ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Алексеева Ильи Сергеевича
«Стабильная коммутаторная длина в динамике классов отображений поверхностей и её приложения в трёхмерной геометрии и топологии»

представленной на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология»

В диссертации представлен ряд новых глубоких результатов, касающихся связей между теорией кос, динамикой классов отображений поверхностей, ограниченными когомологиями и геометрией узлов и зацеплений. Тематика работы находится на пересечении нескольких активно развивающихся областей современной математики: маломерной топологии, геометрической теории групп, теории классов отображений поверхностей, теории узлов и теории квазиморфизмов.

И. С. Алексеевым разработан метод, позволяющий использовать однородные квазиморфизмы группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S для выявления качественных и количественных соотношений между динамикой классов отображений и геометрией трёхмерных многообразий. Первым ключевым элементом этого метода являются признаки качественных свойств и нижние оценки численных характеристик классов отображений и ассоциированных с ними трёхмерных объектов, формулируемые в терминах асимптотических чисел переноса действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графах, вершины которых соответствуют дугам и кривым на поверхности S. Вторым ключевым элементом являются оценки, связывающие асимптотические числа переноса с относительной стабильной коммутаторной длиной scl_X, соответствующей изометрическому действию $G \curvearrowright X$, — разновидностью восходящей к работам Д. Калегари, К. Фудживары и Л. Чена относительной стабильной коммутаторной длины. Эта величина показывает, насколько эффективно степени данного элемента группы могут быть представлены в виде произведения коммутаторов и нелоксодромических элементов.

В основе разработанного в диссертации метода лежит трёхуровневая система действий группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S с выделенной компонентой края, включающая действие на графе закреплённых граничных дуг $\mathcal{A}_\partial(S)$, действие на графе скользящих граничных дуг $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ и действие на графе кривых $\mathcal{C}(S)$. В терминах соответствующих асимптотических чисел переноса ℓ_∂, $\ell_\circ$ и $\ell_\mathcal{C}$ установлены признаки гиперболичности зацеплений в трёхмерных многообразиях и нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов их дополнений, а также нижние оценки топологической энтропии классов отображений. Наряду с этим доказано, что асимптотические числа переноса трёхуровневой системы действий мажорируют с точностью до мультипликативной константы соответствующие относительные стабильные коммутаторные длины scl_∂, $\mathrm{scl}_\circ$ и $\mathrm{scl}_\mathcal{C}$. В сочетании с теоремой двойственности Бавара этот результат даёт нижние оценки асимптотических чисел переноса в терминах значений однородных квазиморфизмов группы $\mathrm{Mod}(S)$, обращающихся в нуль на нелоксодромических элементах соответствующего действия.

Для модельного случая, соответствующего системе действий группы кос на дугах и кривых в проколотом диске, в диссертации получен ряд уточнений этих результатов. Наряду с усилением признаков гиперболичности доказаны признаки простоты зацеплений в трёхмерной сфере, представленных в виде замыкания косы, а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и единственности минимального представления с точностью до сопряжения в группе кос. Вместе с тем установлены нижние оценки рода Зейферта и числа перекрёстков. Эти результаты существенно развивают комплекс идей, изложенных в моих работах и в работах Н. Нецветаева, Дж. Бирман, У. Менэско, Т. Ито, а также позволяют распространить

подход, основанный на так называемом коэффициенте дробного скручивания Дена, на произвольные квазиморфизмы группы кос. В частности, они позволяют использовать для выявления свойств и численных характеристик зацеплений ряд эффективно вычислимых квазиморфизмов, к числу которых относятся описанные в работе И. Дынникова и В. Шастина квазиморфизмы типа закрученности, а также описанные в работах Ж.-М. Гамбаду и Э. Жиса квазиморфизмы сигнатуры Левина–Тристрама. Применительно к сигнатурам Левина–Тристрама полученные результаты связывают классические конструкции четырёхмерной топологии с динамикой гомеоморфизмов поверхностей и трёхмерной гиперболической геометрией.

В качестве приложения разрешены гипотезы С. Бигелоу, остававшиеся открытыми в течение более 20 лет. И. С. Алексеев доказал, что для всякой нетривиальной косы φ можно подобрать косу ψ, замыкающуюся в тривиальный узел, для которой замыкания кос $\varphi^m\psi$ являются нетривиальными для всех достаточно больших m. Это доказывает одну из гипотез Бигелоу и позволяет строить нетривиальные узлы, неотличимые квантовым инвариантом от тривиального узла, на основе нетривиальных элементов из ядра линейного представления группы кос, определяющего этот инвариант. Кроме того, в работе опровергнута гипотеза Бигелоу о том, что в качестве косы ψ можно взять стандартную косу, замыкающуюся в тривиальный узел. Наряду с этим разработанный подход применён к вопросу о том, возможно ли извлечь из инвариантов Васильева–Гусарова и квантовых инвариантов узла оценки его геометрических характеристик, таких как гиперболический объём и срезанный род. Полученные в диссертации относящиеся к этому вопросу утверждения объединяют и усиливают ряд известных результатов Э. Калфагианни, С. Лин, А. Стоимёнова, Д. Силвера, У. Уиттена.

Диссертационная работа И. С. Алексеева представляет собой глубокое, тщательно продуманное исследование фундаментального характера. В ней выстроена единая картина, связывающая большое количество сложных деталей, положений и отношений и дающая новое структурированное видение предмета. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и представляют несомненный интерес для научного сообщества. Доказательства изложены подробно и свидетельствуют о научной зрелости соискателя.

Полагаю, что работа выполнена на высоком научном уровне и полностью соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Рекомендую диссертацию к защите и считаю, что её автор — Алексеев Илья Сергеевич — заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология.

Научный руководитель

заместитель директора по научной работе,
заведующий лабораторией теории представлений и динамических систем
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

д.ф.-м.н., профессор РАН
Малютин Андрей Валерьевич

25 сентября 2026 г.

Подпись: Малютин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Подпись А. В. Малютина заверяю
м. спец. по кадрам
Скрипка Е. Г.
25.09.2026