САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН

На правах рукописи



Алексеев Илья Сергеевич

Стабильная коммутаторная длина в динамике классов отображений поверхностей и её приложения в трёхмерной геометрии и топологии

1.1.3 — Геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Малютин Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04)

Официальные оппоненты:

Веснин Андрей Юрьевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, директор Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» (специальность 01.01.04)

Попеленский Федор Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (специальность 1.1.3)

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Защита диссертации состоится 21 января 2027 в 15 час. на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref26/alekseev/dis.pdf`.

Автореферат разослан «__» октября 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
доктор физ.-мат. наук Д. В. Осипов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Область исследований, к которой относится диссертационная работа, находится на стыке теории групп классов отображений поверхностей, геометрической теории групп, теории кос, теории узлов и теории трёхмерных многообразий. Один из центральных вопросов этой области — выяснить, как динамика классов отображений поверхности отражается в геометрии и топологии соответствующих им трёхмерных объектов. Интерес представляют как качественные соответствия, так и их количественные уточнения, позволяющие оценивать геометрическую и топологическую сложность в терминах динамических характеристик.

Одним из основных инструментов для изучения таких соответствий служат действия группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S на метрических пространствах, связанных с этой поверхностью[1]. При подходящем выборе такого метрического пространства X качественные свойства класса отображений φ могут проявляться в характере его действия, а количественные характеристики — в асимптотическом числе переноса

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \inf_{x\in X} \frac{d(x, \varphi^m(x))}{m}.$$

На качественном уровне классические примеры таких связей восходят к теории Нильсена–Тёрстона и теореме Тёрстона о геометризации трёхмерных многообразий, расслаивающихся над окружностью[2]. Их количественные уточнения возникают, в частности, при рассмотрении действий группы классов отображений на графе кривых $\mathcal{C}(S)$. Вершинами этого графа являются изотопические

[1] Поверхности предполагаются ориентированными, связными, компактными, возможно, с непустым краем и конечным числом отмеченных точек (проколов) во внутренности. Предполагается, что гомеоморфизмы сохраняют ориентацию поверхности, сохраняют множество отмеченных точек и неподвижны на крае.

[2] Каждое такое многообразие представляет собой тор отображения

$$T_\varphi := (S \times [0,1]) \,/\, [(x,1) \sim (h(x),0)]$$

некоторого класса отображений $[h] \in \mathrm{Mod}(S)$.

классы существенных простых замкнутых кривых на S, а рёбра отвечают парам классов, имеющим непересекающихся представителей. Результаты Х. Мазура и Я. Мински[3], Д. Бахмана и С. Шлеймера[4] и других авторов показывают, что асимптотическое число переноса в графе кривых позволяет распознавать гиперболичность многообразий, расслаивающихся над окружностью, и получать нижние оценки таких характеристик, как гиперболический объём и сложность вложенных существенных поверхностей.

Эти результаты приводят к следующему *пороговому принципу*: достаточно большое[5] значение асимптотического числа переноса может служить признаком определённых качественных свойств соответствующего трёхмерного объекта и давать нижние оценки его геометрических и топологических мер сложности. Возникает вопрос, распространяется ли этот принцип на конструкцию разложения в открытую книгу, в которой каждому классу отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ поверхности S, имеющей ровно одну компоненту края, сопоставляется замкнутое трёхмерное многообразие Y_φ и зацепление $L_\varphi \subset Y_\varphi$.

В модельном случае диска с n отмеченными точками группа классов отображений изоморфна группе кос:

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D^2_n),$$

при этом многообразие Y_φ представляет собой трёхмерную сферу S^3, а зацепление $L_\varphi \subset S^3$ — замыкание косы φ. В этом случае рассматриваемый вопрос о связи динамики классов отображений с геометрией и топологией пар «трёхмерное многообразие — зацепление» приводит к конкретным задачам классической теории узлов, включая гипотезы С. Бигелоу[6] и проблему построения узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и чьи геометрические и топологические характеристики не ограничены.

[3] *Masur H. A.*, *Minsky Y. N.* Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity // Inventiones mathematicae. 1999. Oct. Vol. 138, no. 1. P. 103–149.

[4] *Bachman D.*, *Schleimer S.* Surface bundles versus Heegaard splittings // Communications in Analysis and Geometry. 2005. Vol. 13, no. 5. P. 903–928.

[5] Под достаточно большим понимается значение, превышающее определённую *пороговую константу*, которая зависит только от поверхности S. В дальнейшем признаки, включающие подобные условия, называются *пороговыми*.

[6] *Bigelow S.* Does the Jones polynomial detect the unknot? // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2002. June. Vol. 11, no. 4. P. 493–505.

Для практического применения порогового принципа достаточно найти простые и эффективно вычислимые функционалы, значения которых дают нижние оценки асимптотических чисел переноса. Этот подход восходит к результатам М. Громова[7] из теории ограниченных когомологий и приводит к вопросу о том, могут ли такими функционалами служить однородные квазиморфизмы[8]. Его основная формализация связана с понятием относительной стабильной коммутаторной длины, восходящим к работам Д. Калегари, К. Фудживары[9] и Л. Чена[10]. Каждому изометрическому действию $G \curvearrowright X$ сопоставляется функция scl_X, показывающая, насколько эффективно степени данного элемента группы могут быть представлены в виде произведения коммутаторов и нелоксодромических[11] элементов. Согласно относительному варианту теоремы двойственности Бавара[12], выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_X(\varphi) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_X \\ D(f) \leqslant 1}} |f(\varphi)|,$$

где V_X — пространство всех однородных квазиморфизмов группы G, обращающихся в нуль на каждом нелоксодромическом элементе. Ключевым является вопрос о том, при каких условиях выполняется сравнение[13]

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X.$$

---

[7] *Gromov M.* Volume and bounded cohomology // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1982. Vol. 56. P. 5–99.

[8] Функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ на группе G называется квазиморфизмом, если дефект

$$D(f) := \sup_{x,y \in G} |f(xy) - f(x) - f(y)|$$

конечен; она однородна, если $f(x^m) = mf(x)$ для всех $x \in G$ и $m \in \mathbb{Z}$.

[9] *Calegari D., Fujiwara K.* Stable commutator length in word-hyperbolic groups // Groups, Geometry, and Dynamics. 2009. Vol. 4, no. 1. P. 59–90.

[10] *Chen L.* Scl in graphs of groups // Inventiones mathematicae. 2020. Aug. Vol. 221, no. 2. P. 329–396.

[11] Будем говорить, что элемент является локсодромическим (или действует локсодромически), если его асимптотическое число переноса не равно нулю.

[12] *Bavard C.* Longueur stable des commutateurs // L'Enseignement Mathématique. 1991. Vol. 37, no. 1/2. P. 109–150.

[13] Запись $f \lesssim g$ означает, что $f(x) \leqslant c \cdot g(x)$ для всех x и некоторой константы $c > 0$. Запись $f \asymp g$ означает, что $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$.

Такое сравнение позволяет оценивать снизу асимптотические числа переноса в терминах значений однородных квазиморфизмов и, тем самым, получать признаки качественных свойств и оценки мер сложности пар «многообразие — зацепление».[14]

Степень разработанности темы исследования

Основной пример реализации вышеописанной схемы связан с так называемым коэффициентом дробного скручивания Дена ω_∂, представляющим собой однородный квазиморфизм на группе классов отображений поверхности с выделенной компонентой края ∂. Результаты А. Малютина и Н. Нецветаева[15], Т. Ито[16] и К. Кавамуро[17], а также других авторов подтверждают пороговый принцип для этого квазиморфизма. Кроме того, значения функции ω_∂ дают нижние оценки асимптотического числа переноса в графе $\mathcal{A}_\partial$ закреплённых граничных дуг. Вершинами этого графа являются изотопические классы существенных простых дуг на S, хотя бы один конец которых закреплён на компоненте ∂, а рёбра отвечают парам классов, имеющим представителей с непересекающимися внутренностями. В модельном случае проколотого диска пространство $V_{\mathcal{A}_\partial}$ было независимо введено в работах А. Малютина[18], где ряд результатов о коэффициенте дробного скручивания Дена был распространён на произвольные квазиморфизмы группы кос.

Однако действие на графе $\mathcal{A}_\partial(S)$ охватывает лишь часть рассматриваемых задач. Поскольку значения асимптотического числа переноса $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ на степенях скручивания Дена вдоль компоненты края ∂ не ограничены сверху, функция $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ не даёт нижних оценок таких геометрических характеристик, как гиперболический

[14] Отметим, что свойство $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$ является инвариантном относительно эквивалентности изометрических действий (два действия группы эквивалентны, если между соответствующими пространствами существует грубо эквивариантная квазиизометрия).

[15] *Malyutin A. V.*, *Netsvetaev N. Y.* Dehornoy's ordering on the braid group and braid moves // St. Petersburg Mathematical Journal. 2004. Mar. Vol. 15, no. 3. P. 437–448.

[16] *Ito T.* Braid ordering and the geometry of closed braid // Geometry & Topology. 2011. Mar. Vol. 15, no. 1. P. 473–498.

[17] *Ito T.*, *Kawamuro K.* Essential open book foliations and fractional Dehn twist coefficient // Geometriae Dedicata. 2017. Apr. Vol. 187, no. 1. P. 17–67.

[18] *Malyutin A. V.* Criteria of prime links in terms of pseudo-characters // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Sept. Vol. 161, no. 3. P. 437–442.

объём. Это приводит к графу $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$, отвечающему факторизации графа $\mathcal{A}_\partial(S)$ по действию скручиваний Дена вдоль компонент края.

Исходя из этого, каждой поверхности S с выделенной компонентой края ∂ сопоставляются три пространства: граф $\mathcal{A}_\partial$ закреплённых граничных дуг, граф $\mathcal{A}^\circ_\partial$ скользящих граничных дуг и граф кривых $\mathcal{C}$. Эти графы образуют единую трёхуровневую систему: имеются естественные эквивариантные отображения

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}^\circ_\partial \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C},$$

где символ $\mathcal{AC}$ обозначает граф дуг и кривых, квазиизометричный графу кривых[19] и используемый здесь как промежуточное пространство. Эти отображения индуцируют иерархию асимптотических чисел переноса[20]

$$\ell_{\mathcal{C}} \asymp \ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_\circ \leqslant \ell_\partial,$$

иерархию пространств однородных квазиморфизмов

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{AC}} \subseteq V_\circ \subseteq V_\partial$$

и иерархию относительных стабильных коммутаторных длин

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}} = \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}} \leqslant \mathrm{scl}_\circ \leqslant \mathrm{scl}_\partial.$$

Эта трёхуровневая система составляет основу дальнейшего исследования; в частности, она играет ключевую роль при обосновании порогового принципа для пар «трёхмерное многообразие — зацепление», а также при получении признаков качественных свойств и нижних оценок сложности в терминах квазиморфизмов группы классов отображений.

Цель и задачи диссертации

Цель диссертационной работы — разработать аппарат, связывающий асимптотические числа переноса изометрических действий

[19] *Korkmaz M.*, *Papadopoulos A.* On the arc and curve complex of a surface // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2010. May. Vol. 148, no. 3. P. 473–483.

[20] Первое сравнение имеет вид $\ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_{\mathcal{C}} \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{AC}}$.

с однородными квазиморфизмами посредством относительной стабильной коммутаторной длины, и применить его для выявления качественных и количественных связей между динамикой классов отображений поверхностей и геометрией и топологией ассоциированных с ними трёхмерных объектов, а в модельном случае групп кос — для решения конкретных вопросов теории узлов.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи.

1. Развить понятие стабильной коммутаторной длины scl_X, отвечающей изометрическому действию $G \curvearrowright X$, исследовать его основные свойства и установить условия, при которых выполняется сравнение $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$, а также условия, при которых выполняется неравенство $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$.

2. Исследовать трёхуровневую систему действий группы классов отображений, установить взаимосвязи соответствующих чисел переноса, пространств квазиморфизмов и стабильных коммутаторных длин, а также получить эффективные[21] константы сравнения функций scl_X и ℓ_X на различных уровнях этой системы.

3. Охарактеризовать, как числа переноса, липшицевы квазиморфизмы[22] и стабильные коммутаторные длины на трёх уровнях системы зависят от динамического типа класса отображений и его разложения Нильсена–Тёрстона.

4. Установить взаимосвязь чисел переноса трёх уровней со свойствами и характеристиками пар «трёхмерное многообразие — зацепление»; получить пороговые признаки этих свойств, а также явные оценки геометрической и топологической сложности, в том числе гиперболического объёма.

5. Детализировать полученные признаки и оценки для модельного случая проколотого диска, а также исследовать связь чисел переноса с классическими свойствами и характеристиками

[21] Под *эффективной* константой сравнения понимается константа, допускающая эффективно вычислимую верхнюю оценку.

[22] Квазиморфизм f группы G называется липшицевым относительно асимптотического числа переноса действия $G \curvearrowright X$, если $|f| \lesssim \ell_X$.

зацеплений в трёхмерной сфере, такими как род Зейферта и число перекрёстков.

6. Исследовать трёхуровневую иерархию однородных квазиморфизмов группы кос, выявить связанные с ней структурные разложения и описать эффективно вычислимые квазиморфизмы, липшицевы относительно чисел переноса трёх уровней.

7. Применить разработанный аппарат к задачам теории узлов: исследовать гипотезы Бигелоу о распознавании нетривиальности замыканий кос и построить семейства узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и чьи геометрические и топологические характеристики не ограничены.

Научная новизна

Все ключевые результаты диссертационной работы являются новыми.

Центральным результатом диссертации является разработка метода, позволяющего использовать однородные квазиморфизмы для получения признаков качественных свойств и нижних оценок динамических характеристик классов отображений, а также геометрических и топологических характеристик пар «трёхмерное многообразие — зацепление».

К ключевым новым результатам диссертации относятся, в частности, следующие.

1. Выявлены ранее неизвестные соотношения, связывающие асимптотические числа переноса изометрических действий с относительной стабильной коммутаторной длиной. Например, установлено достаточное условие сравнения $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$ для действий на графах и получены эффективные константы сравнения для трёхуровневой системы действий группы классов отображений.

2. Получены новые признаки гиперболичности пар «трёхмерное многообразие — зацепление», формулирующиеся в терминах однородных квазиморфизмов групп классов отображений.

3. Впервые получены явные нижние оценки гиперболического объёма дополнений зацеплений в трёхмерных многообразиях, формулирующиеся в терминах значений квазиморфизмов групп классов отображений.

4. Получены новые явные нижние оценки рода Зейферта и числа перекрёстков зацеплений в трёхмерной сфере, формулирующиеся в терминах значений квазиморфизмов групп кос.

5. Впервые описаны бесконечные семейства эффективно вычислимых квазиморфизмов групп кос, дающие нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов дополнений зацеплений в трёхмерной сфере.

6. Разрешены оставшиеся гипотезы Бигелоу: опровергнута гипотеза (C) и доказана (в усиленном виде) гипотеза (C′).

7. Впервые построены семейства гиперболических нерасслоённых узлов в трёхмерной сфере, которые неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного, модулем Александера, функцией сигнатуры Левина–Тристрама и чьи гиперболический объём, срезанный род, род Зейферта и число развязывания не ограничены.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа носит теоретический характер. Разработанный в диссертации аппарат может быть использован специалистами в теории узлов и теории трёхмерных многообразий. Результаты диссертации могут применяться, в частности, для выявления новых свойств известных квазиморфизмов.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используются методы геометрической теории групп, теории групп классов отображений, теории квазиморфизмов, гиперболической геометрии, маломерной топологии, теории кос. В её основе лежит схема, связывающая свойства классов отображений и трёхмерных многообразий с асимптотическими числами переноса изометрических действий, а асимптотические числа

переноса — с относительной стабильной коммутаторной длиной и однородными квазиморфизмами.

При исследовании понятия стабильной коммутаторной длины, отвечающей изометрическому действию, используются теорема двойственности Бавара, связанные с ней результаты Л. Чена и Н. Хойера, а также конструкции и теоремы Д. Эпштейна, М. Бествины, К. Бромберга и К. Фудживары.

Исследование взаимосвязи асимптотических чисел переноса трёх уровней с динамикой классов отображений опирается на теорию, развитую Х. Мазуром и Я. Мински. При анализе соотношений между первыми двумя уровнями системы применяется аппарат коэффициентов дробного скручивания Дена, развитый А. Малютиным.

При исследовании соотношений между свойствами и характеристиками трёхмерных многообразий, расслаивающихся над окружностью, и асимптотическими числами переноса применяются результаты Д. Футера, С. Шлеймера[23] и М. Шмалиана[24]. При распространении этих соотношений на пары «многообразие — зацепление» используются инструменты, восходящие к 2π-теореме М. Громова и У. Тёрстона о гиперболической хирургии Дена, в том числе результаты, полученные Д. Футером, Э. Калфагианни и Дж. Парсел[25].

В модельном случае проколотого диска применяется теория, развитая Дж. Бирман и У. Менэско[26]; часть доказательств следует схеме рассуждений, описанной в работах А. Малютина и Т. Ито. В общем случае также применяются результаты теории, развитой Т. Ито и К. Кавамуро.

Построения эффективно вычислимых квазиморфизмов групп кос, липшицевых относительно чисел переноса, основаны на резуль-

[23] *Futer D.*, *Schleimer S.* Cusp geometry of fibered 3-manifolds // American Journal of Mathematics. 2014. Apr. Vol. 136, no. 2. P. 309–356.

[24] *Schmalian M.* Cusp shape and fractional Dehn twists of fibred hyperbolic 3-manifolds // Transactions of the American Mathematical Society. 2026. Feb. Vol. 379, no. 6. P. 4479–4507.

[25] *Futer D.*, *Kalfagianni E.*, *Purcell J. S.* Dehn filling, volume, and the Jones polynomial // Journal of Differential Geometry. 2008. Mar. Vol. 78, no. 3. P. 429–464.

[26] *LaFountain D.*, *Menasco W. W.* Braid Foliations in Low-Dimensional Topology. Vol. 185. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 10/2017. (Graduate Studies in Mathematics).

татах А. Малютина, И. Дынникова и В. Шастина[27] об операторах и проекторах пространств квазиморфизмов, а также результатах Ж.-М. Гамбаду и Э. Жиса[28] о сигнатурах Левина–Тристрама.

При исследовании гипотез С. Бигелоу применяется теория действий групп на пространствах, гиперболических по Громову. При построении семейств узлов, неотличимых заданными инвариантами, используются результаты Т. Стэнфорда[29], С. Бигелоу, Т. Ито[30].

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, заключаются в следующем.

1. В модельном случае проколотого диска введены иерархии асимптотических чисел переноса, однородных квазиморфизмов и относительных стабильных коммутаторных длин, отвечающие трёхуровневой системе действий, и получены явные равномерные константы сравнения чисел переноса и стабильных коммутаторных длин на первых двух[31] уровнях этой системы.

2. Доказано, что значение асимптотического числа переноса первого уровня положительно в том и только в том случае, если внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона косы является нетривиальной.

3. В терминах асимптотических чисел переноса, однородных квазиморфизмов и относительных стабильных коммутаторных длин трёх уровней установлены признаки простоты и гиперболичности зацепления, представленного в виде замыкания

[27] *Dynnikov I. A.*, *Shastin V. A.* On independence of some pseudocharacters on braid groups // St. Petersburg Mathematical Journal. 2013. Sept. Vol. 24, no. 6. P. 863–876.

[28] *Gambaudo J.-M.*, *Ghys É.* Braids and signatures // Bulletin de la Société Mathématique de France. 2005. Vol. 133, no. 4. P. 541–579.

[29] *Stanford T.* Braid commutators and Vassiliev invariants // Pacific Journal of Mathematics. 1996. May. Vol. 174, no. 1. P. 269–276.

[30] *Ito T.* Ordering of groups as a tool to understand random 3-manifolds and knots // Research Institute for Mathematical Sciences. 2015. Aug. Vol. 1960. P. 93–100. (Intelligence of Low-dimensional Topology). HDL: 2433/224110.

[31] Первый уровень — уровень графа $\mathcal{A}_\partial$; второй — уровень графа $\mathcal{A}_\partial^\circ$; третий — уровень графа $\mathcal{C}$.

косы, а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и единственности минимального представления с точностью до сопряжения.

4. В тех же терминах получены явные нижние оценки рода Зейферта и числа перекрёстков замыкания косы, а также гиперболического и симплициального объёмов его дополнения.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена строгими математическими доказательствами, приведёнными в полном объёме в тексте работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. **06/24** *Международная конференция «Advances in Homotopy Theory VI», Пекин, Китай*; «Mixing braids, automorphisms, simplicial methods, and homotopy groups of spheres»

2. **08/24** *Конференция «IV Конференция математических центров России», Санкт-Петербург, Россия*; «Коэффициенты дробных скручиваний Дена кос на поверхностях»

3. **09/24** *Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2024», Новосибирск, Россия*; «Об адекватных узлах и многочлене HOMFLY-PT»

4. **09/24** *Международная конференция «10th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics», Сочи, Россия*; «Positive braids and the HOMFLY-PT polynomial»

5. **10/24** *Семинар «Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова», Санкт-Петербург, Россия*; «Центры групп кос поверхностей и точная последовательность Бирман»

6. **07/25** *Международная конференция «The 11th Sino-Russian Conference on Knot Theory and Related Topics», Сучжоу, Китай*; «Local certificates in knotspace geometry»

7. **10/25** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Реконструкция узлов по псевдохарактерам групп кос»

8. **11/25** *Международная конференция «Маломерная топология — 2025», Санкт-Петербург, Россия*; «Универсальность псевдохарактеров кос в теории узлов»

9. **01/26** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Ограниченные когомологии групп кос и гиперболический объём зацеплений»

10. **02/26** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Ограниченные когомологии и динамика групп классов отображений поверхностей»

11. **02/26** *Семинар «Коллоквиум факультета математики и компьютерных наук СПбГУ», Санкт-Петербург, Россия*; «Когда динамика и геометрия совпадают: косы и узлы в программе Тёрстона»

12. **04/26** *Семинар «Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова», Санкт-Петербург, Россия*; «Динамика кос, ограниченные когомологии и геометрия узлов»

13. **04/26** *Семинар «Геометрия, топология и математическая физика», Москва, Россия*; «Динамика кос, ограниченные когомологии и геометрия узлов»

14. **06/26** *Международная конференция «12-я российско-китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам», Сочи, Россия*; «Braid dynamics as an effective complexity theory for knots and links»

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав, заключения, списка основных работ автора по теме диссертации и списка литературы. Текст диссертации изложен на 311 страницах. Список литературы включает 314 наименований.

В главах 1–2 вводятся топологические, динамические и геометрические конструкции, используемые в дальнейшем, и рассматривается основной модельный случай проколотого диска, отвечающий группе кос. В главах 3–5 развивается аппарат чисел переноса, квазиморфизмов и стабильной коммутаторной длины. В главе 6 этот аппарат применяется к трёхуровневой системе действий группы классов отображений. В главах 7–9 исследуется пороговый принцип для чисел переноса трёх уровней: устанавливаются признаки качественных свойств и оценки численных характеристик классов отображений (глава 7) и пар «многообразие — зацепление» (главы 8 и 9). В главе 10 исследуются пространства липшицевых квазиморфизмов групп кос и связанные с ними структурные разложения. В главе 11 полученные результаты применяются к задачам трёхмерной геометрии и топологии.

Приведём содержание работы по главам.

Глава 1. Классы отображений поверхностей: динамика и геометрические конструкции

Глава посвящена топологии поверхностей, динамике классов отображений, а также геометрии и топологии связанных с ними трёхмерных многообразий.

В разделе 1.1 фиксируются соглашения о поверхностях, дугах и кривых. Вводятся комбинаторные графы, связанные с поверхностью S, основными из которых являются графы

$$\mathcal{A}_\partial(S), \qquad \mathcal{A}^\circ_\partial(S), \qquad \mathcal{C}(S), \qquad \mathcal{AC}(S)$$

закреплённых граничных дуг, скользящих граничных дуг, кривых, дуг и кривых.

В разделе 1.2 рассматриваются качественные свойства и численные характеристики классов отображений поверхностей. Вводится группа классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ и рассматриваются её дей-

ствия на графах, отвечающих дугам и кривым. Приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории Нильсена–Тёрстона; в частности, рассматриваются приводимые, периодические и псевдоаносовские типы динамики, вводится понятие расщепимости. Описывается разложение Нильсена–Тёрстона и выделяется компонента разложения, отвечающая заданной компоненте края ∂, что позволяет связать с каждым классом отображений φ определённый класс φ_{ext}. На основе этого вводятся различные типы ахиральности классов отображений: ахиральность (A)[32], внешняя ахиральность (BA), ахиральность после стягивания края (AC) и внешняя ахиральность после стягивания края (BAC)[33]. Также приводятся сведения о топологической энтропии и ключевой для дальнейшего изложения характеристике — коэффициенте дробного скручивания Дена:

$$\omega_\partial \colon \mathrm{Mod}(S) \to \mathbb{R}.$$

Раздел 1.3 посвящён трёхмерным конструкциям: с классом отображений φ связываются тор отображения T_φ и, для поверхности с единственной компонентой края, замкнутое многообразие, зацепление и его дополнение:

$$Y_\varphi, \qquad L_\varphi \subset Y_\varphi, \qquad M_\varphi := Y_\varphi \backslash L_\varphi.$$

Приводятся сведения о вложенных существенных поверхностях, симплициальном объёме $\|M\|$, введённом М. Громовым, а также гиперболических многообразиях и каспах. Формулируются результаты Д. Футера, Э. Калфагианни и Дж. Парсел о заполнениях Дена, а также результаты У. Тёрстона, Т. Ито и К. Кавамуро, устанавливающие соответствия между динамическим типом класса отображений и геометрическими типами отвечающих ему трёхмерных объектов.

[32] Элемент ахирален, если некоторая его ненулевая степень сопряжена со своей обратной; в противном случае он называется хиральным.

[33] Внешняя ахиральность отвечает ахиральности внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона, а ахиральность после стягивания края отвечает ахиральности образа при гомоморфизме стягивания компонент края в отдельные проколы.

Глава 2. Динамика кос и топология их замыканий

Глава посвящена модельному случаю проколотого диска

$$S = D^2_n, \qquad B_n \cong \mathrm{Mod}(D^2_n),$$

при котором косе φ отвечает её замыкание в трёхмерной сфере:

$$L_\varphi \subset S^3.$$

Раздел 2.1 является вводным, в нём описываются основные качественные свойства зацеплений, а также ряд используемых в дальнейшем мер сложности, таких как род Зейферта, срезанный род и число перекрёстков. Приводятся сведения об инвариантах Васильева–Гусарова, модуле Александера, сигнатурах Левина–Тристрама, гомологиях Хегора–Флоера и Хованова.

В разделе 2.2 приводятся сведения и конструкции, связанные с группами кос. Описываются две модели группы кос: алгебраическая, основанная на образующих Артина и Бирман–Ко–Ли, и динамическая, в терминах классов отображений проколотого диска.

В разделе 2.3 рассматриваются свойства и характеристики косы, связанные с её разложением Нильсена–Тёрстона. Описываются процедуры раздутия проколов и стягивания дисков в проколы, вводятся внешняя φ_{ext} и трубчатая φ_{tub} части косы φ. Также исследуются различные формы свойства ахиральности кос и устанавливается их алгоритмическая распознаваемость.

В разделе 2.4 рассматривается конструкция замыкания косы, приводятся результаты Т. Стэнфорда и Дж. Бирман о связи алгебраических свойств кос с инвариантами их замыканий, вводится ряд свойств кос, связанных со свойствами их замыканий. Также приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории, развитой Дж. Бирман и У. Менэско. Эти сведения в дальнейшем применяются для получения пороговых признаков качественных свойств зацеплений в трёхмерной сфере.

В разделе 2.5 рассматривается закрученность — коэффициент дробного скручивания Дена на группе кос:

$$\omega_n \colon B_n \to \mathbb{R}.$$

Приводятся результаты А. Малютина, Н. Нецветаева, П. Феллера,

Д. Хаббард и Т. Ито о пороговых признаках качественных свойств замыканий кос, результаты Т. Ито, П. Феллера, М. Хеддена и Т. Марка о нижних оценках топологических и алгебраических характеристик, а также описывается связь закрученности с динамическим типом косы. В качестве иллюстрации устанавливается, что закрученность обращается в нуль на альтернированных косах, что показывает ограничения этого функционала и мотивирует переход к более общему аппарату, развиваемому в главах 3–5.

Глава 3. Асимптотическое число переноса изометрического действия

Глава посвящена действиям групп на метрических пространствах: с каждым изометрическим действием группы G на метрическом пространстве X связывается асимптотическое число переноса

$$\ell_X : G \to [0, +\infty)$$

и рассматриваются его применения в динамике, геометрии и топологии.

В разделе 3.1 фиксируются соглашения о метрических пространствах и их изометриях, устанавливаются основные свойства чисел переноса, вводятся локсодромические элементы. Также описываются результаты Х. Мазура, Я. Мински и А. Расмуссена.

Раздел 3.2 посвящён сравнению различных действий. Описывается поведение чисел переноса при эквивариантных квазиизометрических вложениях. Полученные утверждения применяются к действиям групп на себе левыми сдвигами и естественным отображениям основных графов, отвечающих дугам и кривым.

В разделе 3.3 приводятся результаты Дж. Брока, Д. Футера, С. Шлеймера и других авторов, связывающие числа переноса действий группы классов отображений с динамикой, геометрией и топологией. На их основе получаются признаки качественных свойств и оценки численных характеристик.

Раздел 3.4 посвящён действиям на пространствах, гиперболических по Громову. Рассматриваются индуцированные действия локсодромических элементов на границе и замыкании Громова; в частности, рассматривается случай действия группы классов отображений на графе кривых. Приводятся необходимые для дальнейшего

изложения сведения о предельных множествах и действиях общего типа. Описываются условия слабой и сверхслабой вполне разрывности, введённые М. Бествиной, К. Бромбергом и К. Фудживарой и используемые в главах 4–5 для построения квазиморфизмов и распознавания положительности стабильной коммутаторной длины. Также описывается связь между ахиральностью локсодромического элемента и ахиральностью его действия на границе Громова.

Глава 4. Квазиморфизмы и числа переноса

Глава посвящена однородным квазиморфизмам

$$f\colon G \to \mathbb{R}$$

и их применению к получению нижних оценок асимптотических чисел переноса подходящих действий $G \curvearrowright X$.

В разделе 4.1 описываются основные свойства однородных квазиморфизмов. Также описывается связь между пространством однородных квазиморфизмов и пространством вторых ограниченных когомологий группы, используемая в главе 10 для получения динамической и геометрической интерпретаций ограниченных коциклов группы кос.

В разделе 4.2 рассматриваются две основные конструкции квазиморфизмов. Первая связана с действиями групп на прямой и окружности, восходит к числу вращения Пуанкаре и приводит, в частности, к коэффициентам дробного скручивания Дена. Вторая основана на действиях на гиперболических пространствах и включает так называемые считающие квазиморфизмы, восходящие к конструкции Р. Брукса и обобщённые Д. Эпштейном и К. Фудживарой, а также квазиморфизмы де Рама, предложенные Ж. Баржем и Э. Жисом.

В разделе 4.3 исследуются условия липшицевости квазиморфизмов относительно чисел переноса изометрических действий группы. Для основных рассматриваемых конструкций и подходящих действий устанавливаются сравнения

$$|f(g)| \lesssim \ell_X(g)$$

с эффективными константами. На основе этих сравнений в следующей главе формулируется общая схема, связывающая квазиморфизмы с числами переноса посредством относительной стабильной коммутаторной длины.

Глава 5. Стабильная коммутаторная длина изометрического действия

Глава является ключевой — в ней развивается понятие стабильной коммутаторной длины изометрического действия.

В разделе 5.1 приводятся алгебраическое, топологическое и функционально-аналитическое описания классической стабильной коммутаторной длины scl на группе G.

В разделе 5.2 рассматривается формализованное Л. Ченом понятие относительной стабильной коммутаторной длины scl_A, где $A \subseteq G$. В частности, описываются условия конечности и достижимости соответствующего супремума, вводятся экстремальные квазиморфизмы.

В разделе 5.3 понятие относительной стабильной коммутаторной длины применяется к множеству нелоксодромических элементов заданного действия $G \curvearrowright X$: вводится пространство V_X и функция

$$\mathrm{scl}_X : G \to [0, +\infty].$$

Устанавливаются основные свойства этой функции и исследуются условия её положительности. Показывается, что для слабо вполне разрывных действий на гиперболических графах условие $\mathrm{scl}_X(g) > 0$ эквивалентно тому, что элемент g является локсодромическим и хиральным. Также вводятся различные формы сравнимости функции scl_X с асимптотическим числом переноса ℓ_X — слабая, сильная, сверхсильная — и описываются их следствия.

В разделе 5.4 устанавливаются необходимые и достаточные условия выполнения свойств сравнения для действий на графах. В частности, доказывается следующая теорема, дающая признак существования некоторой константы сравнения, а также приводятся её уточнения, дающие эффективные константы сравнения.

Теорема А. Пусть группа G действует на связном графе X. Ес-

ли это действие кокомпактно[34] и множество нелоксодромических элементов порождает группу G, то функция scl_X принимает лишь конечные значения и выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X. \qquad \square$$

В разделе 5.5 описывается общая схема дальнейшего применения стабильной коммутаторной длины действия, включающая построение систем действий, сравнение функций scl_X и ℓ_X, интерпретацию их положительности и построение эффективно вычислимых липшицевых квазиморфизмов. Структура глав 6–11 во многом подчинена этой схеме.

Глава 6. Трёхуровневая система действий группы классов отображений

Глава посвящена центральному объекту исследования диссертации — трёхуровневой системе графов

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\partial^\circ \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C}$$

с действиями группы классов отображений и естественными эквивариантными грубо липшицевыми отображениями между ними. В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема B. Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной[35] поверхности S с единственной компонентой края ∂, если S отлична от тора с дырой[36], то выполняются неравенства

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}\ell_\partial(\varphi), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}\ell_\circ(\varphi);$$

[34] Мы называем действие группы G на связном комбинаторном графе X *кокомпактным*, если пространство орбит $|X|/G$ индуцированного действия этой группы на геометрической реализации $|X|$ является компактным; эквивалентно, число орбит рёбер является конечным.

[35] Поверхность называется *исключительной*, если её род равен нулю и суммарное число проколов и компонент края не превосходит 3.

[36] Случай тора с дырой сводится к случаю диска с тремя проколами.

если $S = D_n^2$ — проколотый диск, то выполняется неравенство

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{C}}(\varphi). \qquad \square$$

В разделе 6.1 рассматривается первый уровень системы — уровень графа $\mathcal{A}_\partial$. Исследуется пространство V_∂, его элементы и функции ℓ_∂ и scl_∂. Устанавливается сравнимость, с точностью до мультипликативной константы, чисел переноса класса отображений и его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона:

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \ell_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Также находится явная равномерная[37] оптимальная константа сравнения числа переноса и стабильной коммутаторной длины.

В разделе 6.2 проводится аналогичное исследование для второго уровня системы — уровня графа $\mathcal{A}_\partial^\circ$. В частности, доказывается сравнение

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

В разделе 6.3 показывается, что в определённом смысле различие между первыми двумя уровнями описывается коэффициентом дробного скручивания Дена ω_∂: доказываются разложение и сравнения

$$V_\partial = V_\circ \oplus \langle \omega_\partial \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad \ell_\partial \asymp \ell_\circ + |\omega_\partial|, \qquad \mathrm{scl}_\partial \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_\partial|.$$

В разделе 6.4 рассматривается третий уровень системы, отвечающий графу $\mathcal{C}$. Исследуется пространство $V_{\mathcal{C}}$ и функции $\ell_{\mathcal{C}}$ и $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}$. В модельном случае проколотого диска устанавливается сравнение $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}} \lesssim \ell_{\mathcal{C}}$ с равномерной константой. Приводятся примеры, показывающие, что щель в этом сравнении может быть сколь угодно большой.

Глава 7. Числа переноса и стабильные коммутаторные длины в динамике классов отображений

Глава посвящена изучению взаимосвязи асимптотических чисел переноса и стабильных коммутаторных длин трёх уровней с

[37] Константа называется *равномерной*, если она не зависит от исходной поверхности.

динамикой классов отображений. В ней устанавливаются характеризации положительности этих функций в терминах разложения Нильсена–Тёрстона; это даёт пороговые признаки качественных свойств классов отображений.

В разделе 7.1 установлено необходимое и достаточное условие положительности числа переноса ℓ_∂. В следующей теореме соответствующий критерий объединён с результатами А. Расмуссена[38], Х. Мазура и Я. Мински.

Теорема С. Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ выполняются следующие утверждения:

1. условие $\ell_\partial(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ_{ext} является нетривиальным;

2. условие $\ell_\circ(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ_{ext} является псевдоаносовским;

3. условие $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является псевдоаносовским. □

Тем самым показано, что число переноса первого уровня ℓ_∂ позволяет распознать нетривиальность внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона; переход к числу переноса второго уровня $\ell_\circ$ позволяет исключить из рассмотрения периодическую динамику; число переноса третьего уровня $\ell_{\mathcal{C}}$ позволяет дополнительно исключить приводимую динамику и сосредоточиться на псевдоаносовской.

В разделе 7.2 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функций scl_∂ и $\mathrm{scl}_\circ$. Вместе с тем рассматриваются классы отображений, внешне ахиральные после стягивания края, и доказывается, что коэффициент дробного скручивания Дена является V_∂-экстремальным для каждого такого класса. Кроме того, приводятся примеры, показывающие, что стабильные коммутаторные длины класса отображений и его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона в общем случае не срав-

[38] *Rasmussen A. J.* WWPD elements of big mapping class groups // Groups, Geometry, and Dynamics. 2021. July. Vol. 15, no. 3. P. 825–848.

нимы с точностью до мультипликативной константы:

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \not\asymp \mathrm{scl}_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) \not\asymp \mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

В разделе 7.3 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функции $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}$. В заключение устанавливается следующий результат.

Теорема D. Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ выполняются следующие утверждения:

1. условие $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является внешне хиральным;
2. условие $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является внешне хиральным после стягивания края;
3. условие $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является хиральным после стягивания края и псевдоаносовским. □

Это показывает, что за исключением элементов, обладающих свойством ахиральности соответствующего типа, стабильные коммутаторные длины трёх уровней не равны нулю в тех же случаях, в которых не равны нулю соответствующие числа переноса.

Глава 8. Числа переноса в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление»

Глава посвящена пороговым признакам и нижним оценкам геометрической и топологической сложности пар «многообразие — зацепление», выраженным через асимптотические числа переноса трёх уровней.

В разделе 8.1 приводятся результаты Д. Футера, С. Шлеймера и М. Шмалиана, описывающие взаимосвязь чисел переноса с геометрией каспа тора отображения T_φ, отвечающего компоненте края ∂. Из них выводятся сравнения с явными константами

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C), \qquad \ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C) + |\mathrm{skew}(\partial C)|,$$

где символы $\mathrm{height}(\partial C)$ и $\mathrm{skew}(\partial C)$ обозначают соответственно высоту и горизонтальное смещение фундаментального параллелограм-

ма евклидовой границы ∂C максимальной орисферической окрестности C рассматриваемого каспа.

В разделе 8.2 из этих соотношений выводятся сравнения с явными константами

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C), \qquad \ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C) + |\omega_\partial(\varphi)|,$$

а также устанавливаются пороговые признаки гиперболичности многообразия M_φ. Кроме того, при аналогичных пороговых условиях устанавливаются соответствия между геометрическим типом этого многообразия и динамическим типом класса отображений φ; в частности, доказывается следующая теорема.

Теорема E. Пусть для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ выполняется неравенство

$$\ell_\partial(\varphi) > 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4 + 1.$$

Тогда:

1. многообразие M_φ является зейфертовым в том и только в том случае, если класс φ является периодическим;

2. многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским;

3. многообразие M_φ содержит существенный тор в том и только в том случае, если класс φ является приводимым. □

В разделе 8.3 выводятся явные нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов, а также топологической энтропии:

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{vol}(M_\varphi) + 1, \qquad \ell_\circ(\varphi) \lesssim \|M_\varphi\| + 1, \qquad \ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{ent}(\varphi).$$

В частности, доказывается следующая теорема.

Теорема F. Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂, если многообразие M_φ является гиперболическим, то выполняется

неравенство

$$\operatorname{vol}(M_\varphi) \geqslant \frac{1}{900}\left(\frac{\ell_\circ(\varphi)}{|\chi(S)|^4} - 2144\,\pi\right). \qquad \square$$

Глава 9. Числа переноса в геометрии и топологии замыканий кос

Глава посвящена детализации ряда результатов предыдущей главы для модельного случая проколотого диска. В этом случае основой подхода к получению пороговых признаков качественных свойств и нижних оценок топологических характеристик служит теория, развитая Дж. Бирман и У. Менэско. Эта теория позволяет связать с поверхностью, специальным образом расположенной в дополнении замыкания косы, однопараметрическое семейство дуг и кривых в проколотом диске; в результате удаётся получить существенно меньшие пороговые значения, чем при использовании метода из главы 8.

В разделе 9.1 устанавливаются верхние оценки чисел переноса и стабильных коммутаторных длин в терминах комбинаторной сложности выражений, задающих косы.

В разделе 9.2 эти оценки совмещаются с теорией Бирман–Менэско. В результате для зацепления L_φ, представленного косой φ, выводятся признаки нетривиальности, нерасщепимости и простоты, а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и признаки единственности минимального представления с точностью до сопряжения.

В разделе 9.3 с помощью теории Бирман–Менэско устанавливаются нижние оценки рода существенных поверхностей в дополнении $S^3\backslash L_\varphi$. Это приводит к оценкам эйлеровой характеристики поверхностей Зейферта и числа перекрёстков зацепления L_φ:

$$\ell_\partial(\varphi) \lesssim |\chi_3(L_\varphi)| + 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \lesssim \operatorname{cr}(L_\varphi) + 1.$$

В разделе 9.4 на основе предыдущего анализа устанавливается связь между существенными торами в дополнении $S^3\backslash L_\varphi$ и существенными мультикривыми, инвариантными при действии косы φ. Отсюда выводится следующее соответствие между динамическим типом косы и геометрическим типом её замыкания.

Теорема G. Пусть замыкание $L_\varphi \subset S^3$ косы $\varphi \in B_n$ является узлом и выполняется неравенство $\ell_\partial(\varphi) > 4$. Тогда:

1. узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической;
2. узел L_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если коса φ является псевдоаносовской;
3. узел L_φ является сателлитным в том и только в том случае, если коса φ является приводимой. □

В частности, это даёт признаки гиперболичности узлов, имеющие малую равномерную пороговую константу.

Глава 10. Иерархия квазиморфизмов группы кос

В главе исследуются пространства липшицевых квазиморфизмов трёх уровней иерархии

$$V_\mathcal{C} \subseteq V_\circ \subseteq V_\partial \subseteq Q(\mathrm{Mod}(S))$$

в модельном случае проколотого диска $S = D^2_n$ и описывается систематический источник таких квазиморфизмов.

В разделе 10.1 уточняется описание этих пространств. В частности, доказывается, что пространство липшицевых квазиморфизмов первого уровня совпадает с пространством ядерных квазиморфизмов, введённым А. Малютиным:

$$V_\partial = Q^\partial_n.$$

Устанавливается, что значения липшицевых квазиморфизмов первых двух уровней на косе и её трубчатой части совпадают; в частности, выводятся соотношения

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \mathrm{scl}_\partial(\varphi_{\mathrm{tub}}), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) = \mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$

На основе результата П. Феллера[39] устанавливается, что для любой косы с ненулевой закрученностью, внешне ахиральной после стяги-

[39] *Feller P.* The slice-Bennequin inequality for the fractional Dehn twist coefficient // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. 2025. Vol. 24, no. 1. P. 273–289.

вания края, закрученность ω_n является единственным с точностью до пропорциональности V_∂-экстремальным квазиморфизмом.

В разделе 10.2 рассматриваются операторы пространств $Q(\mathrm{Mod}(S))$, предложенные А. Малютиным, И. Дынниковым и В. Шастиным, и описываются проекторы

$$Q(\mathrm{Mod}(S)) \to V_\partial \to V_\circ$$

на первые два уровня иерархии. В частности, проектор $V_\partial \to V_\circ$ имеет вид $f \mapsto f_\circ$, где

$$f_\circ(\varphi) := f(\varphi) - f(\Delta_n^2)\,\omega_n(\varphi),$$

причём $D(f_\circ) \leqslant 2D(f)$. В качестве иллюстрации даётся интерпретация классической стабильной коммутаторной длины брунновых кос и трёхнитевых кос: для таких кос устанавливаются сравнения

$$\mathrm{scl} \asymp \mathrm{scl}_\partial \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_n|.$$

Далее приводится разложение пространства Q_n однородных квазиморфизмов группы кос, предложенное А. Малютиным, из которого выводится разложение[40]

$$Q_n \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^\circ \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle \omega_k \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle \exp \rangle_{\mathbb{R}},$$

где $Q_n^\circ := V_\circ$, а также следующее разложение пространства вторых ограниченных когомологий группы кос, которое устанавливает структурную связь между ограниченными коциклами, динамикой кос и геометрией зацеплений.

Теорема Н. Для каждого $n \geqslant 3$ имеется естественный[41] изоморфизм векторных пространств

$$H_b^2(B_n; \mathbb{R}) \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^\circ \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle \omega_k \rangle_{\mathbb{R}}. \qquad \square$$

[40] Здесь exp обозначает гомоморфизм экспоненциальной суммы на группе кос.

[41] Здесь естественность означает, что отображение когомологических классов, индуцированное стандартным вложением $B_{n-1} \to B_n$, отвечает забыванию слагаемого $Q_n^\circ \oplus \langle \omega_n \rangle_{\mathbb{R}}$.

Оставшаяся часть главы посвящена применению этих разложений и проекторов к конкретным семействам эффективно вычислимых квазиморфизмов группы кос.

В разделе 10.3 рассматривается предложенное И. Дынниковым и В. Шастиным семейство так называемых квазиморфизмов типа закрученности, к числу которых относятся полная закрученность после заклеивания края $\mathcal{P}^n$ и внутренняя закрученность $\mathcal{E}^n$. Исследуется структура соответствующих пространств и их проекций на первые два уровня, а также устанавливаются результаты о линейной независимости полученных квазиморфизмов.

В разделе 10.4 рассматривается семейство так называемых квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама, предложенное Ж.-М. Гамбаду и Э. Жисом. Исследуются свойства таких квазиморфизмов и структура соответствующих пространств и их проекций на первые два уровня иерархии. Кроме того, описываются линейные комбинации квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама, липшицевы относительно числа переноса ℓ_∂, и устанавливается нетривиальность их проекций на второй уровень иерархии. В частности, показано, что для любого параметра $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, для которого $0 < \theta^{-1} < n-1$, выполняется неравенство[42]

$$\frac{\sigma_{e^{2\pi\mathrm{i}\theta}} + 2\theta \exp_n - 4(n\theta - 1)\,\omega_n}{2(n-1) + 4(n\theta - 1)} \leqslant \ell_\circ + \frac{1}{2}.$$

Полученные результаты дают нетривиальные примеры эффективно вычислимых липшицевых квазиморфизмов, а также позволяют связать классические конструкции четырёхмерной топологии с динамикой гомеоморфизмов поверхностей и трёхмерной гиперболической геометрией.

Глава 11. Приложения в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление»

Глава посвящена приложениям разработанного аппарата к задачам трёхмерной геометрии и топологии.

В разделе 11.1 исследуются гипотезы С. Бигелоу. Расширяется подход Т. Ито, использованный им для доказательства гипоте-

[42] Здесь $\sigma_{e^{2\pi\mathrm{i}\theta}}$ обозначает сигнатуру Левина–Тристрама с параметром $e^{2\pi\mathrm{i}\theta}$.

зы (E)[43], и с помощью результатов о квазиморфизмах доказывается гипотеза (C)[44] для внешне хиральных кос. Показывается, что на общий случай этот подход не распространяется, и строятся ахиральные контрпримеры к гипотезе (C). Затем с помощью полученных результатов о числах переноса доказывается следующая усиленная форма гипотезы (C′)[45].

Теорема I. Для любого $n \geqslant 2$ и любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует коса $\psi \in B_n$, сопряжённая с косой $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$, для которой замыкание косы $\varphi^m \psi$ является нетривиальным зацеплением при всех достаточно больших целых $m \geqslant 0$. Если, кроме того, число m делится на порядок перестановки, соответствующей косе φ, то это замыкание является нетривиальным узлом. □

Раздел 11.2 посвящён построению узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и чьи геометрические и топологические характеристики не ограничены. Для этого исследуются нормальные подгруппы группы кос и устанавливаются необходимые для дальнейшего изложения свойства сигнатуры Левина–Тристрама кос из ядра представления Бурау. В сочетании с результатами о квазиморфизмах и числах переноса этот анализ приводит к построению требуемых семейств узлов. В частности, доказывается следующая теорема, дающая семейства узлов, неотличимых инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного, модулем Александера и функцией сигнатуры Левина–Тристрама, в то же время имеющих неограниченные основные геометрические и топологические характеристики: гиперболический объём, срезанный род, род Зейферта, число перекрёстков, число развязывания.

Теорема J. Для любого узла $K \subset S^3$, целого числа $n \geqslant 5$, не меньшего индекса косы узла K, и целого числа $d \geqslant 0$ существует последовательность узлов $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, для которой выполняются следующие

[43] Гипотеза (E) гласит, что для любой нетривиальной нормальной подгруппы $N \trianglelefteqslant B_n$ существуют коса $\varphi \in N$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание косы $\varphi\psi$ является нетривиальным узлом.

[44] Гипотеза (C) гласит, что для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует такое целое число $m \in \mathbb{Z}$, что замыкание косы $\varphi^m \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ является нетривиальным узлом.

[45] Гипотеза (C′) гласит, что для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существуют число $m \in \mathbb{Z}$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание косы $\varphi^m \psi$ является нетривиальным узлом.

свойства.

1. Узлы K_i и K неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше d, имеют изоморфные модули Александера, а их функции сигнатуры Левина–Тристрама совпадают.

2. Каждый узел K_i является гиперболическим, жёстким[46], хиральным и нерасслоённым, причём следующие численные характеристики стремятся к бесконечности:

$$\operatorname{vol}(S^3\backslash K_i), \qquad g_4(K_i), \qquad g_3(K_i), \qquad \operatorname{cr}(K_i), \qquad u(K_i).$$

3. Если n нечётно, то размерности над полем $\mathbb{F}_2$ пространств

$$\widetilde{\operatorname{Kh}}(K_i^*), \qquad \widehat{\operatorname{HF}}(\Sigma_2(K_i))$$

гомологий Хованова зеркального образа узла K_i и гомологий Хегора–Флоера двулистного разветвлённого накрытия узла K_i стремятся к бесконечности.

4. Индекс косы каждого узла K_i равен n. □

В разделе 11.3 теоремы сравнения с эффективными и равномерными константами, установленные в главе 6, объединяются с результатами глав 8–9. Это даёт признаки качественных свойств и явные нижние оценки динамических, геометрических и топологических характеристик в терминах однородных квазиморфизмов; в частности,

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim |\chi_3(L_\varphi)| + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \operatorname{cr}(L_\varphi) + 1$$

для всех нетривиальных $f \in V_\partial$ и

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \operatorname{vol}(M_\varphi) + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \|M_\varphi\| + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \operatorname{ent}(\varphi)$$

для всех нетривиальных $f \in V_\circ$.

[46] Мы называем зацепление жёстким, если любые две косы, представляющие это зацепление и имеющие минимальное число нитей, сопряжены в группе кос.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработан метод, позволяющий использовать однородные квазиморфизмы группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S для выявления качественных и количественных соотношений между динамикой классов отображений и геометрией трёхмерных многообразий.

Развито понятие стабильной коммутаторной длины scl_X, отвечающей изометрическому действию $G \curvearrowright X$. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X.$$

Исследована трёхуровневая система действий группы классов отображений

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\partial^\circ \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C}.$$

Установлены взаимосвязи соответствующих чисел переноса, пространств квазиморфизмов и стабильных коммутаторных длин. Получены эффективные константы сравнения на различных уровнях этой системы.

Установлены пороговые признаки качественных свойств и нижние оценки мер сложности, формулирующиеся в терминах асимптотических чисел переноса. В частности, для классов отображений поверхностей получены критерии, выраженные в терминах разложения Нильсена–Тёрстона, а также явные оценки топологической энтропии. Для пар «трёхмерное многообразие — зацепление» получены признаки гиперболичности и явные оценки гиперболического объёма.

В модельном случае проколотого диска эти результаты расширены и уточнены. В частности, получены признаки простоты зацеплений в трёхмерной сфере, а также явные оценки эйлеровой характеристики поверхностей Зейферта и числа перекрёстков. Вместе с тем описаны эффективно вычислимые квазиморфизмы групп кос, липшицевы относительно чисел переноса первых двух уровней.

Разработанный аппарат применён к задачам теории узлов: разрешены оставшиеся гипотезы Бигелоу (C) и (C′) и описаны конструкции, обобщающие результаты С. Лин, Э. Калфагианни, А. Стоимёнова, Д. Силвера и У. Уиттена.

Таким образом, построена единая схема, позволяющая использовать однородные квазиморфизмы для получения признаков качественных свойств и нижних оценок численных характеристик $\Psi(\varphi)$ классов отображений φ и ассоциированных с ними трёхмерных объектов:

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \leqslant 2\,\mathrm{scl}_X(\varphi) \lesssim \ell_X(\varphi) \lesssim \Psi(\varphi).$$

Среди возможных направлений дальнейшего развития предложенного подхода перспективными представляются изучение сравнений между относительной стабильной коммутаторной длиной и асимптотическими числами переноса для других действий, таких как действие группы классов отображений на пространстве Тейхмюллера, описание более широких классов эффективно вычислимых квазиморфизмов, липшицевых относительно асимптотических чисел переноса, и уточнение полученных оценок и пороговых констант.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. I. Alekseev, V. Ionin, and M. Mikhailov. “Action of automorphisms of pure braid groups on homotopy groups of two-sphere”. In: Homology, Homotopy and Applications 28.2 (2026), pp. 155–174.

2. A. Y. Miller, A. V. Malyutin, and I. S. Alekseev. “Infinite midway cliques in the Gordian graph”. In: Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI 549 (2025), pp. 146–160.

3. И. С. Алексеев. «Число перекрёстков (замкнутых) однородных кос». В: Алгебра и анализ 36.5 (2024), с. 86–100.

4. И. С. Алексеев. «Числа переноса и геометрия замкнутых кос». В: Записки научных семинаров ПОМИ 551 (2026), с. 27–47.

5. И. С. Алексеев. «Числа переноса и квазиморфизмы групп кос». В: Записки научных семинаров ПОМИ 551 (2026), с. 5–26.

6. И. С. Алексеев и А. А. Малова. «Сертификация зацепленности кривыми на ручках». В: Записки научных семинаров ПОМИ 549 (2025), с. 26–40.

Подписано в печать 15.10.2026 г.
Тираж 65 экз.
Отпечатано в типографии