставляя (10.26) и (10.31) в (10.14), применяя равенства

$$\frac{\Gamma(1+2ir)}{\Gamma\left(1/2+2ir\alpha\right)\Gamma\left(1/2+2ir(1-\alpha)\right)}=$$
$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\pi}}e^{\pi i/4+2ir(-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha))}\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}\frac{c_j}{t^j}\right)+O(t^{-N-1/2})$$

и $Y=\frac{1-\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1-z}}$, мы показываем, что

$${}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right)=$$
$$\frac{e^{2irF(\alpha,z)}}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}}\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}\frac{c_j}{t^j}\right)+O(t^{-N}),$$

где

$$F(\alpha,z)=-\log\frac{1+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha)(1+\sqrt{1-z})}+\alpha\log\frac{\alpha+\sqrt{1-(1-\alpha^2)z}}{(1-\alpha^2)\sqrt{1-z}}-$$
$$-\log\frac{1+\sqrt{1-z}}{2\sqrt{1-z}}-(1-\alpha)\log\sqrt{1-z}-(1-\alpha)\log(1-\alpha).$$

Легко проверить, что $F(\alpha,z)$ совпадает с $l_1(\alpha,z)$, заданным в (10.3). Это наблюдение завершает доказательство (10.2).

10.3. Численные примеры

В этом разделе мы приведём несколько численных примеров для Теоремы 10.0.1. А именно, мы вычислим для некоторых значений r, α и z левую часть равенства (10.2), которая содержит

$$F(r,\alpha,z):={}_2F_1\left(1/4+ir(1-\alpha),3/4+ir(1-\alpha),1+2ir;z\right),$$

и сравним её с первым слагаемым в правой части равенства (10.2)

$$R(r,\alpha,z):=\frac{\exp\left(2irl_1(\alpha,z)\right)}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}}.$$

Результаты представлены в следующих таблицах.

Функция	Приближение	| Отн. ошибка|
$F(r,\alpha,z)$	$2.611880247 + 0.5174226366i$	
$R(r,\alpha,z)$	$2.611802650 + 0.5170096337i$	0.000157843

Таблица 1. Случай $r = 100$, $\alpha = 0.1$, $y = 0.99$.

Функция	Приближение	| Отн. ошибка|
$F(r,\alpha,z)$	$-2.595771772 - 1.792471289i$	
$R(r,\alpha,z)$	$-2.587392554 - 1.804512206i$	0.004650302

Таблица 2. Случай $r = 100$, $\alpha = 0.1$, $y = 0.9999$.

Функция	Приближение	| Отн. ошибка|
$F(r,\alpha,z)$	$1.000002393 + 0.004050009913i$	
$R(r,\alpha,z)$	$1.000002393 + 0.004050054037i$	$7.576766037 * 10^{-9}$

Таблица 3. Случай $r = 100$, $\alpha = 0.1$, $y = 0.00001$.

Функция	Приближение	| Отн. ошибка|
$F(r,\alpha,z)$	$-2.258587650 - 2.168919043i$	
$R(r,\alpha,z)$	$-2.269908138 - 2.1575933584i$	0.005113882

Таблица 4. Случай $r = 100$, $\alpha = 0.02$, $y = 0.99$.

Функция	Приближение	| Отн. ошибка|
$F(r, \alpha, z)$	$-3.328488374 + 5.815264147i$	
$R(r, \alpha, z)$	$-3.380721684 + 5.770084005i$	0.010307062

Таблица 5. Случай $r = 100$, $\alpha = 0.02$, $y = 0.9999$.

ГЛАВА 11

Гибридные оценки L-функций симметрического квадрата форм Мааса на критической прямой

Пусть u_j – форма Гекке-Мааса с собственным значением оператора Лапласа $\kappa_j = 1/4 + t_j^2$. Недавно Кхан и Янг доказали следующую гибридную оценку на второй момент L-функций симметрического квадрата форм Мааса (0.20) на критической прямой $1/2 + it$ (см. [**112**, теорему 1.1]).

Теорема 11.0.1. *Зафиксируем $0 < \delta < 2$. Выберем t, T, $G > 1$ так, что*

$$\frac{T^{3/2+\delta}}{G^{3/2}} \leqslant t \leqslant (2-\delta)T. \tag{11.1}$$

Тогда выполнена следующая оценка

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j |L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)|^2 \ll T^{1+\epsilon}G,$$

где коэффициент нормализации α_j определён в (0.23).

Прямое следствие данной теоремы – следующая гибридная оценка подвыпуклости, см. [**112**, следствие 1.2].

Следствие 11.0.2. *Пусть $0 < \delta < 2$ и*

$$|t_j|^{6/7+\delta} < t < (2-\delta)|t_j|.$$

Тогда

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll |t_j|^{1+\epsilon} t^{-1/3}. \tag{11.2}$$

Условие $|t_j|^{6/7+\delta} < t$ гарантирует, что (11.2) лучше тривиальной оценки (полученной из принципа Фрагмена-Линделёфа)

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it)| \ll (1+|t|)^{1/4+\epsilon} |t_j|^{1/2+\epsilon}. \tag{11.3}$$

Заметим, что в случае, когда $|t-t_j| < t_j^{1/3}$, Хуанг (см.[**93**, следствие 1.8]) доказал оценку (11.2) другим методом. Наш основной результат позволяет нам расширить область (11.1) в теореме 11.0.1 следующим образом.

Теорема 11.0.3. *При* $G \gg \max\left(\frac{t^{2/3}}{T^{1/3}}, \frac{T}{t}\right) T^{\epsilon}$ *и* $t \ll T^{6/7-\epsilon}$ *выполнена оценка*

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j |L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)|^2 \ll T^{1+\epsilon} G. \tag{11.4}$$

Следствие 11.0.4. *Выполнены оценки*

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll \frac{|t_j|^{1+\epsilon}}{\sqrt{t}} \quad \textit{при} \quad |t_j|^{2/3+\epsilon} \ll t \leq |t_j|^{4/5}, \tag{11.5}$$

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)| \ll (|t_j|t)^{1/3}|t_j|^{\epsilon} \quad \textit{при} \quad |t_j|^{4/5} \leq t \ll |t_j|^{6/7-\epsilon}.$$

Условие $t \gg |t_j|^{2/3+\epsilon}$ гарантирует, что (11.5) лучше тривиальной оценки (11.3). Ограничение $t \ll |t_j|^{6/7-\epsilon}$ имеет технический характер (см. замечание 11.5.5).

Заметим, что в специальном случае центральных значений $L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2)$, Кхан и Янг (см. [**112**, теорему 1.3]) доказали гипотезу Линделёфа в среднем на более коротком интервале $G \gg T^{1/5}$. В этом случае наш метод позволяет получить такой же результат, как показано в [**17**]. Доказательство теоремы 11.0.3 следует той же схеме, что и доказательство в [**17**]. Основное отличие – более сложный анализ специальных функций на критической прямой, который позволяет нам улучшить результаты Кхана и Янга.

Рассмотрим основные методы исследования. В последние десятилетия наиболее яркие результаты, связанные с исследованием моментов L-функций, были получены и использованием так называемых формул взаимности, см. [**47**], [**48**], а также ссылки в [**33**]. Подход, основанный на формулах взаимности, имеет два главных преимущества относительно метода с применением приближенного функционального уравнения. Во-первых, это наиболее простой анализ арифметической части, так как вместо изучения множественных рядов Дирихле мы получаем L-функции. Безусловно, некоторые вычисления с множественными рядами Дирихле необходимы для получения L-функций, но всё же они сильно проще. Во-вторых, в аналитической части вместо множественных интегралов от экспоненциальных функций, гамма-функций и некоторых гладких функций, мы получаем либо специальные функции (обычно гипергеометрические функции), либо интегралы от специальных функций. Это позволяет нам использовать различные интегральные представления (а не только интегралы Меллина-Барнса) и применять различные методы теории асимптотического анализа специальных функций. Например, для получения асимптотического разложения для специальной функции можно применить не только метод стационарной фазы, но также и метод Лиувилля-Грина.

По этим причинам было бы интересно применить для изучения второго момента (11.4) точную формулу. К сожалению, имеющийся результат (см. главу 8) не изолирует главный член для второго момента и поэтому не подходит для асимптотического анализа. По этой

причине мы решили скомбинировать два метода, представляя одну из $L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2 + it)$ при помощи приближенного функционального уравнения, а затем применяя точную формулу для скрученного первого момента, доказанную в главе 3. Эта формула связывает первый скрученный момент $L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+it)$ с первым моментом L-рядов Загира (0.37). Соответственно, мы переводим задачу оценки второго момента (11.4) к изучению двойной суммы

$$\sum_{m \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \left(\sum_{n<2m} + \sum_{n>2m} \right) \mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+it) \frac{I(n/m, 1/2+it)}{n^{1/2-2it} m^{1/2\pm 2it}}, \tag{11.6}$$

где $I(x,\rho)$ – интеграл (по r) от гипергеометрической функции Гаусса (причина, по которой мы различаем случаи $n < 2m$ и $n > 2m$, заключается в том, что функция $I(x,\rho)$ имеет разные интегральные представления в этих случаях).

Следующий шаг – доказательство асимптотической формулы для функции $I(x,\rho)$. Для этого мы сначала подставим асимптотическое разложение для гипергеометрических функций Гаусса, доказанные в главе 10 и [**83**], в интегральное представление для $I(x,\rho)$. Доказательство этих асимптотических формул достаточно нетривиально ввиду того, что нам необходима равномерность по трём параметрам x, r, t. Как упоминалось ранее, существует два основных метода (метод стационарной фазы и метод Лиувилля-Грина) для получения асимптотики специальных функций. Оказывается, что для функций, возникающих в наших вычислениях, в одном случае удобнее метод Лиувилля-Грина, а в другом – метод стационарной фазы. Заметим, что в первом случае необходимо выполнить два шага. Сначала гипергеометрическая функция приближается функциями Бесселя большого мнимого порядка, а затем функции Бесселя приближаются функциями Эйри. Конечный результат получается довольно сложным, поскольку аргумент функции Эйри отличается при $x \gtrless 1 - t^2/r^2$.

Далее мы подставляем доказанную асимптотическую формулу для $I(x,\rho)$ в (11.6) и вводим замену переменных

$$n - 2m = q, \quad n + 2m = \mathcal{R}.$$

Так как $I(n/m)$ пренебрежимо мало, если q мало в сравнении с $\mathcal{R}$ (приблизительно если $q \ll \mathcal{R}t/(TG)$), мы делаем ещё одну замену переменных $\mathcal{R} = l/q$, получая суммы значений $\mathscr{L}_l(1/2+it)$ в арифметических прогрессиях $l \equiv 0 \pmod q$. Данное сравнение можно перезаписать в терминах аддитивных гармоник. Это позволяет применить формулу суммирования Вороного для суммы по l. Арифметическая часть дальнейших вычислений идентична работе [**17**]. Наконец, мы получаем второй момент L-функций Дирихле, который мы оцениваем при помощи неравенства большого решета Хиз-Брауна для квадратичных характеров. Аналитическая часть вычислений (после применения формулы

Вороного) оказывается значительно сложнее чем в [**17**], поскольку интегральные преобразования в формуле Вороного сейчас включают функции Бесселя $J_{it}(x)$ и $K_{it}(x)$. Поэтому необходимы равномерные асимптотические разложения для данных функций Бесселя, что представляет дополнительные технические трудности.

Глава организована следующим образом. В разделе 11.1 приведены необходимые теоретические сведения. Раздел 11.2 посвящен формуле суммирования Вороного для L-рялов Загира. Наконец, в разделе 11.3 мы приводим формулу, выражающую первый скрученный момент L-функций симметрического квадрата в терминах L-рядов Загира. В разделе 11.4 мы собрали разные асимптотические формулы для гипергеометрических функций, появляющихся в наших вычислениях. В разделе 11.5 мы начинаем доказательство теоремы 11.0.3, записав второй момент в терминах сумм L-рядов Загира и преобразовав эти суммы к виду, который допускает применение формулы Вороного. Раздел 11.6 содержит анализ различных интегралов, возникающих после применения формулы Вороного. Наконец, в разделе 11.7 мы завершаем доказательство теоремы 11.0.3.

11.1. Основные теоретические сведения

Аналитический кондуктор для $L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it)$ равен

$$Q := (1+|t|)(1+|t+t_j|)(1+|t-t_j|).$$

Поэтому при $t < (1-\delta)t_j$ имеет место следующая тривиальная оценка

$$|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it)| \ll Q^{1/4+\epsilon} \ll (1+|t|)^{1/4+\epsilon}|t_j|^{1/2+\epsilon}.$$

Применяя (0.21), получаем следующее приближенное функциональное уравнение.

Лемма 11.1.1. *Выполнено равенство*

$$L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2-2it) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(m^2)}{m^{1/2-2it}}V(n,-t,t_j) + \frac{L_\infty(1/2+2it,t_j)}{L_\infty(1/2-2it,t_j)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(m^2)}{m^{1/2+2it}}V(n,t,t_j), \quad (11.7)$$

где для любого $y>0$ и $a>0$

$$V(y,t,t_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)}\frac{L_\infty(1/2+2it+z,t_j)}{L_\infty(1/2+2it,t_j)}\zeta(1+4it+2z)G(t,z)y^{-z}\frac{dz}{z}, \quad (11.8)$$

$$G(t,z) = \exp(z^2)P_n(t,z^2). \quad (11.9)$$

Здесь $P_n(t,\cdot)$ – многочлен степени n, для которого $P_n(t,0)=1$, $P_n(t,-4t^2)=0$ и $P_n(t,(1/2\pm 2it+2j)^2)=0$ при $j=0,\dots,n-1$.

Доказательство. Аналогично доказательству [**111**, леммы 2.2] (см. также [**172**, лемму 1] и [**147**, лемму 7.2.1]). □

Рассуждая как в [**172**, лемме 2] и применяя (0.22), (0.4), мы получаем следующие результаты.

Лемма 11.1.2. *Для любых положительных* y, t_j, $0 \leqslant |t| < t_j^{1-\epsilon}$ *и* A *выполнены оценки*

$$V(y,t,t_j) \ll \left(\frac{t_j\sqrt{1+|t|}}{y}\right)^A.$$

Для любого положительного целого числа N *и* $1 \leqslant y \ll t_j^{1+\epsilon}\sqrt{1+|t|}$, $0 \leqslant |t| < t_j^{1-\epsilon}$ *выполнена асимптотическая формула*

$$V(y,t,t_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \left(\frac{\sqrt{t_j^2-t^2}}{\pi^{3/2}y}\right)^z \frac{\Gamma(1/4+it+z/2)}{\Gamma(1/4+it)}\zeta(1+4it+2z)G(t,z) \times \left(1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{p(t/t_j, w/t_j)}{t_j^k}\right)\frac{dz}{z} + O(t_j^{-N+\epsilon}), \quad (11.10)$$

где $w = \operatorname{Im}(z)$ *и* $p(x_1,x_2)$ *– некоторые рациональные функции равномерно ограниченные при* $|x_1|, |x_2| \ll 1$.

Заметим, что часть интеграла в (11.10) по $|\operatorname{Im}(z)| \gg |t_j|^\epsilon$ пренебрежимо мала, поэтому можно предположить, что $|\operatorname{Im}(z)| \ll |t_j|^\epsilon$. Кроме того, заметим, что многочлен $P_n(t,z^2)$ в (11.9) выбран так, чтобы компенсировать полюса $\Gamma(1/4+it+z/2)\zeta(1+4it+2z)$ в (11.10).

Лемма 11.1.3. *При* $r \sim T$, $T^\epsilon \ll t \ll T^{1-\epsilon}$ *выполнена оценка*

$$V(y,t,r-iN) \ll \frac{(1+|t|)^N(1+|r|)^{2N+\epsilon}}{y^{2N}}. \quad (11.11)$$

Доказательство. Сначала сдвинем линию интегрирования в (11.8) на $\operatorname{Re} z = 2N$. Положим $z = 2N+2iw$. Применив (0.22) и оценку $|w| \ll T^{\epsilon/2}$, получаем

$$\frac{L_\infty(1/2+2it+z,t_j)}{L_\infty(1/2+2it,t_j)} \ll \frac{\Gamma\left(\frac14+N+i(w+t)\right)\Gamma\left(\frac14+2N+i(w+t+r)\right)}{\Gamma\left(\frac14+it\right)\Gamma\left(\frac14+N+i(t+r)\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac14+i(w+t-r)\right)}{\Gamma\left(\frac14+i(t-r)-N\right)} \ll t^N r^{2N} e^{-\pi v/2}. \quad (11.12)$$

Подставляя (11.12) в (11.8) и оценивая получившийся интеграл тривиально, мы доказываем лемму. □

Лемма 11.1.4. *При $t_j = T + Gv$, $|v| \ll \log^2 T$, $G \ll T^{1-\epsilon}/\sqrt{t}$ и $\alpha_0 = t/T \ll T^{-\delta}$ выполнена асимптотическая формула*

$$\frac{L_\infty(1/2+2it,t_j)}{L_\infty(1/2-2it,t_j)} = C(t,T)\exp\left(2iGv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)\sum_{j=0}^{N}\frac{c_j}{T^{j\delta_0}} + O(T^{-A}), \tag{11.13}$$

где $C(t,T), c_j \ll 1$, $\delta_0 > 0$ – некоторое фиксированное число, A – произвольно большая константа, а N зависит от A.

Доказательство. Из (0.4) следует что

$$\frac{\Gamma(\sigma+iy)}{\Gamma(\sigma-iy)} = \exp\left(i\left(2y\log|y| - 2t + \frac{\pi y(\sigma-1/2)}{|y|}\right)\right)\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}a_j/y^j + O(|y|^{-N})\right). \tag{11.14}$$

Применяя (0.22), (11.14) и записывая $t = \alpha t_j$, получаем

$$\frac{L_\infty(1/2+2it,t_j)}{L_\infty(1/2-2it,t_j)} = C(t)\exp\left(2it_j((2\alpha\log|t_j| + f(\alpha))\right)\left(1+\sum_{j=1}^{N-1}\frac{a_j}{T^j} + O(T^{-N})\right), \tag{11.15}$$

где

$$f(\alpha) = (1+\alpha)\log(1+\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha) - 2\alpha = -\alpha^3/3 + O(\alpha^5). \tag{11.16}$$

Заметим, что

$$\alpha = \frac{t}{t_j} = \frac{t}{T+Gv} = \frac{\alpha_0}{1+Gv/T}.$$

Далее запишем разложение функции $\exp\left(2it_j((2\alpha\log t_j + f(\alpha))\right)$ в ряд Тейлора в точке $v = 0$. Заметим, что

$$4it_j\alpha\log t_j = 4it\log(T+Gv) = 4it\log T + 4iGv\alpha_0 + O\left(\frac{tG^2v^2}{T^2}\right).$$

Для простоты записи положим $g(x) := f(\frac{\alpha_0}{1+x})$. Тогда

$$f(\alpha) = g(Gy/T) = g(0) + g'(0)\frac{Gv}{T} + O(\alpha^3\frac{G^2v^2}{T^2}) = f(\alpha_0) - \alpha_0 f'(\alpha_0)\frac{Gv}{T} + O(\alpha^3\frac{G^2v^2}{T^2}).$$

Следовательно,

$$t_jf(\alpha) = Tf(\alpha_0) + Gv\left(f(\alpha_0) - \alpha_0 f'(\alpha_0)\right) + O(\alpha_0^3\frac{G^2v^2}{T}) =$$
$$= Tf(\alpha_0) + Gv\left(\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0} - 2\alpha_0\right) + O(\alpha_0^3\frac{G^2v^2}{T}). \tag{11.17}$$

Наконец, в предположении $G \ll T^{1-\epsilon}/\sqrt{t}$ мы доказываем, что

$$\exp\left(2it_j((2\alpha\log t_j + f(\alpha))\right) = \exp\left(4it\log T + 2iTf(\alpha_0)\right)$$
$$\times\exp\left(2iGv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)\left(1+O\left(\frac{tG^2v^2}{T^2}\right)\right).$$

□

Лемма 11.1.5. *При $t_j = T+Gv$, $|v| \ll \log^2 T$, $G, t \ll T^{1-\delta_0}$ выполнена асимптотическая формула*

$$V(y,t,T+Gv) = V(y,t,T) + \tilde{V}(y,t,t_j) + O(t_j^{-N+\epsilon}), \tag{11.18}$$

$$\tilde{V}(y,t,t_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a)} \left(\frac{\sqrt{T^2-t^2}}{\pi^{3/2}y}\right)^z \sum_{j=0}^{M} \frac{c_j(T,G,v,t,z)}{T^{j\delta_0}} \frac{\Gamma(1/4+it+z/2)}{\Gamma(1/4+it)} \zeta(1+4it+2z) G(t,z) \times \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p(t/t_j, w/t_j)}{t_j^k}\right) \frac{dz}{z} + O(t_j^{-N+\epsilon}),$$

где $c_j(T,G,v,t,z) \ll 1$.

Доказательство. Для начала сократим область интегрирования в (11.10) до $|\operatorname{Im} z| \ll T^\epsilon$, вводя при этом пренебрежимо малый остаток. Теперь утверждение леммы следует из формулы

$$\left(t_j^2 - t^2\right)^z = \left(T^2 - t^2 + 2TGv + G^2v^2\right)^z = \left(T^2-t^2\right)^z \left(1 + \frac{2TGv+G^2v^2}{T^2-t^2}\right)^z$$

после разложения последней скобки в ряд Тейлора. □

Для оценки различных интегралов воспользуемся следующей леммой (см. [**49**, лемму 8.1] и [**18**, лемму A1]).

Лемма 11.1.6. *Предположим, что параметры $P, R, V, X, Y > 0$ выбраны так, что*

$$|f'(x)| \gg R, \quad f^{(i)}(x) \ll \frac{Y}{P^i}, \quad g^{(j)}(x) \ll \frac{X}{V^j} \tag{11.19}$$

при $i \geqslant 2, j \geqslant 0$. Тогда

$$I = \int_a^b g(x)e(f(x))dx \ll (b-a)X\left(\frac{1}{RV} + \frac{1}{RP} + \frac{Y}{R^2P^2}\right)^A. \tag{11.20}$$

Для простоты введём следующие условные обозначения. Часто в этой главе мы будем изучать функции нескольких переменных и доказывать асимптотические разложения для этих функций относительно одной из переменных, например

$$f(x_1,\dots,x_k,T) = \sum_{j=0}^{n} \frac{c(x_1,\dots,x_k,T)}{T^j} + O(T^{-n-1}).$$

В этом случае мы обычно будем рассматривать вклад лишь от главного члена $c(x_1,\dots,x_k,T)$. Кроме того, если зависимость от каких-либо переменных нам будет не важна, мы будем использовать следующее обозначение

$$f(x_1,\dots,x_k,T) \sim c(x_{i_1},\dots,x_{i_l}).$$

11.2. Формула суммирования Вороного для $\mathscr{L}_n(1/2+2it)$

Формула Вороного для $\mathscr{L}_n(1/2+2it)$ имеет такую же арифметическую структуру, что и для $\mathscr{L}_n(1/2)$. Как показано в [**17**], достаточно рассмотреть только случай $c \equiv 0 \pmod 4$, поскольку остальные случаи можно изучать аналогично. Поэтому мы приведём подробные вычисления только для $c \equiv 0 \pmod 4$, чтобы продемонстрировать необходимые изменения в анализе интегральных преобразований.

Следуя работе Данстера [**79**, (3.4a), (3.4b)], определим

$$F_\mu(z) := \frac{J_\mu(z)+J_{-\mu}(z)}{2\cos(\pi\mu/2)}, \quad G_\mu(z) := \frac{J_\mu(z)-J_{-\mu}(z)}{2\sin(\pi\mu/2)}.$$

Пусть $L_\mu(z)$ обозначает либо $F_\mu(z)$, либо $G_\mu(z)$. Функция $\omega_L(z) = L_{2it}(2tz)\sqrt{z}$ удовлетворяет функциональному уравнению (см. [**79**, (5.1)]):

$$\frac{d^2\omega_L}{dz^2} = -\frac{1+16t^2(1+z^2)}{4z^2}\omega_L(z). \tag{11.21}$$

Выполнена равномерная асимптотическая формула (см. [**79**, (5.15),(5.16)]):

$$L_{2it}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}(1+z^2)^{1/4}}\sum_{\pm} e^{\pm 2it\xi(z)}E_\pm(t,(1+z^2)^{-1/2}), \tag{11.22}$$

где

$$\xi(z) = \sqrt{1+z^2} + \log\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}, \quad \xi'(z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}, \tag{11.23}$$

и неосциллирующая функция $E_\pm(t,p)$ имеет асимптотическое разложение типа Пуанкаре (можно записать эти функции в ряды по убывающим степеням t и с остатком, который будет меньше последнего слагаемого в этом разложении).

Аналогичные результаты справедливы и для K-функции Бесселя. Функция $\omega_K(z) = K_{2it}(2tz)\sqrt{z}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (см. [**79**, (4.1)]):

$$\frac{d^2\omega_K}{dz^2} = \frac{1+16t^2(z^2-1)}{4z^2}\omega_K(z). \tag{11.24}$$

При $1-z \gg t^{-2/3+\epsilon}$ выполнена следующая асимптотическая формула (см. [**40**], [**79**, sec.4]):

$$e^{\pi t}K_{2it}(2tz) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}(1-z^2)^{1/4}}\Big(\cos(2t\eta(z)-\frac{\pi}{4})\sum_{s=0}^{n}\frac{U_{2s}((1-z^2)^{-1/2})}{(2t)^{2s}} + \\ + \sin(2t\eta(z)-\frac{\pi}{4})\sum_{s=0}^{n-1}\frac{U_{2s+1}((1-z^2)^{-1/2})}{(2t)^{2s+1}} + O\left(\frac{1}{(t(1-z^2)^{1/2})^{2n+1}}\right)\Big), \tag{11.25}$$

где $U_j(x) = O(x^j)$ и

$$\eta(z) = -\sqrt{1-z^2} + \log\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}, \quad \eta'(z) = -\frac{\sqrt{1-z^2}}{v}. \tag{11.26}$$

В остальных областях значений z мы применим результаты работы [**52**]. А именно, при $z-1 \gg t^{-2/3+\epsilon}$

$$e^{\pi t} K_{2it}(2tz) \ll (zt)^{-A}. \tag{11.27}$$

При $|x-2t| \ll t^{1/3+\epsilon}$

$$e^{\pi t} K_{2it}(x) \ll \frac{1}{t^{1/3}}, \quad e^{\pi t} \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_{2it}(x) \ll \frac{(t^{2/3}/x)^j}{t^{1/3}}. \tag{11.28}$$

При $k=1/2$ и $\rho = it$ функции $\Phi^{(\pm,\pm)}(z)$ (см. [**34**, (1.9)]) можно записать в следующем виде

$$\Phi^{(+,+)}(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}} \left(F_{2it}(2\sqrt{z}) - G_{2it}(2\sqrt{z}) \right), \tag{11.29}$$

$$\Phi^{(-,-)}(z) = \frac{-\sqrt{z}}{\sqrt{2}} \left(F_{2it}(2\sqrt{z}) + G_{2it}(2\sqrt{z}) \right). \tag{11.30}$$

Мы также немного изменим определение $\Phi^{(\pm,\mp)}(z)$ (см. [**34**, (1.10)]), положив

$$\Phi^{(-,+)}(z) := \frac{2\sqrt{z} K_{2it}(2\sqrt{z})}{\Gamma(1/4+it)\Gamma(3/4-it)}, \tag{11.31}$$

$$\Phi^{(+,-)}(z) := \frac{2\sqrt{z} K_{2it}(2\sqrt{z})}{\Gamma(1/4-it)\Gamma(3/4+it)}. \tag{11.32}$$

Для формулировки формулы Вороного определим тета-мультипликатор (см. [**168**, стр. 2380]):

$$\vartheta(M) := \bar{\epsilon}_d \left(\frac{c}{d} \right),$$

где символ $\left(\frac{c}{d}\right)$ определён на [**164**, стр. 442] (для положительных чётных d он совпадает с классическим символом Якоби), и $\epsilon_d = 1$ при $d \equiv 1 \pmod 4$, $\epsilon_d = i$ при $d \equiv -1 \pmod 4$.

Лемма 11.2.1. *При $c \equiv 0 \pmod 4$ и $ad \equiv 1 \pmod 4$ выполнены формулы*

$$\sum_{n>0} \phi(n) e\left(\frac{an}{c}\right) \frac{\mathscr{L}_n(1/2+2it)}{n^{1/2-it}} = \vartheta(M_0) e(1/8) \sqrt{2} \mathcal{R}_+(c,t) + \\ + \vartheta(M_0) e(1/8) \sum_{n \neq 0} \widehat{\phi}^+ \left(\frac{4\pi^2 n}{c^2} \right) e\left(-\frac{dn}{c}\right) \frac{\mathscr{L}_n(1/2+2it)}{|n|^{1/2-it}}, \tag{11.33}$$

$$\sum_{n<0} \phi(n) e\left(\frac{an}{c}\right) \frac{\mathscr{L}_n(1/2+2it)}{|n|^{1/2-it}} = \vartheta(M_0) e(1/8) \sqrt{2} \mathcal{R}_-(c,t) + \\ + \vartheta(M_0) e(1/8) \sum_{n \neq 0} \widehat{\phi}^- \left(\frac{4\pi^2 n}{c^2} \right) e\left(-\frac{dn}{c}\right) \frac{\mathscr{L}_n(1/2+2it)}{|n|^{1/2-it}}, \tag{11.34}$$

где

$$\mathcal{R}_\pm(c,t) = \frac{2^{4it} \phi^\pm(1/2+it)}{c^{1+2it}} \zeta(1+4it) + \frac{\pi^{2it} \phi^\pm(1/2-it)}{c^{1-2it}} \zeta(1-4it) \frac{\Gamma\left(\frac{2\pm1}{4}+it\right)\Gamma(1/2-2it)}{\Gamma\left(\frac{2\pm1}{4}-it\right)\Gamma(1/2+2it)},$$

$$\phi^+(s) = \int_0^\infty \phi(\pm x) x^{s-1} dx, \quad \widehat{\phi}^+(\pm y) = \int_0^\infty \frac{\phi(x)}{x} \Phi^{(\pm,+)}(xy) dx, \tag{11.35}$$

$$\phi^-(s)=\int_0^\infty \phi(-x)x^{s-1}dx,\quad \widehat{\phi^-}(\pm y)=\int_0^\infty \frac{\phi(-x)}{x}\Phi^{(\pm,-)}(xy)dx. \tag{11.36}$$

Доказательство. Утверждение следует из [**34**, теоремы 1.2, следствия 1.5] путём прямых вычислений. □

При $c\equiv 0 \pmod 4$ and $ad\equiv 1 \pmod 4$, положим

$$\Theta_0(c,n):=\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}\vartheta(M_0)e\left(-\frac{dn}{c}\right)=\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}\bar{\epsilon}_d\left(\frac{c}{d}\right)e\left(-\frac{dn}{c}\right).$$

В соответствии с [**17**, (3.10)]

$$\sum_{c\equiv 0 \pmod 4}\frac{\Theta_0(c,n)}{c^{2s}}=\frac{L^*(2s-1/2,n)}{\zeta_2(4s-1)}\overline{r_2(\bar{s},n)}, \tag{11.37}$$

функция $r_2(s,n)$ определена в [**155**, (3.6),(3.7)], ряд $L^*(z)$ задан формулой [**155**, (2.8)] и с точностью до конечного произведения совпадает с L-функцией Дирихле. Как показано в [**17**, главе 3], $L^*(z)$ и $\mathscr{L}_n(z)$ не сильно отличаются друг от друга.

Применяя неравенство большого решета Хис-Брауна [**91**] (см. [**112**, (3.1)] или [**155**, (2.28)]), получаем (см. [**112**, (3.2)], [**155**, теорему 2.9, замечание 2.10]) следующие оценки:

$$\sum_{n\leqslant N}|L^*(1/2+it,n)|^2\ll\left(N+\sqrt{N(1+|t|)}\right)(N(1+|t|))^{\epsilon}, \tag{11.38}$$

$$\sum_{n\leqslant N}|\mathscr{L}_n(1/2+it)|^2\ll\left(N+\sqrt{N(1+|t|)}\right)(N(1+|t|))^{\epsilon}. \tag{11.39}$$

11.3. Точная формула для первого скрученного момента

Пусть

$$\mathcal{M}_1(l,\rho;h):=\sum_j h(t_j)\alpha_j\lambda_j(l^2)L(\mathrm{sym}^2\,u_j,\rho),$$

где $h(t)$ – весовая функция, удовлетворяющая условиям

C1: $h(r)$ – чётная функция;

C2: $h(r)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Im}(r)|<\Upsilon$ для некоторого $\Upsilon>1/2$;

C3: $h(r)$ такая, что оценка $h(r)\ll(1+|r|)^{-2-\epsilon}$ справедлива в полосе $|\operatorname{Im}(r)|<\Upsilon$, $\Upsilon>1/2$;

C4: $h(\pm(n+1/2)i)=0$ при $n=0,1,\dots N-1$, где $N>0$ – достаточно большое число.

Стандартный выбор для функции $h(r)$ – это

$$h(T,G,N;r):=q_N(r)\exp\left(-\frac{(r-T)^2}{G^2}\right)+q_N(r)\exp\left(-\frac{(r+T)^2}{G^2}\right), \tag{11.40}$$

где для произвольно большого целого числа N

$$q_N(r):=\frac{(r^2+1/4)\dots(r^2+(N-1/2)^2)}{(r^2+100N^2)^N}. \tag{11.41}$$

Заметим, что $q_N(r) = 1 + O(1/r^2)$. Для простоты будем писать $h(r)$ вместо $h(T, G, N; r)$. При $x \geq 2$, пусть

$$I(x,\rho;h) := \frac{2^{2-\rho}i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2ir} \frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1-\rho/2+ir)}{\Gamma(1+2ir)} \\ \times \sin\left(\pi(\rho/2-ir)\right) {}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir, 1-\rho/2+ir, 1+2ir; \frac{4}{x^2}\right) dr, \quad (11.42)$$

$$I(2,\rho;h) := \Gamma(\rho-1/2)\frac{2^{2-\rho}i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)} \sin\left(\pi(\rho/2-ir)\right) \\ \times \frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1-\rho/2+ir)}{\Gamma(\rho/2+ir)\Gamma(1/2+\rho/2+ir)} dr$$

и при $0 < x < 2$

$$I(x,\rho;h) := \frac{2i}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)} x^{1-\rho} \frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)\Gamma(1/2-\rho/2-ir)}{\Gamma(1/2)} \\ \times \cos\left(\pi(\rho/2+ir)\right) {}_2F_1\left(1/2-\rho/2+ir, 1/2-\rho/2-ir, 1/2; \frac{x^2}{4}\right) dr. \quad (11.43)$$

В соответствии с главой 3 выполнена следующая точная формула.

Теорема 11.3.1. *Для любой функции $h(t)$, удовлетворяющей условиям $(C1)-(C4)$, и $\operatorname{Re}\rho = 1/2$ выполнена формула*

$$M_1(m,\rho;h) = MT(m,\rho;h) + CT(m,\rho;h) + ET(m,\rho;h) + S_1(m,\rho;h) + S_2(m,\rho;h), \quad (11.44)$$

где

$$MT(m,\rho;h) = \frac{\zeta(2\rho)}{\pi^2 m^\rho} \int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)dr + (2\pi)^{\rho-1}\zeta(2\rho-1)\frac{I(2,\rho;h)}{(2m)^{1-\rho}},$$

$$CT(m,\rho;h) = -\frac{\zeta(\rho)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{ir}(m^2)\zeta(\rho+2ir)\zeta(\rho-2ir)}{|\zeta(1+2ir)|^2} h(r)dr, \quad (11.45)$$

$$ET(m,\rho;h) = -\frac{2\zeta(2\rho-1)}{\zeta(2-\rho)}\tau_{(1-\rho)/2}(m^2)h\left(\frac{1-\rho}{2i}\right) \\ + \mathscr{L}_{-4m^2}(\rho)\frac{2^{1-\rho}i}{(4\pi m)^{1-\rho}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)} \frac{\Gamma(1/2-\rho/2+ir)}{\Gamma(1/2+\rho/2+ir)} dr,$$

$$S_1(m,\rho;h) = (2\pi)^{\rho-1} \sum_{n=1}^{2m-1} \frac{1}{n^{1-\rho}} \mathscr{L}_{n^2-4m^2}(\rho) I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right),$$

$$S_2(m,\rho;h) = (2\pi)^{\rho-1} \sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\rho}} \mathscr{L}_{n^2-4m^2}(\rho) I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right).$$

11.4. Асимптотический анализ гипергеометрических функций

Для гипергеометрической функции, появляющейся в (11.42), справедлива следующая асимптотическая формула, доказанная в предыдущей главе.

Утверждение 11.4.1. *При* $0 < z < 1$, $r \to \infty$ *и* $r^{-1+\delta} \ll \alpha \ll r^{-\delta}$ *выполнена формула*

$$
{}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) = \\
= \frac{\exp\left(2irl_1(\alpha, z)\right)}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}} \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(\alpha, r)}{(\alpha r)^j}\right) + O((\alpha r)^{-N-1}), \quad (11.46)
$$

где

$$
l_1(\alpha, z) = \log 2 - \alpha \log(1+\alpha) - \log(1 + \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}) + \alpha \log(\alpha + \sqrt{1-(1-\alpha^2)z}). \quad (11.47)
$$

Для простоты обозначений мы будем использовать знак $\sim$, чтобы выделить главный член асимптотического разложения с точностью до умножения на константу.

Следствие 11.4.2. *При* $0 < z < 1$, $r = T + Gv$, $|v| \ll \log^2 T$, $G \ll T^{1/2-\epsilon}$ *и* $\alpha_0 = t/T \ll T^{-\delta}$, *главный член в асимптотическом разложении* (11.46) *может быть записан как*

$$
{}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 3/4 + ir(1-\alpha), 1 + 2ir; z\right) \sim (1-(1-\alpha_0^2)z)^{-1/4} \\
\times e^{2iT\left(-\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}) + \alpha_0 \log(\alpha_0 + \sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z})\right)} e^{2iGv\left(-\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}) + \log 2\right)}. \quad (11.48)
$$

Доказательство. Утверждение доказывается аналогично лемме 11.1.4. Как и в (11.17)

$$
rl_1(\alpha, z) = Tl_1(\alpha_0, z) + Gv\left(l_1(\alpha_0, z) - \alpha_0 l_1'(\alpha_0, z)\right) + O\left(\frac{G^2v^2}{T}\right), \quad (11.49)
$$

где производная берётся относительно α. Прямые вычисления (см. (11.47)) показывают, что

$$
l_1(\alpha_0, z) - \alpha_0 l_1'(\alpha_0, z) = \log 2 - \log(1 + \sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}). \quad (11.50)
$$

Подставляя (11.47) и (11.50) в (11.49), получаем (11.48). □

Пусть

$$
F_2(r, \alpha, x) := \frac{\Gamma(1/4 - it + ir)\Gamma(1/4 - it + ir)}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1\left(1/4 - it + ir, 1/4 - it - ir, 1/2; x\right) = \\
= \frac{\Gamma(1/4 + ir(1-\alpha))\Gamma(1/4 - ir(1+\alpha))}{\Gamma(1/2)} {}_2F_1\left(1/4 + ir(1-\alpha), 1/4 - ir(1+\alpha), 1/2; x\right). \quad (11.51)
$$

Эта функция возникает в (11.43), и её асимптотическое поведение изучалось в [**83**]. В частности, из [**83**, следствия 1.3] известно, что главный член имеет следующий вид.

Утверждение 11.4.3. *При* $0 < y < 1$, $r \to \infty$ *и* $r^{1-\delta} \ll \alpha \ll r^{-\delta}$ *выполнена формула*

$$F_2(r,\alpha,y) \sim e^{irl_2(\alpha,y)} \frac{2^{3/2}\pi e^{-\pi r\alpha}}{(2r\alpha)^{1/3}} \left(\frac{\alpha^2 \hat{\zeta}(y)}{y-1+\alpha^2} \right)^{1/4} Ai(-(2r\alpha)^{2/3}\hat{\zeta}(y)), \tag{11.52}$$

где

$$\hat{\zeta}(y) = \begin{cases} -\left(3\mathbf{a}_0(\alpha,y)/(2\alpha)\right)^{2/3}, & if \quad y < 1-\alpha^2 \\ \left(3\mathbf{a}_1(\alpha,y)/(2\alpha)\right)^{2/3}, & if \quad y > 1-\alpha^2, \end{cases} \tag{11.53}$$

$$\mathbf{a}_0(\alpha,y) = \frac{\pi(1-\alpha)}{2} - \arctan\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-\alpha^2-y}} + \alpha \arctan\frac{\alpha\sqrt{y}}{\sqrt{1-\alpha^2-y}},$$

$$\mathbf{a}_1(\alpha,y) = \alpha\log\left(\alpha\sqrt{y} + \sqrt{y-1+\alpha^2}\right) - \log\left(\sqrt{y} + \sqrt{y-1+\alpha^2}\right) - \\ - \frac{\alpha}{2}\log(1-y) + \frac{1-\alpha}{2}\log(1-\alpha^2), \tag{11.54}$$

$$\mathbf{a}_0(\alpha,y) = \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha^2-y)^{3/2}}{3\alpha^2 y^{3/2}} \left(1 + O\left(\frac{1-\alpha^2-y}{\alpha^2}\right)\right).$$

Заметим, что (см. [**83**, стр. 10])

$$\mathbf{a}_1(\alpha,y) = \frac{(y-1+\alpha^2)^{3/2}}{3\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}} \left(1 + O\left(\frac{y-1+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\right). \tag{11.55}$$

В этом случае аргумент функции Эйри больше чем r^δ, а значит можно применить асимптотические формулы [**151**, (9.7.5),(9.7.9)] для функции Эйри, как показано в [**83**, следствии 1.2, 1.3].

Следствие 11.4.4. *При* $0 < y < 1-\alpha^2 - \frac{\alpha^{4/3}}{r^{2/3-\delta}}$ *выполнена оценка*

$$F_2(r,\alpha,y) \ll \frac{e^{-\pi r\alpha} e^{-2r\mathbf{a}_0(\alpha,y)}}{\sqrt{r}(1-\alpha^2-y)^{1/4}} \ll \frac{e^{-\pi r\alpha}}{r^A}. \tag{11.56}$$

Следствие 11.4.5. *При* $1-\alpha^2 + \frac{\alpha^{4/3}}{r^{2/3-\delta}} < y < 1$ *главный коэффициент в асимптотической формуле для* $F_2(r,\alpha,y)$ *равен*

$$F_2(r,\alpha,y) \sim 2\sqrt{\pi} e^{irl_2(\alpha,y)} e^{-\pi r\alpha} \frac{\cos\left(2r\mathbf{a}_1(\alpha,y) - \pi/4\right)}{\sqrt{r}(y-1+\alpha^2)^{1/4}}, \tag{11.57}$$

где

$$l_2(\alpha,y) = \alpha\log(1-y) - 2\alpha\log r + (1-\alpha)\log(1-\alpha) - (1+\alpha)\log(1+\alpha) + 2\alpha. \tag{11.58}$$

11.5. Второй момент на критической прямой и суммы L-рядов Загира

Для того чтобы оценить

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2-2it)L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it),$$

мы запишем одну из L-функций через приближенное функциональное уравнение (11.7), а затем применим теорему 11.44 с $\rho = 1/2+2it$ и тестовой функцией $h(r)$ равной

$$H_0(t,r) = V(m,-t,r)h(T,G,N;r) \text{ или } H_\infty(t,r) = \frac{L_\infty(1/2+2it,r)}{L_\infty(1/2-2it,r)}V(m,t,r)h(T,G,N;r),$$

где функция $h(T,G,N;r)$ определена в (11.40) и (11.41). Так как функция $H_\infty(t,r)$ не удовлетворяет условиям, выписанным в начале раздела 11.3, мы для начала заменим её на (11.15). Достаточно рассмотреть только главный член в этом приближении, поскольку все остальные члены можно изучать аналогичным методом и они меньше по размеру. Таким образом,

$$H_\infty(t,r) = e^{2ir((2\alpha\log|r|+f(\alpha))}V(m,t,r)h(T,G,N;r),$$

где $f(\alpha)$ задана в (11.16) и $\alpha = t/r$. Все слагаемые в (11.44), за исключением $S_1(m,\rho;h) + S_2(m,\rho;h)$, ограничены сверху величиной $T^{1+\epsilon}G$. Вклад $CT(m,\rho;h)$ можно оценить как в [**30**, лемме 5.3]. А именно, следуя доказательству [**30**, леммы 5.3], мы получаем произведение шести дзета-функций (одна дополнительная дзета-функция возникает ввиду наличия $\zeta(\rho)$ в (11.45)). Применяя оценку $|\zeta(1/2+iy)| \ll y^{1/6}$, и далее оценивая по модулю интегралы в коротких интервалах, мы получаем $t^{1/3}T^{2/3+\epsilon}G \ll T^{1-\epsilon}G$, поскольку $t \ll T^{1-\epsilon}$. Следовательно,

$$\sum_{T<t_j\leqslant T+G} \alpha_j|L(\mathrm{sym}^2 u_j, 1/2+2it)|^2 \ll T^{1+\epsilon}G + S_1(t) + S_2(t), \tag{11.59}$$

где

$$S_1(t) = \sum_{m\ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{n=1}^{2m-1} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}} \left(\frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_0\right)}{m^{1/2-2it}} + \frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_\infty\right)}{m^{1/2+2it}} \right),$$

$$S_2(t) = \sum_{m\ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}} \left(\frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_0\right)}{m^{1/2-2it}} + \frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_\infty\right)}{m^{1/2+2it}} \right). \tag{11.60}$$

11.5.1. Предварительная оценка $S_1(t)$. Введём следующие обозначения

$$\rho := 1/2+2it, \quad \alpha := \frac{t}{r}, \quad y := \frac{n^2}{4m^2}.$$

Из определений (11.43) и (11.51) следует, что

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\frac{rh(r)}{\cosh(\pi r)}\cos\left(\pi(\rho/2+ir)\right)y^{1/2-\rho/2}F_2(r,\alpha,y)dr. \tag{11.61}$$

Достаточно рассмотреть вклад только первой экспоненты в (11.40). При этом вклад значений $r<0$ в (11.61) пренебрежимо мал, и мы можем предположить, что $r>0$

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)\sim\int_{-\infty}^{\infty}rh(r)y^{1/4-ir\alpha}e^{\pi r\alpha}F_2(r,\alpha,y)dr. \tag{11.62}$$

Сделаем замену переменных $r=T+Gv$ в (11.62). Из (11.40) напрямую следует, что вклад значений $|v|\gg\log^2 T$ пренебрежимо мал, поэтому мы можем предположить, что

$$r=T+Gv,\quad |v|\ll\log^2 T,\quad \alpha=\alpha(x)=\frac{\alpha_0}{1+x},\quad x=Gv/T,\quad \alpha_0=t/T.$$

Следующий шаг – применить следствия 11.4.4 и 11.4.5. Небольшая сложность возникает при проверке условий данных следствий, так как α зависит от v. Тем не менее, при $G\ll T^{1+\delta}/t^{2/3}$ выполнено

$$\frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}\gg\alpha_0^2\frac{Gv}{T},$$

и поэтому

$$y>1-\alpha_0^2+\frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}>1-\alpha^2+\frac{\alpha^{4/3}}{T^{2/3-\delta}}, \tag{11.63}$$

$$y<1-\alpha_0^2-\frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}<1-\alpha^2-\frac{\alpha^{4/3}}{T^{2/3-\delta}}. \tag{11.64}$$

В случае (11.64), из (11.62) и (11.56) следует, что

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)\ll T^{-A}.$$

Подставляя (11.52) в (11.62) и применяя (11.58), получаем

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)\sim y^{1/4-it}(1-y)^{it}G\int_{-\infty}^{\infty}rh(r)\frac{e^{-2it\log r+irl_2(\alpha)}}{(r\alpha)^{1/3}}\left(\frac{\alpha^2\hat{\zeta}(y)}{y-1+\alpha^2}\right)^{1/4}Ai(-(2r\alpha)^{2/3}\hat{\zeta}(y))dv,$$

где мы используем r вместо $T+Gv$ для сокращения записи и

$$l_2(\alpha)=(1-\alpha)\log(1-\alpha)-(1+\alpha)\log(1+\alpha)+2\alpha.$$

Применяя (11.18) и (11.13), мы показываем, что

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;H_0\right)\sim y^{1/4-it}(1-y)^{it}V(m,-t,T)G$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}rh(r)\frac{e^{-ir(2\alpha\log r-l_2(\alpha))}}{(r\alpha)^{1/3}}\left(\frac{\alpha^2\hat{\zeta}(y)}{y-1+\alpha^2}\right)^{1/4}Ai(-(2r\alpha)^{2/3}\hat{\zeta}(y))dv,$$

$$I\left(\frac{n}{m},\rho;H_\infty\right)\sim y^{1/4-it}(1-y)^{it}V(m,t,T)G$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}rh(r)e^{2iGv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\frac{e^{-ir(2\alpha\log r-l_2(\alpha))}}{(r\alpha)^{1/3}}\left(\frac{\alpha^2\hat\zeta(y)}{y-1+\alpha^2}\right)^{1/4}Ai(-(2r\alpha)^{2/3}\hat\zeta(y))dv.$$

Заметим, что

$$2\alpha\log r-l_2(\alpha)=2\alpha\log r+f(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ задана в (11.16). Рассуждая как в лемме 11.1.4, мы получаем

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim V(m,\varepsilon(h)t,T)G$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon(h)Gv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\frac{rh(r)}{(r\alpha)^{1/3}}\left(\frac{\alpha^2\hat\zeta(y)}{y-1+\alpha^2}\right)^{1/4}Ai(-(2r\alpha)^{2/3}\hat\zeta(y))dv,\quad(11.65)$$

где

$$\varepsilon(h)=-1\quad\text{if}\quad h=H_0,\quad\varepsilon(h)=-1\quad\text{if}\quad h=H_\infty.$$

В случае (11.63), применяя [**151**, 9.7.8] (см. также (11.57)), мы делаем вывод, что

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim V(m,\varepsilon(h)t,T)G\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon(h)Gv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\frac{h(r)\sqrt{r}}{(y-1+\alpha^2)^{1/4}}\sum_{\pm}e^{\pm2ir\mathbf{a}_1(\alpha,y)}dv.$$

Подставляя (11.54), получаем

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim\sum_{\pm}\frac{V(m,\varepsilon(h)t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{\pm it}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon(h)Gv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\frac{e^{-v^2}e^{\pm2i(T+Gv)\mathbf{a}_1(\alpha)}}{(y-1+\alpha^2)^{1/4}}dv,$$

где

$$\mathbf{a}_1(\alpha)\;=\;\alpha\log\left(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2}\right)\;-\;\log\left(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2}\right)\;+\;\frac{1-\alpha}{2}\log(1\;-\;\alpha^2).\quad(11.66)$$

При $x=Gv/T$ выполнено равенство:

$$(y-1+\alpha^2)^{-1/4}=\alpha^{-1/2}\left(1+\frac{y-1}{\alpha_0^2}\,(1+x)^2\right)^{-1/4}.$$

Для разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ необходимо доказать оценку

$$\frac{x}{1+\frac{y-1}{\alpha_0^2}}=\frac{x\alpha_0^2}{y-1+\alpha_0^2}\ll T^{-\delta/2}.$$

Применяя (11.63), находим, что оценка

$$\frac{x}{1+\frac{y-1}{\alpha_0^2}}\ll x\alpha_0^{2/3}T^{2/3-2\delta}\ll Gt^{2/3}T^{-1-\delta}\ll T^{-\delta/2}$$

выполнена при $G \ll T^{1+\delta/2}/t^{2/3}$. В предположении верности этого условия

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}} \sim \sum_{\pm} \frac{V(m,\varepsilon(h)t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{\pm it}(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon(h)Gv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}} e^{-v^2} e^{\pm 2i(T+Gv)\mathbf{a}_1(\alpha)} dv. \tag{11.67}$$

Вспомним, что $\alpha = \alpha(x) = \alpha_0/(1+x)$, $x = Gv/T$. Пусть

$$F(x) := (1+x)\mathbf{a}_1\left(\frac{\alpha_0}{1+x}\right). \tag{11.68}$$

Тогда справедливо следующее разложение Тейлора в окрестности точки $x = 0$:

$$(T+Gv)\mathbf{a}_1(\alpha) = TF(0) + F'(0)Gv + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \frac{(Gv)^k}{T^{k-1}}. \tag{11.69}$$

Здесь $F(0) = \mathbf{a}_1(\alpha_0)$ и

$$F'(0) = \mathbf{a}_1(\alpha_0) - \alpha_0 \frac{d}{d\alpha}\mathbf{a}_1(\alpha_0), \quad F''(0) = \alpha_0^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}\mathbf{a}_1(\alpha_0), \quad F^{(k)}(0) = \sum_{j=2}^{k} c_j \alpha_0^j \frac{d^j}{d\alpha^j}\mathbf{a}_1(\alpha_0),$$

а c_j – некоторые абсолютные константы. Обозначив за $f_j(\alpha)$ слагаемое с номером j в (11.66), получаем $\mathbf{a}_1(\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) + f_3(\alpha)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} f_1'(\alpha) = \log\left(\alpha\sqrt{y} + \sqrt{y-1+\alpha^2}\right) + \frac{\alpha(\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2})}{(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})\sqrt{y-1+\alpha^2}} = \\ = \log\left(\alpha\sqrt{y} + \sqrt{y-1+\alpha^2}\right) + \left(\frac{\alpha}{\sqrt{y}} + \sqrt{y-1+\alpha^2}\right) \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{y-1+\alpha^2}} - \frac{1}{\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2}}\right). \end{aligned} \tag{11.70}$$

Для вычисления производной произведения двух скобок в правой части (11.70) применим соответствующее правило, раскроем скобки и воспользуемся уравнениями

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}} - \frac{1}{\sqrt{y}(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})} - \frac{\alpha}{\sqrt{y-1+\alpha^2}(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2})}{\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})^2} + \frac{\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}}{(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})^2} = \\ = \frac{(\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2})^2}{\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f_1''(\alpha) = \frac{\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}}{(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})\sqrt{y-1+\alpha^2}} - \frac{\alpha^2}{(y-1+\alpha^2)^{3/2}\sqrt{y}} + \\ + \frac{(\alpha+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2})^2}{\sqrt{y}(\alpha\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})^2\sqrt{y-1+\alpha^2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что при вычислении $f_1''(\alpha)$ слагаемые $\frac{\pm\alpha}{y-1+\alpha^2}$ сократились. Поскольку

$$f_2'(\alpha)=\frac{\alpha(y-1+\alpha^2)^{-1/2}}{(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})}=\frac{\alpha}{\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha^2}}-\frac{\alpha}{(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})\sqrt{y}},$$

$$f_2''(\alpha)=\frac{(y-1+\alpha^2)^{-1/2}}{(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})}-\frac{\alpha^2}{(y-1+\alpha^2)^{3/2}\sqrt{y}}+\frac{\alpha^2(y-1+\alpha^2)^{-1/2}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha^2})^2},$$

выполнены равенства

$$\begin{aligned}F'(0)=&-\log\left(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}\right)+\frac{1}{2}\log(1-\alpha_0^2)+\frac{\alpha_0^2}{1+\alpha_0}+\\&+\frac{\alpha_0^2}{\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}-\frac{\alpha_0+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{\alpha_0\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}\right)\\&=-\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{\sqrt{1-\alpha_0^2}}\right)\end{aligned}\tag{11.71}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{F''(0)}{\alpha_0^2}=&\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0^2}-\frac{1}{(1+\alpha_0)^2}+\frac{\alpha_0+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{(\alpha_0\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2})\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}+\\&\frac{(\alpha_0+\sqrt{y}\sqrt{y-1+\alpha_0^2})^2}{\sqrt{y}(\alpha_0\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2})^2\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}-\frac{(y-1+\alpha_0^2)^{-1/2}}{(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2})}\\&-\frac{\alpha_0^2(y-1+\alpha_0^2)^{-1/2}}{\sqrt{y}(\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2})^2}.\end{aligned}$$

В соответствии с (11.63) получаем оценки:

$$F''(0)\ll\frac{\alpha_0^2}{\sqrt{y-1+\alpha_0^2}},\quad F^{(k)}(0)\ll\frac{\alpha_0^{2k-2}}{(y-1+\alpha_0^2)^{k-3/2}},$$

из которых следует, что

$$\frac{F^{(k)}(0)(Gv)^k}{T^{k-1}}\ll T^{3\delta/2}\left(\frac{Gt^{2/3}\log^2T}{T^{1+\delta}}\right)^k\ll T^{-k\delta_1}\tag{11.72}$$

при условии $G\ll T^{1+\delta/4}/t^{2/3}$. В результате, мы можем записать (11.67) как

$$\begin{aligned}&\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim\\&\qquad\sum_{\pm}\frac{V(m,\varepsilon(h)t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{\pm it}(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}}e^{\pm2iT\mathbf{a}_1(\alpha_0)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2iGv\left(\varepsilon(h)\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\pm F'(0)\right)}e^{-v^2}dv.\end{aligned}$$

Применяя (0.12), показываем, что

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;h\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim\sum_{\pm}\frac{V(m,\varepsilon(h)t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{\pm it}(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}}e^{\pm2iT\mathbf{a}_1(\alpha_0)}e^{-G^2\left(\varepsilon(h)\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\pm F'(0)\right)^2}.$$

Из (11.71) следует, что

$$\epsilon(H_0)\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\pm F'(0)=-\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\mp\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{\sqrt{1-\alpha_0^2}}\right)$$
$$=\mp\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1\mp\alpha_0}\right),$$

$$\epsilon(H_\infty)\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\pm F'(0)=\log\frac{\sqrt{1+\alpha_0}}{\sqrt{1-\alpha_0}}\mp\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{\sqrt{1-\alpha_0^2}}\right)$$
$$=\mp\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1\pm\alpha_0}\right).$$

Пусть $y=1-\alpha_0^2+\beta^2$. Тогда из (11.63) получаем, что $\beta>\frac{\alpha_0T^\delta}{t^{1/3}}$. В результате,

$$\log\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1\pm\alpha_0}\right)=\log\left(\sqrt{1-\alpha_0^2+\beta^2}+\beta\right)\mp\alpha_0+O(\alpha_0^2)=\beta\mp\alpha_0+O(\alpha_0^2).\quad(11.73)$$

Таким обоазом, при $G\ll T^{1+\delta/4}/t^{2/3}$, $G\alpha_0\gg T^\delta$ выполнена оценка

$$e^{-G^2\log^2\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1-\alpha_0}\right)}\ll T^{-A}.$$

Поэтому

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;H_0\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim\frac{V(m,-t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{-it}(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}}e^{-2iT\mathbf{a}_1(\alpha_0)}e^{-G^2\log^2\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right)}.$$

$$\frac{I\left(\frac{n}{m},\rho;H_\infty\right)}{y^{1/4-it}(1-y)^{it}}\sim\frac{V(m,t,T)T^{1/2}G}{(1-y)^{it}(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}}e^{2iT\mathbf{a}_1(\alpha_0)}e^{-G^2\log^2\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right)}.$$

Нам осталось рассмотреть интервал дополняющий (11.63) и (11.64), а именно

$$1-\alpha_0^2-\frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}<y<1-\alpha_0^2+\frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}.$$

На данном интервале аргумент функции Эйри в (11.65) ограничен величиной T^ϵ. Эвристически это означает, что функция Эйри не является осциллирующей (или по крайней мере осцилляции не влияют на интеграл) и может быть заменена единицей. Выполнив эту замену, получаем интеграл (см. (11.65)):

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\varepsilon(h)Gv\log\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}dv=e^{-(G/2)^2\log^2\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}}\ll T^{-A}$$

при $G\alpha_0\gg T^\delta$. Для строгого доказательства необходимо рассмотреть несколько случаев. Мы приведём подробные выкладки лишь в случае $y>1-\alpha_0^2$, поскольку случай $y<1-\alpha_0^2$

рассматривается аналогично. Из (11.55) следует, что при $G \ll T^{1-2\delta}t^{-2/3}$ и

$$|y-1+\alpha_0^2| < \frac{\alpha_0^2}{t^{2/3}T^{\delta}},$$

выполнены оценки (мы используем обозначения $y := 1-\alpha_0^2+\beta^2$, $\beta < \frac{\alpha_0}{T^{\delta/2}t^{1/3}}$)

$$(T\mathbf{a}_1(\alpha,y))^{2/3} \ll \frac{T^{2/3}(y-1+\alpha^2)}{\alpha_0^{4/3}} \ll \frac{T^{2/3}(\beta^2+\alpha^2-\alpha_0^2)}{\alpha_0^{4/3}} \ll$$
$$\ll \frac{T^{2/3}(\beta^2+\alpha_0^2GT^{-1+\epsilon})}{\alpha_0^{4/3}} \ll \frac{T^{2/3-\delta}\alpha_0^{2/3}}{t^{2/3}} \ll T^{-\delta}.$$

Поэтому аргумент функции Эйри не превосходит $T^{-\delta}$, и мы можем записать для неё разложение Тейлора [**151**, 9.4.1].

Осталось рассмотреть случай

$$\frac{\alpha_0^2}{t^{2/3}T^{\delta}} < y-1+\alpha_0^2 < \frac{\alpha_0^{4/3}}{T^{2/3-2\delta}}. \tag{11.74}$$

При этих условиях мы можем записать аргумент функции Эйри в (11.65) как функцию от $x = Gv/T$ и снова разложить её в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$. Применяя (11.53), (11.54), (11.66) и (11.68), мы показываем, что аргумент записывается как

$$(3r\mathbf{a}_1(\alpha,y))^{2/3} = \left(-\frac{3t}{2}\log(1-y) + 3(T+Gv)\mathbf{a}_1(\alpha)\right)^{2/3}.$$

Применяя (11.69), (11.71), (11.72) и рассуждая как в (11.73), получаем

$$(3r\mathbf{a}_1(\alpha,y))^{2/3} = \left(3T\mathbf{a}_1(\alpha_0,y) + O(G^{1+\epsilon}\sqrt{y-1+\alpha_0^2})\right)^{2/3}. \tag{11.75}$$

Для главного члена в (11.75) выполнена оценка снизу

$$T\mathbf{a}_1(\alpha_0,y) > T^{-3\delta/2},$$

которая следует из (11.55) и (11.74). При этом остаток в (11.75) оценивается как $T^{-3\delta}$ при $G \ll T^{1-4\delta}t^{-2/3}$. Таким образом, функция Эйри в (11.65) выглядит как

$$Ai((M+E)^{2/3}) = Ai(M^{2/3}+Y),$$

где

$$M = 3T\mathbf{a}_1(\alpha_0,y), \quad E = O(G^{1+\epsilon}\sqrt{y-1+\alpha^2}), \quad Y = O(EM^{-1/3})$$

поскольку $E \ll T^{-\delta}M$, и $Ai((M+E)^{2/3})$ можно разложить в ряд Тейлора следующим образом

$$Ai((M+E)^{2/3}) = Ai(M^{2/3}+Y) = \sum_{k=0}^{\infty} Ai^{(k)}(M^{2/3})\frac{Y^k}{k!}.$$

Так как $Ai^{(k)}(z) \ll \max(z^{k/2}, 1)Ai(z)$ и $M^{2/3}Y^2 \ll T^{-\delta}$, из ряда выше получается асимптотическое разложение. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Утверждение 11.5.1. *При* $T^{1+\epsilon}/t \ll G \ll T^{1-\epsilon}/t^{2/3}$

$$S_1(t) \ll T^{1/2}G \sum_{h=H_0,H_\infty} \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{0<2m-n \ll m\alpha_0 G^{-1+\epsilon}} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}m^{1/2+2i\varepsilon(h)t}} U\left(\varepsilon(h), \frac{n^2}{4m^2}\right), \tag{11.76}$$

где $\varepsilon(h) = -1$ *если* $h = H_0$, $\varepsilon(h) = 1$ *если* $h = H_\infty$ *и*

$$U\left(\varepsilon(h), y\right) = \frac{V(m, \varepsilon(h)t, T)(1-y)^{i(1-\varepsilon(h))t} y^{1/4-it}}{(y-1+\alpha_0^2)^{1/4}} e^{2iT\varepsilon(h)\mathbf{a}_1(\alpha_0)} e^{-G^2 \log^2\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right)} \tag{11.77}$$

а функция $\mathbf{a}_1(\alpha_0)$ *определена в* (11.66).

11.5.2. Предварительная оценка $S_2(t)$**.** Наша цель – оценить $S_2(t)$ при помощи утверждения 11.4.1. Для начала обрежем сумму по n в (11.60).

Лемма 11.5.2. *При* $h = H_0$ *или* $h = H_\infty$ *и* $x \gg \max(T^{1+\delta}m^{-1}\sqrt{1+|t|}, 1)$ *выполнена оценка*

$$I\left(x, 1/2+2it; h\right) \ll T^{-A}.$$

Доказательство. Используя интегральное представление [**151**, 15.6.1] для гипергеометрической функции в (11.42), получаем

$$I(x, 1/2+2it; h) \ll \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)\sin\left(\pi(1/4-ir+it)\right)}{\cosh(\pi r)} \frac{\Gamma(1/4+ir-it)}{\Gamma(1/4+ir+it)} \times \left(\frac{2}{x}\right)^{2ir} \int_0^1 \frac{y^{-1/4+ir-it}(1-y)^{-3/4+ir+it}}{(1-4y/x^2)^{1/4+ir-it}} dydr.$$

Пусть $x \gg 1$. Сдвигая линию интегрирования на $\operatorname{Im} r = -N$, оценивая гамма-функции и применяя (11.11), мы доказываем, что

$$I(x, 1/2+2it; h) \ll \int_{T-G^{1+\epsilon}}^{T+G^{1+\epsilon}} r\frac{(1+|t|)^N(1+|r|)^{2N+\epsilon}}{m^{2N}} \times \left(\frac{2}{x}\right)^{2N} \int_0^1 \frac{y^{-1/4+N}(1-y)^{-3/4+N}}{(1-4y/x^2)^{1/4+N}} dydr \ll T^{-A}$$

при $mx \gg T^{1+\delta}\sqrt{1+|t|}$. □

Лемма 11.5.2 демонстрирует, что часть (11.60) с $n \gg T^{1+\delta}\sqrt{t}$ пренебрежимо мала. Поэтому мы можем предположить, что

$$S_2(t) = \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{2m<n\ll T^{1+\delta}\sqrt{t}} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}} \times \left(\frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_0\right)}{m^{1/2-2it}} + \frac{I\left(\frac{n}{m}, 1/2+2it; H_\infty\right)}{m^{1/2+2it}} \right). \quad (11.78)$$

Так как все суммы в (11.78) сейчас конечны, достаточно рассмотреть вклад только главных членов асимптотических разложений. Кроме того, у нас нет необходимости отслеживать различные константы, которые не зависят от переменных суммирования. Для простоты мы будем использовать знак $\sim$, чтобы выделить главный член a в асимптотическом разложении с точностью до таких констант.

Пусть $z := 4m^2/n^2$. Подставляя (11.46) в (11.42), получаем

$$I(\frac{n}{m}, \rho; h) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rh(r)z^{ir}}{\cosh(\pi r)} \frac{\Gamma(1/4+ir(1-\alpha))\Gamma(3/4+ir(1-\alpha))}{\Gamma(1+2ir)} \times \sin\left(\pi(1/4-ir(1-\alpha))\right) \frac{\exp\left(2irl_1(\alpha,r,z)\right)}{(1-(1-\alpha^2)z)^{1/4}} dr. \quad (11.79)$$

Из формулы Стирлинга (0.4) следует, что

$$\frac{\Gamma(1/4+ir(1-\alpha))\Gamma(3/4+ir(1-\alpha))}{\Gamma(1+2ir)\cosh(\pi r)} \sin\left(\pi(1/4-ir(1-\alpha))\right) \sim \frac{e^{2ir(-\alpha\log r+(1-\alpha)\log(1-\alpha)+\alpha-\log 2)}}{r^{1/2}}.$$

Тогда при $r = T + Gv$, $|v| \ll \log^2 T$, $G \ll T^{1-\epsilon}/\sqrt{t}$ и $\alpha_0 = t/T \ll T^{-\delta}$, рассуждая как в лемме 11.1.4, мы доказываем, что

$$\frac{\Gamma(1/4+ir(1-\alpha))\Gamma(3/4+ir(1-\alpha))}{\Gamma(1+2ir)\cosh(\pi r)} \sin\left(\pi(1/4-ir(1-\alpha))\right) \sim e^{2iGv(\log(1-\alpha_0)-\log 2)}T^{-1/2}. \quad (11.80)$$

Сделав в (11.79) замену переменных $r := T + Gv$, а затем применив (11.80), (11.48) и (11.18), делаем вывод, что при $G \ll T^{1/2-\epsilon}$

$$I(\frac{n}{m}, \rho; H_0) \sim \frac{T^{1/2}GV(m,-t,T)}{(1-(1-\alpha_0^2)z)^{1/4}} e^{2iTh_1(\alpha_0,z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} e^{2iGv\left(\log(1-\alpha_0)-\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z})+\log\sqrt{z}\right)} dv,$$

где

$$h_1(\alpha_0, z) = -\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}) + \alpha_0\log(\alpha_0+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}) + \log\sqrt{z}. \quad (11.81)$$

Аналогично, но с применением (11.13), получаем

$$I(\frac{n}{m},\rho;H_\infty)\sim\frac{T^{1/2}GV(m,t,T)}{(1-(1-\alpha_0^2)z)^{1/4}}e^{2iTh_1(\alpha_0,z)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2}e^{2iGv\left(\log(1+\alpha_0)-\log(1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z})+\log\sqrt{z}\right)}dv.$$

Используя (0.12), находим, что

$$I(\frac{n}{m},\rho;H_0)\sim\frac{T^{1/2}GV(m,-t,T)}{(1-(1-\alpha_0^2)z)^{1/4}}e^{2iTh_1(\alpha_0,z)}e^{-G^2\log^2\frac{(1-\alpha_0)\sqrt{z}}{1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}}},$$

$$I(\frac{n}{m},\rho;H_\infty)\sim\frac{T^{1/2}GV(m,t,T)}{(1-(1-\alpha_0^2)z)^{1/4}}e^{2iTh_1(\alpha_0,z)}e^{-G^2\log^2\frac{(1+\alpha_0)\sqrt{z}}{1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}}}.$$

Поэтому при $G\ll T^{1/2-\epsilon}$ выполнена оценка

$$S_2(t)\ll T^{1/2}G\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}}\sum_{2m<n\ll T^{1+\delta}\sqrt{t}}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}}\frac{V(m,\pm t,T)}{m^{1/2\pm2it}}W_\pm\left(\frac{4m^2}{n^2}\right),\quad(11.82)$$

где

$$W_\pm(z)=\frac{e^{2iTh_1(\alpha_0,z)}}{(1-(1-\alpha_0^2)z)^{1/4}}\exp\left(-G^2\log^2\frac{(1\pm\alpha_0)\sqrt{z}}{1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}}\right).\quad(11.83)$$

Пусть

$$f_\pm(z):=\log\frac{(1\pm\alpha_0)\sqrt{z}}{1+\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}}.$$

Правая часть (11.82) пренебрежимо мала за исключением случая, когда $|f_\pm(z)|\ll G^{-1+\epsilon}$. Поскольку

$$f'_\pm(z)=\frac{1}{2z\sqrt{1-(1-\alpha_0^2)z}},$$

эти функции растут на интервале $0<z<1$. Следовательно,

$$f_-(z)<f_-(1)=\log\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\ll-\alpha_0,$$

и для $G\alpha_0\gg G^\epsilon$ выполнена оценка $|f_-(z)|\gg G^{-1+\epsilon}$. Следовательно, $W_-(z)\ll T^{-A}$. В случае с плюсом рассмотрим отдельно два случая: $0<z<1-\alpha_0^2$ и $1-\alpha_0^2<z<1$. В первом случае

$$f_+(z)<f_-(1-\alpha_0^2)=(1-\sqrt{2})\alpha_0+O(\alpha_0^2)\ll-\alpha_0.$$

Поэтому при $G\alpha_0\gg G^\epsilon$ и $0<z<1-\alpha_0^2$ выполнена оценка $W_+(z)\ll T^{-A}$. В случае $1-\alpha_0^2<z<1$

$$g_+(z):=f_+(z)+\frac{1-z}{4\alpha_0}<0,\quad(11.84)$$

а значит, при $G\alpha_0\gg G^\epsilon$ справедлива оценка $W_+\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\ll T^{-A}$ за исключением $|n-2m|\ll m\alpha_0G^{-1+\epsilon}$. Так как $g_+(1)=0$, для доказательства (11.84) достаточно показать, что $g'_+(z)>0$ при $1-\alpha_0^2<z<1$. Заметим, что

$$g''_+(z)=\frac{3(1-\alpha_0^2)z-2}{2z^2(1-(1-\alpha_0^2)z)^{3/2}}>0.$$

Таким образом, нам осталось проверить, что $g'_+(1-\alpha_0^2) > 0$. Это следует из прямых вычислений, а именно

$$g'_+(1-\alpha_0^2) = \frac{1}{2(1-\alpha_0^2)(1-(1-\alpha_0^2)^2)^{1/2}} - \frac{1}{4\alpha_0} = \frac{2-(1-\alpha_0^2)(2-\alpha_0^2)^{1/2}}{4\alpha_0(1-\alpha_0^2)(2-\alpha_0^2)^{1/2}} > 0.$$

Наконец, мы доказали следующий результат.

Утверждение 11.5.3. *При $G \ll T^{1/2-\epsilon}$, $\alpha_0 \gg G^{-1+\epsilon}$ выполнена оценка*

$$S_2(t) \ll T^{1/2}G \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{0<n-2m \ll m\alpha_0 G^{-1+\epsilon}} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)}{n^{1/2-2it}} \frac{V(m,t,T)}{m^{1/2+2it}} W_+\left(\frac{4m^2}{n^2}\right). \quad (11.85)$$

Замечание 11.5.4. *В соответствии с* (11.77) *и* (11.83)

$$V(m,t,T)W_+\left(\frac{1}{y}\right) = U\left(\varepsilon(H_\infty), y\right) e^{-iT(1-\alpha_0)\log(1-\alpha_0^2)}.$$

11.5.3. Подготовка к применению формулы Вороного. В данном разделе мы преобразуем выражения в правой части (11.76) и (11.85) аналогично методу [**17**, главы 4], чтобы получить форму, пригодную для применения формулы суммирования Вороного. Для начала подставим (11.83) и (11.81) в (11.85). Таким образом,

$$S_2(t) \ll T^{1/2}G \sum_{m \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{0<n-2m \ll m\alpha_0 G^{-1+\epsilon}} \frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)V(m,t,T)}{m\left(\alpha^2-1+n^2/(4m^2)\right)^{1/4}} W\left(T, \frac{n}{2m}\right), \quad (11.86)$$

$$W(T,y) = \exp\left(-G^2\log^2\frac{y+\sqrt{y^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) e^{2iTh_1(y)}, \quad (11.87)$$

$$h_1(y) = \alpha_0\log(y\alpha_0+\sqrt{y^2-1+\alpha_0^2}) - \log(y+\sqrt{y^2-1+\alpha_0^2}). \quad (11.88)$$

Для простоты будем писать $W(y)$ вместо $W(T,y)$. Теперь сделаем следующую замену переменных в (11.86)

$$n-2m = q, \quad n+2m = \mathcal{R}.$$

Таким образом, получаем условие $\mathcal{R} \equiv q \pmod 4$, которое может быть записано как в [**17**, (4.11)]. Из этого получаем четыре суммы, которые можно изучать аналогично друг другу (см. [**17**, замечания 4.1, 6.1]). Поэтому как и в [**17**, Sec. 4] достаточно рассмотреть лишь одну из сумм, например

$$S_2(t) \ll T^{1/2}G \sum_{\mathcal{R} \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{0<q \ll \mathcal{R}\alpha_0 G^{-1+\epsilon}} \frac{\mathscr{L}_{q\mathcal{R}}(1/2+2it)V\left(\frac{\mathcal{R}-q}{4}, t, T\right)}{(\mathcal{R}-q)^{1/2}\left(\alpha^2(\mathcal{R}-q)^2+4rq\right)^{1/4}} W\left(\frac{\mathcal{R}+q}{\mathcal{R}-q}\right). \quad (11.89)$$

Обратим внимание, что суммирование по q в (11.89) намного короче, чем по $\mathcal{R}$. Соответственно для $\alpha_0 G \gg G^\delta$, используя разложение Тейлора, доказываем, что

$$S_2(t) \ll \frac{T^{1/2}G}{\sqrt{\alpha_0}} \sum_{\mathcal{R} \ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \sum_{0<q \ll \mathcal{R}\alpha_0 G^{-1+\epsilon}} \frac{1}{\mathcal{R}} \mathscr{L}_{q\mathcal{R}}(1/2+2it)V\left(\frac{\mathcal{R}-q}{4}, t, T\right) W\left(\frac{\mathcal{R}+q}{\mathcal{R}-q}\right).$$

Далее делаем замену переменных $\mathcal{R} := l/q$ и получаем

$$S_2(t) \ll \frac{T^{1/2}G}{\sqrt{\alpha_0}} \sum_{q \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}} \sum_{\substack{q^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0 \ll l \ll qT^{1+\epsilon}\sqrt{t} \\ l \equiv 0 \pmod q}} \frac{q}{l} \mathscr{L}_l(1/2+2it) V\left(\frac{l-q^2}{4q}, t, T\right) W\left(\frac{l+q^2}{l-q^2}\right).$$

Следующий шаг – тривиально оценить вклад $q \ll Q_0$. Выполнив диадическое разбиение суммы по l, применяя неравенство Коши-Буняковского и (11.39), мы показываем, что при $q^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0 \ll L \ll qT^{1+\epsilon}\sqrt{t}$

$$\sum_{l \equiv 0 \pmod q} \frac{U(l/L)}{l} \mathscr{L}_l(1/2+2it) V\left(\frac{l-q^2}{4q}, t, T\right) W\left(\frac{l+q^2}{l-q^2}\right) \ll \frac{(L+\sqrt{Lt})^{1/2}L^{\epsilon}}{\sqrt{qL}}. \tag{11.90}$$

Поэтому вклад маленьких значений q ограничен величиной

$$\frac{T^{1/2+\epsilon}G}{\sqrt{\alpha_0}} \sum_{q \ll Q_0} \left(\left(\frac{\alpha_0 t}{G}\right)^{1/4} + \sqrt{q}\right) \ll T^{1+\epsilon}G\left(\left(\frac{\alpha_0}{tG}\right)^{1/4} Q_0 + \frac{Q_0^{3/2}}{\sqrt{t}}\right) \ll T^{1-\epsilon}G \tag{11.91}$$

при условии, что

$$Q_0 \ll t^{1/3}T^{-\epsilon}, \quad Q_0 \ll \left(\frac{tG}{\alpha_0}\right)^{1/4} T^{-\epsilon}. \tag{11.92}$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится

$$Q_0 = T^{\epsilon}\alpha_0\sqrt{t}. \tag{11.93}$$

Таким образом, условия (11.92) выполнены, если

$$G \gg tT^{\epsilon}\alpha_0^5, \quad t \ll T^{6/7-\epsilon}.$$

Эти условия можно упростить до $t \ll T^{6/7-\epsilon}$, поскольку в утверждении 11.5.1 $G \gg T^{1+\epsilon}/t$, и при $t \ll T^{6/7-\epsilon}$ выполнена оценка $T^{1+\epsilon}/t \gg tT^{\epsilon}\alpha_0^5$. Поэтому далее можем считать, что

$$G\alpha_0 \gg T^{\epsilon}, \quad t \ll T^{6/7-\epsilon}. \tag{11.94}$$

При таких ограничениях

$$S_2(t) \ll \frac{T^{1/2}G}{\sqrt{\alpha_0}} \sum_{Q \ll q \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}} \sum_{\substack{q^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0 \ll l \ll qT^{1+\epsilon}\sqrt{t} \\ l \equiv 0 \pmod q}} \frac{q}{l} \mathscr{L}_l(1/2+2it) V\left(\frac{l-q^2}{4q}, t, T\right) W\left(\frac{l+q^2}{l-q^2}\right). \tag{11.95}$$

Замечание 11.5.5. *Ограничение $t \ll T^{6/7-\epsilon}$ не является точным, поскольку оно получено из неоптимальной оценки* (11.90). *В предположении, что верно следующее обобщение* (11.39)

$$\sum_{\substack{N<n<2N \\ n \equiv 0 \pmod q}} |\mathscr{L}_n(1/2+it)|^2 \ll \frac{1}{q}\left(N + \sqrt{N(1+|t|)}\right)(N(1+|t|))^{\epsilon},$$

вместо (11.91) *можно получить*

$$\frac{T^{1/2+\epsilon}G}{\sqrt{\alpha_0}}\sum_{q\ll Q_0}\left(\left(\frac{\alpha_0 t}{q^2G}\right)^{1/4}+1\right)\ll T^{1+\epsilon}G\left(\left(\frac{\alpha_0Q_0^2}{tG}\right)^{1/4}+\frac{Q_0}{\sqrt{t}}\right)\ll T^{1-\epsilon}G.$$

Это справедливо при $Q_0=T^{\epsilon}\alpha_0\sqrt{t}$, *если* $t\ll T^{1-\epsilon_0}$.

Выразим условие $l\equiv 0 \pmod q$ через аддитивные гармоники

$$\delta_q(l)=\frac{1}{q}\sum_{c|q}\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}e\left(\frac{al}{c}\right),$$

сделаем сумму по c внешней и выполним диадическое разбиение. Тогда

$$S_2(t)\ll\frac{T^{1/2}G}{\sqrt{\alpha_0}}\sum_{C\ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}}\sum_{Q_0/C\ll Q\ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}/C}\sum_{Q^2C^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0\ll L\ll QCT^{1+\epsilon}\sqrt{t}}S_2(C,Q,L),\quad(11.96)$$

где

$$S_2(C,Q,L)=\sum_c U\left(\frac{c}{C}\right)\sum_q U\left(\frac{q}{Q}\right)\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}\sum_l\frac{\mathscr{L}_l(1/2+2it)}{l^{1/2-it}}\phi_2(l)e\left(\frac{al}{c}\right),\quad(11.97)$$

$$\phi_2(l)=\frac{U(l/L)}{l^{1/2+it}}V\left(\frac{l-(qc)^2}{4qc},t,T\right)W\left(\frac{l+(qc)^2}{l-(qc)^2}\right)\quad(11.98)$$

и $U(x)\neq 0$ только при $1/2<x<2$.

Теперь мы преобразуем $S_1(t)$ аналогично $S_2(t)$. Из утверждения 11.5.1 следует, что

$$S_1(t)\ll T^{1/2}G\sum_{h=H_0,H_\infty}\sum_{m\ll T^{1+\epsilon}\sqrt{t}}\sum_{0<2m-n\ll m\alpha_0G^{-1+\epsilon}}\frac{\mathscr{L}_{n^2-4m^2}(1/2+2it)V(m,\varepsilon(h)t,T)}{m\left(\alpha^2-1+n^2/(4m^2)\right)^{1/4}}$$
$$\times(4m^2-n^2)^{i(1-\varepsilon(h))t}W\left(\varepsilon(h)T,\frac{n}{2m}\right),$$

где функция W определена в (11.87), $\varepsilon(h)=-1$ при $h=H_0$ и $\varepsilon(h)=1$ при $h=H_\infty$. Сделав замену переменных

$$2m-n=q,\quad n+2m=\mathcal{R},$$

и рассуждая как в случае $S_2(t)$, мы заключаем, что

$$S_1(t)\ll\frac{T^{1/2}G}{\sqrt{\alpha_0}}\sum_{h=H_0,H_\infty}\sum_{C\ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}}\sum_{Q_0/C\ll Q\ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}/C}\sum_{Q^2C^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0\ll L\ll QCT^{1+\epsilon}\sqrt{t}}S_1(h,C,Q,L),$$

где

$$S_1(h,C,Q,L)=\sum_c U\left(\frac{c}{C}\right)\sum_q U\left(\frac{q}{Q}\right)\sum_{\substack{a \pmod c\\(a,c)=1}}\sum_l\frac{\mathscr{L}_{-l}(1/2+2it)}{l^{1/2-it}}\phi_1(l)e\left(\frac{-al}{c}\right),\quad(11.99)$$

$$\phi_1(l)=\frac{U(l/L)}{l^{1/2+i\varepsilon(h)t}}V\left(\frac{l+(qc)^2}{4qc},\varepsilon(h)t,T\right)W\left(\varepsilon(h)T,\frac{l-(qc)^2}{l+(qc)^2}\right).\quad(11.100)$$

11.6. Интегральные преобразования

Как показано в [**17**, §6], достаточно рассмотреть только случай $c \equiv 0 \pmod 4$. Соответственно, мы применим формулу Вороного (11.33) к сумме по l в (11.97).

Для начала вычислим и оценим интегральные преобразования функции $\phi_2(x)$, возникающие в (11.33). Для этого предположим, что справедливо (11.93) и выполнены условия (11.94). При таких ограничениях

$$L \gg \frac{(QC)^2}{\alpha_0^2} T^{\epsilon_1}, \quad L \ll \frac{(QC)^2}{\alpha_0} T^{1-\epsilon_1}. \tag{11.101}$$

Эти условия выполнены для L в (11.95), поскольку

$$\frac{(QC)^2}{\alpha_0^2} T^{\epsilon_1} \ll Q^2 C^2 G^{1-\epsilon}/\alpha_0, \quad QCT^{1+\epsilon}\sqrt{t} \ll \frac{(QC)^2}{\alpha_0} T^{1-\epsilon_1}$$

если $\alpha_0 G \gg T^{\epsilon_0}$, $QC \gg Q_0 \gg \alpha_0 T^{\epsilon_0}\sqrt{t}$.

Лемма 11.6.1. *Предположим, что* (11.94) *и* (11.101) *выполнены. Тогда*

$$\phi_2^+(1/2 \pm it) \ll T^{-A}.$$

Доказательство. Применяя (11.98) и (11.87), получаем

$$\phi_2^+(1/2 \pm it) \sim \int_0^\infty U_2(y) e^{2iTF_2(y,\pm)} \frac{dy}{y}, \tag{11.102}$$

где

$$U_2(y) = U(y) V\left(\frac{yL-(qc)^2}{4qc}, t, T\right) \exp\left(-G^2 \log^2 \frac{z+\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right), \tag{11.103}$$

$$F_2(y,\pm) = h_1(z) + (\pm 1 - 1)\alpha_0 \log\sqrt{y}, \quad z = \frac{yL+(qc)^2}{yL-(qc)^2}.$$

Для оценки (11.102) можно воспользоваться леммой 11.1.6. С этой целью, определим параметры P, R, V, X, Y в (11.19). Заметим, что

$$z = 1 + \frac{2(qc)^2}{yL-(qc)^2} = 1 + O(\frac{\alpha_0 G^\epsilon}{G}), \quad \text{so that} \quad z^2 - 1 \ll \frac{\alpha_0 G^\epsilon}{G} \ll \alpha_0^2,$$

и

$$\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2} \sim \alpha_0, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{-2L(qc)^2}{(yL-(qc)^2)^2} \sim \frac{(qc)^2}{L}.$$

Применяя (11.88), получаем

$$\frac{d}{dz} h_1(z) = \frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0 z + \sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}. \tag{11.104}$$

Наконец, поскольку $\frac{(qc)^2}{L\alpha_0} \ll \alpha_0$, мы доказываем, что

$$\frac{d}{dy}F_2(y,\pm) \gg \frac{(qc)^2}{L\alpha_0} + (\pm 1 - 1)\alpha_0.$$

Поэтому параметр R в (11.19) можно выбрать как

$$R(+) = \frac{T(qc)^2}{L\alpha_0}, \quad R(-) = T\alpha_0. \tag{11.105}$$

Рассмотрим вторую частную производную

$$\frac{d^2}{dy^2}F_2(y,\pm) \sim \frac{d^2}{dz^2}h_1(z)\frac{(qc)^4}{L^2} + \frac{d}{dz}h_1(z)\frac{(qc)^2}{L} + (\pm 1 - 1)\alpha_0 \sim \frac{(qc)^4}{L^2\alpha_0^3} + \\ + \frac{(qc)^2}{L\alpha_0} + (\pm 1 - 1)\alpha_0 \sim \frac{(qc)^2}{L\alpha_0} + (\pm 1 - 1)\alpha_0.$$

Рассуждая аналогично для оценки $F_2^{(j)}(y,\pm)$, получаем

$$Y(\pm) = R(\pm), \quad P(\pm) = 1.$$

Оценивая (11.103) по модулю, находим, что $X = T^\epsilon$. Наконец,

$$\frac{d}{dy}\exp\left(-G^2\log^2\frac{z+\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) \ll \\ G^2\log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right)\frac{1}{\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}\frac{dz}{dy} \ll G^{1+\epsilon}\frac{(qc)^2}{L\alpha_0} \ll T^\epsilon. \tag{11.106}$$

так как $L \gg Q^2C^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0$. Поскольку $V = T^{-\epsilon}$, применяя лемму 11.1.6, получаем

$$\phi_2^+(1/2 \pm it) \ll \frac{T^\epsilon}{(R(\pm)T^{-\epsilon})^A} \ll T^{-A}$$

при условии что $R(\pm) \gg T^{\epsilon_0}$. Последние неравенства следуют из (11.105), (11.94) и (11.101). □

Теперь рассмотрим интегральные преобразования функции $\phi_2(x)$, возникающие в правой части (11.33).

Лемма 11.6.2. *Предположим, что* (11.94) *и* (11.101) *выполнены. Тогда*

$$\widehat{\phi_2}^+\left(\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{(nT)^A} \quad \textit{при} \quad n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon, \tag{11.107}$$

$$\widehat{\phi_2}^+\left(\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{T^A} \quad \textit{при} \quad 0 < n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon.$$

Доказательство. Пусть $y = \frac{2\pi\sqrt{n}}{c}$. Из (11.35), (11.29) и (11.98) следует, что

$$\widehat{\phi_2}^+\left(y^2\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left(F_{2it}(2y\sqrt{x}) - G_{2it}(2y\sqrt{x})\right. \\ \left. \times \frac{U(x/L)}{x^{1+it}} V\left(\frac{x-(qc)^2}{4qc}, t, T\right) W\left(\frac{x+(qc)^2}{x-(qc)^2}\right) dx. \quad (11.108)$$

Учитывая свойства функций $F_{2it}(z)$ и $G_{2it}(z)$, два интеграла в формуле выше можно рассматриваются аналогично друг другу. Для доказательства (11.107) мы сначала выполним замену переменных $x = \frac{4t^2}{y^2}z^2$, затем воспользуемся соотношением (11.21), проинтегрируем дважды по частям, получая

$$\widehat{\phi_2}^+\left(y^2\right) \ll y\int_0^\infty \frac{d^2}{dz^2}\left(U\left(\frac{4t^2z^2}{y^2L}\right)\frac{z^{1/2-2it}}{1+16t^2(1+z^2)} V\left(\frac{4t^2z^2/y^2-(qc)^2}{4qc}, t, T\right)\right. \\ \left. \times W\left(\frac{z^2+(yqc/2t)^2}{z^2-(yqc/2t)^2}\right)\right)\sqrt{z}F_{2it}(2tz)dz.$$

Поскольку $n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$, на интервале интегрирования $z \sim \frac{y\sqrt{L}}{t} \gg (nT)^\epsilon$. Применяя (11.87), (11.104) и (11.106), получаем

$$\frac{d}{dz}W\left(\frac{z^2+(yqc/2t)^2}{z^2-(yqc/2t)^2}\right) \ll W'\left(\frac{z^2+(yqc/2t)^2}{z^2-(yqc/2t)^2}\right)\frac{(yqc/t)^2}{z^3} \ll \\ \lll \left(\frac{T}{\alpha_0} + G^{1+\epsilon}\frac{(qc)^2}{L\alpha_0}\right)\frac{q^2c^2}{Lz} \ll \frac{Tq^2c^2}{Lz\alpha_0} \ll \frac{T^{1+\epsilon}}{zG} \ll \frac{t}{z}.$$

Соответственно, после интегрирования по частям мы получим интеграл, похожий на изначальный, но с дополнительным множителем

$$\frac{t^2}{1+t^2(1+z^2)} \ll \frac{1}{z^2} \ll \frac{1}{(nT)^\epsilon}.$$

Таким образом, (11.107) получится при Многократном интегрировании по частям.

В оставшемся случае $0 < n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$ мы сделаем замену переменных $x = c^2z$ в (11.108), получая

$$\widehat{\phi_2}^+\left(y^2\right) \ll y\int_0^\infty \left(F_{2it}(4\pi\sqrt{nz}) - G_{2it}(4\pi\sqrt{nz})\right.\frac{U(c^2z/L)}{z^{1+it}} V\left(c\frac{z-q^2}{4q}, t, T\right) W\left(\frac{z+q^2}{z-q^2}\right) dz.$$

Теперь подставим асимптотическую формулу (11.22). Как обычно, достаточно рассмотреть только вклад от главного члена

$$\widehat{\phi_2}^+\left(y^2\right) \ll \frac{\sqrt{n}}{c\sqrt{t}}\sum_{\pm}\int_0^\infty U_3(z)e^{2iTF_3(z,\pm)}dz, \quad (11.109)$$

где

$$U_3(z) = \frac{U(c^2z/L)}{z\left(1+\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}} V\left(c\frac{z-q^2}{4q}, t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_3(z,\pm) = h_1(x(z)) \pm \alpha_0 \xi\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0 \log\sqrt{z}, \quad x(z) = \frac{z+q^2}{z-q^2}.$$

Далее мы будем рассуждать как в лемме 11.6.1. Для оценки (11.109) воспользуемся леммой 11.1.6. Для этого определим параметры P, R, V, X, Y в (11.19). Применяя (11.23) и (11.104), получаем

$$\frac{d}{dz}F_3(z,\pm) = \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}} \frac{2q^2}{(z-q^2)^2} \pm \frac{\alpha_0}{2z}\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}} - \frac{\alpha_0}{2z}. \tag{11.110}$$

Так как $z \sim L/c^2$, из (11.101) следует, что $\frac{q^2}{\alpha_0 z^2} \ll \frac{\alpha_0}{z} T^{-\epsilon}$. Таким образом,

$$\left|\frac{d}{dz}F_3(z,-)\right| \gg \frac{\alpha_0}{2z}, \quad \frac{d}{dz}F_3(z,+) \gg \frac{q^2}{\alpha_0 z^2} + \frac{\alpha_0 n}{t^2\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}} \gg \frac{q^2}{\alpha_0 z^2} + \frac{\alpha_0 n}{t^2 T^\epsilon}. \tag{11.111}$$

Заметим, что производная меньше в случае с плюсом, поэтому достаточно рассмотреть только этот случай. Соответственно, выберем

$$R := T\frac{q^2 c^4}{\alpha_0 L^2} + \frac{\alpha_0 n}{t^2} T^{1-\epsilon}. \tag{11.112}$$

Вычисляя вторйю производную $F_3(z,+)$, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}F_3(z,+) \ll \frac{1}{\alpha_0^3}\frac{q^4}{z^4} + \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} + \frac{\alpha_0 n^2}{t^4} \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} + \frac{\alpha_0 n^2}{t^4} \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} + \frac{\alpha_0 n}{t^2}\frac{T^\epsilon}{z}.$$

Поэтому

$$P = \frac{L}{c^2 T^\epsilon}, \quad Y = PR. \tag{11.113}$$

Вычисляя производную $U_3(z)$, применяя оценку

$$\frac{d}{dz}\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) \ll \frac{G^{1+\epsilon}}{\alpha_0}\frac{dx}{dz} \ll \frac{G^{1+\epsilon}q^2}{\alpha_0 z^2} \ll \frac{G^{1+\epsilon}(qc)^2}{\alpha_0 L z} \ll \frac{T^\epsilon}{z}, \tag{11.114}$$

которая выполнена ввиду условия $L \gg (QC)^2 G^{1-\epsilon}/\alpha_0$, мы наконец заключаем, что $V = \frac{L}{c^2 T^\epsilon}$. Применяя лемму 11.1.6 для оценки (11.109), мы показываем, что

$$\widehat{\phi_2}^+(y^2) \ll \frac{\sqrt{n}}{c\sqrt{t}}\left(T\frac{q^2c^2}{\alpha_0 L T^\epsilon} + \frac{\alpha_0 L n}{c^2 t^2}T^{1-\epsilon}\right)^{-A}.$$

Предположим, что $n \gg \frac{(qc^2t)^2}{(\alpha_0 L)^2}$. В этих условиях, учитывая (11.101), находим, что

$$\frac{\alpha_0 L n}{c^2 t^2}T^{1-\epsilon} \gg T^{1-\epsilon}\frac{(qc)^2}{\alpha_0 L} \gg T^\epsilon,$$

и поэтому

$$\widehat{\phi_2}^+(y^2) \ll \frac{\sqrt{n}}{c\sqrt{t}}\left(\frac{\alpha_0 L n}{c^2 t^2}T^{1-\epsilon}\right)^{-A} \ll T^{-A}.$$

Предположим, что $0 < n \ll \frac{(qc^2t)^2}{(\alpha_0 L)^2}$. В этих условиях в соответствии с (11.101) справедлива оценка

$$\widehat{\phi_2}^+\left(y^2\right) \ll \frac{\sqrt{n}}{c\sqrt{t}}\left(T\frac{q^2c^2}{\alpha_0 LT^\epsilon}\right)^{-A} \ll T^{-A}.$$

Утверждение доказано. □

Лемма 11.6.3. *Предположим, что* (11.94) *и* (11.101) *выполнены. Тогда*

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{(nT)^A}, \quad при \quad 0 < n \ll \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2}, \quad n \gg \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2},$$

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \sim \frac{U_0(z_0)e^{2iTF_0(z_0)}}{c^{1+2it}\sqrt{z_0}}, \quad при \quad n \sim \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2}, \tag{11.115}$$

где

$$U_0(z) = U\left(\frac{c^2z}{L}\right)V\left(c\frac{z-q^2}{4q}, t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_0(z) = h_1\left(\frac{z+q^2}{z-q^2}\right) - \alpha_0\eta\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0\log\sqrt{z},$$

$\eta(v)$ определена в (11.26) *и z_0 – решение уравнения*

$$\frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z-q^2)^2} = \frac{2\pi^2 n\alpha_0/t^2}{1+\sqrt{1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}}}, \quad x(z) = \frac{z+q^2}{z-q^2}. \tag{11.116}$$

Кроме того, $z_0 \approx \frac{qt}{\alpha_0\sqrt{n}}$ и z_0 не зависит от c.

Доказательство. Пусть $y = 2\pi\sqrt{n}/c$. Из (11.35), (11.31) и (11.98) следует, что

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) = \frac{2y}{\pi}\sin(\pi/4+\pi it) \times \int_0^\infty K_{2it}(2y\sqrt{x})\frac{U(x/L)}{x^{1+it}}V\left(\frac{x-(qc)^2}{4qc}, t, T\right)W\left(\frac{x+(qc)^2}{x-(qc)^2}\right)dx. \tag{11.117}$$

При $n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$ интеграл (11.117) ограничен величиной $(nT)^{-A}$. Доказательство этого факта аналогично (11.107), так как дифференциальные уравнения (11.24) и (11.21) незначительно отличаются друг от друга в области $z \gg T^\epsilon$. Далее можем предположить, что $0 < n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$. Замена переменных $x = c^2z$ в (11.117) приводит к

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) = \frac{2y}{\pi c^{2it}}\sin(\pi/4+\pi it) \times \int_0^\infty K_{2it}(4\pi\sqrt{nz})\frac{U(c^2z/L)}{z^{1+it}}V\left(c\frac{z-q^2}{4q}, t, T\right)W\left(\frac{z+q^2}{z-q^2}\right)dz. \tag{11.118}$$

Поведение $K_{2it}(x)$ отличается для маленьких x, больших x и $x \sim 1$. Соответственно, мы сделаем главной разбиение единицы

$$\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) + \chi_1\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) + \chi_\infty\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) = 1, \tag{11.119}$$

где

$$\chi_0(x) = 1 \text{ при } 0 < x < 1 - 2t^{\epsilon-2/3},\ \chi_0(x) = 0 \text{ при } x > 1 - t^{\epsilon-2/3},$$

$$\chi_\infty(x) = 1 \text{ при } x > 1 + 2t^{\epsilon-2/3},\ \chi_\infty(x) = 0 \text{ при } x < 1 + t^{\epsilon-2/3},$$

$$\chi_1(x) = 1 \text{ при } |x-1| < t^{\epsilon-2/3},\ \chi_1(x) = 0 \text{ при } |x-1| > 2t^{\epsilon-2/3}.$$

Часть интеграла (11.118) с $\chi_\infty\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)$ пренебрежимо мала в соответствии с (11.27). Рассмотрим часть с функцией χ_1. Выполнена оценка

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) \ll \int_0^\infty U_4(z) e^{2iTF_4(z)} dz,$$

где

$$U_4(z) = e^{\pi t} K_{2it}(4\pi\sqrt{nz}) \chi_1\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) \frac{U(c^2 z/L)}{z} V\left(c\frac{z-q^2}{4q}, t, T\right) \times \exp\left(-G^2 \log^2 \frac{x(z) + \sqrt{x^2(z) - 1 + \alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_4(z) = h_1(x(z)) - \alpha_0 \log\sqrt{z}.$$

Как и прежде мы будем применять лемму 11.1.6. Для этого вычислим производную $F_4(z)$ (см. (11.110) с похожими вычислениями) и выберем параметры в (11.19) следующим образом

$$R = \frac{tc^2}{L},\ P = \frac{c^2}{L},\ Y = t.$$

В соответствии с (11.28)

$$e^{\pi t} \frac{\partial^j}{\partial z^j} K_{2it}(4\pi\sqrt{nz}) \ll \frac{(t^{2/3}/z)^j}{t^{1/3}}.$$

Следовательно, вычисляя производные функции $U_4(z)$, мы выберем

$$V = \frac{L}{c^2 t^{2/3}}$$

в лемме 11.1.6. Наконец,

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) \ll \frac{T^\epsilon}{t^{1/3}} \left(\frac{1}{(RP)^A} + \frac{1}{(RV)^A}\right) \ll t^{-A/3}.$$

Осталось рассмотреть часть интеграла (11.118) с $\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)$. Как обычно, достаточно оценить вклад только от главного члена в асимптотическом разложении (11.25):

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{c^{1+2it}\sqrt{t}} \int_0^\infty U_5(z) e^{2iTF_5(z,\pm)} dz, \tag{11.120}$$

где

$$U_5(z) = \chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)\frac{U(c^2z/L)}{z\left(1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}}V\left(c\frac{z-q^2}{4q},t,T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x+\sqrt{x^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_5(z,\pm) = h_1(x(z)) \pm \alpha_0\eta\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0\log\sqrt{z}, \quad x(z) = \frac{z+q^2}{z-q^2}.$$

Заметим, что $U_5(z) \neq 0$ только при

$$n < \frac{c^2t^2}{2\pi^2L}(1-t^{-2/3+\epsilon})^2.$$

Применяя (11.26) и (11.104), мы доказываем, что

$$\frac{d}{dz}F_5(z,\pm) = \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z-q^2)^2} \mp \frac{\alpha_0}{2z}\sqrt{1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}} - \frac{\alpha_0}{2z}.$$

Выполнена оценка

$$\frac{d}{dz}F_5(z,+) \gg \frac{\alpha_0}{2z}.$$

Следовательно, тот случай проще чем второй

$$\frac{d}{dz}F_5(z,-) = \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z-q^2)^2} - \frac{2\pi^2n\alpha_0/t^2}{1+\sqrt{1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}}}. \tag{11.121}$$

Седловая точка z_0 – решение уравнения (11.116). Довольно непросто выписать точную формулу для z_0. Тем не менее, мы знаем, что левая часть (11.116) приблизительно равна $q^2\alpha_0^{-1}z_0^{-2}$, и поэтому $z_0 \approx \frac{qt}{\alpha_0\sqrt{n}}$. Эта точка принадлежит интервалу интегрирования только при

$$n \sim \frac{q^2c^4t^2}{\alpha_0^2L^2} =: N. \tag{11.122}$$

Таким образом, нужно рассмотреть три случая: $n \ll N$, $n \sim N$ и $n \gg N$.

Сначала предположим, что $n \ll N$. Для применения леммы 11.1.6 выберем параметры в (11.19). В соответствии с (11.101) выполнена оценка

$$\frac{q^2c^4t^2}{\alpha_0^2L^2} \ll \frac{c^2t^2}{2L}T^{-\epsilon}.$$

Следовательно, при $n < cN$

$$\frac{4\pi^2nz}{t^2} \ll T^{-\epsilon}.$$

Таким образом, $\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) = 1$. Далее разложим $\left(1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}$ в ряд Тейлора. Соответственно $U_5(z)$ упрощается к виду

$$U_5(z) = \frac{U(c^2z/L)}{z}V\left(c\frac{z-q^2}{4q},t,T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x+\sqrt{x^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right). \tag{11.123}$$

Аналогично случаю функции $U_3(z)$ в лемме 11.6.2) выберем $V = L/(c^2T^\epsilon)$ в (11.19). Так как $\frac{4\pi^2nz}{t^2} \ll T^{-\epsilon}$, из (11.110) и (11.121) следует, что параметры для F_5 можно выбрать так же как для F_3 (см. (11.112) и(11.113)):

$$R = T\frac{q^2c^4}{\alpha_0 L^2} + \frac{\alpha_0 n}{t^2}T \gg T\frac{q^2c^4}{\alpha_0 L^2}, \quad P = \frac{L}{c^2}, \quad Y = PR.$$

Наконец, применяя (11.20) и (11.101), доказываем оценку

$$\int_0^\infty U_5(z)e^{2iTF_5(z,\pm)}dz \ll T^{-A}.$$

теперь предположим, что $N \ll n < \delta\frac{c^2t^2}{L}$. Здесь δ выбрана так, чтобы

$$\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) = 1 \quad \text{and} \quad \left(1 - \frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4} \gg 1.$$

Это гарантирует, что как и в предыдущем случае мы можем положить $V = L/(c^2T^\epsilon)$ в (11.19). Кроме того,

$$T|\frac{d}{dz}F_5(z,-)| \gg R := T\frac{n\alpha_0}{t^2} = \frac{n}{t},$$

$$\frac{d^2}{dz^2}F_5(z,-) \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} + \frac{n\alpha_0}{t^2}\frac{n}{t^2}.$$

Поэтому ввиду $n/t^2 \ll c^2/L$ мы выбираем $P = \frac{L}{c^2}$, $Y = PR$. Из (11.101) и (11.122) следует, что

$$RP > RV > \frac{nL}{tc^2T^\epsilon} \gg \frac{NL}{tc^2T^\epsilon} \gg \frac{q^2c^2t}{\alpha_0^2LT^\epsilon} \gg \frac{Q^2C^2T^{1-\epsilon}}{\alpha_0 L} \gg T^\epsilon.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty U_5(z)e^{2iTF_5(z,\pm)}dz \ll \frac{1}{(RV)^A} + \frac{1}{(RP)^A} \ll T^{-A}.$$

Теперь предположим, что

$$\delta\frac{c^2t^2}{L} < n < \frac{c^2t^2}{2\pi^2L}(1 - t^{-2/3+\epsilon})^2.$$

В этом случае параметр R такой же как ив предыдущем, а именно

$$R = T\frac{n\alpha_0}{t^2} = \frac{n}{t},$$

но $\chi_0(\cdot)$ может не равняться единице, и поэтому

$$\frac{d}{dz}\frac{\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)}{\left(1 - \frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}} \ll \frac{\sqrt{nz}}{tz}\frac{t^{2/3-\epsilon}}{\left(1 - \frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}} + \left(1 - \frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{-5/4}\frac{n}{t^2}$$

$$\ll \left(1 - \frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{-1/4}\frac{t^{2/3-\epsilon}}{z}. \quad (11.124)$$

Соответственно, мы выбираем

$$V = \frac{L}{c^2 t^{2/3-\epsilon}}, X = t^{1/6-\epsilon}$$

в (11.19). Осталось определить P и Y. Заметим, что

$$\frac{d^2}{dz^2} F_5(z,-) \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} + \frac{n\alpha_0}{t^2} \frac{n}{t^2\sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}.$$

Вычисляя кратные производные, появляется дополнительный множитель $\frac{n}{t^2\left(1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}\right)}$. Поэтому

$$P = \frac{L}{t^{2/3-\epsilon}c^2}, \quad Y = PR.$$

Кроме того, так как

$$RP = RV > \frac{n}{t}\frac{L}{t^{2/3-\epsilon}c^2} \gg t^{1/3+\epsilon},$$

мы доказываем оценку

$$\int_0^\infty U_5(z) e^{2iTF_5(z,\pm)} dz \ll \frac{t^{1/6-\epsilon}}{(RV)^A} + \frac{t^{1/6-\epsilon}}{(RP)^A} \ll T^{-A}.$$

Наконец, нам осталось рассмотреть последний случай $n \sim \frac{q^2 c^4 t^2}{\alpha_0^2 L^2} = N$ (то есть доказать (11.115)). При таких условиях функцию $U_5(z)$ можно упростить до (11.123) (и поэтому $V = \frac{L}{c^2 T^\epsilon}$). Вычисляя производную функции (11.121), мы показываем, что

$$\frac{d^2}{dz^2} F_5(z,-) = \frac{1-\alpha_0^2}{\left(\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}\right)^2} \left(\alpha_0 + \frac{x(z)}{\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\right) \frac{4q^4}{(z-q^2)^4} -$$
$$- \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}} \frac{4q^2}{(z-q^2)^3} - \frac{\alpha_0 (2\pi^2 n/t^2)^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}\right)^2 \sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}.$$

С точностью до некоторых констант

$$\frac{d^2}{dz^2} F_5(z,-) \sim \frac{q^4}{\alpha_0^3 z^4} - \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} - \frac{\alpha_0 n^2}{t^4}.$$

Поскольку $n \sim N$, то $\frac{\alpha_0 n^2}{t^4} \sim \frac{q^4}{\alpha_0^3 z^4} \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} T^{-\epsilon}$. Поэтому

$$\frac{d^2}{dz^2} F_5(z,-) \sim -\frac{q^2}{\alpha_0 z^3} \quad \text{and} \quad \left|\frac{d^j}{dz^j} F_5(z,-)\right| \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^{1+j}}.$$

Применяя (11.116), можно записать асимптотическую формулу для $F_5''(z_0,-)$, но с главным членом всё ещё зависящим от z_0:

$$\frac{d^2}{dz^2}F_5(z_0,-) = -\frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z_0)+\sqrt{x(z_0)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{4q^2}{(z-q^2)^3}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right) =$$
$$= \frac{-4\pi^2 n\alpha_0/t^2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}\right)(z_0-q^2)}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right) = \frac{-2\pi^2 n\alpha_0}{z_0 t^2}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right). \quad (11.125)$$

С целью получения асимптотической формулы для (11.120) мы воспользуемся методом стационарной фазы в виде [**49**, утрежения 8.2]. А именно, мы воспользуемся [**49**, утверждением 8.2] с параметрами

$$X = \frac{c^2T^\epsilon}{L}, \quad V = \frac{L}{c^2T^\epsilon}, \quad V_1 = \frac{L}{c^2}, \quad Y = \frac{Tq^2c^2}{\alpha_0 L}, \quad Q = \frac{L}{c^2}. \quad (11.126)$$

Условия в [**49**, утверждении 8.2], а именно $V_1 > V > QT^\epsilon/\sqrt{Y}$ и $Y > T^\epsilon$, выполнены ввиду (11.101). Наконец, применяя (11.125), получаем

$$\widehat{\phi_2}^+\left(-y^2\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{c^{1+2it}\sqrt{t}}\frac{U_5(z_0)e^{2iTF_5(z_0,-)}}{\sqrt{T|F_5''(z_0,-)|}} \sim \frac{\sqrt{z_0}}{c^{1+2it}}U_5(z_0)e^{2iTF_5(z_0,-)}.$$

□

Следующий шаг – вычислить и оценить интегральные преобразования функции $\phi_1(x)$ (см. (11.100)), возникающие (11.34). С этой целью, можно применить те же методы, что и для функции $\phi_2(x)$.

Лемма 11.6.4. *Предположим, что* (11.94) *и* (11.101) *справедливы. Тогда*

$$\phi_1^-(1/2\pm it) \ll T^{-A}. \quad (11.127)$$

Доказательство. Применяя (11.100) и (11.87), получаем

$$\phi_1^-(1/2\pm it) \sim \int_0^\infty U_6(y)e^{2i\varepsilon(h)TF_6(y,\pm)}\frac{dy}{y},$$

где

$$U_6(y) = U(y)V\left(\frac{yL+(qc)^2}{4qc}, \varepsilon(h)t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{z+\sqrt{z^2-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_6(y,\pm) = h_1(z) + (\pm\varepsilon(h)-1)\alpha_0\log\sqrt{y}, \quad z = \frac{yL-(qc)^2}{yL+(qc)^2}.$$

Рассуждая как в лемме 11.6.1, мы доказываем (11.127). □

Лемма 11.6.5. *Предположим, что условия* (11.94) *и* (11.101) *выполнены. Тогда*

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(-\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{(nT)^A}, \quad for \quad 0 < n \ll \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2}, \quad n \gg \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2}, \tag{11.128}$$

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(-\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \sim \frac{U_1(z_1)e^{2i\varepsilon(h)TF_1(z_1)}}{c^{1+2i\varepsilon(h)t}\sqrt{z_1}}, \quad for \quad n \sim \frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2},$$

где

$$U_1(z) = U\left(\frac{c^2z}{L}\right)V\left(c\frac{z+q^2}{4q}, \varepsilon(h)t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_1(z) = h_1\left(\frac{z-q^2}{z+q^2}\right) + \alpha_0\xi\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0\log\sqrt{z},$$

$\xi(v)$ *определена в* (11.23) *и* z_1 *– решение уравнения*

$$\frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} = \frac{2\pi^2n\alpha_0/t^2}{1+\sqrt{1+\frac{4\pi^2nz}{t^2}}}, \quad x(z) = \frac{z-q^2}{z+q^2}.$$

Кроме того, $z_1 \approx \frac{qt}{\alpha_0\sqrt{n}}$ *и* z_1 *не зависит от* c.

Доказательство. Пусть $y = \frac{2\pi\sqrt{n}}{c}$. Из (11.36), (11.30) и (11.100) следует, что

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(-y^2\right) = \frac{-y}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left(F_{2it}(2y\sqrt{x}) + G_{2it}(2y\sqrt{x})\right)\frac{U(x/L)}{x^{1+i\varepsilon(h)t}} \times V\left(\frac{x+(qc)^2}{4qc}, \varepsilon(h)t, T\right)W\left(\varepsilon(h)T, \frac{x-(qc)^2}{x+(qc)^2}\right)dx. \tag{11.129}$$

При $n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$, рассуждая как в доказательстве (11.107), мы получаем оценку (11.128).

Рассмотрим оставшийся случай $n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^\epsilon$. Для начала сделаем замену переменных $x = c^2z$ в (11.129). В результате,

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(-y^2\right) = \frac{-y}{c^{2i\varepsilon(h)t}\sqrt{2}}\int_0^\infty \left(F_{2it}(4\pi\sqrt{nz}) + G_{2it}(4\pi\sqrt{nz})\right) \times \frac{U(c^2z/L)}{z^{1+i\varepsilon(h)t}}V\left(c\frac{z+q^2}{4q}, \varepsilon(h)t, T\right)W\left(\varepsilon(h)T, \frac{z-q^2}{z+q^2}\right)dz.$$

Подставим в данное выражение асимптотическую формулу (11.22). Как обычно, достаточно рассмотреть только вклад главного члена

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(-y^2\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{c^{1+2i\varepsilon(h)t}\sqrt{t}}\int_0^\infty U_7(z)e^{2i\varepsilon(h)TF_7(z,\pm)}dz,$$

где

$$U_7(z) = \frac{U(c^2z/L)}{z\left(1+\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}}V\left(c\frac{z+q^2}{4q}, \varepsilon(h)t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_7(z,\pm) = h_1(x(z)) \pm \varepsilon(h)\alpha_0\xi\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0\log\sqrt{z}, \quad x(z) = \frac{z-q^2}{z+q^2}.$$

Применяя (11.23) и (11.104), получаем

$$\frac{d}{dz}F_7(z,\pm) = \frac{-(1-\alpha_0^2)}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} \pm \varepsilon(h)\frac{\alpha_0}{2z}\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}} - \frac{\alpha_0}{2z}.$$

Заметим, что $|\frac{d}{dz}F_7(z,-\varepsilon(h))| \gg \frac{\alpha_0}{z}$ и случай с минусом вносит пренебрежимо малый вклад. Таким образом, нам необходимо рассмотреть

$$\frac{d}{dz}F_7(z,\varepsilon(h)) = \frac{-(1-\alpha_0^2)}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} + \frac{2\pi^2\alpha_0 n/t^2}{1+\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}. \tag{11.130}$$

Точка перевала z_1 – решение уравнения

$$\frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} = \frac{2\pi^2 n\alpha_0/t^2}{1+\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}. \tag{11.131}$$

Левая часть (11.131) приблизительно равна $q^2\alpha_0^{-1}z_1^{-2}$, а значит $z_1 \approx \frac{qt}{\alpha_0\sqrt{n}}$. Данная точка принадлежит интервалу интегрирования только при $n \sim \frac{q^2c^4t^2}{\alpha_0^2L^2} = N$ (это то же N, что и в (11.122)). Аналогично лемме 11.6.3 рассмотрим три случая: $n \ll N$, $n \sim N$ и $n \gg N$. В соответствии с (11.101) выполнена оценка

$$\frac{q^2c^4t^2}{\alpha_0^2L^2} \ll \frac{c^2t^2}{2L}T^{-\epsilon}$$

, и поэтому при $n < cN$

$$\frac{4\pi^2 nz}{t^2} \ll T^{-\epsilon}.$$

Случай $n \ll N$ и $n \gg N$ можно рассматривать аналогично лемме 11.6.3. Таким образом, мы доказываем (11.128). Заметим, что анализ в случае $n \gg N$ несколько проще чем в лемме 11.6.3 ввиду отсутствия функции $\chi()$ и наличия знака плюс под корнем в (11.130). Рассмотрим случай $n \sim N$. Функция $U_7(z)$ может быть преобразована к виду

$$U_7(z) = \frac{U(c^2z/L)}{z}V\left(c\frac{z+q^2}{4q}, \varepsilon(h)t, T\right)\exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right).$$

Следовательно, (см. (11.114)) параметр V в [**49**, утверждении 8.2] можно выбрать как $V = L/(c^2T^\epsilon)$. Вычисляя производную (11.130), получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}F_7(z,\varepsilon(h)) = \frac{1-\alpha_0^2}{\left(\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}\right)^2}\left(\alpha_0 + \frac{x(z)}{\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\right)\frac{4q^4}{(z+q^2)^4} +$$
$$+ \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{4q^2}{(z+q^2)^3} - \frac{\alpha_0(2\pi^2 n/t^2)^2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}\right)^2\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}.$$

С точностью до константы справедливо асимптотическое разложение

$$\frac{d^2}{dz^2}F_7(z,\varepsilon(h)) \sim \frac{q^4}{\alpha_0^3 z^4} + \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} - \frac{\alpha_0 n^2}{t^4}.$$

Поскольку $n \sim N$, справедлива оценка $\frac{\alpha_0 n^2}{t^4} \sim \frac{q^4}{\alpha_0^3 z^4} \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} T^{-\epsilon}$. Поэтому

$$\frac{d^2}{dz^2}F_7(z,\varepsilon(h)) \sim \frac{q^2}{\alpha_0 z^3} \quad \text{и} \quad |\frac{d^j}{dz^j}F_7(z,\varepsilon(h))| \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^{1+j}}.$$

Используя (11.131), запишем асимптотическую формулу для $F_7''(z_1,\varepsilon(h))$ (главный член всё ещё зависит от z_1)

$$\frac{d^2}{dz^2}F_7(z,\varepsilon(h)) = \frac{1-\alpha_0^2}{\alpha_0 x(z) + \sqrt{x(z)^2 - 1 + \alpha_0^2}} \frac{4q^2}{(z+q^2)^3}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right) =$$
$$= \frac{4\pi^2 n\alpha_0/t^2}{\left(1+\sqrt{1+\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}\right)(z_1+q^2)}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right) = \frac{2\pi^2 n\alpha_0}{z_1 t^2}\left(1+O(T^{-\epsilon})\right).$$

Наконец, применяя [**49**, Proposition 8.2] с параметрами (11.126), получаем

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(y^2\right) \sim \frac{\sqrt{z_1}}{c^{1+2i\varepsilon(h)t}} U_7(z_1) e^{2i\varepsilon(h)TF_7(z_1,\pm)}.$$

□

Следующий результат доказывается аналогично лемме 11.6.2.

Лемма 11.6.6. *Предположим, что условия* (11.94) *и* (11.101) *выполнены. Тогда*

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{(nT)^A}, \quad \textit{при} \quad n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^{\epsilon},$$

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(\frac{4\pi^2 n}{c^2}\right) \ll \frac{1}{T^A}, \quad \textit{при} \quad 0 < n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^{\epsilon}.$$

Доказательство. Пусть $y = \frac{2\pi\sqrt{n}}{c}$. Из (11.36), (11.32) и (11.100) следует, что

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(y^2\right) = \frac{2y}{\pi}\sin(\pi/4 - \pi i t)\int_0^\infty K_{2it}(2y\sqrt{x})\frac{U(x/L)}{x^{1+i\varepsilon(h)t}}$$
$$\times V\left(\frac{x+(qc)^2}{4qc}, \varepsilon(h)t, T\right) W\left(\varepsilon(h)T, \frac{x-(qc)^2}{x+(qc)^2}\right) dx. \quad (11.132)$$

При $n \gg \frac{C^2t^2}{L}T^{\epsilon}$ интеграл (11.132) ограничен величиной $(nT)^{-A}$, что доказывается аналогично (11.107), поскольку дифференциальные уравнения (11.24) и (11.21) незначительно

отличаются друг от другу в области $z \gg T^{\epsilon}$. Теперь можем предположить, что $n \ll \frac{C^2t^2}{L}T^{\epsilon}$. Замена переменных $x = c^2z$ в (11.132) позволяет получить тождество

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(y^2\right) = \frac{2y}{\pi c^{2i\varepsilon(h)t}}\sin(\pi/4 - \pi it)\int_0^{\infty} K_{2it}(4\pi\sqrt{nz})\frac{U(c^2z/L)}{z^{1+i\varepsilon(h)t}} \times V\left(c\frac{z+q^2}{4qc}, \varepsilon(h)t, T\right) W\left(\varepsilon(h)T, \frac{z-q^2}{z+q^2}\right) dx. \quad (11.133)$$

Далее аналогично лемме 11.6.3 сделаем разбиение интеграла (11.133) при помощи (11.119). Часть с $\chi_{\infty}()$ пренебрежимо мала, так как K-функция Бесселя быстро убывает. Следуя доказательству леммы 11.6.3 можно показать, что часть с $\chi_1()$ также пренебрежимо мала. Осталось рассмотреть часть с $\chi_0()$. Достаточно оценить вклад только главного члена в асимптотическом разложении (11.25)

$$\widehat{\phi_1}^{-}\left(y^2\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{c^{1+2i\varepsilon(h)t}\sqrt{t}}\int_0^{\infty} U_8(z)e^{2i\varepsilon(h)TF_8(z,\pm)}dz, \quad (11.134)$$

где

$$U_8(z) = \chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)\frac{U(c^2z/L)}{z\left(1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}}V\left(c\frac{z+q^2}{4q}, \varepsilon(h)t, T\right) \times \exp\left(-G^2\log^2\frac{x(z)+\sqrt{x^2(z)-1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right),$$

$$F_8(z,\pm) = h_1(x(z)) \pm \varepsilon(h)\alpha_0\eta\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right) - \alpha_0\log\sqrt{z}, \quad x(z) = \frac{z-q^2}{z+q^2}.$$

Заметим, что $U_8(z) \neq 0$ только при $n < \frac{c^2t^2}{2\pi^2L}(1-t^{-2/3+\epsilon})^2$. Применяя (11.26) и (11.104), получаем

$$\frac{d}{dz}F_8(z,\pm) = \frac{-(1-\alpha_0^2)}{\alpha_0x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} \mp \varepsilon(h)\frac{\alpha_0}{2z}\sqrt{1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}} - \frac{\alpha_0}{2z}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dz}F_8(z,\varepsilon(h)) \gg \frac{\alpha_0}{2z},$$

данный случай проще чем второй

$$\frac{d}{dz}F_8(z,-\varepsilon(h)) = \frac{-(1-\alpha_0^2)}{\alpha_0x(z)+\sqrt{x(z)^2-1+\alpha_0^2}}\frac{2q^2}{(z+q^2)^2} - \frac{2\pi^2n\alpha_0/t^2}{1+\sqrt{1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}}}. \quad (11.135)$$

В последнем случае нет седловых точек и производная (11.135) очень похожа на (11.111). Тем не менее, наличие $\chi_0\left(\frac{2\pi\sqrt{nz}}{t}\right)$ и $\left(1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}\right)^{1/4}$ в $U_8(z)$ делает вычисления схожими с анализом функции $F_5(z), U_5(z)$ (см. лемму 11.6.3).

Чтобы оценить (11.134) применим лемму 11.1.6. Для этого необходимо выбрать параметры P, R, V, X, Y в (11.19). Выполнена оценка

$$\left|\frac{d}{dz}F_8(z,-\varepsilon(h))\right| \gg \frac{q^2}{\alpha_0 z^2}+\frac{\alpha_0 n}{t^2}.$$

Следовательно,

$$R = T\frac{q^2c^4}{\alpha_0 L^2}+\frac{\alpha_0 n}{t^2}T.$$

Вычисляя вторую производную $F_8(z,-\varepsilon(h))$, мы показываем, что

$$\frac{d^2}{dz^2}F_8(z,-\varepsilon(h)) \ll \frac{1}{\alpha_0^3}\frac{q^4}{z^4}+\frac{q^2}{\alpha_0 z^3}+\frac{\alpha_0 n^2}{t^4\sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}} \ll \frac{q^2}{\alpha_0 z^3}+\frac{\alpha_0 n^2}{t^4\sqrt{1-\frac{4\pi^2 nz}{t^2}}}.$$

Предположим, что $\delta c^2t^2/L < n < \frac{c^2t^2}{2\pi^2 L}(1-t^{-2/3+\epsilon})^2$. В этом случае

$$R=\frac{T\alpha_0 c^2}{L},\quad P=\frac{L}{t^{2/3-\epsilon}c^2},\quad Y=PR.$$

Вычисляя производную $U_8(z)$ (см. (11.124)), делаем вывод, что

$$V=\frac{L}{c^2t^{2/3-\epsilon}},\quad X=t^{1/6-\epsilon}.$$

Таким образом,

$$RP=RV>\frac{T\alpha_0}{t^{2/3-\epsilon}}=t^{1/3+\epsilon},$$

и мы доказали, что

$$\int_0^\infty U_8(z)e^{2i\varepsilon(h)TF_8(z,\pm)}dz \ll \frac{t^{1/6-\epsilon}}{(RV)^A}+\frac{t^{1/6-\epsilon}}{(RP)^A} \ll T^{-A}. \tag{11.136}$$

Предположим, что $n<\delta c^2t^2/L$, и поэтому $1-\frac{4\pi^2nz}{t^2}\gg 1$. В этом случае

$$P=L/c^2,\quad Y=PR,\quad V=\frac{L}{c^2}T^{-\epsilon}.$$

Также предположим, что $\frac{q^2t^2c^4}{\alpha_0^2L^2} < n < \delta c^2t^2/L$. Тогда $R=\frac{\alpha_0 n}{t^2}T$. Применяя (11.101), получаем

$$RP>RV>\frac{\alpha_0 n}{t^2}\frac{L}{c^2}T^{1-\epsilon}>\frac{q^2c^2}{\alpha_0 L}T^{1-\epsilon}\gg T^\epsilon,$$

из чего следует (11.136).

Предположим, что $n<\frac{q^2t^2c^4}{\alpha_0^2L^2}$. Тогда $R=T\frac{q^2c^4}{\alpha_0L^2}$ и

$$RP>RV>\frac{q^2c^2}{\alpha_0 L}T^{1-\epsilon}\gg T^\epsilon,$$

что доказывает (11.136).

□

11.7. Доказательство теоремы 11.0.3

Теорема 11.0.3 доказывается аналогично [**17**, теореме 1.1] в [**17**, главе 6]. Мы разбиваем сумму по c в (11.97), (11.99) на три части:

$$c \equiv 0 \pmod 4,\ (c,2)=1,\ c \equiv 2 \pmod 4,$$

и затем применяем для каждой из частей соответствующую формулу Вороного. Аналогично [**17**, главе 6] достаточно привести подробное доказательство только в одном из случаев, так как два оставшихся доказываются аналогично. Рассмотрим например $c \equiv 0 \pmod 4$. Применяя формулу Вороного (см. лемму 11.2.1) и используя свойства интегральных преобразований из главы 11.6, получаем

$$S_2(C,Q,L) \ll \sum_{c\equiv 0 \pmod 4} U\left(\frac{c}{C}\right) \sum_q U\left(\frac{q}{Q}\right) \sum_n \Theta_0(c,-n) \frac{\mathscr{L}_{-n}(1/2+2it)}{|n|^{1/2-it}} \times \frac{U_0(z_0) e^{2iTF_0(z_0)}}{c^{1+2it}\sqrt{z_0}} U\left(\frac{n\alpha_0^2 L^2}{Q^2C^4t^2}\right), \quad (11.137)$$

$$S_1(h,C,Q,L) \ll \sum_{c\equiv 0 \pmod 4} U\left(\frac{c}{C}\right) \sum_q U\left(\frac{q}{Q}\right) \sum_n \Theta_0(c,-n) \frac{\mathscr{L}_{-n}(1/2+2it)}{|n|^{1/2-it}} \times \frac{U_1(z_1) e^{2i\varepsilon(h)TF_1(z_1)}}{c^{1+2i\varepsilon(h)t}\sqrt{z_1}} U\left(\frac{n\alpha_0^2 L^2}{Q^2C^4t^2}\right). \quad (11.138)$$

Правые части формул (11.137) и (11.138) практически идентичны, поэтому рассмотрим лишь (11.137). Так как $F_0(z_0)$ не зависит от c, мы вычислим сумму c тем же методом, что и в [**17**, главе 6]. Пусть $\mathcal{W}(c) = U\left(\frac{c}{C}\right) U_0(z_0)$, тогда применяя (11.37), доказываем тождество

$$\sum_{c\equiv 0 \pmod 4} U\left(\frac{c}{C}\right) U_0(z_0) \frac{\Theta_0(c,-n)}{c^{1+2it}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/2)} \tilde{\mathcal{W}}(z) \frac{L^*(1/2+2it+z,-n)}{\zeta_2(1+4it+2z)} \overline{r_2(1/2-it+\bar{z}/2,-n)} dz. \quad (11.139)$$

Заметим, что $\tilde{\mathcal{W}}(z) \ll C^{\operatorname{Re} z}((1+|\operatorname{Im} z|)T^{-\epsilon})^{-A}$. Поэтому можно обрезать область интегрирования в (11.139) до $\operatorname{Im} z = T^\epsilon$ с пренебрежимо малым остатком. Применяя $z_0^{-1/2} \approx C/\sqrt{L} \approx \frac{\sqrt{nL}}{TCQ}$, (11.38) и (11.39), получаем оценку

$$S_2(C,Q,L) \ll Q\frac{\sqrt{L}}{TCQ}\left(\frac{Q^2C^4t^2}{\alpha_0^2L^2} + \frac{QC^2t^{3/2}}{\alpha_0 L}\right) T^\epsilon \ll \left(\frac{Q^2C^3T}{L^{3/2}} + \frac{QCt^{1/2}}{L^{1/2}}\right) T^\epsilon. \quad (11.140)$$

Подставляя (11.140) в (11.96), доказываем, что

$$S_2(t) \ll$$

$$\frac{T^{1+\epsilon}G}{t^{1/2}} \sum_{C \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}} \sum_{Q_0/C \ll Q \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}/C} \sum_{Q^2C^2G^{1-\epsilon}/\alpha_0 \ll L \ll QCT^{1+\epsilon}\sqrt{t}} \left(\frac{Q^2C^3T}{L^{3/2}} + \frac{QCt^{1/2}}{L^{1/2}} \right) \ll$$

$$\frac{T^{1+\epsilon}G}{t^{1/2}} \sum_{C \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}} \sum_{Q_0/C \ll Q \ll t^{3/2}G^{-1+\epsilon}/C} \left(\frac{T\alpha_0^{3/2}}{G^{3/2}Q} + \frac{t^{1/2}\alpha_0^{1/2}}{G^{1/2}} \right) \ll$$

$$\ll T^{1+\epsilon}G \left(\frac{t}{G^{3/2}T^{1/2}} + \frac{t^{1/2}}{G^{1/2}T^{1/2}} \right) \ll T^{1-\epsilon}G,$$

при условии

$$G \gg \frac{t^{2/3}}{T^{1/3-\epsilon}}.$$

Такая же оценка справедлива и для $S_1(t)$, и поэтому (см. (11.59)) мы доказали (11.4) в предположении, что условие (11.94) выполнено, то есть

$$G \gg \max\left(\frac{t^{2/3}}{T^{1/3}}, \frac{T}{t} \right) T^{\epsilon}, \quad t \ll T^{6/7-\epsilon}.$$

Литература

[1] О.Г. Балканова, *Формула спектрального разложения и моменты L-функций симметрического квадрата*, Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 3–46.

[2] О.Г. Балканова, *Асимптотика гипергеометрической функции Гаусса, возникающей в моментах L-функций симметрического квадрата I*, Матем. заметки, 119:3 (2026), 339–349.

[3] О.Г. Балканова, *Первый момент L-функций симметрического квадрата модулярных форм*, Матем. сб., 216:9 (2025), 3–20.

[4] О.Г. Балканова, Д.А. Фроленков, *Равномерная асимптотическая формула для второго момента примитивных L-функций на критической прямой*, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016, 20–53.

[5] В.А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение арифметических функций на коротких интервалах*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 212 (1994), 56–70.

[6] В.А. Быковский, *Функциональные уравнения для рядов Гекке–Маасса*, Функц. анализ и его прил., 34:2 (2000), 23–32.

[7] В.А. Быковский, Д.А. Фроленков, *Асимптотические формулы для вторых моментов L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой*, Изв. РАН. Сер. матем., 81:2 (2017), 5–34.

[8] Н.И. Заворотный, *О четвертом моменте дзета-функции Римана.* Труды конференции. Автоморфные функции и теория чисел I, Владивосток 1989, 69–125.

[9] Н.В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана*, Матем. сб., 111(153):3 (1980), 334–383.

[10] Н.В. Кузнецов, *Арифметическая форма формулы следа Сельберга и распределение норм примитивных гиперболических классов модулярной группы.* Препринт; Хабаровск (1978).

[11] Н.В. Кузнецов, *Асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа в фундаментальной области модулярной группы.* Препринт; Хабаровск (1978).

[12] Н.В. Кузнецов, *Ряды Гекке в центральной точке критической полосы*, Владивосток: Дальнаука (1999), 1–27 (Препринт / ДВО РАН. Хабаровское отделение Института прикладной математики; № 21).

[13] Н.В. Кузнецов, *Формулы следа и средние значения арифметических функций в коротких интервалах*, Владивосток: Дальнаука (2003), 1–160.

[14] А.В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами*, Тр. МИАН СССР, 65 (1962), 3–212.

[15] О.М. Фоменко, *Поведение автоморфных L-функций в точках $s = 1$ и $s = 1/2$*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 302 (2003), 149–167.

[16] Д.А. Фроленков, *Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции*, Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 289–298.

[17] Д.А. Фроленков, *Второй момент центральных значений симметричных квадратичных L-функций форм Маасса*, Изв. РАН. Сер. матем., 89:6 (2025), 183–205.

[18] K. Aggarwal, R. Holowinsky, Y. Lin, Z. Qi, *A Bessel delta method and exponential sums for GL*(2), Q. J. Math., 71:3 (2020), 1143–1168.

[19] S. Ahlgren, N. Andersen, *Kloosterman sums and Maass cusp forms of half integral weight for the modular group*, International Mathematics Research Notices 2018(2018), no. 2, 492–570.

[20] S.A. Altug, *Beyond Endoscopy via the Trace Formula - I: Poisson Summation and Contributions of Special Representations*, Compos. Math. 151 (2015), no. 10, 1791–1820.

[21] N. Andersen, E.M. Kiral. *Level reciprocity in the twisted second moment of Rankin-Selberg L-functions*, Mathematika, 64:3 (2018), 770–784.

[22] J. Andersson, *Summation formulae and zeta functions*, Doctoral dissertation, Stockholm University, 2006.

[23] E. Assing, A. Corbett, *Voronoi summation via switching cusps*, Monatshefte fur Mathematik (2021) 194: 657–685.

[24] E. Assing, A. Corbett, *Voronoi summation for half-integral weight automorphic Forms*, Int. Math. Res. Not. 23 (2022), 18632–18675.

[25] A.O. L. Atki, J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. 185 (1970), 134–160.

[26] O. Balkanova, *The first moment of Maass form symmetric square L-functions*, Ramanujan J., 55 (2021), 761–781.

[27] O. Balkanova, G. Bhowmik, D. Frolenkov, N. Raulf, *A mean value result for a product of* GL(2) *and* GL(3) *L-functions*, Mathematika:65 (2019), 743–762.

[28] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Moments of L-functions and the Liouville-Green method*, J. Eur. Math. Soc. 23:4 (2021), 1333–1380.

[29] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Convolution formula for the sums of generalized Dirichlet L-functions*, Rev. Mat. Iberoam. 35:7 (2019), 1973–1995.

[30] O. Balkanova, D. Frolenkov, *Non-vanishing of Maass form symmetric square L-functions*, J. Math. Anal. Appl., 500:2 (2021), 125148 , 23 pp.

[31] O. Balkanova, D. Frolenkov, *The mean value of symmetric square L-functions*, Algebra Number theory 12:1 (2018), 35–59.

[32] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Bounds for a spectral exponential sum*, J. Lond. Math. Soc. 99:2 (2019), 249–272.

[33] O. Balkanova, D. Frolenkov, *An explicit formula for the second moment of Maass form symmetric square L-functions*, Publ. Mat. 67 (2) 611–660, 2023.

[34] O. Balkanova, D. Frolenkov, *A Voronoi summation formula for non-holomorphic Maass forms of half-integral weight*, Monatsh. Math. 203 (2024), 733–764.

[35] O. Balkanova and D. Frolenkov, *Hybrid subconvexity for Maass form symmetric-square L-functions*, Proc. R. Soc. Edinb. A: Math., published online, DOI: https://doi.org/10.1017/prm.2025.10113.

[36] O. Balkanova, D. Frolenkov, M. S. Risager, *Prime geodesics and averages of the Zagier L-series*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 172:3 (2022), 705–728.

[37] O. Balkanova, D. Frolenkov, and H. Wu, *On Weyl's subconvex bound for cube-free Hecke characters: totally real case*, arXiv:2108.12283, 2021.

[38] O. Balkanova, B. Huang, A. Södergren, *Non-vanishing of Maass form L-functions at the critical point*, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), 509–523.

[39] A. Balog, A. Biro, G. Cherubini, N. Laaksonen, *Bykovskii-type theorem for the Picard manifold*, Int. Math. Res. Not. 3 (2022), 1893–1921.

[40] C.B. Balogh, *Asymptotic expansions of the modified Bessel function of the third kind of imaginary order*, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967), 1315–1323.

[41] H. Beitman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.

[42] S. Bettin, *On the reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L-functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 368:10 (2016), 6887–6914.

[43] A. Biro, *A duality relation for certain triple products of automorphic forms*, Israel J. of Math., 192 (2012), 587–636.

[44] V. Blomer *On the central value of symmetric-square L-functions* Math. Z., 260 (2008), 755–777.

[45] V. Blomer, A. Corbett, *A symplectic restriction problem.* Math. Ann. 382 (2022), 1323–1424.

[46] V. Blomer, P. Humphries, R. Khan, M.B. Milinovich, *Motohashi's fourth moment identity for non-archimedean test functions and applications*, Compositio Math., 156:5 (2020), 1004–1038.

[47] V. Blomer, R. Khan, *Twisted moments of L-functions and spectral reciprocity*, Duke Math. J. 168:6 (2019), 1109–1177.

[48] V. Blomer, R. Khan, *Uniform subconvexity and symmetry breaking reciprocity*, J. Funct. Anal. 276:7 (2019), 2315–2358.

[49] V. Blomer, R. Khan, M.P. Young, *Distribution of mass of holomorphic cusp forms*, Duke Math. J. 162 (2013), no. 14, 2609–2644.

[50] V. Blomer, X. Li, S. Miller, *A spectral reciprocity formula and non-vanishing of L-functions on* GL(4) × GL(2), J. Number Theory Prime 205 (2019), 1–43.

[51] A.R. Booker, M.B. Milinovich, N. Ng, *Subconvexity for modular form L-functions in the t aspect*, Adv. Math., 341:299ŸV335, 2019.

[52] A.R. Booker, A. Strömbergsson, H. Then, *Bounds and algorithms for the K-Bessel function of imaginary order*, LMS J. Comput. Math. 16 (2013), 78–108.

[53] J. Bourgain, *Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function.* J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 205–224.

[54] W.G.C. Boyd and T.M. Dunster, *Uniform asymptotic solutions of a class of second-order linear differential equations having a turning point and a regular singularity, with an application to Legendre functions*, SIAM J. Math. Anal. 17-2 (1986), 422–450.

[55] J. Bourgain and N. Watt, *Decoupling for perturbed cones and the mean square of* $|\zeta(1/2+it)|$, Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, No. 17, 5219–5296.

[56] R.W. Bruggeman, *Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 45(1978), 1–18.

[57] J. Buttcane and R. Khan, *A mean value of triple product L-functions,* Math Z. 285 (2017), 565–591.

[58] V. Bykovskii, N. Kuznetsov N. and A. Vinogradov, *Generalized summation formula for inhomogeneous convolution.* In Automorphic functions and their applications (Khabarovsk, 1988), 18–63. Acad. Sci. USSR Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990.

[59] Y. Cai, *Prime geodesic theorem*, J. Theor. Nombres Bordeaux 14:1 (2002), 59–72.

[60] F. Chamizo and D. Raboso, *On the Kuznetsov formula*, J. of Funct. Anal. 268 (2015), 869–886.

[61] V. Chandee, X. Li, *The second moment of* GL(4) × GL(2) *L-functions at special points.* Adv. Math. 365 (2020).

[62] G. Cherubini and J. Guerreiro, *Mean square in the prime geodesic theorem*, Algebra Number Theory, 12(3), 571–597.

[63] G. Cherubini, H. Wu and G. Zabradi, *On Kuznetsov-Bykovskii's formula of counting prime geodesics*, Math. Zeitschrift 300 (2022), 881–928.

[64] J.A. Cima, A.L. Matheson and W.T. Ross, *The Cauchy transform*, American Mathematical Soc., 2006.

[65] H. Cohen, *Sums Involving the Values at Negative Integers of L-Functions of Quadratic Characters*, Math. Ann 217 (1975), 271–285.

[66] J.B. Conrey, *The mean-square of Dirichlet L-functions*, arXiv:0708.2699 [math.NT].

[67] J.B. Conrey, D.W. Farmer, J.P. Keating, M.O. Rubinstein, N.C. Snaith, *Integral moments of L-functions*, Proc. Lond. Math. Soc., 91 (2005), 33–104

[68] J.B. Conrey and H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions*, Ann. of Math. (2) 151 (2000), 1175–1216.

[69] A. Corbett, *Voronoi summation for* GL(n)*: collusion between level and modulus*, Amer. J. of Math., Volume 143, Number 5, 2021, 1361–1395.

[70] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *The non-vanishing of Rankin-Selberg zeta-functions at special points*, Selberg trace formula and related topics, Contemp. Math. 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 59–95.

[71] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982), no. 2, 219–288.

[72] A. Diaconu, D. Goldfeld, and J. Hoffstein, *Multiple Dirichlet series and moments of zeta- and L-functions*, Compositio Math. 139 (2003), no. 3, 297–360.

[73] N. Diamantis, D. Goldfeld, *A converse theorem for double Dirichlet series and Shintani zeta functions*, J.Math. Soc. Japan 66 (2014), 449–477.

[74] S. Drappeau, *Sums of Kloosterman sums in arithmetic progressions, and the error term in the dispersion method*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 114 (2017), no. 4, 684–732.

[75] W. Duke, J.B. Friedlander, H. Iwaniec, *The subconvexity problem for Artin L-functions*, Invent. Math., 149 (2002), pp. 489–577.

[76] W. Duke, H. Iwaniec, *Bilinear forms in the Fourier coefficients of half-integral weight cusp forms and sums over primes*, Math. Ann. 286 (1990), no. 4, 783–802.

[77] A. Dunn, A. Zaharescu, *The twisted second moment of modular half integral weight L-functions*, J. Eur. Math. Soc. 7:1 (2025), 1–69.

[78] T.M. Dunster, *Uniform asymptotic solutions of second-order linear differential equations having a double pole with complex exponent and a coalescing turning point*, SIAM J. Math. Anal., 21 (6) (1990) 1594–1618.

[79] T.M. Dunster, *Bessel functions of purely imaginary order with applications to second order linear differential equations*, SIAM J. Math. Anal., 21 (4), (1990), 995–1018.

[80] S. Farid Khwaja, A. B. Olde Daalhuis, *Uniform asymptotic expansions for hypergeometric functions with large parameters IV*, Anal. Appl. (Singap.), 12 (2014), 667–710.

[81] S. Farid Khwaja, A.B. Olde Daalhuis, *Computation of the coefficients appearing in the uniform asymptotic expansions of integrals*, arXiv:1610.04472 [math.CA].

[82] S. Farid Khwaja and A.B. Olde Daalhuis, *Exponentially accurate uniform asymptotic approximations for integrals and Bleistein's method revisited*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 469(2153),2013, 1–12.

[83] D. Frolenkov, *Asymptotics of a Gauss hypergeometric function related to moments of symmetric-square L-functions II*, Integral Transforms Spec. Funct., 2025, 1–12 (Published online), https://doi.org/10.1080/10652469.2025.2522946.

[84] D. Frolenkov, *The cubic moment of automorphic L-functions in the weight aspect*, J. Number Theory 207 (2020), 247–281.

[85] S. Gelbart and H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), no. 4, 471–542.

[86] D. Goldfeld and J. Hoffstein, *Eisenstein series of 1/2-integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series*, Invent. Math. 80 (1985), 185–208.

[87] D. Goldfeld, X. Li, *Voronoi formulas on $GL(n,\mathbb{R})$*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 86295, 25 pp.

[88] D. Goldfeld, X. Li, *The Voronoi formula for* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, Int. Math. Res. Not. IMRN 2 (2008), Art. ID rnm144, 39.

[89] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition, 2007.

[90] G. Harcos, P. Michel, *The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points, II,* Invent. Math. 163 (2006), no. 3, 581–655.

[91] D. R. Heath-Brown, *A mean value estimate for real character sums*, Acta Arith. 72 (1995), no. 3, 235–275.

[92] R. Holowinsky and K. Soundararajan, *Mass equidistribution for Hecke eigenforms*, Ann. of Math. (2), 172(2):1517–1528, 2010.

[93] B. Huang, *The cubic moment of Hecke–Maass cusp forms and moments of L-functions*, Math. Ann. 389 (2024), no. 1, 899–945.

[94] P. Humphries, *Density theorems for exceptional eigenvalues for congruence subgroups*, Algebra Number theory 12:7 (2018), 1581–1610.

[95] P. Humphries, R. Khan, *On the random wave conjecture for dihedral Maass forms*, Geom. Funct. Anal., 30:1 (2020), 34–125.

[96] A. Ichino, N. Templier, *On the Voronoi summation formula for* $\mathrm{GL}(n)$, Amer. J. of Math, 135(1): 65–101, 2013.

[97] A. Ivic and Y. Motohashi, *The moments of the Riemann zeta-function Part I: The fourth moment off the critical line*, Functiones et Approximatio 35 (2006), 133–181.

[98] A. Ivic and M. Jutila, *On the moments of Hecke series at central points II*, Funct. Approx. Com. Math. 31 (2003), 93–108.

[99] H. Iwaniec, *Introduction to the spectral theory of automorphic forms*, Revista Matemática Iberoamericana, 1995.

[100] H. Iwaniec, *Prime geodesic theorem*, J. Reine. Angew. Math. 349 (1984), 136–159.

[101] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Graduate studies in mathematics (vol 17), American Mathematical Soc., 1997.

[102] H. Iwaniec, *Fourier coefficients of cusp forms and the Riemann zeta-function*. Exposé No. 18, Séminaire de Théorie des Nombres, Université Bordeaux 1979/80.

[103] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic number theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 53.

[104] H. Iwaniec, P. Michel, *The second moment of the symmetric square L-functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 26 (2001), 465–482.

[105] H. Iwaniec and P. Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, Geom. Funct. Anal., (Special Volume, Part II):705–741, 2000.

[106] S. Jana, R. Nunes, *Spectral reciprocity for $Gl(n)$ and simultaneous non-vanishing of central L-values*, arXiv:2111.02297 [math.NT].

[107] D.S. Jones, *Asymptotics of the hypergeometric function*, Math. Methods Appl. Sci. 24 (2001), 369–389.

[108] M. Jutila, *The fourth moment of central values of Hecke series*, in Number Theory, Proc. of the Turku Symposium 1999, de Gruyter, Berlin, 2001, 167–177.

[109] I. Kaneko, *Motohashi's Formula for the Fourth Moment of Individual Dirichlet L-Functions and Applications*, arXiv:2110.08974 [math.NT].

[110] R. Khan, *The first moment of the symmetric-square L-function*, J. Number Theory 124 (2007), 259–266.

[111] R. Khan, *Non-vanishing of the symmetric square L-function at the central point*, Proc. London Math. Soc. (2010) 100 (3): 736–762.

[112] R. Khan and M.Young, *Moments and hybrid subconvexity for symmetric-square L-functions,* J. Inst. Math. Jussieu 22(5) 2023, 2029–2073.

[113] E.M. Kiral, *Subconvexity for half integral weight L-functions*, Math. Z. 281 (2015), no. 3-4, 689–722.

[114] E.M. Kiral and M.P. Young, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of Eisenstein series*, Ramanujan J 49 (2019), 391–409.

[115] E.M. Kiral and M.P. Young, *The fifth moment of Modular L-functions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 23 (2021), no. 1, 237–31.

[116] W. Kohnen, *Modular forms of half integer weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. 248, 249–266 (1980).

[117] W. Kohnen, J. Sengupta, *On the average of central values of symmetric square L-functions in weight aspect*, Nagoya Math. J. 167, 2002, 95–100.

[118] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, *Rankin-Selberg L-functions in the level aspect*, Duke Math. J. 114 (2002), 123–191.

[119] N.V. Kuznetsov, *Sums of Kloosterman sums and the eighth power moment of the Riemann zeta-function*, T.I.F.R. Stud. Math. 12 (1989), 57–117.

[120] C.-H. Kwan, *Spectral Moment Formulae for $GL(3) \times GL(2)$ L-functions*, arXiv:2112.08568 [math.NT].

[121] J.W.C. Lam, *The second moment of the central values of the symmetric square L-functions*, Ramanujan J. 38(1) (2015), 129–145.

[122] Y.-K. Lau, *Non-vanishing of symmetric square L-functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (11) (2002) 3133–3139.

[123] M. Lerch, *Note sur la fonction* $R(w,x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{(n+c)^s}$, Acta Math. 11 (1887), 19–24.

[124] X. Li, *Bounds for* $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(2)$ *L-functions and* $\mathrm{GL}(3)$ *L-functions*, Ann. of Math. 173 (2011), 301–336.

[125] M. Lipschitz, *Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe*, J. Reine Angew. 54 (1857), 313–328.

[126] S. Liu, *The first moment of central values of symmetric-square L-functions in the weight aspect*, Ramanujan J. 46 (2018), 775–794. .

[127] W. Luo, *Central values of the symmetric square L-functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 140, (2012), no.10, 3313–3322.

[128] W. Luo, *Values of symmetric square L-functions at 1*, J. Reine Angew. Math. 506 (1999), 215–235.

[129] W. Luo and P. Sarnak, *Quantum ergodicity of eigenfunctions on* $PSL_2(Z)/H^2$, Pub. math. de l'I.H.E.S. 81 (1995), 207–237.

[130] X. Miao, *Spectral reciprocity for the product of Rankin-Selberg L-functions*, arXiv:2110.11529 [math.NT].

[131] S. D. Miller, W. Schmid, *Summation formulas, from Poisson and Voronoi to the present*, in Noncommutative Harmonic Analysis, Progr. Math. 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, 419–440.

[132] S.D. Miller, W. Schmid, *Automorphic distributions, L-functions, and Voronoi summation for GL(3)*, Ann. of Math. (2) 164 (2006), no. 2, 423–488.

[133] S. D. Miller, W. Schmid, *A general Voronoi summation formula for* $\mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$, In Geometry and analysis. No. 2, volume 18 of Adv. Lect. Math. (ALM), pages 173-224. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[134] S. D. Miller, F. Zhou, *The Balanced Voronoi Formulas for* $\mathrm{GL}(n)$, Int. Math. Res. Not. 11 (2019), 3473–3484.

[135] T. Miyake, *Modular forms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, english edition, 2006. Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda.

[136] Y. Motohashi, *The binary additive divisor problem*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 27 (1994), 529–572.

[137] Y. Motohashi, *Kuznetsov's paper on the eighth power moment of the Riemann zeta-function (Revised)*, Part I. Manuscript, June 22, 1991.

[138] Y. Motohashi, *Spectral mean values of Maass waveform L-functions*, J. Number Theory 48 (1992), 258–284.

[139] Y. Motohashi, *An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function*, Acta Math., 170(2) (1993), 181–220.

[140] Y. Motohashi, *Spectral theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge Tracts in Mathematics 127 (Cambridge University Press, 1997).

[141] Y. Motohashi, *A functional equation for the spectral fourth moment of the modular Hecke L-functions*, Proc. MPIM-Bonn Special Activity on Analytic Number Theory, Bonn 2002, Bonner Math. Schrift., 130 (2003), 19 pages, arXiv:math/0310105.

[142] W. Müller, *The mean square of Dirichlet series associated with automorphic forms*, Mh. Math. 113 (1992), pp. 121–159.

[143] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functions III: t-aspect subconvexity for* GL(3) *L-functions*, J. Amer. Math. Soc., 28(4):913–938, 2015.

[144] R. Munshi, *The circle method and bounds for L-functionsŸXIV: subconvexity for twists of* GL(3) *L-functions*, Ann. of Math. (2), 182(2):617ŸV672, 2015.

[145] R. Murty, *Oscillations of Fourier coefficients of modular forms*, Math.Ann., 262, (1983), 431–446.

[146] P. Nelson, *Eisenstein series and the cubic moment for* PGL_2. arXiv:1911.06310 [math.NT].

[147] M.-H. Ng, *Moments of automorphic L-functions*, Ph.D. thesis, University of Hong Kong, 2016.

[148] M.-H. Ng, *The first moment of central values of symmetric square L-functions of cusp forms*, Acta Arith. 177(2017), 277–291.

[149] R.M. Nunes, *Spectral reciprocity via integral representations RM Nunes*, Algebra Number Theory 17 (8): 2023, 1381–1409.

[150] F.W.J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.

[151] F.W.J. Olver , D.W. Lozier, R.F. Boisvert and C.W. Clarke, *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[152] H. Petersson, *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen*, Acta Math. 58 (1932), no. 1, 169–215.

[153] Y.N. Petridis and M S. Risager, *Averaging over Heegner points in the hyperbolic circle problem*, IMRN (2017), https://doi.org/10.1093/imrn/rnx026.

[154] Y.N. Petridis and M.S. Risager, *Local average in hyperbolic lattice point counting, with an appendix by N. Laaksonen*, Math. Z. 285 (2017), no. 3-4, 1319–1344.

[155] Y. Petridis, N. Raulf, M. Risager, *Double Dirichlet series and quantum unique ergodicity of weight one-half Eisenstein series*, Algebra Number Theory 8 (2014), no. 7, 1539–1595.

[156] I. Petrow, *A twisted Motohashi formula and Weyl-subconvexity for L-functions of weight two cusp forms*, Math. Ann. 363 (2015), 175–216.

[157] I. Petrow, *Bounds for traces of Hecke operators and applications to modular and elliptic curves over a finite field*, Algebra Number theory 12:10 (2018), 2471–2498.

[158] I. Petrow, M.P. Young, *The fourth moment of Dirichlet L-functions along a coset and the Weyl bound*, Duke Math. J. 172:10 (2023), 1879–1960.

[159] A. Pitale, *Jacobi Maaß forms*, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 79 (2009), 87–111.

[160] W. Roelcke, *Das eigenwertproblem der automorphen formen in der hyperbolischen ebebe, I*, Math. Ann. 167 (1966), pp. 292–337.

[161] D. Rouymi, *Formules de trace et non annulation de fonctions L automorphes au niveau* p^v , Acta Arith. 147 (2011), 1–32.

[162] E. Royer, *Sur les fonctions L de formes modulaires*, PhD thesis, Université de Paris-Sud, 2001.

[163] R. Schulze-Pillot and A. Yenirce, *Petersson products of bases of spaces of cusp forms and estimates for Fourier coefficients*, Int. J. Number Theory 14:8 (2018), 2277–2290.

[164] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. Math. (2) 97 , 440-481 (1973).

[165] G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. (3) 31 (1975), 79–98.

[166] K. Soundararajan, *Weak subconvexity for central values of L-functions*, Ann. of Math. (2), 172(2)(2010), 1469–1498.

[167] K. Soundararajan, M.P. Young, *The prime geodesic theorem*, J. Reine Angew. Math. 676 (2013), 105–120.

[168] F. Strömberg, *Computation of Maass waveforms with nontrivial multiplier systems*, Math. Comp. 77 (2008), no. 264, 2375–2416.

[169] Q. Sun, *On the first moment of symmetric-square L-functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 141, (2013), no. 2, 369–375.

[170] Q. Sun, *The symmetric-square L-function on the critical line*, J. Number Theory 140 (2014), 196–214.

[171] H. Tang, *Central value of the symmetric square L-functions related to Maass forms* (in Chinese), Sci. Sin. Math 42 12 (2012), 1213–1224.

[172] H. Tang, Z. Xu, *Central value of the symmetric square L-functions related to Hecke-Maass forms* Lith. Math. J. 56.2 (2016), 251–267.

[173] N.M. Temme, *Uniform asymptotic expansions of Laplace integrals*, Analysis, 3, 221–249.

[174] N.M. Temme, *Laplace type intergals: Transformation to standard form and uniform asymptotic expansions.* Quart. Appl. Math. 43(1):103123, 1985.

[175] N.M. Temme, *Asymptotic methods for integrals*, volume 6 of Series in Analysis. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, 2015.

[176] N.M. Temme, *Asymptotic expansions of Kummer hypergeometric functions for large values of parameters*, Integral Transforms and Special Functions 33.1 (2022): 16-31.

[177] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, Oxford, 1986.

[178] G.N. Watson, *Asymptotic expansions of hypergeometric functions*, Trans. Cambridge Philos. Soc. 22 (1918), 277–308.

[179] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 34, 1948, 204–207.

[180] H. Wu, *On Motohashi's formula*, Trans.AMS. 375:11 (2022), 8033–8081.

[181] M.P. Young, *Weyl-type hybrid subconvexity bounds for twisted L-functions and Heegner points on shrinking sets*, J. Eur. Math. Soc. 19 (2017), 1545–1576.

[182] M.P. Young, *The reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L-functions*, Forum Math. 23:6 (2011), 1323–1337.

[183] R. Zacharias, *Periods and reciprocity I*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2021:3. (2021), 2191–2209.

[184] D. Zagier, *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields.* Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627, Springer, Berlin, 1977.

[185] F. Zhou, *Voronoi summation formulae on* $\mathrm{GL}(n)$, J. Number Theory, 162:483–495, 2016.