Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Алексеев Илья Сергеевич

СТАБИЛЬНАЯ КОММУТАТОРНАЯ ДЛИНА В ДИНАМИКЕ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТРЁХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Специальность 1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор РАН
Малютин А. В.

Санкт-Петербург — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **7**

1 Классы отображений поверхностей: динамика и геометрические конструкции **38**

1.1 Поверхности, дуги, кривые и комбинаторные графы 38

1.1.1 Дуги и кривые 39

1.1.2 Графы, отвечающие дугам и кривым 41

1.2 Динамика классов отображений 43

1.2.1 Классификация Нильсена–Тёрстона 46

1.2.2 Разложение Нильсена–Тёрстона и внешняя компонента 48

1.2.3 Типы ахиральности 50

1.2.4 Численные характеристики динамики 53

1.3 Трёхмерные конструкции и геометрические соответствия 55

1.3.1 Торы отображений и открытые книги 56

1.3.2 Гиперболические многообразия и каспы 58

1.3.3 Соответствия между динамическими и геометрическими типами . 60

2 Динамика кос и топология их замыканий **62**

2.1 Зацепления, их меры сложности и инварианты 62

2.1.1 Качественные свойства зацеплений 63

2.1.2 Меры топологической сложности 64

2.1.3 Инварианты зацеплений 64

2.2 Алгебраическая и динамическая модели группы кос 65

2.2.1 Алгебраическая модель 66

2.2.2 Динамическая модель 68

2.3 Разложение Нильсена–Тёрстона и симметрии кос 70

2.3.1 Расщепимость кос: динамическое и алгебраическое описания . . . 70

2.3.2 Внешняя нормальная форма Нильсена–Тёрстона 71

2.3.3 Типы ахиральности 74

2.4 Замыкания кос 78

2.4.1 Минимальность, жёсткость и симметрии 80

2.4.2 Исчисление Бирман–Менэско 81

2.5 Закрученность: динамика кос и топология замыканий 83

2.5.1 Пороговые признаки качественных свойств 83

2.5.2 Оценки численных характеристик замыкания 84

2.5.3 Распознавание динамики и ограничения закрученности 85

3 Асимптотическое число переноса изометрического действия 87
3.1 Асимптотические числа переноса . . . 87
3.1.1 Числа переноса изометрий . . . 88
3.1.2 Локсодромические изометрии . . . 91
3.1.3 Числа переноса действий . . . 92
3.2 Крупномасштабное сравнение действий . . . 93
3.2.1 Крупномасштабные отображения . . . 93
3.2.2 Сравнение чисел переноса . . . 95
3.2.3 Действия групп на себе и искажённые элементы . . . 96
3.2.4 Действия на графах, отвечающих дугам и кривым . . . 97
3.3 Пороговый принцип для чисел переноса: основные примеры . . . 99
3.3.1 Число вращения Пуанкаре . . . 100
3.3.2 Динамика классов отображений . . . 101
3.3.3 Трёхмерная геометрия и топология . . . 102
3.4 Действия на пространствах, гиперболических по Громову . . . 104
3.4.1 Граница Громова и динамика локсодромических элементов . . . 105
3.4.2 Предельные множества и действия общего типа . . . 108
3.4.3 Вполне разрывные действия и их обобщения . . . 110

4 Квазиморфизмы и числа переноса 115
4.1 Квазиморфизмы и ограниченные когомологии . . . 115
4.1.1 Однородные квазиморфизмы . . . 115
4.1.2 Ограниченные когомологии и отображение сравнения . . . 118
4.2 Конструкции квазиморфизмов . . . 120
4.2.1 Квазиморфизмы из одномерной динамики . . . 120
4.2.2 Квазиморфизмы из действий на гиперболических пространствах . 122
4.3 Липшицевы квазиморфизмы . . . 126
4.3.1 Считающие квазиморфизмы и квазиморфизмы де Рама . . . 126
4.3.2 Коэффициенты дробного скручивания Дена . . . 128

5 Стабильная коммутаторная длина изометрического действия 130
5.1 Классическая стабильная коммутаторная длина . . . 131
5.2 Относительная стабильная коммутаторная длина . . . 134
5.3 Стабильная коммутаторная длина действия . . . 141
5.3.1 Конечность и изменение при крупномасштабных отображениях . 142
5.3.2 Положительность стабильной коммутаторной длины . . . 144
5.3.3 Сравнение стабильной коммутаторной длины с числами переноса 147
5.4 Критерии свойств сравнения для действий на графах . . . 149
5.5 Общая схема применения . . . 157

6 Трёхуровневая система действий группы классов отображений 160
6.1 Первый уровень: закреплённые граничные дуги . . . 162
6.1.1 Число переноса первого уровня . . . 162
6.1.2 Стабильная коммутаторная длина первого уровня . . . 167
6.1.3 Оптимальная константа сравнения для первого уровня . . . 169
6.2 Второй уровень: скользящие граничные дуги . . . 174
6.2.1 Число переноса второго уровня . . . 174
6.2.2 Стабильная коммутаторная длина второго уровня . . . 177
6.3 Связь первых двух уровней . . . 178
6.3.1 Числа переноса . . . 178
6.3.2 Пространства квазиморфизмов . . . 179
6.3.3 Стабильные коммутаторные длины . . . 180
6.4 Третий уровень: дуги и кривые . . . 181
6.4.1 Числа переноса третьего уровня . . . 182
6.4.2 Стабильная коммутаторная длина третьего уровня . . . 182
6.4.3 Равномерная константа сравнения для третьего уровня . . . 183

7 Числа переноса и стабильные коммутаторные длины в динамике классов отображений 186
7.1 Положительность чисел переноса трёх уровней . . . 186
7.2 Положительность стабильных коммутаторных длин первых двух уровней 188
7.2.1 Внешняя хиральность после стягивания края . . . 188
7.2.2 Внешняя ахиральность и коэффициент дробного скручивания Дена 191
7.3 Положительность стабильной коммутаторной длины третьего уровня . . 193

8 Числа переноса в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление» 196
8.1 Параметры каспа, отвечающего компоненте края . . . 196
8.2 Пороговые признаки геометрических и топологических свойств . . . 199
8.2.1 Признаки гиперболичности . . . 200
8.2.2 Соответствие между динамическим и геометрическим типами . . 201
8.3 Оценки геометрической и динамической сложности . . . 204
8.3.1 Оценки гиперболического объёма . . . 206
8.3.2 Оценки симплициального объёма . . . 208
8.3.3 Оценки топологической энтропии . . . 209

9 Числа переноса в геометрии и топологии замыканий кос 211
9.1 Оценки чисел переноса и стабильных коммутаторных длин . . . 211
9.1.1 Слова в образующих Артина . . . 212
9.1.2 Слова в образующих Бирман–Ко–Ли . . . 213
9.2 Пороговые признаки простоты и жёсткости . . . 215

9.2.1 Признаки простоты . . . 217
9.2.2 Признаки минимальности и жёсткости . . . 217
9.3 Поверхности в дополнениях и числа переноса . . . 220
9.3.1 Седловые перестройки и число переноса . . . 221
9.3.2 Поверхности Зейферта, род и число перекрёстков . . . 223
9.3.3 Замкнутые существенные поверхности . . . 225
9.4 Динамический тип кос и геометрический тип замыканий . . . 227
9.4.1 От неприводимости к аторичности . . . 227
9.4.2 От аторичности к неприводимости . . . 228
9.4.3 Соответствие между динамическим и геометрическим типами . . . 230

10 Иерархия квазиморфизмов группы кос 233
10.1 Квазиморфизмы трёх уровней . . . 234
10.1.1 Первый уровень: ядерные квазиморфизмы . . . 235
10.1.2 Второй и третий уровни . . . 238
10.2 Проекторы и разложения пространств квазиморфизмов . . . 240
10.2.1 Проекция на первый уровень . . . 242
10.2.2 Разложение по ядерным компонентам . . . 246
10.2.3 Проекция на второй уровень . . . 248
10.2.4 Разложение пространства ограниченных когомологий . . . 251
10.3 Квазиморфизмы типа закрученности . . . 253
10.3.1 Операторы смены края . . . 253
10.3.2 Проекции на первые два уровня . . . 257
10.3.3 Структура пространств квазиморфизмов типа закрученности . . . 259
10.4 Квазиморфизмы типа сигнатуры Левина–Тристрама . . . 261
10.4.1 Структура пространств квазиморфизмов типа сигнатуры . . . 262
10.4.2 Липшицевы квазиморфизмы типа сигнатуры . . . 265
10.4.3 Проекции на первые два уровня . . . 268

11 Приложения в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление» 271
11.1 Гипотезы Бигелоу . . . 271
11.1.1 Квазиморфизмы и внешняя хиральность . . . 272
11.1.2 Ахиральность и контрпримеры к гипотезе (C) . . . 274
11.1.3 Динамические типы и доказательство гипотезы (C′) . . . 276
11.2 Сложность узлов при фиксированных значениях инвариантов . . . 279
11.2.1 Нормальные подгруппы и неразличимость инвариантами . . . 279
11.2.2 Неразличимые узлы неограниченной сложности . . . 281
11.3 Признаки и нижние оценки сложности в терминах квазиморфизмов . . . 284
11.3.1 Пары «трёхмерное многообразие — зацепление» . . . 285
11.3.2 Зацепления в трёхмерной сфере . . . 287

Заключение **290**

Список основных работ автора по теме диссертации **291**

Список литературы **292**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень её разработанности

Область исследований, к которой относится диссертационная работа, находится на стыке теории групп классов отображений поверхностей, геометрической теории групп, теории кос, теории узлов и теории трёхмерных многообразий. Один из центральных вопросов этой области — выяснить, как динамика классов отображений поверхности отражается в геометрии и топологии соответствующих им трёхмерных объектов. При этом интерес представляют как качественные соответствия, так и их количественные уточнения, позволяющие оценивать геометрическую и топологическую сложность в терминах динамических характеристик.

Естественным инструментом для изучения таких соответствий служат действия группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S на геометрических и комбинаторных пространствах, связанных с этой поверхностью[1]. При подходящем выборе пространства качественные свойства класса отображений могут проявляться в характере его действия, а количественные характеристики — в асимптотическом смещении орбит.

На качественном уровне классический пример такого соответствия даёт действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на пространстве Тейхмюллера. Это действие лежит в основе классификации Нильсена–Тёрстона, согласно которой каждый класс отображений, не являющийся ни периодическим, ни приводимым, является псевдоаносовским, то есть сохраняет пару трансверсальных измеримых ламинаций, сжимая одну и растягивая другую. Трёхмерную интерпретацию этой классификации даёт конструкция тора отображения: с каждым классом отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ связано многообразие T_φ, расслаивающееся над окружностью со слоем S и монодромией φ. По теореме У. Тёрстона [299] геометрический тип тора отображения определяется динамическим типом его монодромии: если класс φ — псевдоаносовский, то многообразие T_φ является гиперболическим; если φ — периодический, то T_φ является зейфертовым; если φ — приводимый, то T_φ содержит существенный тор. Таким образом, динамика монодромии непосредственно отражается в геометрии и топологии тора отображения.

Количественное уточнение этого соответствия приводит к рассмотрению численных характеристик монодромии φ, которые можно связать с геометрическими и топологическими мерами сложности многообразия T_φ, такими как гиперболический объём или сложность вложенных существенных поверхностей. К числу таких характеристик относятся асимптотические числа переноса

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \inf_{x\in X} \frac{d(x, \varphi^m(x))}{m},$$

[1]Поверхности предполагаются ориентированными, связными, компактными, возможно, с непустым краем и конечным числом отмеченных точек (проколов) во внутренности. Предполагается, что гомеоморфизмы сохраняют ориентацию поверхности, сохраняют множество отмеченных точек и неподвижны на крае.

возникающие при изометрических действиях группы $\mathrm{Mod}(S)$ на метрических пространствах X, связанных с поверхностью S.

Один из основных результатов такого рода касается действия на пространстве Тейхмюллера, снабжённом метрикой Вейля–Петерсона. Согласно теореме Дж. Брока [73], асимптотическое число переноса псевдоаносовского класса отображений φ сравнимо, с точностью до мультипликативной константы[2], с гиперболическим объёмом тора отображения[3]:

$$\ell_{\mathrm{WP}}(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(T_\varphi).$$

В доказательстве этой теоремы Брок использовал так называемый граф штанов $\mathcal{P}(S)$, введённый У. Тёрстоном и А. Хатчером [161] и служащий дискретной комбинаторной моделью[4] пространства Тейхмюллера [72].

С графом штанов тесно связан другой комбинаторный объект — граф кривых $\mathcal{C}(S)$, введённый У. Харви [160]. Его вершинами являются изотопические классы существенных простых замкнутых кривых на S, а рёбра отвечают парам классов, имеющим непересекающихся представителей[5]. Асимптотическое число переноса в графе кривых $\ell_{\mathcal{C}(S)}$ даёт нижние оценки для таких динамических характеристик, как топологическая энтропия [138] и число неподвижных точек [9, 8]. Оно также связано с геометрическими и топологическими мерами сложности тора отображения: из результатов Брока следует оценка

$$\ell_{\mathcal{C}(S)}(\varphi) \lesssim \mathrm{vol}(T_\varphi),$$

а теоремы Д. Бахмана и С. Шлеймера [14] связывают величину $\ell_{\mathcal{C}(S)}(\varphi)$ со сложностью вложенных существенных поверхностей в T_φ.

Значение графа кривых не ограничивается количественными сравнениями. При исследовании качественных соответствий ключевую роль играет гиперболичность по Громову и связанное с ней описание динамики локсодромических[6] элементов. Согласно теореме Х. Мазура и Я. Мински [242], граф $\mathcal{C}(S)$ является гиперболическим по Громову, причём класс отображений φ действует на нём локсодромически, то есть

$$\ell_{\mathcal{C}(S)}(\varphi) > 0,$$

если и только если φ является псевдоаносовским. Следовательно, положительная нижняя оценка для $\ell_{\mathcal{C}(S)}(\varphi)$ служит признаком псевдоаносовской динамики и, по теореме Тёрстона, гиперболичности тора отображения T_φ.

[2] Здесь константа сравнения зависит только от поверхности S.

[3] Запись $f(x) \lesssim g(x)$ означает, что существует такая константа $c > 0$, что $f(x) \leqslant c \cdot g(x)$ для всех x. Запись $f(x) \asymp g(x)$ означает, что $f(x) \lesssim g(x)$ и $g(x) \lesssim f(x)$.

[4] А именно, согласно теореме Брока, граф штанов любой поверхности без края и отрицательной эйлеровой характеристики эквивариантно квазиизометричен её пространству Тейхмюллера с метрикой Вейля–Петерсона.

[5] Для спорадических поверхностей это определение модифицируется; см. раздел 1.1.2.

[6] Будем говорить, что элемент является локсодромическим (или действует локсодромически), если его асимптотическое число переноса не равно нулю.

Таким образом, действия на графах, связанных с поверхностью, позволяют распознавать динамический тип класса отображений и получать оценки его динамических характеристик, а также геометрических и топологических характеристик соответствующего трёхмерного многообразия. Для различных действий асимптотическое число переноса связано с различными такими свойствами и характеристиками.

Аналогичный подход — использование расстояний в графе кривых для получения признаков качественных свойств и количественных сравнений — применим и за пределами расслоённых многообразий. Классический пример дают разбиения Хегора, представляющие замкнутое трёхмерное многообразие как результат склейки двух тел с ручками по гомеоморфизму их краёв. Развивая идеи Э. Кассона и К. Гордона [86], Дж. Хемпель [165] ввёл так называемое расстояние Хемпеля — расстояние в графе кривых $\mathcal{C}(\Sigma)$ поверхности Хегора Σ между подмножествами, отвечающими меридиональным дискам двух тел с ручками. Он показал, что если расстояние Хемпеля является достаточно большим, то соответствующее многообразие обладает рядом качественных свойств, таких как неприводимость и аторичность.[7] В дальнейшем М. Шарлеманн и М. Томова [280] расширили эти результаты, получив признаки минимальности разбиения по роду и его единственности, а К. Хартсхорн [159], Ф. Йеккель и У. Хаменштедт [155] — нижние оценки рода вложенных существенных поверхностей и гиперболического объёма.

Эти результаты позволяют сформулировать следующий *пороговый принцип*: достаточно большое[8] значение подходящей численной характеристики — расстояния или асимптотического числа переноса — служит признаком определённых качественных свойств соответствующего трёхмерного объекта и даёт нижние оценки геометрических и топологических мер сложности. Возникает вопрос, распространяется ли этот принцип на более общий тип объектов — пары «трёхмерное многообразие — зацепление», задаваемые классами отображений поверхностей с непустым краем и отмеченными точками.

Если поверхность S имеет ровно одну компоненту края, то тор отображения T_φ имеет торический край. Каноническое заполнение Дена тора отображения, отвечающее этой компоненте края, представляет собой замкнутое трёхмерное многообразие Y_φ с разложением в открытую книгу, страницей которой служит поверхность S, а монодромией — класс φ.[9] Эта конструкция универсальна: по теореме Дж. Александера каждое связное замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие допускает разложение в открытую книгу. Более того, отмеченные точки на S, сохраняемые монодромией φ, задают в полученном многообразии узел или зацепление L_φ; согласно теоремам Л. Рудольфа [276], Р. Скоры [287] и П. Сундхейма [296], таким образом можно представить произвольную пару «трёхмерное многообразие — зацепление». Тем самым конструкция открытой кни-

[7] Из теоремы о геометризации следует, что любое замкнутое неприводимое аторическое многообразие является либо гиперболическим, либо зейфертовым.

[8] Под достаточно большим понимается значение, превышающее определённую *пороговую константу*, которая зависит только от поверхности S. В дальнейшем признаки, включающие подобные условия, называются *пороговыми*.

[9] Такое разложение многообразия эквивалентно выбору в нём так называемого расслоённого узла.

ги позволяет поставить аналогичный вопрос о связи динамики классов отображений с трёхмерной геометрией и топологией для значительно более широкого типа объектов: пар (Y_φ, L_φ), а также дополнений $M_\varphi := Y_\varphi \backslash L_\varphi$.

Дополнительная мотивация этой постановки связана со статистическим изучением зацеплений в трёхмерных многообразиях. Для широкого класса случайных блужданий на группе $\mathrm{Mod}(S)$ элементы, встречающиеся вдоль случайной траектории, с вероятностью, стремящейся к единице, являются псевдоаносовскими, а их асимптотические числа переноса в графе кривых растут линейно со временем [225, 226, 16]. В этом смысле динамический режим, в котором применим пороговый принцип, является статистически преобладающим. Пороговые признаки позволяют устанавливать свойства, типичные для пар (Y_φ, L_φ) со случайным φ, а численные сравнения — исследовать асимптотический рост соответствующих мер сложности. Таким образом, рассматриваемые качественные соответствия и количественные сравнения также применимы при исследовании случайных узлов, зацеплений и трёхмерных многообразий [233, 223, 273, 174, 306].

Отдельные связи асимптотических чисел переноса классов отображений с геометрией и топологией соответствующих трёхмерных объектов изучались для многообразий Y_φ в случае поверхностей без отмеченных точек [277, 191, 114, 298, 88], а также для торов отображений T_φ [14, 135, 291, 212, 8, 282][10]. Вместе с тем пороговый принцип для пар (Y_φ, L_φ) до сих пор не получил систематического развития. В ряде основных постановок качественные соответствия и количественные сравнения, аналогичные описанным для торов отображений, либо не сформулированы непосредственно в терминах чисел переноса, либо могут быть получены лишь косвенно из результатов для более специальных динамических характеристик[11]. В связи с этим возникает задача установить такие соответствия и сравнения в явной форме: получить в терминах асимптотических чисел переноса класса φ признаки качественных свойств пары (Y_φ, L_φ) и оценки геометрических и топологических мер сложности дополнения $M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi$.

Для диска с n отмеченными точками эта постановка приводит к конкретным вопросам классической теории узлов. В этом модельном случае группа классов отображений изоморфна группе кос:

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D^2_n),$$

многообразие Y_φ является трёхмерной сферой S^3, а зацепление $L_\varphi \subset S^3$ — замыканием косы φ. Тем самым на примере кос общая проблема связи динамики классов отображений с геометрией и топологией задаваемых ими пар «многообразие — зацепление» сводится к вопросу о том, как динамические характеристики косы проявляются в геометрических и топологических свойствах её замыкания.

Переход к группам кос позволяет выделить два тесно связанных круга задач о за-

[10] Также отметим работы [22, 46, 201, 20, 19, 295, 18] о расслоениях над окружностью.

[11] Речь идёт в первую очередь о так называемом коэффициенте дробного скручивания Дена (см. ниже); подобные результаты получены в работах А. Малютина и Н. Нецветаева [235, 229] и в корпусе работ Т. Ито и К. Кавамуро [171, 172, 180, 182, 183, 184].

цеплениях в трёхмерной сфере, неразличимых заданным набором инвариантов. Первый касается распознавания качественных свойств таких зацеплений, а второй — построения семейств, в которых геометрическая и топологическая сложность не ограничена. Ниже опишем обе постановки и роль динамики кос в их исследовании.

К первому кругу задач относится программа С. Бигелоу [45], посвящённая построению нетривиальных узлов, неотличимых от тривиального заданным квантовым инвариантом, таким как полином Джонса. В основе программы лежит метод переноса неразличимости с уровня кос на уровень их замыканий: если коса φ принадлежит ядру представления группы кос, определяющего данный квантовый инвариант, то для любой косы ψ замыкания кос $\varphi\psi$ и ψ неотличимы этим инвариантом. Аналогичный метод применим в контексте инвариантов В. Васильева и М. Гусарова[12] и использовался Т. Стэнфордом [289][13]. Основная трудность состоит в том, чтобы показать, что полученные замыкания действительно различны.

Для преодоления этой трудности Бигелоу сформулировал ряд гипотез[14], среди которых — сильная «конструктивная гипотеза» (C), её ослабление (C′) и ещё более слабая «гипотеза существования» (E).

Гипотеза (C). Для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует такое целое число $m \in \mathbb{Z}$, что замыкание косы $\varphi^m \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$ является нетривиальным узлом.

Гипотеза (C′). Для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существуют число $m \in \mathbb{Z}$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание косы $\varphi^m \psi$ является нетривиальным узлом.

Гипотеза (E). Для любой нетривиальной нормальной подгруппы $N \trianglelefteqslant B_n$ существуют коса $\varphi \in N$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание косы $\varphi\psi$ является нетривиальным узлом.

Гипотеза (E) была доказана Т. Ито [173] путём распознавания нетривиальности узла по динамическим характеристикам представляющей его косы. Возникает вопрос, можно ли усилить этот подход настолько, чтобы разрешить оставшиеся гипотезы (C) и (C′).

Второй круг задач носит количественный характер и касается вопроса о том, возможно ли извлечь из инвариантов Васильева–Гусарова и квантовых инвариантов узла оценки его геометрических характеристик. Связь квантовых инвариантов с геометрией узлов проявляется, в частности, в гипотезе об объёмах Р. Кашаева [194], Х. Мураками и Дж. Мураками [259], согласно которой объём дополнения гиперболического узла выражается через предел нормированных значений крашеных полиномов Джонса. Х. Мураками и Дж. Мураками показали, что в случае справедливости этой гипотезы совокупность всех инвариантов Васильева–Гусарова распознаёт тривиальный узел;

[12] Инварианты Васильева–Гусарова также известны под названиями «инварианты конечного типа» и «инварианты конечного порядка».

[13] В случае инвариантов Васильева–Гусарова аналогом условия принадлежности ядру представления служит принадлежность подходящему члену нижнего центрального ряда группы крашеных кос.

[14] В работе [45] гипотезам (C) и (E) даны номера Conjecture 3.1 и Conjecture 3.2 соответственно; гипотеза (C′) приведена без номера.

согласно более общей гипотезе В. Васильева, полный набор таких инвариантов различает все узлы. Однако в конкретных вычислениях доступен не весь набор инвариантов Васильева–Гусарова, а лишь инварианты порядка, не превосходящего заданного числа. Это приводит к вопросу о том, достаточно ли такого набора для определения гиперболического объёма или хотя бы для получения его верхней оценки.

Отрицательный ответ был получен Э. Калфагианни [192], развившей идеи С. Судзуки, Э. Оямы и М. Гусарова: для каждого натурального m она построила семейства гиперболических узлов с неограниченным объёмом, неотличимых от тривиального узла инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше m, а также многочленом Александера. Связанные с этим вопросы о гиперболическом объёме, числе развязывания, срезанном роде и роде Зейферта исследовались в работах А. Стоимёнова [292, 293, 294], Д. Силвера и У. Уиттена [286], С. Лин и Э. Калфагианни [193].

Связь этой проблематики с динамикой кос особенно ясно проявляется в уже упомянутой конструкции Т. Стэнфорда [289]. Стэнфорд показал, что зацепления, отличающиеся вставкой косы из m-го члена нижнего центрального ряда группы крашеных кос, неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка меньше m. Выбирая вставляемую косу подходящим образом, он построил для произвольного узла бесконечно много гиперболических, более того, альтернированных простых узлов, неотличимых от исходного инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного. Из теоремы М. Лакенби [211] следует, что гиперболические объёмы дополнений полученных узлов не ограничены. Тем самым конструкция Стэнфорда ещё раз показывает, что конечные наборы инвариантов Васильева–Гусарова не дают верхней оценки гиперболического объёма, и позволяет перевести проблему построения неразличимых узлов неограниченной сложности на язык динамики вставляемых кос.

Таким образом, обе задачи приводят к изучению динамических характеристик кос: в первом случае они используются для распознавания качественных свойств замыканий, а во втором — для получения нижних оценок геометрической сложности. При описании динамики посредством действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ на метрических пространствах, связанных с поверхностью S, такими характеристиками служат расстояния и асимптотические числа переноса.

Для графа кривых $\mathcal{C}(S)$ известен ряд алгоритмов вычисления расстояний [214, 284, 308, 48, 307], в том числе алгоритмы М. Белла, Р. Уэбба [36] и Ф. Барони [28], позволяющие находить или оценивать расстояния и асимптотические числа переноса за время, полиномиальное по длине записи класса отображений в фиксированной системе образующих. Тем не менее их применение требует нетривиальных геометрических и комбинаторных процедур, и поиск более доступных методов остаётся актуальной задачей (сборник проблем Кирби [34, Problem 2.10]).

Однако для рассматриваемых приложений не требуется решать задачу точного вычисления в полной общности. Достаточно найти простые и эффективно вычислимые функционалы, значения которых сами по себе давали бы нижние оценки расстояний и

асимптотических чисел переноса и, в частности, позволяли бы устанавливать их положительность.

Основной пример такого подхода касается теории ограниченных когомологий. В ней для оценки геометрических характеристик снизу используется так называемая норма Громова — полунорма на пространстве гомологий, индуцированная ℓ^1-нормой на пространстве вещественных сингулярных цепей. По теореме двойственности М. Громова [152] норма Громова гомологического класса $\alpha \in H_n(X, A; \mathbb{R})$ совпадает с супремумом значений, принимаемых на нём вещественными ограниченными коциклами:

$$\|\alpha\| = \sup_{\substack{f \in Z_b^n(X,A;\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty \leqslant 1}} |f(\alpha)|.$$

Поэтому каждое такое ненулевое значение служит признаком положительности нормы Громова, даёт её нижнюю оценку и, следовательно, оценку заданной геометрической характеристики.

Среди конкретных реализаций этого подхода отметим две. М. Громов [152] показал, что симплициальный объём многообразия — норма Громова фундаментального класса — даёт нижнюю оценку его объёма в любой римановой метрике, удовлетворяющей определённому ограничению на кривизну[15]:

$$\|M\| \lesssim \mathrm{vol}(M),$$

причём для гиперболических метрик оценка точна[16]; равенство доказывается с помощью коцикла ориентированного объёма геодезического спрямления. Похожим образом У. Тёрстон [300] и Д. Габай [136] использовали норму Тёрстона[17] для вычисления рода Зейферта узла в трёхмерном многообразии на основе класса Эйлера тугих слоений.

Возникает вопрос, можно ли построить аналогичную схему для асимптотических чисел переноса при действиях групп классов отображений и совместить её с результатами о зависимости трёхмерной геометрии и топологии от динамики класса отображений.

Для элементов дискретных групп одним из естественных аналогов норм Громова и Тёрстона[18] служит стабильная коммутаторная длина[19]. Её геометрические истоки восходят к работам [101, 110], а К. Баваром [30] было установлено соотношение

$$\mathrm{scl}(g) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in Q(G) \\ D(f) \leqslant 1}} |f(g)|.$$

[15] Этим ограничением является условие $K_g \geqslant -1$, где K_g — секционная кривизна.

[16] Константа сравнения зависит только от размерности n многообразия M. Если M является гиперболическим, то $\|M\| = \mathrm{vol}(M)/v_n$, где v_n — объём правильного идеального симплекса в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

[17] Согласно теореме Габая, норма Тёрстона совпадает с половиной соответствующей нормы Громова.

[18] Точное содержание этой аналогии представлено в монографии Д. Калегари [79].

[19] Величина $\mathrm{scl}(g)$ показывает, насколько эффективно степени элемента $g \in [G, G]$ могут быть представлены в виде произведения коммутаторов.

Теорема двойственности Бавара гласит, что стабильная коммутаторная длина выражается через значения однородных квазиморфизмов — вещественнозначных функций на группе, являющихся гомоморфизмами с точностью до аддитивной константы[20] и однородных относительно возведения в целую степень. Таким образом, квазиморфизмы выполняют для стабильной коммутаторной длины ту же функцию, что ограниченные коциклы — для нормы Громова, и служат кандидатами на роль искомых функционалов, оценивающих асимптотические числа переноса.

Конкретный пример таких функционалов дают коэффициенты дробного скручивания Дена на группах классов отображений поверхностей с непустым краем, широко применяемые в теории узлов, теории слоений и контактной топологии [137, 204, 170, 274, 235, 168, 171, 172, 182]. В некотором смысле эти квазиморфизмы ω_∂ показывают, насколько сильно класс отображений «перекручен» в окрестности выделенной компоненты ∂ края поверхности S.[21]

Для коэффициентов дробного скручивания Дена пороговый принцип проявляется на качественном уровне: превышение определённых пороговых значений даёт проверяемые признаки топологических свойств соответствующей пары «многообразие — зацепление». Так, А. Малютин и Н. Нецветаев [235, 229] показали, что если коэффициент дробного скручивания Дена косы превышает значение 1, то её замыкание является простым зацеплением, то есть нетривиальным, нерасщепимым и несоставным. Подобные результаты позволили разрешить гипотезы У. Менэско [227] (сборник проблем Кирби [202, Problem 1.84]) и стали одним из ключевых ингредиентов доказательства гипотезы Бигелоу (E) в работе Т. Ито [173].

Те же функционалы допускают и количественное сравнение с асимптотическим числом переноса одного из основных действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ — действия на графе дуг с закреплёнными концами $\mathcal{A}^*(S)$. Вершинами этого графа являются изотопические классы существенных простых дуг на S, а рёбра отвечают парам классов, имеющим представителей с непересекающимися внутренностями. Дж. Этная и Ю. Ли [114] связали асимптотическое число переноса в этом графе с геометрией и топологией открытых книг и поставили вопрос о соотношении между числом переноса и квазиморфизмами ω_∂. Т. Ито [176] установил неравенство

$$|\omega_\partial| \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)},$$

где $\mathcal{A}_\partial(S) \subseteq \mathcal{A}^*(S)$ — подграф дуг, закреплённых на компоненте ∂. Тем самым коэффициент дробного скручивания Дена реализует рассматриваемую схему: его значение даёт явную нижнюю оценку асимптотического числа переноса. Это неравенство также

[20] Функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ называется квазиморфизмом, если её дефект конечен:

$$D(f) := \sup_{x,y\in G} |f(xy) - f(x) - f(y)| < \infty.$$

[21] Для псевдоаносовского класса отображений φ значение $\omega_\partial(\varphi)$ описывает изменение числа оборотов листа инвариантной ламинации, примыкающего к компоненте ∂; см. [197].

позволяет получить из результатов об асимптотическом числе переноса ряд пороговых признаков качественных свойств, ранее установленных непосредственно в терминах коэффициента ω_∂.

Однако возможности подхода, основанного исключительно на коэффициенте дробного скручивания Дена, существенно ограничены, поскольку для бесконечных семейств псевдоаносовских классов отображений квазиморфизм ω_∂ обращается в нуль[22], тогда как эти классы действуют на графах $\mathcal{A}_\partial(S)$ и $\mathcal{C}(S)$ локсодромически. Это, в частности, служит препятствием для непосредственного усиления доказательства гипотезы Бигелоу (E), предложенного Ито. Возникает вопрос: какие ещё однородные квазиморфизмы f удовлетворяют свойству *липшицевости*[23]

$$|f(\varphi)| \lesssim \ell_X(\varphi)$$

относительно асимптотического числа переноса в заданном действии?

Необходимым условием такой липшицевости является принадлежность функции f пространству V_X однородных квазиморфизмов, обращающихся в нуль на каждом нелоксодромическом элементе; поэтому V_X можно рассматривать как пространство кандидатов на роль искомых функционалов. Это приводит к следующей разновидности понятия относительной стабильной коммутаторной длины, неявно возникшего в работах [82, 96, 189], формализованного Л. Ченом [89] и далее развитого в работе Л. Чена и Н. Хойера [90][24]:

$$\mathrm{scl}_X(\varphi) := \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_X \\ D(f) \leqslant 1}} |f(\varphi)|.$$

Таким образом, для распространения описанной выше схемы из теории ограниченных когомологий на асимптотические числа переноса ключевым становится вопрос о том, при каких условиях выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X.$$

Для действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ такое сравнение позволяет оценивать снизу числа переноса в терминах значений квазиморфизмов из V_X и, посредством описанных выше связей, получать признаки качественных свойств и оценки мер сложности пар «многообразие — зацепление». В этом смысле относительная стабильная коммутаторная длина scl_X играет для функции ℓ_X и оцениваемых ею геометрических характеристик ту же роль, что норма Громова — для риманова объёма.

[22] Соотношение $\omega_\partial(\varphi) = 0$ выполняется в том и только в том случае, если для некоторой (следовательно, любой) гиперболической структуры на S класс φ сохраняет простой геодезический луч с началом на компоненте ∂.

[23] В этом случае квазиморфизм f называется *липшицевым относительно числа переноса* (или просто *липшицевым*); ср. [198].

[24] Согласно относительному варианту теоремы двойственности Бавара, величина $\mathrm{scl}_X(\varphi)$ показывает, насколько эффективно степени элемента φ могут быть представлены в виде произведения коммутаторов и нелоксодромических элементов.

Для действия группы кос на одном из основных графов — графе $X = \mathcal{A}_\partial(D^2_n)$ — пространство кандидатов V_X было независимо введено А. Малютиным [230] под названием «пространство ядерных квазиморфизмов» и получило применение в теории узлов. Опираясь на результаты теории, развитой Дж. Бирман и У. Менэско [55, 56, 49, 50, 57, 51, 58, 52], Малютин показал, что каждый ядерный квазиморфизм даёт признак простоты замыканий кос, аналогичный признаку, основанному на коэффициенте дробного скручивания Дена. Поскольку пороговое значение в этих признаках совпадает с дефектом квазиморфизма, их естественно переформулировать в терминах относительной стабильной коммутаторной длины: если $2\,\mathrm{scl}_X(\varphi) > 1$, то замыкание косы $\varphi \in B_n$ является простым зацеплением.

Систематический источник ядерных квазиморфизмов даёт теорема Малютина [232], согласно которой каждый однородный квазиморфизм группы кос представляется в виде суммы так называемых ядерных компонент, соответствующих группам кос с различным числом нитей, и компоненты, отвечающей гомоморфизму экспоненциальной суммы[25]:

$$Q_n \cong Q^\partial_n \oplus Q^\partial_{n-1} \oplus \ldots \oplus Q^\partial_3 \oplus \langle \exp \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Если исходный квазиморфизм не является гомоморфизмом, то хотя бы одна его ядерная компонента является ненулевой. Следовательно, каждый такой квазиморфизм порождает семейство функционалов, дающих признаки простоты замыканий кос с различным числом нитей. Конкретная реализация этого подхода для ряда эффективно вычислимых квазиморфизмов представлена в работе И. Дынникова и В. Шастина [112].

Это разложение имеет как структурное, так и алгоритмическое значение. Малютин [231, 112] описал явные комбинаторные формулы для проекторов пространства Q_n на подпространства Q^∂_k. Поэтому алгоритм вычисления заданного квазиморфизма группы кос позволяет вычислять и его ядерные компоненты. Тем самым для действия на графе $\mathcal{A}_\partial(D^2_n)$ функционалы требуемого типа возникают систематически, причём среди них имеются эффективно вычислимые представители.

Таким образом, для этого действия уже разработаны как структурная, так и алгоритмическая составляющие подхода. Одним из недостающих компонентов остаётся установление связи ядерных квазиморфизмов с асимптотическим числом переноса. Доказательство сравнения $\mathrm{scl}_{\mathcal{A}_\partial} \lesssim \ell_{\mathcal{A}_\partial}$ позволило бы использовать теорию, развитую А. Малютиным, для получения эффективно проверяемых признаков качественных свойств и явных нижних оценок геометрических и топологических характеристик замыканий кос, с последующим применением этих результатов к поставленным выше задачам теории узлов.

Однако действие на графе $\mathcal{A}_\partial(S)$ охватывает лишь часть рассматриваемых задач: поскольку значения функций $\mathrm{scl}_{\mathcal{A}_\partial}$ и $\ell_{\mathcal{A}_\partial}$ на степенях скручивания Дена вдоль компоненты края ∂ не ограничены сверху, они не дают нижних оценок таких геометрических

[25] Символ Q_n обозначает пространство однородных квазиморфизмов группы кос B_n, а символ Q^∂_n — его подпространство ядерных квазиморфизмов.

характеристик, как гиперболический объём. Это приводит к графу $\mathcal{A}^{\circ}_{\partial}(S)$, отвечающему факторизации графа $\mathcal{A}_{\partial}(S)$ по действию скручиваний Дена вдоль компонент края. Согласно теореме Д. Футера и С. Шлеймера [135], асимптотическое число переноса в действии на полученном графе даёт явную нижнюю оценку гиперболического объёма тора отображений. Возникает вопрос, можно ли распространить этот результат на пары «многообразие — зацепление», а также совместить полученный инструмент с методами, разработанными для действий на графах $\mathcal{A}_{\partial}(D^2_n)$ и $\mathcal{C}(S)$.

Исходя из этого, каждой поверхности S с выделенной компонентой края ∂ сопоставляются три пространства: граф $\mathcal{A}_{\partial}$ закреплённых граничных дуг, граф $\mathcal{A}^{\circ}_{\partial}$ скользящих граничных дуг и граф кривых $\mathcal{C}$. Эти графы образуют единую трёхуровневую систему: имеются естественные эквивариантные отображения

$$\mathcal{A}_{\partial} \twoheadrightarrow \mathcal{A}^{\circ}_{\partial} \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C},$$

где символ $\mathcal{AC}$ обозначает граф дуг и кривых, квазиизометричный графу кривых [207] и используемый здесь как промежуточное пространство. Эти отображения индуцируют иерархию асимптотических чисел переноса[26]

$$\ell_{\mathcal{C}} \asymp \ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_{\circ} \leqslant \ell_{\partial},$$

иерархию пространств однородных квазиморфизмов

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{AC}} \subseteq V_{\circ} \subseteq V_{\partial}$$

и иерархию относительных стабильных коммутаторных длин

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}} = \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}} \leqslant \mathrm{scl}_{\circ} \leqslant \mathrm{scl}_{\partial}.$$

Исследование этой трёхуровневой системы имеет центральное значение для рассмотренных выше вопросов; в частности, оно служит основой при обосновании порогового принципа для пар «трёхмерное многообразие — зацепление», а также при получении признаков качественных свойств и нижних оценок сложности в терминах квазиморфизмов группы классов отображений.

[26] Первое сравнение имеет вид $\ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_{\mathcal{C}} \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{AC}}$.

Цель и задачи диссертации

Цель диссертационной работы — разработать аппарат, связывающий асимптотические числа переноса изометрических действий с однородными квазиморфизмами посредством относительной стабильной коммутаторной длины, и применить его для выявления качественных и количественных связей между динамикой классов отображений поверхностей и геометрией и топологией ассоциированных с ними трёхмерных объектов, а в модельном случае групп кос — для решения конкретных вопросов теории узлов.

Для достижения этой цели решаются следующие задачи.

1. Развить понятие стабильной коммутаторной длины scl_X, отвечающей изометрическому действию $G \curvearrowright X$, исследовать его основные свойства и установить условия, при которых выполняется сравнение $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$, а также условия, при которых выполняется неравенство $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$.

2. Исследовать трёхуровневую систему действий группы классов отображений, установить взаимосвязи соответствующих чисел переноса, пространств квазиморфизмов и стабильных коммутаторных длин, а также получить эффективные[27] константы сравнения функций scl_X и ℓ_X на различных уровнях этой системы.

3. Охарактеризовать, как числа переноса, липшицевы квазиморфизмы и стабильные коммутаторные длины на трёх уровнях системы зависят от динамического типа класса отображений и его разложения Нильсена–Тёрстона.

4. Установить взаимосвязь чисел переноса трёх уровней со свойствами и характеристиками пар «трёхмерное многообразие — зацепление»; получить пороговые признаки этих свойств, а также явные оценки геометрической и топологической сложности, в том числе гиперболического объёма.

5. Детализировать полученные признаки и оценки для модельного случая проколотого диска, а также исследовать связь чисел переноса с классическими свойствами и характеристиками зацеплений в трёхмерной сфере, такими как род Зейферта и число перекрёстков.

6. Исследовать трёхуровневую иерархию однородных квазиморфизмов группы кос, выявить связанные с ней структурные разложения и описать эффективно вычислимые квазиморфизмы, липшицевы относительно чисел переноса трёх уровней.

7. Применить разработанный аппарат к задачам теории узлов: исследовать гипотезы Бигелоу о распознавании нетривиальности замыканий кос и построить семейства узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и чьи геометрические и топологические характеристики не ограничены.

[27] Под *эффективной* константой сравнения понимается константа, допускающая эффективно вычислимую верхнюю оценку.

Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту, заключаются в следующем.

1. В модельном случае проколотого диска введены иерархии асимптотических чисел переноса, однородных квазиморфизмов и относительных стабильных коммутаторных длин, отвечающие трёхуровневой системе действий, и получены явные равномерные константы сравнения чисел переноса и стабильных коммутаторных длин на первых двух[28] уровнях этой системы [313].

2. Доказано, что значение асимптотического числа переноса первого уровня положительно в том и только в том случае, если внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона косы является нетривиальной [313].

3. В терминах асимптотических чисел переноса, однородных квазиморфизмов и относительных стабильных коммутаторных длин трёх уровней установлены признаки простоты и гиперболичности зацепления, представленного в виде замыкания косы, а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и единственности минимального представления с точностью до сопряжения [312].

4. В тех же терминах получены явные нижние оценки рода Зейферта и числа перекрёстков замыкания косы, а также гиперболического и симплициального объёмов его дополнения [312].

Научные результаты диссертации

Результаты диссертационной работы касаются взаимосвязи асимптотических чисел переноса, однородных квазиморфизмов и относительных стабильных коммутаторных длин, а также применения этой взаимосвязи в динамике классов отображений поверхностей, геометрии и топологии трёхмерных многообразий.

Центральным результатом является разработка метода, позволяющего использовать однородные квазиморфизмы для получения признаков качественных свойств и нижних оценок динамических характеристик классов отображений, а также геометрических и топологических характеристик пар «трёхмерное многообразие — зацепление». Его ключевой компонентой служат утверждения, позволяющие эффективно оценивать снизу асимптотическое число переноса изометрического действия через соответствующую относительную стабильную коммутаторную длину. Среди таких утверждений отметим следующую теорему.

[28] Первый уровень — уровень графа $\mathcal{A}_\partial$; второй — уровень графа $\mathcal{A}_\partial^\circ$; третий — уровень графа $\mathcal{C}$.

Теорема A (см. теорему 5.36). Пусть группа G действует на связном графе X. Если это действие кокомпактно[29] и множество нелоксодромических элементов порождает группу G, то функция scl_X принимает лишь конечные значения и выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X. \qquad \square$$

Другая ключевая компонента разработанного метода касается трёхуровневой системы действий группы классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ неисключительной[30] поверхности S с единственной компонентой края ∂. Для каждого из трёх уровней доказано сравнение $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$ с эффективной константой. Кроме того, установлены следующие равномерные[31] константы сравнения.

Теорема B (см. теоремы 6.21, 6.35 и 6.45). Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂, если S отлична от тора с дырой[32], то выполняются неравенства

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}\ell_\partial(\varphi), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \frac{1}{2}\ell_\circ(\varphi);$$

если $S = D^2_n$ — проколотый диск[33], то выполняется неравенство

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{C}}(\varphi). \qquad \square$$

Ещё одну ключевую компоненту разработанного метода формируют пороговые признаки качественных свойств и нижние оценки мер сложности, формулирующиеся в терминах асимптотических чисел переноса.

Первая группа результатов касается динамики классов отображений. Описано, как числа переноса, липшицевы квазиморфизмы и стабильные коммутаторные длины на трёх уровнях зависят от динамического типа класса отображений и его разложения Нильсена–Тёрстона. В частности, установлено необходимое и достаточное условие положительности числа переноса ℓ_∂, формулирующееся в терминах компоненты φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса φ, инцидентной компоненте края ∂ поверхности S.[34] В следующей теореме соответствующий критерий объединён с результатами А. Расмуссена [271], Х. Мазура и Я. Мински [242].

[29] Мы называем действие группы G на связном комбинаторном графе X *кокомпактным*, если пространство орбит $|X|/G$ индуцированного действия этой группы на геометрической реализации $|X|$ является компактным; эквивалентно, число орбит рёбер является конечным.

[30] Поверхность называется *исключительной*, если её род равен нулю и суммарное число проколов и компонент края не превосходит 3.

[31] Константа называется *равномерной*, если она не зависит от исходной поверхности.

[32] Случай тора с дырой сводится к случаю диска с тремя проколами; см. замечание 1.4.

[33] Обсуждение вопроса о существовании равномерных констант сравнения на третьем уровне в случае произвольных поверхностей см. в замечании 6.46.

[34] См. определение в разделе 1.2.2.

Теорема C (см. теорему 7.1). Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ выполняются следующие утверждения:

1. условие $\ell_\partial(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ_{ext} является нетривиальным;
2. условие $\ell_\circ(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ_{ext} является псевдоаносовским;
3. условие $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является псевдоаносовским. □

Тем самым показано, что число переноса первого уровня ℓ_∂ позволяет распознать нетривиальность внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона[35]; переход к числу переноса второго уровня $\ell_\circ$ позволяет исключить из рассмотрения периодическую динамику; число переноса третьего уровня $\ell_{\mathcal{C}}$ позволяет дополнительно исключить приводимую динамику и сосредоточиться на псевдоаносовской.

Кроме того, установлена аналогичная характеризация в случае иерархии стабильных коммутаторных длин, формулирующаяся в терминах различных форм так называемого свойства хиральности[36] классов отображений.

Теорема D (см. теоремы 7.16, 7.10 и 7.20). Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ выполняются следующие утверждения:

1. условие $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является внешне хиральным;
2. условие $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является внешне хиральным после стягивания края;
3. условие $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ эквивалентно тому, что класс φ является хиральным после стягивания края и псевдоаносовским. □

Тем самым доказано, что за исключением элементов, обладающих свойством ахиральности соответствующего типа, стабильные коммутаторные длины трёх уровней не равны нулю в тех же случаях, в которых не равны нулю соответствующие числа переноса[37].

Наряду с признаками качественных свойств классов отображений получены явные нижние оценки динамических характеристик, таких как топологическая энтропия (теорема 8.22). Оценка топологической энтропии даёт, в частности, ответ на вопрос [34, Problem 2.43 (c)] в случае группы кос B_n.

Вторая группа результатов касается геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление». Установлены пороговые признаки качественных свойств таких пар, которые имеют явные пороговые значения, зависящие полиномиально от эйлеровой характеристики исходной поверхности. Среди них отметим следующий результат, дающий, в частности, признак гиперболичности дополнения $M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi$ зацепления L_φ в терминах

[35] В работе также доказано, что внешняя компонента класса отображений тривиальна в том и только в том случае, если этот класс является *расщепимым*, то есть сохраняет некоторую существенную дугу, хотя бы один конец которой лежит на компоненте края ∂; см. лемму 1.9.

[36] См. определения в разделе 1.2.3.

[37] Эквивалентную формулировку теоремы D, подчёркивающую её сходство с теоремой C, см. в теореме 7.21.

числа переноса ℓ_∂.[38] До конца этого раздела предполагается, что S — неисключительная поверхность с единственной компонентой края ∂.

Теорема E (см. теорему 8.12). Пусть для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\partial(\varphi) > 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4 + 1.$$

Тогда:

1. многообразие M_φ является зейфертовым в том и только в том случае, если класс φ является периодическим;

2. многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским;

3. многообразие M_φ содержит существенный тор в том и только в том случае, если класс φ является приводимым. □

Наряду с этим получены явные нижние оценки геометрических и топологических характеристик, таких как гиперболический и симплициальный объёмы (теорема 8.20). В частности, отметим следующий результат.

Теорема F (см. теорему 8.18). Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$. Если многообразие M_φ является гиперболическим, то выполняется неравенство

$$\mathrm{vol}(M_\varphi) \geqslant \frac{1}{900}\left(\frac{\ell_\circ(\varphi)}{|\chi(S)|^4} - 2144\,\pi\right). \qquad \square$$

В сочетании с известными результатами о случайных блужданиях теорема F даёт, в частности, ответ на вопрос [262, Problem 2.3] об асимптотическом росте объёма дополнений гиперболических зацеплений, полученных в виде замыканий случайных кос.

В модельном случае проколотого диска $S = D^2_n$ вышеописанные результаты расширены и уточнены. Так, для зацепления L_φ, представленного косой φ, установлен признак простоты с пороговым условием $\ell_\partial(\varphi) > 2$ (теорема 9.8), а также признак минимальности по числу нитей для такого представления и единственности минимального представления с точностью до сопряжения (теорема 9.12)[39]. Кроме того, получен следующий результат, дающий признак гиперболичности узлов в трёхмерной сфере и имеющий, в отличие от теоремы E, равномерное пороговое значение.

Теорема G (см. теорему 9.32). Пусть замыкание $L_\varphi \subset S^3$ косы $\varphi \in B_n$ является узлом и выполняется неравенство $\ell_\partial(\varphi) > 4$. Тогда:

1. узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической;

2. узел L_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если коса φ является псевдоаносовской;

[38] Благодаря неравенствам $\ell_\mathcal{C} \leqslant 2\,\ell_\circ \leqslant 2\,\ell_\partial$ этот и другие пороговые признаки и оценки, формулирующиеся в терминах ℓ_∂, дают аналогичные формулировки в терминах чисел переноса $\ell_\circ$ и $\ell_\mathcal{C}$.

[39] Автору неизвестен эффективный алгоритм для вычисления или оценки сверху порогового значения $\rho(n)$, фигурирующего в этом признаке; см. замечание 9.15.

3. узел L_φ является сателлитным в том и только в том случае, если коса φ является приводимой. □

Вместе с тем в терминах числа переноса ℓ_∂ установлены явные нижние оценки классических характеристик зацеплений в трёхмерной сфере, таких как род Зейферта (теорема 9.20) и число перекрёстков (теорема 9.21).

Вышеописанные компоненты общей схемы тем самым дают пороговые признаки качественных свойств и нижние оценки численных характеристик $\Psi(\varphi)$ классов отображений φ и ассоциированных с ними трёхмерных объектов в терминах квазиморфизмов и их дефектов:

$$\frac{|f(\varphi)|}{2D(f)} \leqslant \mathrm{scl}_X(\varphi) \lesssim \ell_X(\varphi) \lesssim \Psi(\varphi).$$

Ещё одна ключевая компонента разработанного метода касается пространств квазиморфизмов, липшицевых относительно чисел переноса трёх уровней иерархии:

$$V_{\mathcal{C}} \subseteq V_\circ \subseteq V_\partial \subseteq Q(\mathrm{Mod}(S)).$$

В модельном случае $S = D_n^2$ описаны эффективно вычислимые представители таких пространств, относящиеся к семействам так называемых квазиморфизмов типа закрученности и квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама (предложения 10.58, 10.61, 10.80 и 10.87); установлены результаты о нетривиальности и линейной независимости ряда таких квазиморфизмов. Для этого описаны проекторы

$$Q(\mathrm{Mod}(D_n^2)) \to V_\partial \to V_\circ,$$

а также связанные с ними разложения пространств однородных квазиморфизмов. Отдельно отметим следующее разложение пространства вторых ограниченных когомологий группы кос, которое устанавливает структурную связь между ограниченными коциклами, динамикой кос и геометрией зацеплений.

Теорема H (см. следствие 10.45). Для каждого $n \geqslant 3$ имеется естественный[40] изоморфизм векторных пространств

$$H_b^2(B_n;\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^\circ \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle\omega_k\rangle_{\mathbb{R}},$$

где $Q_k^\circ := V_\circ$ — пространство однородных квазиморфизмов группы кос B_k, липшицевых относительно числа переноса $\ell_\circ$, и ω_k — коэффициент дробного скручивания Дена. □

Разработанный аппарат применён к задачам теории узлов, в том числе к гипотезам Бигелоу. Построены контрпримеры к гипотезе (C) для каждого $n \geqslant 4$ (пример 11.7). Вместе с тем доказана следующая усиленная форма гипотезы (C′).

[40] Здесь естественность означает, что отображение когомологических классов, индуцированное стандартным вложением $B_{n-1} \to B_n$, отвечает забыванию слагаемого $Q_n^\circ \oplus \langle\omega_n\rangle_{\mathbb{R}}$.

Теорема I (см. теорему 11.11). Для любого $n \geqslant 2$ и любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует коса $\psi \in B_n$, сопряжённая с косой $\sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$, для которой замыкание косы $\varphi^m \psi$ является нетривиальным зацеплением при всех достаточно больших целых $m \geqslant 0$. Если, кроме того, число m делится на порядок перестановки, соответствующей косе φ, то это замыкание является нетривиальным узлом. □

Наряду с этим построены семейства узлов, неотличимых инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного, модулем Александера и функцией сигнатуры Левина–Тристрама, в то же время имеющих неограниченные основные геометрические и топологические характеристики: гиперболический объём, срезанный род, род Зейферта, число перекрёстков, число развязывания.

Теорема J (см. теорему 11.15). Для любого узла $K \subset S^3$, целого числа $n \geqslant 5$, не меньшего индекса косы узла K, и целого числа $d \geqslant 0$ существует последовательность узлов $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, для которой выполняются следующие свойства.

1. Узлы K_i и K неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше d, имеют изоморфные модули Александера, а их функции сигнатуры Левина–Тристрама совпадают.

2. Каждый узел K_i является гиперболическим, жёстким[41], хиральным и нерасслоённым, причём следующие численные характеристики стремятся к бесконечности:

$$\operatorname{vol}(S^3 \backslash K_i), \qquad g_4(K_i), \qquad g_3(K_i), \qquad \operatorname{cr}(K_i), \qquad u(K_i).$$

3. Если n нечётно, то размерности над полем $\mathbb{F}_2$ пространств

$$\widetilde{\mathrm{Kh}}(K_i^*), \qquad \widehat{\mathrm{HF}}(\Sigma_2(K_i))$$

гомологий Хованова зеркального образа узла K_i и гомологий Хегора–Флоера двулистного разветвлённого накрытия узла K_i стремятся к бесконечности.

4. Индекс косы каждого узла K_i равен n. □

Научная новизна

Все ключевые результаты диссертационной работы являются новыми. В частности:

1. Выявлены ранее неизвестные соотношения, связывающие асимптотические числа переноса изометрических действий с относительной стабильной коммутаторной длиной. Например, установлено достаточное условие сравнения $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$ для действий на графах и получены эффективные константы сравнения для трёхуровневой системы действий группы классов отображений.

2. Получены новые признаки гиперболичности пар «трёхмерное многообразие — зацепление», формулирующиеся в терминах однородных квазиморфизмов групп классов

[41] Мы называем зацепление жёстким, если любые две косы, представляющие это зацепление и имеющие минимальное число нитей, сопряжены в группе кос.

отображений.

3. Впервые получены явные нижние оценки гиперболического объёма дополнений зацеплений в трёхмерных многообразиях, формулирующиеся в терминах значений квазиморфизмов групп классов отображений.

4. Получены новые явные нижние оценки рода Зейферта и числа перекрёстков зацеплений в трёхмерной сфере, формулирующиеся в терминах значений квазиморфизмов групп кос.

5. Впервые описаны бесконечные семейства эффективно вычислимых квазиморфизмов групп кос, дающие нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов дополнений зацеплений в трёхмерной сфере.

6. Разрешены оставшиеся гипотезы Бигелоу: опровергнута гипотеза (C) и доказана (в усиленном виде) гипотеза (C′).

7. Впервые построены семейства гиперболических нерасслоённых узлов в трёхмерной сфере, которые неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного, модулем Александера, функцией сигнатуры Левина–Тристрама и чьи гиперболический объём, срезанный род, род Зейферта и число развязывания не ограничены.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используются методы геометрической теории групп, теории групп классов отображений, теории квазиморфизмов, гиперболической геометрии, маломерной топологии, теории кос. В её основе лежит схема, связывающая свойства классов отображений и трёхмерных многообразий с асимптотическими числами переноса изометрических действий, а асимптотические числа переноса — с относительной стабильной коммутаторной длиной и однородными квазиморфизмами.

При исследовании понятия стабильной коммутаторной длины, отвечающей изометрическому действию, используются теорема двойственности Бавара [30], связанные с ней результаты Л. Чена и Н. Хойера [90, 89], а также конструкции и теоремы Д. Эпштейна, М. Бествины, К. Бромберга и К. Фудживары [113, 42, 41].

Исследование взаимосвязи асимптотических чисел переноса трёх уровней с динамикой классов отображений опирается на теорию, развитую Х. Мазуром и Я. Мински [242, 240]. При анализе соотношений между первыми двумя уровнями системы применяется аппарат коэффициентов дробного скручивания Дена, развитый А. Малютиным [229, 1].

При исследовании соотношений между свойствами и характеристиками трёхмерных многообразий, расслаивающихся над окружностью, и асимптотическими числами переноса применяются результаты Д. Футера, С. Шлеймера [135] и М. Шмалиана [282]. При распространении этих соотношений на пары «многообразие — зацепление» используются инструменты, восходящие к 2π-теореме М. Громова и У. Тёрстона о гиперболической хирургии Дена [151], в том числе результаты, полученные Д. Футером, Э. Калфагианни и Дж. Парсел [132].

В модельном случае проколотого диска применяется теория, развитая Дж. Бирман и У. Менэско [55, 56, 49, 50, 57, 51, 58, 52]; часть доказательств следует рассуждениям, описанным в работах А. Малютина [229] и Т. Ито [171, 172]. В общем случае также применяются результаты теории, развитой Т. Ито и К. Кавамуро [179, 180, 181, 182, 213, 184].

Построения эффективно вычислимых квазиморфизмов групп кос, липшицевых относительно чисел переноса, основаны на результатах А. Малютина [231], И. Дынникова и В. Шастина [112, 2] об операторах и проекторах пространств квазиморфизмов, а также результатах Ж.-М. Гамбаду и Э. Жиса [140] о сигнатурах Левина–Тристрама.

При исследовании гипотез С. Бигелоу применяется теория действий групп на пространствах, гиперболических по Громову. При построении семейств узлов, неотличимых заданными инвариантами, совмещаются результаты Дж. Бирман [53], Д. Лонга [221], Т. Стэнфорда [289], С. Бигелоу [44], Т. Ито [175].

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационная работа носит теоретический характер. Разработанный в диссертации аппарат может быть использован специалистами в теории узлов и теории трёхмерных многообразий.

Публикации и личный вклад автора

Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. Список публикаций автора по теме диссертации включает 6 статей [311, 314, 253, 7, 313, 312], опубликованных в рецензируемых научных изданиях, которые индексируются в базе данных Scopus. Работы [311, 313, 312] подготовлены автором единолично; работы [313, 312] содержат результаты, выносимые на защиту.

В теореме A формализована абстрактная версия рассуждения, представленного в [313, Предложение 5]. В теореме B развит подход, представленный в [313, Теоремы 6 и 9] для случая проколотого диска и первых двух уровней системы. Теорема C распространяет результат [313, Теорема 14] на случай произвольных поверхностей. В основе теоремы E лежит результат [312, Теорема 17 (1)]. Теорема F распространяет результат [312, Теорема 22] на случай произвольных поверхностей. Теорема G составляет содержание [312, Теорема 18].

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждена строгими математическими доказательствами, приведёнными в полном объёме в тексте работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и

научно-исследовательских семинарах:

1. **06/24** *Международная конференция «Advances in Homotopy Theory VI», Пекин, Китай*; «Mixing braids, automorphisms, simplicial methods, and homotopy groups of spheres»

2. **08/24** *Конференция «IV Конференция математических центров России», Санкт-Петербург, Россия*; «Коэффициенты дробных скручиваний Дена кос на поверхностях»

3. **09/24** *Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске — 2024», Новосибирск, Россия*; «Об адекватных узлах и многочлене HOMFLY-PT»

4. **09/24** *Международная конференция «10th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics», Сочи, Россия*; «Positive braids and the HOMFLY-PT polynomial»

5. **10/24** *Семинар «Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова», Санкт-Петербург, Россия*; «Центры групп кос поверхностей и точная последовательность Бирман»

6. **07/25** *Международная конференция «The 11th Sino-Russian Conference on Knot Theory and Related Topics», Сучжоу, Китай*; «Local certificates in knotspace geometry»

7. **10/25** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Реконструкция узлов по псевдохарактерам групп кос»

8. **11/25** *Международная конференция «Маломерная топология — 2025», Санкт-Петербург, Россия*; «Универсальность псевдохарактеров кос в теории узлов»

9. **01/26** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Ограниченные когомологии групп кос и гиперболический объём зацеплений»

10. **02/26** *Семинар «Студенческий семинар по маломерной топологии», Санкт-Петербург, Россия*; «Ограниченные когомологии и динамика групп классов отображений поверхностей»

11. **02/26** *Семинар «Коллоквиум факультета математики и компьютерных наук СПбГУ», Санкт-Петербург, Россия*; «Когда динамика и геометрия совпадают: косы и узлы в программе Тёрстона»

12. **04/26** *Семинар «Петербургский геометрический семинар им. А. Д. Александрова», Санкт-Петербург, Россия*; «Динамика кос, ограниченные когомологии и геометрия узлов»

13. **04/26** *Семинар «Геометрия, топология и математическая физика», Москва, Россия*; «Динамика кос, ограниченные когомологии и геометрия узлов»

14. **06/26** *Международная конференция «12-я российско-китайская конференция по теории узлов и смежным вопросам», Сочи, Россия*; «Braid dynamics as an effective complexity theory for knots and links»

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав, заключения, списка основных работ автора по теме диссертации и списка литературы. Текст диссертации изложен

на 311 страницах. Список литературы включает 314 наименований.

В главах 1–2 вводятся топологические, динамические и геометрические конструкции, используемые в дальнейшем, и рассматривается основной модельный случай проколотого диска, отвечающий группе кос. В главах 3–5 развивается аппарат чисел переноса, квазиморфизмов и стабильной коммутаторной длины. В главе 6 этот аппарат применяется к трёхуровневой системе действий группы классов отображений. В главах 7–9 исследуется пороговый принцип для чисел переноса трёх уровней: устанавливаются признаки качественных свойств и оценки численных характеристик классов отображений (глава 7) и пар «многообразие — зацепление» (главы 8 и 9). В главе 10 исследуются пространства липшицевых квазиморфизмов групп кос и связанные с ними структурные разложения. В главе 11 полученные результаты применяются к задачам трёхмерной геометрии и топологии.

Приведём содержание работы по главам.

Глава 1. Классы отображений поверхностей: динамика и геометрические конструкции

Глава посвящена топологии поверхностей, динамике классов отображений, а также геометрии и топологии связанных с ними трёхмерных многообразий.

В разделе 1.1 фиксируются соглашения о поверхностях, дугах и кривых. Вводятся комбинаторные графы, связанные с поверхностью S, основными из которых являются графы

$$\mathcal{A}_\partial(S), \qquad \mathcal{A}^\circ_\partial(S), \qquad \mathcal{C}(S), \qquad \mathcal{AC}(S)$$

закреплённых граничных дуг, скользящих граничных дуг, кривых, дуг и кривых.

В разделе 1.2 рассматриваются качественные свойства и численные характеристики классов отображений поверхностей. Вводится группа классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ и рассматриваются её действия на графах, отвечающих дугам и кривым. Приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории Нильсена–Тёрстона; в частности, рассматриваются приводимые, периодические и псевдоаносовские типы динамики, вводится понятие расщепимости. Описывается разложение Нильсена–Тёрстона и выделяется компонента разложения, отвечающая заданной компоненте края ∂, что позволяет связать с каждым классом отображений φ определённый класс φ_{ext}. На основе этого вводятся различные типы ахиральности классов отображений: ахиральность (A), внешняя ахиральность (BA), ахиральность после стягивания края (AC) и внешняя ахиральность после стягивания края (BAC). Также приводятся сведения о топологической энтропии и ключевой для дальнейшего изложения характеристике — коэффициенте дробного скручивания Дена:

$$\omega_\partial \colon \mathrm{Mod}(S) \to \mathbb{R}.$$

Раздел 1.3 посвящён трёхмерным конструкциям: с классом отображений φ связываются тор отображения T_φ и, для поверхности с единственной компонентой края, замкнутое многообразие, зацепление и его дополнение:

$$Y_\varphi, \qquad L_\varphi \subset Y_\varphi, \qquad M_\varphi := Y_\varphi \backslash L_\varphi.$$

В нём приводятся сведения о вложенных существенных поверхностях, симплициальном объёме $\|M\|$, введённом М. Громовым, а также гиперболических многообразиях и каспах. Формулируются результаты Д. Футера, Э. Калфагианни и Дж. Парсел о заполнениях Дена, а также результаты У. Тёрстона, Т. Ито и К. Кавамуро, устанавливающие соответствия между динамическим типом класса отображений и геометрическими типами отвечающих ему трёхмерных объектов.

Глава 2. Динамика кос и топология их замыканий

Глава посвящена модельному случаю проколотого диска

$$S = D^2_n, \qquad B_n \cong \mathrm{Mod}(D^2_n),$$

при котором косе φ отвечает её замыкание в трёхмерной сфере:

$$L_\varphi \subset S^3.$$

Раздел 2.1 является вводным, в нём описываются основные качественные свойства зацеплений, а также ряд используемых в дальнейшем мер сложности, таких как род Зейферта, срезанный род и число перекрёстков. Приводятся сведения об инвариантах Васильева–Гусарова, модуле Александера, сигнатурах Левина–Тристрама, гомологиях Хегора–Флоера и Хованова.

В разделе 2.2 приводятся сведения и конструкции, связанные с группами кос. Описываются две модели группы кос: алгебраическая, основанная на образующих Артина и Бирман–Ко–Ли, и динамическая, в терминах классов отображений проколотого диска.

В разделе 2.3 рассматриваются свойства и характеристики косы, связанные с её разложением Нильсена–Тёрстона. Описываются процедуры раздутия проколов и стягивания дисков в проколы, вводятся внешняя φ_{ext} и трубчатая φ_{tub} части косы φ. Также исследуются различные формы свойства ахиральности кос и устанавливается их алгоритмическая распознаваемость.

В разделе 2.4 рассматривается конструкция замыкания косы, приводятся результаты Т. Стэнфорда и Дж. Бирман о связи алгебраических свойств кос с инвариантами их замыканий, вводится ряд свойств кос, связанных со свойствами их замыканий. Также приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории, развитой Дж. Бирман и У. Менэско. Эти сведения в дальнейшем применяются для получения пороговых признаков качественных свойств зацеплений в трёхмерной сфере.

В разделе 2.5 рассматривается закрученность — коэффициент дробного скручивания Дена на группе кос:

$$\omega_n \colon B_n \to \mathbb{R}.$$

Приводятся результаты А. Малютина, Н. Нецветаева, П. Феллера, Д. Хаббард и Т. Ито о пороговых признаках качественных свойств замыканий кос, результаты Т. Ито, П. Феллера, М. Хеддена и Т. Марка о нижних оценках топологических и алгебраических характеристик, а также описывается связь закрученности с динамическим типом косы. В качестве иллюстрации устанавливается, что закрученность обращается в нуль на альтернированных косах, что показывает ограничения этого функционала и мотивирует переход к более общему аппарату, развиваемому в главах 3–5.

Глава 3. Асимптотическое число переноса изометрического действия

Глава посвящена действиям групп на метрических пространствах: с каждым изометрическим действием группы G на метрическом пространстве X связывается асимптотическое число переноса

$$\ell_X \colon G \to [0, +\infty)$$

и рассматриваются его применения в динамике, геометрии и топологии.

В разделе 3.1 фиксируются соглашения о метрических пространствах и их изометриях, устанавливаются основные свойства чисел переноса, вводятся локсодромические элементы. Также описываются результаты Х. Мазура, Я. Мински и А. Расмуссена.

Раздел 3.2 посвящён сравнению различных действий. Описывается поведение чисел переноса при эквивариантных квазиизометрических вложениях. Полученные утверждения применяются к действиям групп на себе левыми сдвигами и естественным отображениям основных графов, отвечающих дугам и кривым.

В разделе 3.3 приводятся результаты Дж. Брока, Д. Футера, С. Шлеймера и других авторов, связывающие числа переноса действий группы классов отображений с динамикой, геометрией и топологией. На их основе получаются признаки качественных свойств и оценки численных характеристик.

Раздел 3.4 посвящён действиям на пространствах, гиперболических по Громову. Рассматриваются индуцированные действия локсодромических элементов на границе и замыкании Громова; в частности, рассматривается случай действия группы классов отображений на графе кривых. Приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения о предельных множествах и действиях общего типа. Описываются условия слабой и сверхслабой вполне разрывности, введённые М. Бествиной, К. Бромбергом и К. Фудживарой и используемые в главах 4–5 для построения квазиморфизмов и распознавания положительности стабильной коммутаторной длины. Также описывается связь между ахиральностью локсодромического элемента и ахиральностью его действия на границе Громова.

Глава 4. Квазиморфизмы и числа переноса

Глава посвящена однородным квазиморфизмам

$$f\colon G \to \mathbb{R}$$

и их применению к получению нижних оценок асимптотических чисел переноса подходящих действий $G \curvearrowright X$.

В разделе 4.1 описываются основные свойства однородных квазиморфизмов. Также описывается связь между пространством однородных квазиморфизмов и пространством вторых ограниченных когомологий группы, используемая в главе 10 для получения динамической и геометрической интерпретаций ограниченных коциклов группы кос.

В разделе 4.2 рассматриваются две основные конструкции квазиморфизмов. Первая связана с действиями групп на прямой и окружности, восходит к числу вращения Пуанкаре и приводит, в частности, к коэффициентам дробного скручивания Дена. Вторая основана на действиях на гиперболических пространствах и включает так называемые считающие квазиморфизмы, восходящие к конструкции Р. Брукса и обобщённые Д. Эпштейном и К. Фудживарой, а также квазиморфизмы де Рама, предложенные Ж. Баржем и Э. Жисом.

В разделе 4.3 исследуются условия липшицевости квазиморфизмов относительно чисел переноса изометрических действий группы. Для основных рассматриваемых конструкций и подходящих действий устанавливаются сравнения

$$|f(g)| \lesssim \ell_X(g)$$

с эффективными константами. На основе этих сравнений в следующей главе формулируется общая схема, связывающая квазиморфизмы с числами переноса посредством относительной стабильной коммутаторной длины.

Глава 5. Стабильная коммутаторная длина изометрического действия

Глава является ключевой — в ней развивается понятие стабильной коммутаторной длины изометрического действия.

В разделе 5.1 приводятся алгебраическое, топологическое и функционально-аналитическое описания классической стабильной коммутаторной длины scl на группе G.

В разделе 5.2 рассматривается формализованное Л. Ченом понятие относительной стабильной коммутаторной длины scl_A, где $A \subseteq G$. В частности, описываются условия конечности и достижимости соответствующего супремума, вводятся экстремальные квазиморфизмы.

В разделе 5.3 понятие относительной стабильной коммутаторной длины применяется к множеству нелоксодромических элементов заданного действия $G \curvearrowright X$: вводится

пространство V_X и функция

$$\mathrm{scl}_X \colon G \to [0, +\infty].$$

Устанавливаются основные свойства этой функции и исследуются условия её положительности. Показывается, что для слабо вполне разрывных действий на гиперболических графах условие $\mathrm{scl}_X(g) > 0$ эквивалентно тому, что элемент g является локсодромическим и хиральным (теорема 5.31). Также вводятся различные формы сравнимости функции scl_X с асимптотическим числом переноса ℓ_X — слабая, сильная, сверхсильная — и описываются их следствия.

В разделе 5.4 устанавливаются необходимые и достаточные условия выполнения свойств сравнения для действий на графах. В частности, доказывается теорема A, дающая признак существования некоторой константы сравнения, а также приводятся её уточнения, дающие эффективные константы сравнения.

В разделе 5.5 описывается общая схема дальнейшего применения стабильной коммутаторной длины действия, включающая построение систем действий, сравнение функций scl_X и ℓ_X, интерпретацию их положительности и построение эффективно вычислимых липшицевых квазиморфизмов. Структура глав 6–11 во многом подчинена этой схеме.

Глава 6. Трёхуровневая система действий группы классов отображений

Глава посвящена центральному объекту исследования диссертации — трёхуровневой системе графов

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\partial^\circ \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C}$$

с действиями группы классов отображений и естественными эквивариантными грубо липшицевыми отображениями между ними. Устанавливаются сравнения с эффективными константами

$$\mathrm{scl}_\partial \lesssim \ell_\partial, \qquad \mathrm{scl}_\circ \lesssim \ell_\circ, \qquad \mathrm{scl}_{\mathcal{C}} \lesssim \ell_{\mathcal{C}}.$$

В разделе 6.1 рассматривается первый уровень системы — уровень графа $\mathcal{A}_\partial$. Исследуется пространство V_∂, его элементы и функции ℓ_∂ и scl_∂. Устанавливается сравнимость, с точностью до мультипликативной константы, чисел переноса класса отображений и его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона:

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \ell_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Также находится явная равномерная оптимальная константа сравнения числа переноса и стабильной коммутаторной длины.

В разделе 6.2 проводится аналогичное исследование для второго уровня системы — уровня графа $\mathcal{A}_\partial^\circ$. В частности, доказывается сравнение

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

В разделе 6.3 показывается, что в определённом смысле различие между первыми двумя уровнями описывается коэффициентом дробного скручивания Дена ω_∂: доказываются разложение и сравнения

$$V_\partial = V_\circ \oplus \langle \omega_\partial \rangle_{\mathbb{R}}, \qquad \ell_\partial \asymp \ell_\circ + |\omega_\partial|, \qquad \mathrm{scl}_\partial \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_\partial|.$$

В разделе 6.4 рассматривается третий уровень системы, отвечающий графу $\mathcal{C}$. Исследуется пространство $V_\mathcal{C}$ и функции $\ell_\mathcal{C}$ и $\mathrm{scl}_\mathcal{C}$. В модельном случае проколотого диска устанавливается сравнение $\mathrm{scl}_\mathcal{C} \lesssim \ell_\mathcal{C}$ с равномерной константой. Приводятся примеры, показывающие, что щель в этом сравнении может быть сколь угодно большой.

Глава 7. Числа переноса и стабильные коммутаторные длины в динамике классов отображений

Глава посвящена изучению взаимосвязи асимптотических чисел переноса и стабильных коммутаторных длин трёх уровней с динамикой классов отображений. В ней устанавливаются характеризации положительности этих функций в терминах разложения Нильсена–Тёрстона; это даёт пороговые признаки качественных свойств классов отображений.

В разделе 7.1 описываются необходимые и достаточные условия положительности значений чисел переноса трёх уровней (теорема C).

В разделе 7.2 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функций scl_∂ и $\mathrm{scl}_\circ$. Вместе с тем рассматриваются классы отображений, внешне ахиральные после стягивания края, и доказывается, что коэффициент дробного скручивания Дена является V_∂-экстремальным для каждого такого класса. Кроме того, приводятся примеры, показывающие, что стабильные коммутаторные длины класса отображений и его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона в общем случае не сравнимы с точностью до мультипликативной константы:

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \not\asymp \mathrm{scl}_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) \not\asymp \mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

В разделе 7.3 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функции $\mathrm{scl}_\mathcal{C}$.

Глава 8. Числа переноса в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление»

Глава посвящена пороговым признакам и нижним оценкам геометрической и топологической сложности пар «многообразие — зацепление», выраженным через асимптотические числа переноса трёх уровней.

В разделе 8.1 приводятся результаты Д. Футера, С. Шлеймера и М. Шмалиана, описывающие взаимосвязь чисел переноса с геометрией каспа тора отображения T_φ,

отвечающего компоненте края ∂. Из них выводятся сравнения с явными константами

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C), \qquad \ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C) + |\mathrm{skew}(\partial C)|,$$

где символы $\mathrm{height}(\partial C)$ и $\mathrm{skew}(\partial C)$ обозначают соответственно высоту и горизонтальное смещение фундаментального параллелограмма евклидовой границы ∂C максимальной орисферической окрестности C рассматриваемого каспа.

В разделе 8.2 из этих сравнений выводятся сравнения с явными константами

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C), \qquad \ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C) + |\omega_\partial(\varphi)|,$$

а также устанавливаются пороговые признаки гиперболичности многообразия M_φ. Кроме того, при аналогичных пороговых условиях устанавливаются соответствия между геометрическим типом этого многообразия и динамическим типом класса отображений φ; в частности, доказывается теорема E.

В разделе 8.3 выводятся явные нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов, а также топологической энтропии:

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{vol}(M_\varphi) + 1, \qquad \ell_\circ(\varphi) \lesssim \|M_\varphi\| + 1, \qquad \ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{ent}(\varphi).$$

В частности, доказывается теорема F.

Глава 9. Числа переноса в геометрии и топологии замыканий кос

Глава посвящена детализации ряда результатов предыдущей главы для модельного случая проколотого диска. В этом случае основой подхода к получению пороговых признаков качественных свойств и нижних оценок топологических характеристик служит теория, развитая Дж. Бирман и У. Менэско. Эта теория позволяет связать с поверхностью, специальным образом расположенной в дополнении замыкания косы, однопараметрическое семейство дуг и кривых в проколотом диске; в результате удаётся получить существенно меньшие пороговые значения, чем при использовании метода из главы 8.

В разделе 9.1 устанавливаются верхние оценки чисел переноса и стабильных коммутаторных длин в терминах комбинаторной сложности выражений, задающих косы.

В разделе 9.2 эти оценки совмещаются с теорией Бирман–Менэско. В результате для зацепления L_φ, представленного косой φ, выводятся признаки нетривиальности, нерасщепимости и простоты, а также признаки минимальности по числу нитей для такого представления и признаки единственности минимального представления с точностью до сопряжения.

В разделе 9.3 с помощью теории Бирман–Менэско устанавливаются нижние оценки рода существенных поверхностей в дополнении $S^3 \setminus L_\varphi$. Это приводит к оценкам эйле-

ровой характеристики поверхностей Зейферта и числа перекрёстков зацепления L_φ:

$$\ell_\partial(\varphi) \lesssim |\chi_3(L_\varphi)| + 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \lesssim \mathrm{cr}(L_\varphi) + 1.$$

В разделе 9.4 на основе предыдущего анализа устанавливается связь между существенными торами в дополнении $S^3 \backslash L_\varphi$ и существенными мультикривыми, инвариантными при действии косы φ. Отсюда выводится соответствие между динамическим типом косы и геометрическим типом её замыкания (теорема G). В частности, это даёт признаки гиперболичности узлов, имеющие малую равномерную пороговую константу.

Глава 10. Иерархия квазиморфизмов группы кос

В главе исследуются пространства липшицевых квазиморфизмов трёх уровней иерархии

$$V_\mathcal{C} \subseteq V_\circ \subseteq V_\partial \subseteq Q(\mathrm{Mod}(S))$$

в модельном случае проколотого диска $S = D^2_n$ и описывается систематический источник таких квазиморфизмов.

В разделе 10.1 уточняется описание этих пространств. В частности, доказывается, что пространство липшицевых квазиморфизмов первого уровня совпадает с пространством ядерных квазиморфизмов, введённым А. Малютиным:

$$V_\partial = Q^\partial_n.$$

Устанавливается, что значения липшицевых квазиморфизмов первых двух уровней на косе и её трубчатой части совпадают; в частности, выводятся соотношения

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \mathrm{scl}_\partial(\varphi_{\mathrm{tub}}), \qquad \mathrm{scl}_\circ(\varphi) = \mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$

На основе результата П. Феллера устанавливается, что для любой косы с ненулевой закрученностью, внешне ахиральной после стягивания края, закрученность ω_n является единственным с точностью до пропорциональности V_∂-экстремальным квазиморфизмом.

В разделе 10.2 рассматриваются операторы пространств $Q(\mathrm{Mod}(S))$, предложенные А. Малютиным, И. Дынниковым и В. Шастиным, и описываются проекторы

$$Q(\mathrm{Mod}(S)) \to V_\partial \to V_\circ$$

на первые два уровня иерархии. В качестве иллюстрации даётся интерпретация классической стабильной коммутаторной длины брунновых кос и трёхнитевых кос: для таких кос устанавливаются сравнения

$$\mathrm{scl} \asymp \mathrm{scl}_\partial \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_n|.$$

Далее приводится разложение пространства Q_n однородных квазиморфизмов группы кос, предложенное А. Малютиным, из которого выводится разложение

$$Q_n \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^\circ \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle \omega_k \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle \exp \rangle_{\mathbb{R}},$$

где $Q_n^\circ := V_\circ$, а также теорема H. Оставшаяся часть главы посвящена применению этих разложений и проекторов к конкретным семействам эффективно вычислимых квазиморфизмов группы кос.

В разделе 10.3 рассматривается предложенное И. Дынниковым и В. Шастиным семейство так называемых квазиморфизмов типа закрученности, к числу которых относятся полная закрученность после заклеивания края $\mathcal{P}^n$ и внутренняя закрученность $\mathcal{E}^n$. Исследуется структура соответствующих пространств и их проекций на первые два уровня, а также устанавливаются результаты о линейной независимости полученных квазиморфизмов.

В разделе 10.4 рассматривается семейство так называемых квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама, предложенное Ж.-М. Гамбаду и Э. Жисом. Исследуются свойства таких квазиморфизмов и структура соответствующих пространств и их проекций на первые два уровня иерархии. Кроме того, описываются линейные комбинации квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама, липшицевы относительно числа переноса ℓ_∂, и устанавливается нетривиальность их проекций на второй уровень иерархии. Полученные результаты дают нетривиальные примеры эффективно вычислимых липшицевых квазиморфизмов, а также позволяют связать классические конструкции четырёхмерной топологии с динамикой гомеоморфизмов поверхностей и трёхмерной гиперболической геометрией.

Глава 11. Приложения в геометрии и топологии пар «многообразие — зацепление»

Глава посвящена приложениям разработанного аппарата к задачам трёхмерной геометрии и топологии.

В разделе 11.1 исследуются гипотезы C. Бигелоу. Расширяется подход Т. Ито, использованный им для доказательства гипотезы (E), и с помощью результатов о квазиморфизмах доказывается гипотеза (C) для внешне хиральных кос. Показывается, что на общий случай этот подход не распространяется, и строятся ахиральные контрпримеры к гипотезе (C). Затем с помощью полученных результатов о числах переноса доказывается теорема I, из которой, в частности, следует гипотеза (C′).

Раздел 11.2 посвящён построению узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и чьи геометрические и топологические характеристики не ограничены. Для этого исследуются нормальные подгруппы группы кос и устанавливаются необходимые для дальнейшего изложения свойства сигнатуры Левина–Тристрама кос из ядра представ-

ления Бурау. В сочетании с результатами о квазиморфизмах и числах переноса этот анализ приводит к построению требуемых семейств узлов. В частности, доказывается теорема J.

В разделе 11.3 теоремы сравнения с эффективными и равномерными константами, установленные в главе 6, объединяются с результатами глав 8–9. Это даёт признаки качественных свойств и явные нижние оценки динамических, геометрических и топологических характеристик в терминах однородных квазиморфизмов; в частности,

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim |\chi_3(L_\varphi)| + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \mathrm{cr}(L_\varphi) + 1$$

для всех нетривиальных $f \in V_\partial$ и

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \mathrm{vol}(M_\varphi) + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \|M_\varphi\| + 1, \qquad \frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \lesssim \mathrm{ent}(\varphi)$$

для всех нетривиальных $f \in V_\circ$.

Благодарности

Часть результатов настоящей работы восходит к двухнедельному воркшопу «Асимптотический и структурный анализ в геометрической топологии», проходившему в Международном математическом центре «Сириус» в 2025 году. В работе исследовательской группы участвовали Д. Аксёнова, А. Малютин, А. Рябичев и И. Алексеев. Среди прочего, Андрей Рябичев и Илья Алексеев изучали возможные продолжения так называемой внутренней закрученности с группы кос диска на группы кос более общих поверхностей, что привело к вопросам о взаимосвязи так называемой внутренней закрученности с эйлеровой характеристикой поверхностей Зейферта замыканий кос. Совместная работа привела к наблюдениям, указывающим на возможность распространения ряда теорем Т. Ито о замыканиях кос на ядерные квазиморфизмы. Некоторые результаты этих совместных усилий представлены в настоящей работе в обобщённой форме.

Я благодарен А. Малютину за проясняющие обсуждения так называемого целочисленного квантования, разложения пространства квазиморфизмов группы кос, классификации Нильсена–Тёрстона и коэффициентов дробного скручивания Дена. Я также благодарю А. Рябичева за сотрудничество, в ходе которого возникла часть вопросов и конструкций, развиваемых в настоящей работе, за помощь в доказательстве вариантов теоремы 5.42, леммы 9.2 и предложения 10.6, а также за внимание к работе и вычитку ранних её версий.

Я благодарен научным сообществам ПОМИ РАН, математического центра Эйлера и факультета математики и компьютерных наук СПбГУ за плодотворную рабочую среду.

Наконец, я благодарю А. Айвазяна, Д. Аксёнову, В. Ионина и А. Миллера за терпение, поддержку и ободрение.

ГЛАВА 1 КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ДИНАМИКА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

В настоящей главе вводятся основные топологические, динамические и геометрические объекты и конструкции, используемые далее в диссертации.

В разделе 1.1 фиксируются соглашения о поверхностях, дугах и кривых и вводятся графы закреплённых и скользящих граничных дуг, граф кривых, граф дуг и кривых. Естественные отображения между этими графами будут лежать в основе трёхуровневой системы действий, исследуемой в главе 6.

В разделе 1.2 вводится группа классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ поверхности S и приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения и понятия, связанные с динамикой её элементов: классификация и разложение Нильсена–Тёрстона, типы ахиральности, коэффициенты дробного скручивания Дена и топологическая энтропия.

В разделе 1.3 с каждым классом отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ связываются трёхмерные объекты: тор отображения T_φ и, для поверхности с единственной компонентой края, пара из замкнутого трёхмерного многообразия и зацепления в нём

$$L_\varphi \subset Y_\varphi.$$

Приводятся сведения из гиперболической геометрии и формулируются известные ранее качественные и количественные соответствия между динамикой классов отображений и свойствами соответствующих им трёхмерных объектов; эти соответствия будут распространены на более общие типы объектов и функционалов в главах 8 и 9.

Для модельного случая проколотого диска часть этих понятий и конструкций будет подробнее рассмотрена в главе 2.

1.1 Поверхности, дуги, кривые и комбинаторные графы

Под *поверхностью* S, если не оговорено иное, понимается ориентированная связная компактная поверхность с $b \geqslant 0$ компонентами края, с $n \geqslant 0$ попарно различными отмеченными точками $z_1, \ldots, z_n$ во внутренности и конечным числом отмеченных точек на крае ∂S; предполагается, что на каждой компоненте края отмечена ровно одна точка. Отмеченные точки z_i во внутренности будем называть *проколами*. Как это принято, мы свободно переходим между поверхностью S и соответствующей проколотой поверхностью $S \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Символом $S^\dagger$ обозначается поверхность, полученная из S стягиванием каждой компоненты края в отдельную новую отмеченную точку (прокол). Естественное отображение $S \to S^\dagger$ называется *отображением стягивания края*.

Символом $\Sigma_{g,b,n}$ обозначается поверхность рода g с b компонентами края и n проколами. В случае $n = 0$ используется обозначение $\Sigma_{g,b}$. Пусть $D^2_n := \Sigma_{0,1,n}$ — ориентированный диск с $n \geqslant 1$ проколами и $S^2_m := \Sigma_{0,0,m}$ — ориентированная сфера с $m \geqslant 1$

проколами. Ориентированный диск без проколов обозначается символом $D^2 := \Sigma_{0,1}$.

Сложностью поверхности $S = \Sigma_{g,b,n}$ называется величина

$$\xi(S) := 3g - 3 + b + n.$$

Поверхность S называется *спорадической*, если $\xi(S) \leqslant 1$; в этом случае либо $g = 0$ и $b+n \leqslant 4$, либо $g = 1$ и $b + n \leqslant 1$. Назовём поверхность S *исключительной*, если $g = 0$ и $b + n \leqslant 3$. В частности, D^2_n и S^2_m являются спорадическими при $n \leqslant 3$ и $m \leqslant 4$ и исключительными при $n \leqslant 2$ и $m \leqslant 3$.

Эйлеровой характеристикой поверхности S называется величина[1]

$$\chi(S) := -(2g - 2 + b + n).$$

Неравенство $\chi(S) \geqslant 0$ выполняется в том и только в том случае, если либо $g = 0$ и $b + n \leqslant 2$, либо $g = 1$ и $b = n = 0$. Равенство $\chi(S) = -1$ эквивалентно тому, что либо $g = 0$ и $b+n = 3$, либо $g = 1$ и $b+n = 1$. В частности, для любой неисключительной поверхности S с единственной компонентой края выполняется неравенство $\chi(S) < 0$, причём если $S \neq \Sigma_{1,1}$, то $\chi(S) \leqslant -2$.

Мы предполагаем известными такие базовые понятия гиперболической геометрии поверхностей, как гиперболические структуры и геодезические ламинации. При $\chi(S) < 0$ поверхность $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ является *гиперболической*, то есть допускает метрически полную гиперболическую структуру конечной площади с геодезическим краем; см. [117, Section 1.1.3]. Если поверхность S не имеет края и $\chi(S) < 0$, символом $\mathcal{T}(S)$ обозначается её *пространство Тейхмюллера*, то есть пространство изотопических классов отмеченных гиперболических структур на $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$; см. [117, Chapter 10].

Если край ∂S поверхности S непуст, символом ∂ обозначается её выделенная компонента края, а символом x_* обозначается отмеченная точка на ∂.

1.1.1 Дуги и кривые

Под *дугой* на S мы понимаем образ отображения отрезка $[0, 1]$, сужение которого на $(0, 1)$ является вложением во внутренность поверхности $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$, причём концы дуги (то есть образы точек 0 и 1) совпадают с проколами z_i или отмеченными точками на крае; отметим, что мы не исключаем совпадения концов дуги. Дуга называется *граничной*, если хотя бы один её конец лежит на крае. Дуга называется *неразделяющей*, если поверхность, полученная разрезанием S по этой дуге, связна. Дуга называется *несущественной*, если её можно изотопией, неподвижной на концах, стянуть в прокол или на край.

Под *кривой* на S мы понимаем простую замкнутую кривую, то есть образ вложения окружности S^1 во внутренность проколотой поверхности $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$. Кривая

[1] В этом определении отмеченные точки во внутренности интерпретируются как проколы.

называется *несущественной*, если она стягивается в точку, в прокол или на край.

Отметим несколько элементарных свойств существенных дуг и кривых, которые будут использоваться в дальнейшем. Если S имеет выделенную компоненту края ∂ и $S \neq D^2$, то S содержит существенную граничную дугу, инцидентную компоненте ∂. Далее, при стягивании некоторого набора компонент края поверхности S в отдельные проколы существенность дуг и кривых сохраняется: дуга или кривая существенна тогда и только тогда, когда существен её образ. Наконец, если поверхность S является неисключительной, то для любой существенной дуги α на S хотя бы одна из компонент границы регулярной окрестности объединения дуги α с компонентами края и проколами, содержащими её концы, является существенной кривой.

Под *мультикривой* мы понимаем непустое объединение попарно непересекающихся кривых. Мультикривая называется *несущественной*, если она содержит несущественную компоненту или две её компоненты параллельны, то есть вместе ограничивают вложенное в $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$ кольцо.

Две дуги называются *непересекающимися*, если их внутренности не пересекаются. Две непересекающиеся дуги называются *параллельными*, если внутренность одной из областей, на которые их объединение разбивает поверхность $S\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$, гомеоморфна открытому диску. Под *мультидугой* мы понимаем непустое объединение попарно непересекающихся дуг. Мультидуга называется *несущественной*, если она содержит несущественную дугу или две её дуги параллельны.

Если не оговорено иное, все кривые, дуги, мультикривые и мультидуги предполагаются существенными. Как правило, дуги и кривые рассматриваются без фиксированной ориентации.

Мы рассматриваем мультикривые и мультидуги с точностью до изотопии поверхности S, неподвижной на крае ∂S и на внутренних отмеченных точках (проколах)[2]. Допуская вольность терминологии, в дальнейшем мы иногда отождествляем мультикривые и мультидуги с соответствующими изотопическими классами.

Будем говорить, что две дуги на S являются *свободно изотопными*, если их образы при отображении стягивания края изотопны. Нам потребуется следующее наблюдение.

Пусть на поверхности S имеется выделенная компонента края ∂ с отмеченной точкой x_*, и пусть α и β — неизотопные непересекающиеся граничные дуги, соединяющие точку x_* с одним и тем же проколом z. Вытолкнув их общий конец x_* во внутренность поверхности, получим простую петлю δ с базовой точкой в проколе z. Дуги α и β свободно изотопны в том и только в том случае, если компонента связности дополнения открытой регулярной окрестности петли δ, инцидентная компоненте края ∂, является кольцом $\Sigma_{0,2}$. В частности, если дуги α и β не являются свободно изотопными, то в этой компоненте можно выбрать существенную граничную дугу с обоими концами в точке x_*, не пересекающую ни дугу α, ни дугу β.

[2]В частности, предполагается, что концы дуг «закреплены» в отмеченных точках на крае.

1.1.2 Графы, отвечающие дугам и кривым

Мы предполагаем известными такие базовые понятия теории графов, как пути, циклы и компоненты связности.

В настоящей работе под *графом* понимается множество вместе с симметричным антирефлексивным бинарным отношением [220, Definition 3.1.1]. Элементы множества называются *вершинами*, отношение называется *отношением смежности*, неупорядоченные пары смежных вершин называются *рёбрами*, а упорядоченные — *направленными рёбрами*. Таким образом, мы отличаем комбинаторные графы X, являющиеся дискретными пространствами, от их *геометрических реализаций* $|X|$ — одномерных симплициальных комплексов без петель и кратных рёбер [220, Definition 5.3.6]. Если граф связен, его множество вершин снабжается *метрикой кратчайшего пути*, в которой расстояние между смежными вершинами равно единице [220, Definition 5.2.1]; эта метрика стандартным образом продолжается до метрики на геометрической реализации. *Деревом* называется связный граф без циклов. Путь в графе называется *геодезическим*, если его длина равна расстоянию между его концами. Число вершин, смежных с заданной вершиной, называется её *валентностью*. Граф называется *локально конечным*, если валентность каждой его вершины конечна.

Свяжем с каждой поверхностью S следующие графы.

Граф закреплённых граничных дуг

Определим *граф дуг с закреплёнными концами* $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*(S)$ как граф, вершинами которого являются изотопические классы существенных дуг на S. Две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие изотопические классы имеют непересекающихся представителей. Граф $\mathcal{A}^*(S)$ пуст в том и только в том случае, если либо поверхность S не имеет ни края, ни проколов, либо $S = D^2$, либо $S = S^2_1$. Во всех остальных случаях граф $\mathcal{A}^*(S)$ непуст и связен.[3]

Предположим, что поверхность S имеет выделенную компоненту края ∂. Определим *граф дуг, закреплённых на компоненте* ∂, как индуцированный подграф

$$\mathcal{A}_\partial = \mathcal{A}_\partial(S)$$

графа дуг с закреплёнными концами $\mathcal{A}^*$, чьи вершины являются изотопическими классами дуг, у которых хотя бы один конец совпадает с отмеченной точкой на ∂. В работе [282] граф $\mathcal{A}_\partial$ называется *pointed arc graph*. Если граф $\mathcal{A}_\partial(S)$ непуст, то он связен. Будем иногда сокращать название графа $\mathcal{A}_\partial$ до *графа закреплённых граничных дуг*.

Символом $\mathcal{NA}_\partial$ обозначается индуцированный подграф графа $\mathcal{A}_\partial$, вершинами ко-

[3] В принятом здесь соглашении граф $\mathcal{A}^*$ отличается от классического графа дуг (см. ниже) тем, что концы дуг на крае могут лежать только в отмеченных точках. В результате скручивание Дена вдоль компоненты края действует на $\mathcal{A}^*$ нетривиально; ср. [117, p. 134]. То же соглашение используется в работах [158, p. 159], [162], [163, p. 248], [103, p. 29] и [114, p. 1405]; ср. [277, p. 60].

торого являются изотопические классы неразделяющих граничных дуг.

Граф скользящих граничных дуг

Определим *граф дуг* (или *граф дуг со скользящими концами*) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$ как фактор-граф[4] графа $\mathcal{A}^*$, полученный отождествлением свободно изотопных граничных дуг [281, 241, 117, 166]. Отображение стягивания края индуцирует изоморфизм $\mathcal{A}(S) \cong \mathcal{A}(S^\dagger)$. Если граф $\mathcal{A}(S)$ непуст, то он связен.

Предположим, что поверхность S имеет выделенную компоненту края ∂. Определим *граф дуг, инцидентных компоненте* ∂, как индуцированный подграф

$$\mathcal{A}^\circ_\partial = \mathcal{A}^\circ_\partial(S)$$

графа дуг со скользящими концами $\mathcal{A}$, вершинами которого являются классы свободной изотопии дуг, у которых хотя бы один из концов лежит в отмеченной точке на компоненте ∂.[5] Иными словами, граф $\mathcal{A}^\circ_\partial$ представляет собой фактор-граф графа $\mathcal{A}_\partial$, полученный отождествлением свободно изотопных граничных дуг. Граф $\mathcal{A}^\circ_\partial$ используется в работах [135, 10, 206, 91]; в работе [282] он называется *restricted arc graph*, а в работе [32] — *графом петель и лучей*. Если граф $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ непуст, он связен. Будем иногда сокращать название графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$ до *графа скользящих граничных дуг*.

С графом $\mathcal{A}^\circ_\partial$ также связаны два его индуцированных подграфа $\mathcal{R}_\partial(S)$ и $\mathcal{L}_\partial(S)$. Граф $\mathcal{R}_\partial(S)$ отвечает дугам с несовпадающими концами; он возникает в работах [77, 31, 32, 80, 33] и называется *графом лучей* (англ. *ray graph*). Граф $\mathcal{L}_\partial(S)$ отвечает дугам с совпадающими концами; он используется в работах [32, 279, 33, 271] под названием *граф петель* (англ. *loop graph*) и в работе [10] под названием *относительный граф дуг* (англ. *relative arc graph*).

Граф кривых

Определим *граф кривых*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(S)$$

следующим образом [160, 157, 158, 185, 186, 188, 242, 240, 246, 8]. Его вершинами являются изотопические классы существенных кривых на S. Если поверхность S является неспорадической, две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие изотопические классы имеют непересекающихся представителей. Для спорадических поверхностей S любые две неизотопные кривые пересекаются, поэтому используется другое определение графа кривых; см. [117, Section 4.1.1]. В частности, для $S = D^2_3$ и $S = S^2_4$ вершины считаются смежными, если соответствующие им изотопические

[4] Предполагается, что петли и дублирующие рёбра, возникающие в результате факторизации, удаляются.

[5] Символ $\circ$ в обозначении графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$ отсылает к новому проколу, полученному в результате стягивания компоненты края ∂ в точку.

классы имеют представителей, пересекающихся трансверсально и ровно в двух точках. Кроме того, граф кривых любой исключительной поверхности пуст, а для неисключительных спорадических поверхностей граф $\mathcal{C}$ изоморфен так называемому графу Фарея. Отметим, что отображение стягивания края индуцирует изоморфизм $\mathcal{C}(S) \cong \mathcal{C}(S^\dagger)$. Если граф $\mathcal{C}(S)$ непуст, то он связен.

Определим *граф дуг с закреплёнными концами и кривых* $\mathcal{AC}^* = \mathcal{AC}^*(S)$ следующим образом [191, 88]. Пусть множество его вершин является объединением множеств вершин графов $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{C}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие изотопические классы имеют непересекающихся представителей. Если поверхность S отлична от тора[6] и граф $\mathcal{AC}^*(S)$ непуст, то он связен.

Замечание 1.1. Если поверхность S является неспорадической, то граф $\mathcal{AC}^*(S)$ содержит $\mathcal{C}(S)$ в качестве индуцированного подграфа. ◊

Определим *граф дуг и кривых*

$$\mathcal{AC} = \mathcal{AC}(S)$$

как фактор-граф графа $\mathcal{AC}^*$, полученный отождествлением свободно изотопных граничных дуг [207, 241, 291]. Отметим, что отображение стягивания края индуцирует изоморфизм $\mathcal{AC}(S) \cong \mathcal{AC}(S^\dagger)$. Если поверхность S отлична от тора и граф $\mathcal{AC}(S)$ непуст, то он связен.

Замечание 1.2. Для любой поверхности S с выделенной компонентой края ∂ граф $\mathcal{AC}(S)$ содержит $\mathcal{A}^\circ_\partial$ в качестве индуцированного подграфа. ◊

Наконец, отметим, что в литературе каждый из описанных выше графов неспорадической поверхности обычно наделяется стандартной структурой *флагового симплициального комплекса*: конечное множество вершин объявляется симплексом в том и только в том случае, если оно является кликой, то есть любые две его вершины соединены ребром; иными словами, симплексы этих комплексов соответствуют конечным семействам попарно непересекающихся дуг и кривых на S. В настоящей работе рассматриваются только одномерные остовы этих симплициальных комплексов.

1.2 Динамика классов отображений

Группой классов отображений называется группа

$$\mathrm{Mod}(S) := \pi_0\left(\mathrm{Homeo}_+(S, \partial S, \{z_1, \ldots, z_n\})\right)$$

изотопических классов автогомеоморфизмов поверхности S, которые сохраняют её ориентацию, неподвижны на крае ∂S и сохраняют множество отмеченных точек.

[6] Для тора граф $\mathcal{AC}^*$ представляет собой бесконечное множество изолированных вершин.

Мы предполагаем известными такие базовые понятия теории групп классов отображений поверхностей, как скручивания Дена и полускручивания [117].

Отображение стягивания края $S \to S^\dagger$ индуцирует *гомоморфизм стягивания края* (англ. *capping homomorphism*)

$$\mathrm{Cap}\colon \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(S^\dagger).$$

Его образ совпадает с подгруппой $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$, состоящей из классов отображений, фиксирующих каждый из новых проколов; эта подгруппа имеет конечный индекс. Ядро гомоморфизма Cap порождается скручиваниями Дена вдоль компонент края ∂S и содержится в центре группы $\mathrm{Mod}(S)$; см. [117, Proposition 3.19]. Если поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂, то ядро порождается скручиванием Дена T_∂ вдоль компоненты ∂:

$$\ker(\mathrm{Cap}) = \langle T_\partial \rangle.$$

Если край ∂S непуст, то группа $\mathrm{Mod}(S)$ не имеет кручения [117, Corollary 7.3].

Группа классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$ действует на множестве изотопических классов мультикривых и мультидуг на S. Когда мы говорим, что класс отображений *сохраняет* мультикривую или мультидугу, подразумевается, что он оставляет неподвижным соответствующий изотопический класс. В этом определении допускается, что класс отображений переставляет компоненты сохраняемой мультикривой или мультидуги. Кроме того, мы не требуем сохранения ориентации мультикривых и мультидуг; при необходимости сохранение ориентации оговаривается отдельно.

Замечание 1.3. Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. Если граничная дуга получается из другой действием некоторой степени скручивания Дена T_∂, то они свободно изотопны. Если второй конец каждой из этих дуг лежит в некотором проколе, то верно и обратное: из их свободной изотопности следует, что одна получается из другой действием некоторой степени скручивания Дена; ср. [117, p. 134]. Кроме того, если две такие свободно изотопные дуги не пересекаются и их вторые концы совпадают, то они либо изотопны, либо одна получается из другой действием скручивания Дена.

Тем самым отображение стягивания края индуцирует взаимно однозначное соответствие между орбитами действия группы $\langle T_\partial \rangle$ на граничных дугах с несовпадающими концами и свободными изотопическими классами таких дуг. Кроме того, прообраз свободного изотопического класса граничных дуг с совпадающими концами является объединением двух $\langle T_\partial \rangle$-орбит, соответствующих двум вариантам относительного обхода края ∂S. $\Diamond$

Действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на множестве изотопических классов мультикривых и мультидуг на S индуцирует её действие на графах

$$\mathcal{A}^*(S), \qquad \mathcal{A}(S), \qquad \mathcal{AC}^*(S),$$

$$\mathcal{A}_\partial(S), \qquad \mathcal{A}^\circ_\partial(S), \qquad \mathcal{AC}(S), \qquad \mathcal{C}(S),$$

$$\mathcal{NA}_\partial(S), \qquad \mathcal{R}_\partial(S), \qquad \mathcal{L}_\partial(S),$$

если соответствующие графы определены и непусты.

Замечание 1.4. Если поверхность S с единственной компонентой края является исключительной, то группа $\mathrm{Mod}(S)$ абелева, а если S является неисключительной и спорадической, то $S = \Sigma_{1,1}$ или $S = D^2_3$. Кроме того, имеется естественный изоморфизм [117, Section 9.4.1]

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_{1,1}) \cong \mathrm{Mod}(D^2_3).$$

Взаимосвязи этого изоморфизма с рассматриваемыми действиями, описанные в [117] и [183], позволяют в случае $S = \Sigma_{1,1}$ свести анализ большинства вопросов, основных для настоящей диссертационной работы, к случаю $S = D^2_3$. В этом смысле условие $S \neq \Sigma_{1,1}$, предполагаемое в ряде дальнейших результатов, не приводит к потере общности. $\Diamond$

Лемма 1.5. Для любой неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂ и для любого графа $X \in \{\mathcal{A}_\partial, \mathcal{A}^\circ_\partial, \mathcal{AC}, \mathcal{C}\}$ группа $\mathrm{Mod}(S)$ порождается элементами, имеющими неподвижную вершину в X. Кроме того, её действие на графе X имеет конечное число орбит вершин и рёбер.

Доказательство. Согласно [117, Proposition 3.19] и [117, Corollary 4.15], группа $\mathrm{Mod}(S)$ порождается скручиваниями Дена вдоль существенных кривых, полускручиваниями вдоль дуг, соединяющих пары различных проколов, и скручиваниями Дена вдоль компонент края.

Пусть h_α — полускручивание вдоль дуги α, соединяющей два различных прокола. Граница регулярной окрестности дуги α является существенной кривой, поскольку поверхность S является неисключительной; её изотопический класс сохраняется полускручиванием h_α. Поэтому h_α имеет неподвижную вершину в графах $\mathcal{C}$ и $\mathcal{AC}$. Кроме того, вне регулярной окрестности дуги α можно выбрать существенную граничную дугу, закреплённую на компоненте ∂; её изотопический класс сохраняется полускручиванием h_α, поэтому h_α имеет неподвижную вершину также в $\mathcal{A}_\partial$ и $\mathcal{A}^\circ_\partial$.

Каждое скручивание Дена T_γ вдоль существенной кривой γ сохраняет вершину графа $\mathcal{C}$, отвечающую этой кривой, а значит, и соответствующую вершину графа $\mathcal{AC}$. Кроме того, можно выбрать существенную граничную дугу α, не пересекающую кривую γ и закреплённую на компоненте ∂; изотопический класс этой дуги сохраняется скручиванием T_γ. Следовательно, T_γ имеет неподвижную вершину как в $\mathcal{A}_\partial$, так и в $\mathcal{A}^\circ_\partial$.

Скручивание T_δ вдоль компоненты края δ, отличной от ∂, действует на графах $\mathcal{C}$, $\mathcal{AC}$ и $\mathcal{A}^\circ_\partial$ тривиально и сохраняет некоторую существенную граничную дугу, закреплённую на компоненте ∂ и не пересекающую компоненту δ. Остаётся рассмотреть скручивание Дена T_∂.

При $S \neq \Sigma_{1,1}$ скручивание Дена T_∂ может быть выражено через остальные образующие с помощью так называемого «соотношения фонаря» (англ. lantern relation) [117, Proposition 5.1]. При $S = \Sigma_{1,1}$ аналогичное выражение следует из [117, Proposition 4.12]. Это доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заметим, что орбита вершины или ребра определяется топологическим типом соответствующей дуги, кривой или пары дуг и кривых: топологическими типами компонент дополнения, распределением между ними проколов и компонент края, а для дуг также типами их концов [117, Section 1.3]. На фиксированной поверхности имеется лишь конечное число таких типов. Для спорадических поверхностей в случае графа кривых вместо непересечения рассматривается предусмотренный определением минимальный тип пересечения; возможных топологических типов таких пар также конечное число. Следовательно, действие на вершинах и рёбрах имеет конечное число орбит. □

1.2.1 Классификация Нильсена–Тёрстона

Опишем необходимые для дальнейшего изложения сведения, связанные с классификацией Нильсена–Тёрстона классов отображений поверхностей. Согласно этой классификации, каждый элемент группы $\mathrm{Mod}(S)$ относится хотя бы к одному из следующих *динамических типов*: периодическому, приводимому или псевдоаносовскому.

Приводимый тип

Класс отображений поверхности S называется *приводимым*, если он сохраняет некоторую существенную мультикривую, и *неприводимым* в противном случае. Назовём класс отображений *связно приводимым*, если он сохраняет некоторую существенную кривую, и *расщепимым*, если он сохраняет некоторую существенную граничную дугу.

Лемма 1.6. Если класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S сохраняет некоторую дугу α, то он также сохраняет и некоторую кривую. В частности, если класс φ является расщепимым, то он также является связно приводимым.

Доказательство. Действительно, если оба конца дуги α лежат в различных проколах, то φ сохраняет границу регулярной окрестности объединения этой дуги и её концевых проколов. Если оба конца дуги α лежат в одном и том же проколе, то φ сохраняет существенную компоненту границы регулярной окрестности объединения этой дуги и её концевого прокола; такая компонента существует в силу существенности дуги α и предположения, что поверхность S является неисключительной. Если хотя бы один конец дуги α лежит на крае, то φ сохраняет некоторую существенную компоненту границы

регулярной окрестности объединения $\alpha \cup \Delta$, где $\Delta \subseteq \partial S$ обозначает объединение тех компонент края, на которых лежат концы дуги α. □

Периодический тип

Определение *периодических* классов отображений поверхности S разбивается на два случая в зависимости от того, является ли край ∂S пустым. Для поверхностей без края класс периодичен в том и только в том случае, если он имеет конечный порядок. Для поверхностей с непустым краем группа $\mathrm{Mod}(S)$ не имеет кручения, поэтому используется другое определение: класс периодичен тогда и только тогда, когда его образ при гомоморфизме стягивания края имеет конечный порядок.

Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. В этом случае класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является периодическим тогда и только тогда, когда существуют такие $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, что $\varphi^q = T_\partial^p$. Если $S \neq D^2$ и $S \neq D_1^2$, то рациональное число p/q является инвариантом класса φ; будем говорить, что φ является *периодическим с параметром* p/q. Поскольку группа $\mathrm{Mod}(S)$ не имеет кручения, класс φ тривиален тогда и только тогда, когда $p = 0$.

Лемма 1.7. Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. Тогда любой нетривиальный периодический класс на S нерасщепим.

Доказательство. Если $S = D^2$ или $S = D_1^2$, то утверждение выполняется. Пусть теперь класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является периодическим с параметром p/q, где $p \neq 0$. Если бы φ был расщепим, то и его степень φ^q была бы расщепима и, следовательно, то же было бы верно для класса T_∂^p. Это противоречит тому, что при $p \neq 0$ скручивание Дена T_∂^p изменяет изотопический класс любой граничной дуги; ср. замечание 1.3. □

Псевдоаносовский тип

По теореме Тёрстона, если класс отображений поверхности S не является ни периодическим, ни приводимым, то он является *псевдоаносовским* [117, Chapter 13]. Если $\chi(S) < 0$, то для некоторой (следовательно, любой) гиперболической структуры на S такой класс φ сохраняет две трансверсальные минимальные геодезические ламинации[7]

$$(L^s, \mu^s), \qquad (L^u, \mu^u),$$

заполняющие поверхность S, и существует единственное число $\lambda = \lambda(\varphi) > 1$, для которого

$$\varphi(L^s, \mu^s) = (L^s, \lambda^{-1}\mu^s), \qquad \varphi(L^u, \mu^u) = (L^u, \lambda\mu^u).$$

Ламинации L^s и L^u называются соответственно *устойчивой* и *неустойчивой*, а число $\lambda(\varphi)$ — *дилатацией* или *коэффициентом растяжения* псевдоаносовского класса φ; см. [118, 87, 21, 117, 1]. Случай, когда S является тором, см. в [117, Section 13.1]. На

[7] Группа $\mathrm{Mod}(S)$ действует на множестве геодезических на S естественным образом.

остальных поверхностях (для которых $g = 0$ и $b + n \leqslant 2$) любой класс отображений является периодическим или приводимым. Эквивалентные описания псевдоаносовских классов могут быть даны на языках измеримых слоений [118, 21, 117] и железнодорожных путей (англ. train track) [268, 39, 154].

Таким образом, каждый класс отображений является либо периодическим, либо псевдоаносовским, либо приводимым непериодическим. Отметим, что динамический тип класса отображений сохраняется при сопряжениях, при возведениях в ненулевую степень и при применении гомоморфизма стягивания края.

1.2.2 Разложение Нильсена–Тёрстона и внешняя компонента

С каждым приводимым непериодическим классом отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ связан канонически определённый изотопический класс мультикривых $\mathrm{CRS}(\varphi)$, сохраняемый классом φ и называемый *канонической приводящей системой*; см. [117, Section 13.2.2]. Этот класс можно охарактеризовать следующим образом: кривая α является компонентой некоторого представителя класса мультикривых $\mathrm{CRS}(\varphi)$ в том и только в том случае, если она входит в некоторую мультикривую, сохраняемую классом φ, и для любой кривой β, пересекающей — даже после произвольной изотопии — кривую α, выполняется соотношение

$$\varphi^m(\beta) \neq \beta$$

при каждом $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Отметим, что

$$\mathrm{CRS}(\varphi^m) = \mathrm{CRS}(\varphi), \qquad \mathrm{CRS}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \psi(\mathrm{CRS}(\varphi))$$

для любых $m \neq 0$ и $\psi \in \mathrm{Mod}(S)$. Разрезание поверхности S по мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$ приводит к так называемому *разложению Нильсена–Тёрстона* класса отображений φ; см. [117, Corollary 13.3].

Теперь предположим, что на поверхности S имеется выделенная компонента края ∂. Назовём *внешней областью* $E = E(\varphi, \partial) \subseteq S$ компоненту поверхности, полученной разрезанием S по мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$, которая содержит компоненту края ∂. Назовём *внешней инвариантной мультикривой* $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\varphi) = \mathrm{C}(\varphi, \partial)$ объединение тех компонент мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$, которые примыкают к области E. Отметим, что

$$\mathrm{C}(\varphi^m) = \mathrm{C}(\varphi), \qquad \mathrm{C}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \psi(\mathrm{C}(\varphi))$$

для любых $m \neq 0$ и $\psi \in \mathrm{Mod}(S)$.

Замечание 1.8. Из характеризации мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$ следует, что если некоторая ненулевая степень класса φ сохраняет некоторую кривую β, то существует изотопия, устраняющая все пересечения кривой β с мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$, а значит, и все пересечения кривой β с мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. $\lozenge$

Обозначим символом E' поверхность[8], полученную из E стягиванием в отдельный прокол каждой компоненты края, соответствующей компоненте мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. Такое стягивание задаёт гомоморфизм[9]

$$\mathrm{Stab}(\mathrm{C}(\varphi)) \to \mathrm{Mod}(E').$$

Образ этого гомоморфизма обозначается символом $\mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$. Образ $\varphi_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$ класса φ является периодическим или псевдоаносовским и называется *внешней компонентой* разложения Нильсена–Тёрстона класса φ, или *компонентой, инцидентной* ∂. Для периодических и псевдоаносовских классов отображений φ положим

$$\mathrm{C}(\varphi) = \varnothing, \qquad E = E' := S, \qquad \varphi_{\mathrm{ext}} := \varphi, \qquad \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E') := \mathrm{Mod}(E').$$

Наконец, отметим, что $|\chi(E')| \leqslant |\chi(S)|$.

Лемма 1.9. Пусть неисключительная поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. Тогда для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ следующие условия эквивалентны:

1. класс φ расщепим;
2. его внешняя компонента φ_{ext} тривиальна.

Доказательство. Покажем, что из утверждения (1) следует утверждение (2).

Предположим, что класс φ расщепим. Если φ является периодическим, то $\varphi = 1$ по лемме 1.7. В этом случае по определению $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi = 1$.

Пусть теперь класс φ не является периодическим. По лемме 1.6 он является приводимым. Выберем гомеоморфизм $h\colon S \to S$, представляющий класс φ и оставляющий неподвижной некоторую существенную граничную дугу α. Изотопией, неподвижной на крае поверхности и на отмеченных точках, можно дополнительно добиться того, чтобы h действовал тождественно в некоторой регулярной окрестности объединения $\partial S \cup \alpha$.

В этом случае класс φ сохраняет каждую существенную компоненту границы такой регулярной окрестности. Применяя замечание 1.8 к этим компонентам, можно выбрать представитель мультикривой $\mathrm{CRS}(\varphi)$, не пересекающий дугу α. Поскольку один из концов дуги α лежит на компоненте ∂, вся дуга α содержится во внешней области E. Уменьшая регулярную окрестность объединения $\partial S \cup \alpha$, можно поэтому считать, что она не пересекает мультикривую $\mathrm{CRS}(\varphi)$ и что h действует на этой окрестности тождественно.

В этом случае гомеоморфизм поверхности E', индуцированный гомеоморфизмом h, действует тождественно в окрестности образа дуги $\alpha \subseteq E$ при естественном отображении $E \to E'$. Следовательно, изотопический класс этого образа сохраняется внешней

[8]Отметим, что если S имеет ровно одну компоненту края, то либо $E' = D^2_2$, либо поверхность E' является неисключительной.

[9]Здесь и далее символ $\mathrm{Stab}(C)$ обозначает подгруппу классов отображений, сохраняющих мультикривую C.

компонентой φ_{ext}, то есть класс φ_{ext} расщепим.

По определению класс φ_{ext} является периодическим или псевдоаносовским. Если поверхность E' является неисключительной, применима лемма 1.6, согласно которой класс φ_{ext} приводим и, следовательно, периодический. Если поверхность E' является исключительной, то класс φ_{ext} не может быть псевдоаносовским и, следовательно, также периодический. В обоих случаях по лемме 1.7 получаем $\varphi_{\text{ext}} = 1$.

Теперь покажем, что из утверждения (2) следует утверждение (1). Предположим, что класс φ_{ext} тривиален.

Если класс φ является периодическим или псевдоаносовским, то по принятому соглашению $\varphi_{\text{ext}} = \varphi$ и, следовательно, $\varphi = 1$. Класс φ расщепим, поскольку поверхность S содержит некоторую существенную граничную дугу, и тривиальный класс отображений сохраняет изотопический класс такой дуги.

Пусть теперь класс φ является приводимым и непериодическим. Выберем гомеоморфизм $h\colon S \to S$, представляющий класс φ, сохраняющий внешнюю область E и каждую компоненту внешней инвариантной мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. Такой выбор возможен, поскольку тривиальность класса φ_{ext} влечёт тривиальность индуцированной перестановки проколов поверхности E'.

Индуцированный гомеоморфизм поверхности E', полученный из сужения гомеоморфизма h на E стягиванием каждой компоненты мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$ в отдельный прокол, изотопен тождественному гомеоморфизму. Поэтому, изменив гомеоморфизм h изотопией, можно добиться того, чтобы его сужение на E представлялось в виде произведения скручиваний Дена вдоль компонент мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$.

Выберем компоненту γ мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$ и граничную дугу $\beta \subseteq E$ с обоими концами в отмеченной точке на ∂S, отделяющую кривую γ от края ∂S. По построению, дуга β существенна. Её можно выбрать вне регулярной окрестности мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$, содержащей носители соответствующих скручиваний Дена. Тогда h оставляет дугу β неподвижной. Следовательно, класс отображений φ сохраняет изотопический класс существенной граничной дуги β, то есть является расщепимым. □

1.2.3 Типы ахиральности

Пусть на поверхности S имеется выделенная компонента края ∂. Введём семейства ахиральных (A), внешне ахиральных (BA), ахиральных после стягивания края (AC) и внешне ахиральных после стягивания края (BAC) классов отображений.

Ахиральность

Будем говорить, что элемент группы *ахирален* (A), если некоторая его ненулевая степень сопряжена со своей обратной; иначе назовём его *хиральным*. Заметим, что оба свойства сохраняются при сопряжении. В частности, любой элемент конечного поряд-

ка является ахиральным:

$$\mathrm{Tor}(G) \subseteq \mathrm{Ach}(G),$$

где через $\mathrm{Tor}(G)$ обозначается множество всех элементов группы G, имеющих конечный порядок, а через $\mathrm{Ach}(G)$ — множество всех её ахиральных элементов.

Если не оговорено иное, для класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ ахиральность всегда понимается относительно группы $\mathrm{Mod}(S)$.

Внешняя ахиральность

Назовём класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ *внешне ахиральным* (BA), если его внешняя компонента $\varphi_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Mod_C}(E')$ ахиральна как элемент группы $\mathrm{Mod_C}(E')$, то есть если существуют класс $\psi \in \mathrm{Mod_C}(E')$ и целое число $s \neq 0$, для которых выполняется соотношение

$$\psi \varphi_{\mathrm{ext}}^{s} \psi^{-1} = \varphi_{\mathrm{ext}}^{-s}.$$

Отметим, что для периодических и псевдоаносовских классов отображений свойство внешней ахиральности эквивалентно ахиральности. Кроме того, любой ахиральный класс отображений является внешне ахиральным: (A) $\Rightarrow$ (BA). Классы отображений, не являющиеся внешне ахиральными, назовём *внешне хиральными*.

Ахиральность после стягивания края

Назовём класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ *ахиральным после стягивания края* (AC), если его образ $\mathrm{Cap}(\varphi)$ при гомоморфизме стягивания края является ахиральным как элемент группы $\mathrm{im}(\mathrm{Cap}) = \mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$, то есть если существуют класс $\psi \in \mathrm{Mod}(S)$, класс $T \in \ker(\mathrm{Cap})$ и целое число $s \neq 0$, для которых выполняется соотношение

$$\psi \varphi^{s} \psi^{-1} = \varphi^{-s} \cdot T.$$

В частности, все периодические классы отображений ахиральны после стягивания края.

Получаем (A) $\Rightarrow$ (AC). Классы отображений, не являющиеся ахиральными после стягивания края, назовём *хиральными после стягивания края*.

Внешняя ахиральность после стягивания края

Назовём класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ *внешне ахиральным после стягивания края* (BAC), если образ $\mathrm{Cap}(\varphi_{\mathrm{ext}})$ его внешней компоненты φ_{ext} при гомоморфизме стягивания края

$$\mu = \mathrm{Cap}|_{\mathrm{Mod_C}(E')} \colon \mathrm{Mod_C}(E') \to \mathrm{Mod}(E^\dagger)$$

является ахиральным как элемент группы $\mu(\mathrm{Mod_C}(E'))$, то есть если существуют класс $\psi \in \mathrm{Mod_C}(E')$, класс $T \in \ker(\mu)$ и целое число $s \neq 0$, для которых выполняется соотно-

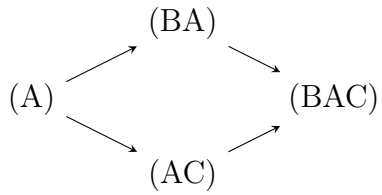
шение

$$\psi\varphi_{\text{ext}}^{s}\psi^{-1} = \varphi_{\text{ext}}^{-s} \cdot T.$$

В частности, все классы отображений φ, для которых внешняя компонента φ_{ext} является периодической, внешне ахиральны после стягивания края.

Отметим, что для периодических и псевдоаносовских классов отображений свойство внешней ахиральности после стягивания края эквивалентно ахиральности после стягивания края. Кроме того, любой класс отображений, ахиральный после стягивания края, является внешне ахиральным после стягивания края: (AC) $\Rightarrow$ (BAC). Также отметим, что (BA) $\Rightarrow$ (BAC). Классы отображений, не являющиеся внешне ахиральными после стягивания края, назовём *внешне хиральными после стягивания края*.

Итак,



Все периодические классы отображений удовлетворяют свойствам (AC) и (BAC), а для псевдоаносовских классов отображений имеем (A) $\Leftrightarrow$ (BA) и (AC) $\Leftrightarrow$ (BAC).

Подгруппа называется *центральной*, если она содержится в центре группы. Нам потребуется следующее общее наблюдение.

Лемма 1.10. Пусть подгруппа $Z \subseteq G$ группы G центральна. Образ элемента $g \in G$ в фактор-группе G/Z является ахиральным в том и только в том случае, если существуют элемент $z \in Z$ и целое число $k \neq 0$, для которых элемент $g^k z$ ахирален в группе G. В этом случае k и z можно выбрать такими, что $g^k z \in [G, G]$.

Доказательство. Пусть существуют элемент $z \in Z$ и целое число $k \neq 0$, для которых элемент $g^k z$ ахирален. Тогда существуют такие элемент $h \in G$ и целое число $s \neq 0$, что

$$h(g^k z)^s h^{-1} = (g^k z)^{-s}.$$

Применяя естественный гомоморфизм $\pi\colon G \to G/Z$, получаем

$$\pi(h)\pi(g)^{ks}\pi(h)^{-1} = \pi(g)^{-ks}.$$

Поскольку $ks \neq 0$, элемент $\pi(g)$ ахирален в G/Z.

Обратно, предположим, что элемент $\pi(g)$ ахирален. Тогда существуют элемент $h \in G$ и целое число $s \neq 0$, для которых

$$\pi(h)\pi(g)^{s}\pi(h)^{-1} = \pi(g)^{-s}.$$

Следовательно, для некоторого элемента $z \in Z$ выполняется соотношение

$$hg^s h^{-1} = g^{-s} z.$$

Положим $a := g^{2s} z^{-1}$. Поскольку элемент z является центральным, имеем

$$hah^{-1} = hg^{2s} h^{-1} z^{-1} = (hg^s h^{-1})^2 z^{-1} = (g^{-s} z)^2 z^{-1} = g^{-2s} z = a^{-1},$$

значит, элемент a ахирален. Наконец, из соотношения

$$hg^s h^{-1} = g^{-s} z$$

получаем, что образы элементов g^{2s} и z в фактор-группе $G/[G,G]$ совпадают. Следовательно, образ элемента $g^{2s} z^{-1}$ в $G/[G,G]$ тривиален, откуда $g^{2s} z^{-1} \in [G,G]$. □

Следствие 1.11. Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. Класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является ахиральным после стягивания края в том и только в том случае, если существуют такие целые числа $k \neq 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, что класс $\varphi^k T_\partial^m$ является ахиральным. В этом случае числа k и m можно выбрать такими, что

$$\varphi^k T_\partial^m \in [\mathrm{Mod}(S), \mathrm{Mod}(S)].$$

Доказательство. Применим лемму 1.10 к группе $G = \mathrm{Mod}(S)$ и центральной подгруппе $Z = \langle T_\partial \rangle$. □

Следствие 1.12. Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂. Класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является внешне ахиральным после стягивания края в том и только в том случае, если существуют такие целые числа $k \neq 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, что класс $\varphi_{\mathrm{ext}}^k T_\partial^m$ является ахиральным как элемент группы $\mathrm{Mod_C}(E')$. В этом случае числа k и m можно выбрать такими, что

$$\varphi_{\mathrm{ext}}^k T_\partial^m \in [\mathrm{Mod_C}(E'), \mathrm{Mod_C}(E')].$$

Доказательство. Применим лемму 1.10 к группе $G = \mathrm{Mod_C}(E')$ и центральной подгруппе $Z = \langle T_\partial \rangle$. □

1.2.4 Численные характеристики динамики

Рассмотрим две функции на группах классов отображений, отражающие динамику гомеоморфизмов поверхностей на количественном уровне: коэффициент дробного скручивания Дена и топологическую энтропию.

Пусть на поверхности S имеется выделенная компонента края ∂. С ней связано

вещественнозначное отображение на группе классов отображений

$$\omega_\partial \colon \mathrm{Mod}(S) \to \mathbb{R},$$

называемое *коэффициентом дробного скручивания Дена* или *закрученностью*. Следуя [1], приведём основные свойства этого отображения; см. также [285, 169, 168, 197, 182].

Лемма 1.13 [1, Предложение 4.5.11]**.** Выполняется соотношение[10]

$$D(\omega_\partial) := \sup_{x,y \in \mathrm{Mod}(S)} |\omega_\partial(xy) - \omega_\partial(x) - \omega_\partial(y)| \leqslant 1.$$

Более того, если поверхность S является неисключительной, то $D(\omega_\partial) = 1$ для $S \neq \Sigma_{1,1}$ и $D(\omega_\partial) = 1/2$ для $S = \Sigma_{1,1}$. Иначе, если S исключительна, имеем $D(\omega_\partial) = 0$. □

Лемма 1.14 [197, Corollary 2.6] и [1, Лемма 4.5.5]**.** Если класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ сохраняет некоторую существенную дугу с концом на компоненте ∂, то выполняется соотношение $\omega_\partial(\varphi) = 0$. Более того, если $\chi(S) < 0$, то соотношение $\omega_\partial(\varphi) = 0$ выполняется в том и только в том случае, если для некоторой (следовательно, любой) гиперболической структуры на S класс φ сохраняет простой геодезический луч с началом в отмеченной точке на компоненте ∂. □

Лемма 1.15 [1, Предложение 4.5.10]**.** Значения функции ω_∂ на сопряжённых элементах совпадают. Если $S \neq D^2$ и $S \neq D^2_1$, то для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и целых чисел $n, m \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение

$$\omega_\partial(\varphi^n \cdot T_\partial^m) = n\,\omega_\partial(\varphi) + m.$$ □

Лемма 1.16 [1, Замечание 4.5.17] и [229, Theorem 10.2]**.** Для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение[11]

$$\omega_\partial(\varphi) = \omega_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$ □

Следствие 1.17. Если поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂, то для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$, для которого внешняя компонента φ_{ext} является периодической с параметром p/q, выполняется соотношение

$$\omega_\partial(\varphi) = \frac{p}{q}.$$ □

Лемма 1.18 [1, Теорема 4.5.13]**.** Коэффициент дробного скручивания Дена ω_∂ принимает лишь рациональные значения. □

Интерпретация коэффициента дробного скручивания Дена в терминах так называ-

[10] Это означает, что функция ω_∂ является квазиморфизмом дефекта $D(\omega_\partial) \leqslant 1$; см. определение в разделе 4.1.

[11] Функция, значение которой стоит в правой части этого равенства, имеет вид $\omega_\partial \colon \mathrm{Mod}(E') \to \mathbb{R}$.

емого представления Нильсена–Тёрстона будет приведена в разделе 4.2.1.

Далее приведём необходимые для дальнейшего изложения сведения о топологической энтропии классов отображений; см. [118, 222, 67, 196, 21, 297].

Топологическая энтропия гомеоморфизма $f\colon S \to S$ обозначается символом $\operatorname{ent}(f)$. Энтропией класса отображений $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ называется величина

$$\operatorname{ent}(\varphi) := \inf \{\operatorname{ent}(f) \mid f \in \operatorname{Homeo}_+(S, \partial S, \{z_1, \dots, z_n\}),\ [f] = \varphi\}\,.$$

Энтропия сохраняется при сопряжении. Для любого периодического класса отображений она равна нулю. Если класс φ является псевдоаносовским, то

$$\operatorname{ent}(\varphi) = \log \lambda(\varphi),$$

где $\lambda(\varphi)$ — дилатация псевдоаносовского класса φ. Согласно [67, Theorem 7.7], для приводимого класса отображений энтропия равна логарифму наибольшего коэффициента растяжения среди псевдоаносовских компонент разложения Нильсена–Тёрстона; если таких компонент нет, энтропия равна нулю.

Для любого $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$\operatorname{ent}(\operatorname{Cap}(\varphi)) = \operatorname{ent}(\varphi).$$

Кроме того, если поверхность S имеет выделенную компоненту края ∂, то

$$\operatorname{ent}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \operatorname{ent}(\varphi).$$

1.3 Трёхмерные конструкции и геометрические соответствия

Мы предполагаем известными такие базовые понятия трёхмерной топологии, как трёхмерные многообразия, узлы и зацепления, несжимаемость вложенных поверхностей; см. [239].

Под *многообразием* M, если не оговорено иное, понимается ориентированное связное трёхмерное многообразие, возможно, с непустым краем. Под *зацеплением* $L \subset M$ понимается ориентированный образ ручного вложения конечного числа окружностей S^1 во внутренность многообразия M; допускается случай $L = \varnothing$. Под *узлом* понимается однокомпонентное зацепление. Зацепления рассматриваются с точностью до изотопии многообразия M.

В дальнейшем нас прежде всего будут интересовать пары «многообразие — зацепление» и геометрические и топологические свойства дополнений соответствующих зацеплений. Как это принято, мы свободно переходим между дополнением $M \setminus L$ зацепления L и дополнением $M \setminus \operatorname{int}\bigl(\nu(L)\bigr)$ внутренности его трубчатой окрестности $\nu(L)$.

Пусть $T \subseteq \partial M$ — выделенная компонента края многообразия M, гомеоморфная

тору, и $s \subset T$ — существенная простая замкнутая кривая на T. Символом $M(s)$ обозначается многообразие, полученное из M *заполнением Дена*, при котором кривая s становится стягиваемой. Иными словами, $M(s)$ получается из M приклеиванием полнотория $D^2 \times S^1$ к компоненте T по гомеоморфизму краёв, при котором меридиан $\partial D^2 \times \{*\}$ отождествляется с кривой s.

1.3.1 Торы отображений и открытые книги

Опишем ряд трёхмерных объектов, связанных с каждым классом отображений поверхностей.

Для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выберем его представителя $h\colon S \to S$ и положим

$$V_\varphi := (S \times [0,1]) \,/\, [(x,1) \sim (h(x),0)]\,.$$

Подмножество

$$L_\varphi := \big(\{z_1, \ldots, z_n\} \times [0,1]\big)/\sim$$

представляет собой зацепление. Его компоненты находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами перестановки множества отмеченных точек, индуцированной гомеоморфизмом h. Если поверхность S не имеет внутренних отмеченных точек, полагаем $L_\varphi = \varnothing$.

Топологический тип пары

$$(V_\varphi, L_\varphi)$$

зависит только от класса отображений φ, а не от выбора представляющего его гомеоморфизма h. Многообразие[12]

$$T_\varphi := V_\varphi \backslash L_\varphi$$

называется *тором отображения* класса φ. Его топологический тип сохраняется при сопряжении в группе $\mathrm{Mod}(S)$. Кроме того, внутренности многообразий T_φ и $T_{\mathrm{Cap}(\varphi)}$ гомеоморфны.

Имеется локально тривиальное расслоение $T_\varphi \to S^1$ со слоем $S \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$. Зацепление L_φ трансверсально слоям соответствующего расслоения $V_\varphi \to S^1$ со слоем S. Для каждого целого числа $m \geqslant 1$ тор отображения T_{φ^m} представляет собой m-листное циклическое накрытие тора отображения T_φ в направлении, трансверсальном слоям расслоения.

В оставшейся части раздела 1.3.1 предположим, что поверхность S имеет ровно одну компоненту края $\partial = \partial S$. В этом случае край многообразия T_φ является тором. Конструкция тора отображения индуцирует отождествление

$$\partial T_\varphi \cong (\partial S) \times S^1.$$

[12]Некоторые авторы называют тором отображения класса φ многообразие V_φ или пару (V_φ, L_φ).

Выберем на торе ∂T_φ кривые

$$\gamma_\partial := (\partial S) \times \{*\}, \qquad \gamma_{\mathrm{lat}} := \{*\} \times S^1,$$

ориентированные в соответствии с индуцированной ориентацией на ∂S и естественной ориентацией на S^1. Изотопические классы ориентированных кривых γ_∂ и γ_{lat} образуют базис первой группы гомологий $H_1(\partial T_\varphi; \mathbb{Z})$. Отметим, что в работе [135] кривая γ_∂ называется *longitude*; мы используем обозначения, согласованные с работой [282].

Обозначим через

$$M_\varphi := T_\varphi(\gamma_{\mathrm{lat}})$$

результат *канонического* заполнения Дена тора отображения T_φ, при котором кривая γ_{lat} становится стягиваемой. Также положим

$$Y_\varphi := V_\varphi(\gamma_{\mathrm{lat}}).$$

Таким образом,

$$Y_\varphi = M_\varphi \cup L_\varphi, \qquad M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi.$$

Тем самым каждому классу отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ сопоставлена пара (Y_φ, L_φ). Существенная часть дальнейшего изложения будет посвящена изучению свойств именно этой пары, а также дополнения M_φ зацепления L_φ.

Сердцевина полнотория, приклеенного при каноническом заполнении, задаёт в M_φ узел B_φ, называемый *переплётом*. Отметим, что имеются естественные гомеоморфизмы

$$M_\varphi \backslash \operatorname{int}\big(\nu(B_\varphi)\big) \cong T_\varphi, \qquad Y_\varphi \backslash \operatorname{int}\big(\nu(B_\varphi)\big) \cong V_\varphi.$$

Поверхности $S \times \{t\}$ в Y_φ продолжаются внутри приклеенного полнотория до семейства поверхностей S_θ с общим краем B_φ и задают разложение многообразия Y_φ в открытую книгу со страницей S:

$$Y_\varphi = \bigcup_{\theta \in S^1} S_\theta, \qquad B_\varphi = \bigcap_{\theta \in S^1} S_\theta.$$

Зацепление L_φ трансверсально страницам этой открытой книги. Её монодромией является образ класса φ при гомоморфизме групп классов отображений, отвечающем забыванию всех отмеченных точек во внутренности; ср. [287, 182]. Таким образом, наряду с парой (Y_φ, L_φ), каждому классу отображений φ отвечает разложение многообразия Y_φ в открытую книгу[13]; см. [116, 115].

[13] Отметим также, что каждое такое разложение канонически индуцирует разбиение Хегора многообразия Y_φ, род которого вдвое больше рода страницы S; см. [88].

1.3.2 Гиперболические многообразия и каспы

Приведём необходимые для дальнейшего изложения сведения о геометрии и топологии многообразий, возникающих в описанной выше конструкции.

Компактная поверхность F, правильно вложенная в многообразие M, называется *существенной*, если она несжимаема, гранично несжимаема и никакая её компонента не параллельна краю. Для замкнутой поверхности условие граничной несжимаемости выполняется автоматически. В частности, замкнутая поверхность $F \subset M$ является существенной в том и только в том случае, если она несжимаема и никакая её компонента не параллельна краю. Если многообразие M получается из компактного многообразия $\overline{M}$ удалением некоторого набора компонент края, поверхности в M, параллельные краю в $\overline{M}$, также будем считать параллельными краю в M. Назовём многообразие *аторическим*, если оно не содержит существенных торов.

Определение симплициального объёма $\|M\|$ связного компактного многообразия M см. в [152, 258, 209]. Для несвязного компактного многообразия симплициальный объём определяется как сумма симплициальных объёмов его компонент. Если многообразие M получается из компактного многообразия $\overline{M}$ удалением некоторого набора компонент края, положим $\|M\| := \|\overline{M}\|$.

Для многообразия M и набора несжимаемых торов $T \subset M$ имеется равенство

$$\|M_T\| = \|M\|,$$

где M_T обозначает многообразие, полученное из M разрезанием по набору T [209]. В частности, если N является одной из компонент связности многообразия M_T, то

$$\|N\| \leqslant \|M\|.$$

Мы предполагаем известными основные понятия гиперболической геометрии трёхмерных многообразий; см. [5, 133, 270, 239]. Под *гиперболическим многообразием* M, если не оговорено иное, понимается трёхмерное многообразие, внутренность которого допускает метрически полную гиперболическую структуру конечного объёма с торическими каспами. Согласно теореме жёсткости Мостова–Прасада, на фиксированном многообразии любые две такие структуры изометричны. В частности, объём $\mathrm{vol}(M)$ любого гиперболического многообразия M корректно определён.

Согласно теореме о геометризации [239], если связное ориентируемое неприводимое компактное трёхмерное многообразие, край которого (возможно, пустой) состоит из набора торов, является аторическим, то оно либо гиперболично, либо зейфертово.

Согласно теореме Громова–Тёрстона [299, 152, 209], для любого гиперболического многообразия M выполняется соотношение

$$v_3 \|M\| = \mathrm{vol}(M),$$

где v_3 — объём правильного идеального тетраэдра в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

С многообразием M связано компактное многообразие $\overline{M}$, полученное добавлением торических компонент края, отвечающих каспам; см. [239, Section 4.2.6]. Эти компоненты несжимаемы в $\overline{M}$ и любой несжимаемый тор в $\overline{M}$ параллелен краю.

Каждый касп многообразия M имеет окрестность, изометричную фактору оришара в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ по свободному действию параболической подгруппы, изоморфной группе $\mathbb{Z}^2$; такая окрестность называется *орисферической*. Орисферическую окрестность данного каспа можно расширить до максимальной по включению; такую окрестность будем называть *максимальной*.

Граница ∂C каждой орисферической окрестности C является тором[14]. Как это принято, мы отождествляем тор ∂C с соответствующей торической компонентой края компактификации $\overline{M}$. Гиперболическая метрика на M индуцирует на ∂C евклидову метрику, причём имеется изометрия

$$\partial C \cong \mathbb{R}^2/\Lambda$$

для некоторой решётки $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Каждый изотопический класс существенной простой замкнутой кривой s на ∂C представляется евклидовой геодезической; любые два таких геодезических представителя параллельны и имеют одинаковую длину. Эту общую длину будем обозначать символом $l(s) = l_C(s)$.

Если в качестве базиса решётки Λ выбраны векторы $v, w \in \mathbb{R}^2$, то площадь тора ∂C вычисляется по формуле

$$\operatorname{area}(\partial C) = |\det(v, w)|.$$

Кроме того, объём орисферической окрестности C связан с площадью её границы ∂C соотношением [133, Definition 5.1]

$$\operatorname{vol}(C) = \frac{1}{2}\operatorname{area}(\partial C).$$

Нам потребуется следующая форма 2π-теоремы Громова–Тёрстона [299, 61, 6, 210, 167], предложенная Д. Футером, Э. Калфагианни и Дж. Парсел; ср. [134].

Лемма 1.19 [132, Theorem 1.1]**.** Пусть M — гиперболическое трёхмерное многообразие конечного объёма и C — максимальная орисферическая окрестность одного из его каспов. Если длина замкнутой евклидовой геодезической $s \subset \partial C$ удовлетворяет неравенству $l(s) > 2\pi$, то многообразие $M(s)$, полученное из M заполнением Дена, при котором кривая s становится стягиваемой, гиперболично, и выполняются неравенства

$$\operatorname{vol}(M) > \operatorname{vol}(M(s)) \geqslant \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l(s)}\right)^2\right)^{3/2} \operatorname{vol}(M). \qquad \square$$

[14] Если окрестность C является максимальной, то тор ∂C имеет «точки касания»; см. [270, Section 14.1].

1.3.3 Соответствия между динамическими и геометрическими типами

Свяжем теперь динамический тип класса отображений φ с геометрией соответствующего тора отображения T_φ.

Каждая существенная мультикривая на S, сохраняемая классом $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$, задаёт в T_φ набор существенных торов, по одному тору на каждую орбиту компонент мультикривой. Обратно, если $\chi(S) < 0$ и многообразие T_φ содержит существенный тор, то класс φ является приводимым. Далее, согласно теореме Тёрстона [299, 301], при $\chi(S) < 0$ тор отображения T_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским. Наконец, если класс φ является периодическим, то T_φ является многообразием Зейферта; в случае $\chi(S) < 0$ верно и обратное. Тем самым классификация Нильсена–Тёрстона позволяет отнести каждое трёхмерное многообразие, расслаивающееся над окружностью со слоем отрицательной эйлеровой характеристики, к хотя бы одному из трёх *геометрических типов*, отвечающих динамическому типу его монодромии [239].

Наряду с качественным соответствием между динамикой и геометрией отметим также связь на количественном уровне. Следующий результат С. Коджимы и Г. Макшейна даёт верхнюю оценку гиперболического объёма в терминах топологической энтропии.

Лемма 1.20 [205, Theorem 1]**.** Для псевдоаносовского класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S со свойством $\chi(S) < 0$ выполняется соотношение

$$\mathrm{vol}(T_\varphi) \leqslant 3\pi\,|\chi(S)| \cdot \mathrm{ent}(\varphi). \qquad \square$$

Перейдём от расслоённых многообразий к произвольным парам «многообразие — зацепление». Приведём результат Т. Ито и К. Кавамуро, формулирующийся в терминах коэффициента дробного скручивания Дена и дающий эффективно проверяемые признаки гиперболичности, зейфертовости и наличия существенного тора. Как и выше, благодаря теореме о геометризации и классификации Нильсена–Тёрстона эти признаки могут быть сформулированы в виде соответствия между типом Нильсена–Тёрстона класса φ и геометрическим типом дополнения $M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi$.

Лемма 1.21 [182, Theorems 8.3 & 8.4]**.** Пусть поверхность S имеет ровно одну компоненту края ∂ и пусть для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$|\omega_\partial(\varphi)| > 1.$$

Тогда:

1. многообразие M_φ является зейфертовым в том и только в том случае, если класс φ является периодическим;

2. многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским;

3. многообразие M_φ содержит существенный тор в том и только в том случае, если

класс φ является приводимым. $\square$

Этот результат подтверждает качественную форму порогового принципа для коэффициента дробного скручивания Дена.

Отметим, что предположение $|\omega_\partial(\varphi)| > 1$ нельзя исключить полностью: существуют, например, приводимые и псевдоаносовские классы отображений φ, для которых многообразие M_φ является зейфертовым; см. замечание 9.33.

Таким образом, с классом отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ связаны два типа объектов: изометрии комбинаторных графов, отвечающих дугам и кривым на поверхности S, и пара (Y_φ, L_φ) из трёхмерного многообразия и зацепления в нём. В дальнейшем в главе 3 будет введён общий метрический аппарат для исследования этих связей, а основные качественные и количественные соответствия будут установлены в главах 7, 8 и 9.

ГЛАВА 2 ДИНАМИКА КОС И ТОПОЛОГИЯ ИХ ЗАМЫКАНИЙ

Настоящая глава посвящена основному модельному случаю для топологических, динамических и геометрических понятий и конструкций, введённых в предыдущей главе, — случаю проколотого диска $S = D^2_n$, в котором группа классов отображений изоморфна группе кос:

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D^2_n).$$

Пара из многообразия и зацепления, соответствующая классу $\varphi \in \mathrm{Mod}(D^2_n)$, имеет вид

$$L_\varphi \subset S^3,$$

где L_φ является замыканием косы, отвечающей классу φ. Тем самым вопросы о связи динамики классов отображений с трёхмерной геометрией и топологией приобретают в этом случае форму конкретных задач теории кос и теории зацеплений в трёхмерной сфере.

В разделе 2.1 вводятся основные свойства и характеристики зацеплений в трёхмерной сфере, а также ряд инвариантов, используемых, в частности, в разделе 2.5 и главах 10 и 11.

В разделе 2.2 описываются алгебраическая и динамическая модели группы кос. Первая обеспечивает комбинаторное описание элементов B_n, используемое в главе 9, а вторая позволяет применять к косам конструкции, введённые в главе 1.

В разделе 2.3 эти конструкции уточняются для проколотого диска: описываются динамические типы кос и внешняя нормальная форма Нильсена–Тёрстона, а также исследуются соответствующие типы ахиральности.

В разделе 2.4 рассматриваются замыкания кос и связанные с ними свойства минимальности, а также упрощающие преобразования Бирман–Менэско.

В разделе 2.5 вводится закрученность — коэффициент дробного скручивания Дена на группе кос. Приводятся признаки качественных свойств замыканий, оценки их численных характеристик и результаты, связывающие закрученность с динамическим типом косы.

Эти признаки и оценки подтверждают пороговый принцип, который в дальнейшем будет распространён на числа переноса (глава 3), квазиморфизмы (глава 4) и относительную стабильную коммутаторную длину (глава 5).

2.1 Зацепления, их меры сложности и инварианты

Мы предполагаем известными такие базовые понятия классической теории узлов, как плоские проекции и диаграммы, коэффициент зацепления, связные суммы; см. [275, 100, 195, 213]. Символом $L \subset S^3$ обозначается ориентированное зацепление в трёхмер-

ной сфере.

2.1.1 Качественные свойства зацеплений

Зацепление L называется *тривиальным*, если найдётся вложенная сфера $S^2 \subset S^3$, для которой $L \subset S^2$; *расщепимым*, если найдётся вложенная сфера $S^2 \subset S^3 \backslash L$, не ограничивающая шар в $S^3 \backslash L$; *составным*, если найдётся вложенная сфера $S^2 \subset S^3$, которая пересекает зацепление L ровно по двум точкам, разбивая его на два тэнгла, ни один из которых не является незаузленной дугой. Зацепление называется *простым*, если оно не является ни составным, ни расщепимым, ни тривиальным.

По теореме Тёрстона любой простой узел относится ровно к одному из следующих *геометрических типов*: торическому, сателлитному или гиперболическому. Зацепление L называется *гиперболическим*, если многообразие $S^3 \backslash L$ является гиперболическим; *гиперболическим объёмом* такого зацепления называется объём этого многообразия. Узел K называется *сателлитным*, если многообразие $S^3 \backslash K$ содержит существенный тор. Определение торических зацеплений $T_{p,q}$ см. в [275, 100, 239]. Отметим, что узел K является торическим в том и только в том случае, если многообразие $S^3 \backslash K$ является зейфертовым.

Зацепление называется *альтернированным*, если оно допускает альтернированную диаграмму, то есть такую диаграмму, что при движении вдоль каждой из её компонент перекрёстки «над» и «под» встречаются поочерёдно [250]. Альтернированное зацепление является нетривиальным, нерасщепимым, несоставным в том и только в том случае, если оно допускает так называемую приведённую альтернированную диаграмму, являющуюся соответственно нетривиальной, связной, несоставной [100]. Всякое простое альтернированное зацепление, кроме торических зацеплений $T_{2,q}$, является гиперболическим [247]; в частности, дополнение простого альтернированного зацепления не содержит существенных торов. Кроме того, имеются нижние и верхние оценки гиперболического объёма таких зацеплений в терминах характеристик их альтернированных диаграмм [211].

Нетривиальное зацепление из хотя бы двух компонент называется *брунновым*, если каждое из зацеплений, полученных из него удалением некоторой компоненты, является тривиальным [254, 106, 272]. Всякое брунново зацепление является простым [15].

Обозначим через $-L$ то же зацепление L с обращённой ориентацией каждой компоненты, а через L^* — зеркальный образ зацепления L, то есть его образ относительно произвольного гомеоморфизма трёхмерной сферы, обращающего её ориентацию [100]. Зацепление L называется *отрицательно амфихиральным*, если L и $-L^*$ изотопны; *положительно амфихиральным*, если L и L^* изотопны; *обратимым*, если L и $-L$ изотопны. Если L не является ни отрицательно амфихиральным, ни положительно амфихиральным, то оно называется *хиральным*.

Под *поверхностью Зейферта* зацепления L понимается связная компактная ориен-

тированная вложенная в S^3 поверхность, край которой совпадает с L.[1] Узел K называется *расслоённым*, если его дополнение $S^3\backslash K$ допускает локально тривиальное расслоение над окружностью, для которого каждый слой задаёт поверхность Зейферта узла K; иными словами, K является переплётом некоторого разложения в открытую книгу трёхмерной сферы S^3 [275].

2.1.2 Меры топологической сложности

Символом $\chi_3(L)$ обозначается максимальное значение, которое принимает эйлерова характеристика на множестве всех поверхностей Зейферта зацепления L. Каждая поверхность Зейферта максимальной эйлеровой характеристики несжимаема в $S^3\backslash L$.

Символом $\chi_4(L)$ обозначается максимальное значение, которое принимает эйлерова характеристика на множестве всех правильно вложенных в четырёхмерный шар гладких компактных ориентированных поверхностей[2] без замкнутых компонент с ориентированным краем L. Мы имеем $\chi_3(L) \leqslant \chi_4(L)$.

Определим *род Зейферта* $g_3(K)$ и *срезанный род* $g_4(K)$ узла K соотношениями

$$2g_3(K) = 1 - \chi_3(K), \qquad 2g_4(K) = 1 - \chi_4(K).$$

Числом развязывания $u(K)$ узла K называется минимальное число перекрёстков, смена которых превращает некоторую диаграмму этого узла в диаграмму тривиального узла. Выполняется неравенство

$$g_4(K) \leqslant u(K).$$

Наконец, символом $\mathrm{cr}(L)$ обозначается минимальное число перекрёстков среди всех регулярных плоских диаграмм зацепления L.

2.1.3 Инварианты зацеплений

Пространства *инвариантов Васильева–Гусарова*, также называемых *инвариантами конечного типа*, образуют возрастающую фильтрацию функций со значением в некоторой абелевой группе, параметризованную целым неотрицательным числом, называемым их *порядком*; см. [92, Definition 3.1.3]. Будем говорить, что два зацепления *неотличимы* инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше m, если значения всех таких функций на этих зацеплениях совпадают.

Нам также потребуются инварианты Александера [275]. С каждым узлом K связано бесконечное циклическое накрытие $\widetilde{X}_K \to S^3\backslash K$, отвечающее абелизации фундаментальной группы дополнения этого узла. Действие группы скольжений на $\widetilde{X}_K$ индуцирует её действие на первой группе гомологий $H_1(\widetilde{X}_K;\mathbb{Z})$ и наделяет эту группу

[1] Здесь и далее предполагается, что ориентация зацепления совпадает с ориентацией края, индуцированной ориентацией поверхности.

[2] Подчеркнём, что в этом определении мы не требуем связности поверхности.

структурой модуля над кольцом $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Полученный Λ-модуль называется *модулем Александера* узла K.

На основе модуля Александера определяется ряд других инвариантов узла K, в том числе *элементарные идеалы*, а также *многочлен Александера* $\Delta_K(t) \in \Lambda$, являющийся многочленом Лорана и определённый с точностью до умножения на единицу $\pm t^k$ кольца Λ. Многочлен Александера тривиального узла имеет вид $\Delta_K = 1$. Если узел K является расслоённым, то ширина[3] его многочлена Александера совпадает с удвоенным родом Зейферта:

$$\operatorname{width}(\Delta_K) = 2g_3(K).$$

Другой набор инвариантов зацеплений дают *сигнатуры Левина–Тристрама* [216, 302, 97]. Для каждой точки $\zeta \in S^1 \backslash \{1\}$ комплексной единичной окружности сигнатура Левина–Тристрама $\sigma_\zeta(L) \in \mathbb{Z}$ представляет собой сигнатуру эрмитовой формы, отвечающей матрице Зейферта V произвольной поверхности Зейферта зацепления L:

$$\sigma_\zeta(L) = \operatorname{sign}\big((1-\zeta)V + (1-\bar{\zeta})V^T\big).$$

При $\zeta = -1$ функция $\sigma := \sigma_{-1}$ представляет собой классическую *сигнатуру Тротгера–Мурасуги* [303, 260]. При $\zeta = 1$ полагаем $\sigma_1(L) = 0$. Тем самым с каждым зацеплением L связана функция

$$\sigma_L \colon S^1 \to \mathbb{Z}.$$

Эта функция является кусочно-постоянной; см. [145, Theorem 2.3]. В частности, если K является узлом, то функция σ_K локально постоянна на дополнении множества корней единичного модуля многочлена Александера Δ_K.

Наконец, обозначим символом $\Sigma_2(L)$ двулистное накрытие трёхмерной сферы S^3, разветвлённое вдоль зацепления L [275]. Символами $\widehat{\mathrm{HF}}(\Sigma_2(L))$ и $\widetilde{\mathrm{Kh}}(L)$ обозначаются соответственно пространства гомологий Хегора–Флоера многообразия $\Sigma_2(L)$ [266] и редуцированные пространства гомологий Хованова зацепления L [199], рассматриваемые с коэффициентами в поле из двух элементов $\mathbb{F}_2$.

2.2 Алгебраическая и динамическая модели группы кос

Нам потребуются две стандартные модели групп кос B_n: алгебраическая и динамическая. В алгебраической модели коса задаётся словом в образующих Артина σ_i. В динамической модели коса рассматривается как класс отображений проколотого диска D^2_n. Отметим также, что мы иногда используем термин «нить», отсылающий к третьей, геометрической модели группы B_n, в которой коса задаётся изотопическим классом набора из n попарно непересекающихся дуг в заполненном цилиндре; см. определение в [53, 195].

[3] *Шириной* ненулевого многочлена Лорана называется разность между наибольшим и наименьшим показателями степеней переменной при ненулевых коэффициентах.

2.2.1 Алгебраическая модель

Зададим группу кос на n нитях стандартными образующими и соотношениями:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

Пример 2.1. Группа B_1 тривиальна. Группа B_2 является бесконечной циклической. Группа B_3 изоморфна фундаментальной группе дополнения узла трилистника и является центральным расширением модулярной группы [143, 195, 168, 117]:

$$B_3/Z(B_3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}). \qquad \lozenge$$

Элементы группы B_n называются *косами*, образующие $\sigma_i^{\pm 1}$ — *образующими Артина*, а слова в этих образующих — *артиновскими словами*.

Назовём *образующими Бирман–Ко–Ли* или *ленточными образующими* косы $a_{i,j}^{\pm 1}$, где

$$a_{i,j} := (\sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1})\sigma_i(\sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1})$$

для $1 \leqslant i < j \leqslant n$. В частности, $a_{i,i+1} = \sigma_i$.

Гомоморфизм

$$i\colon B_{n-1} \to B_n,$$

заданный на образующих правилом $i(\sigma_k) = \sigma_k$, называется *стандартным вложением*. Допуская вольность обозначений, мы иногда отождествляем группу B_{n-1} с её образом $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-2} \rangle \subset B_n$ при стандартном вложении. В дальнейшем, если не оговорено иное, предполагается, что число нитей n зафиксировано и все косы рассматриваются как элементы группы B_n.

Фундаментальной косой Гарсайда называется коса

$$\Delta_n := \rho_n\rho_{n-1} \dots \rho_2,$$

где $\rho_k := \sigma_1 \dots \sigma_{k-1}$ для $k \in \{2, \dots, n\}$; см. [53, Fig. 11]. Для любого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ коса Гарсайда удовлетворяет соотношению $\Delta_n\sigma_i\Delta_n^{-1} = \sigma_{n-i}$. Также выполняется соотношение $\rho_n^n = \Delta_n^2$; см. [109, Lemma 4.4]. Квадрат фундаментальной косы

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$$

порождает центр $Z(B_n)$ при $n \geqslant 3$ и называется *полным оборотом*; см. [53, Fig. 13].

Класс сопряжённости косы φ обозначается символом $\widehat{\varphi}$. Гомоморфизм

$$\exp\colon B_n \to \mathbb{Z},$$

отправляющий все положительные образующие Артина σ_i в 1, называется *экспоненциальной суммой*; при $n \geqslant 2$ он индуцирует изоморфизм $B_n/[B_n, B_n] \cong \mathbb{Z}$. Подгруппой $P_n \leqslant B_n$ *крашеных кос* (англ. *pure*) называется ядро стандартного гомоморфизма из группы кос в симметрическую группу [195]. Символом

$$\mu\colon B_n \to B_n$$

обозначается автоморфизм, заданный на образующих Артина правилом $\mu(\sigma_i) = \sigma_i^{-1}$. Для $m \geqslant 0$ через

$$\mathrm{sh}_m\colon B_n \to B_{n+m}$$

обозначается *гомоморфизм сдвига индексов*, заданный правилом $\mathrm{sh}_m(\sigma_i) = \sigma_{i+m}$.

Под *представлением Бурау* понимается редуцированное представление Бурау [53]

$$\mathfrak{B}\colon B_n \to \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]).$$

Его ядро обозначается символом Bur_n. Выполняется включение $i(\mathrm{Bur}_{n-1}) \subseteq \mathrm{Bur}_n$.

Для каждого ненулевого $\zeta \in \mathbb{C}$ подстановка $t = \zeta$ задаёт *специализацию* представления Бурау

$$\mathfrak{B}_\zeta\colon B_n \to \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{C}).$$

В частности, подгруппа Bur_n содержится в ядре каждой такой специализации.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 2.2. При $n \geqslant 5$ коммутант $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ ядра представления Бурау является нецентральной[4] нормальной подгруппой группы B_n.

Доказательство. Свойство нормальности коммутанта $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ следует из того, что ядро Bur_n является нормальной подгруппой группы B_n. Согласно теореме С. Бигелоу [44], при $n \geqslant 5$ ядро Bur_n нетривиально. Согласно [53, Theorem 3.14], выполняется включение $\mathrm{Bur}_n \subseteq [B_n, B_n]$. Из соотношения $Z(B_n) \cap [B_n, B_n] = 1$ получаем, что ядро Bur_n не является центральной подгруппой группы B_n. Отсюда следует, что коммутант $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ нетривиален. Действительно, в противном случае группа Bur_n была бы абелевой, а значит, центральной по теореме М. Бествины [40, Corollary 4.14] о том, что всякая абелева нормальная подгруппа группы B_n центральна. Совмещая нетривиальность коммутанта $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ с вышеописанным соотношением, получаем, что он не является центральной подгруппой группы B_n. □

Нам также потребуется следующий результат, полученный Д. Лонгом.

Лемма 2.3 [221, Lemma 2.1]**.** При $n \geqslant 3$ любые две нецентральные нормальные подгруппы группы B_n имеют нетривиальное пересечение. □

Коса называется *положительной* (соотв. *отрицательной*), если она допускает выражение в положительных (соотв. отрицательных) образующих Артина. Артиновское

[4] Напомним, что подгруппа называется центральной, если она содержится в центре группы.

слово называется *однородным*, если для каждого индекса i все вхождения образующих $\sigma_i^{\pm 1}$ имеют один и тот же знак. Артиновское слово называется *альтернированным*, если оно является однородным и в случае вхождения в него образующих $\sigma_i^{\pm 1}$ и $\sigma_{i+1}^{\pm 1}$ соседних индексов их знаки противоположны. Коса называется *однородной* (соотв. *альтернированной*), если она допускает выражение в виде однородного (соотв. альтернированного) артиновского слова. Под *однородной косой смешанного знака* понимается коса, допускающая выражение в виде однородного артиновского слова, содержащего как положительные, так и отрицательные образующие Артина.

Назовём артиновское слово, представляющее косу из B_n, *вырожденным*, если для некоторого $k \in \{1, \dots, n-1\}$ в нём не встречаются ни σ_k, ни σ_k^{-1}. Коса из B_n называется *вырожденной*, если она допускает выражение в виде такого слова, и *экстремально расщепимой*, если она сопряжена с косой из стандартно вложенной подгруппы $B_{n-1} \subset B_n$.

Нам потребуется следующее наблюдение.

Лемма 2.4 [257, p. 158]**.** При $n \geqslant 2$ любая коса из B_n, представленная положительным артиновским словом, в котором каждая из образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ встречается ровно один раз, сопряжена с косой $\rho_n = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$. □

2.2.2 Динамическая модель

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость и $D^2 \subset \mathbb{C}$ — замкнутый евклидов диск единичного радиуса с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$. Как правило, мы фиксируем единственную отмеченную точку $-i$ на крае диска[5]. Ориентируем этот край *против часовой стрелки*, то есть в таком направлении, что при движении по ∂D^2 из отмеченной точки $-i$ точка 1 встретится раньше, чем точка -1. Под диаметром диска D^2 будем понимать вещественный отрезок $[-1, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Символ D_n^2 обозначает диск D^2, снабжённый $n \geqslant 1$ отмеченными точками $z_1, \dots, z_n$ во внутренности, расположенными на диаметре $[-1, 1]$ так, что $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ на $\mathbb{R}$. Тот же символ D_n^2 используется для обозначения соответствующей проколотой поверхности.

В динамической модели группы B_n мы фиксируем изоморфизм

$$B_n \cong \mathrm{Mod}(D_n^2),$$

переводящий каждую стандартную образующую Артина σ_i в положительное полускручивание вдоль дуги $[z_i, z_{i+1}]$ на диаметре $[-1, 1]$. При таком изоморфизме полный оборот Δ_n^2 соответствует положительному скручиванию Дена T_∂; см. [53, Fig. 16]. Кроме того, каждая ленточная образующая $a_{i,j}$ соответствует полускручиванию вдоль дуги, которая соединяет проколы z_i и z_j, пересекает диаметр $[-1, 1] \subset D^2$ ровно в двух точках и проходит в верхней части диска.

Стягивание края ∂D_n^2 в новый прокол задаёт отображение $D_n^2 \to S_{n+1}^2$ и индуцирует

[5] В разделе 9.3 рассматриваются наборы из нескольких отмеченных точек на ∂D^2.

гомоморфизм

$$B_n \to \mathrm{Mod}(S^2_{n+1}).$$

Его образ совпадает с подгруппой $\mathrm{Mod}_*(S^2_{n+1})$, состоящей из классов отображений, фиксирующих новый прокол, а ядро является циклическим и порождается полным оборотом Δ^2_n; см. [117, p. 247].

В дальнейшем при упоминании действий косы на множествах проколов, дуг и кривых в D^2_n речь идёт о соответствующем элементе группы $\mathrm{Mod}(D^2_n)$. Для $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\varphi \in B_n$ символом $\varphi(i)$ обозначается номер прокола, являющегося образом точки z_i при действии косы φ, то есть $\varphi(z_i) = z_{\varphi(i)}$.

Забывание проколов и брунновы косы

Для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ символом

$$d_k \colon B_n \to B_{n-1}$$

обозначается отображение забывания k-го прокола; см. определение в [25]. При $n \geqslant 3$ отображение d_k не является гомоморфизмом, но гомоморфизмом является его сужение на стабилизатор k-го прокола.

Коса называется *брунновой*, если она становится тривиальной после забывания любого прокола [217, 218, 290, 224, 38, 25, 24]. Множество всех брунновых кос на n нитях обозначается символом Brunn_n. Назовём косу *виртуально брунновой*, если некоторая её ненулевая степень является брунновой. Поскольку группы кос не имеют кручения, всякая крашеная виртуально бруннова коса является брунновой.

Согласно [7, Section 3], при $n \geqslant 3$ выполняются включения[6]

$$\mathrm{Brunn}_n \subseteq \gamma_{n-1}(P_n) \subseteq [P_n, P_n].$$

В частности, при $n \geqslant 3$ экспоненциальная сумма каждой виртуально брунновой косы равна нулю и, следовательно, каждая такая коса лежит в коммутанте группы кос.

Лемма 2.5. При $n \geqslant 3$ множество Brunn_n является нецентральной нормальной подгруппой группы B_n.

Доказательство. Нормальность и нетривиальность подгруппы Brunn_n установлены, например, в работе [25]. Поскольку $Z(B_n) \cap [P_n, P_n] = 1$, отсюда следует, что Brunn_n не является центральной подгруппой группы B_n. □

Пример 2.6. Выполняется равенство $\mathrm{Brunn}_3 = [P_3, P_3]$. Для $\varphi := \sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ коса

$$\varphi^3 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2]$$

[6] Нижний центральный ряд группы G определяется индуктивно:

$$\gamma_1(G) = G, \qquad \gamma_{m+1}(G) := [G, \gamma_m(G)].$$

является брунновой. В частности, коса φ является виртуально брунновой. $\Diamond$

2.3 Разложение Нильсена–Тёрстона и симметрии кос

Коса называется периодической, приводимой или псевдоаносовской, если отвечающий ей класс отображений проколотого диска имеет соответствующий тип[7].

В частности, коса $\varphi \in B_n$ является периодической с параметром p/q, если $\varphi^q = \Delta_n^{2p}$. В группе B_n множество периодических кос совпадает с объединением классов сопряжённости всевозможных степеней кос $\rho_n = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ и $\sigma_1\rho_n$. Экспоненциальная сумма периодической косы с параметром p/q равна $n(n-1)p/q$.

Отметим, что при $n \geqslant 4$ периодическая коса Гарсайда Δ_n приводима.

При $n \geqslant 3$ любая нетривиальная коса из Brunn_n является псевдоаносовской [215, 309]. Следовательно, всякая нетривиальная виртуально бруннова коса также является псевдоаносовской.

Замечание 2.7. Если коса сохраняет некоторую существенную мультикривую, то кривые, отвечающие произвольной орбите компонент этой мультикривой, ограничивают непересекающиеся диски, каждый из которых содержит не менее двух отмеченных точек. $\Diamond$

Замечание 2.8. Пусть число проколов является простым: $n \in \{3, 5, 7, 11, \dots\}$. Если перестановка множества проколов, индуцированная косой $\varphi \in B_n$, имеет единственную орбиту, то коса φ неприводима. $\Diamond$

2.3.1 Расщепимость кос: динамическое и алгебраическое описания

Свяжем расщепимость косы с её вырожденностью.

Для $k \in \{1, \dots, n-1\}$ обозначим символом α_k разделяющую граничную дугу в D_n^2, пересекающую диаметр $[-1, 1]$ трансверсально и ровно в двух точках, расположенных на интервалах $(-1, z_1)$ и (z_k, z_{k+1}); дуга α_k «охватывает» проколы $z_1, \dots, z_k$ и отделяет их от проколов $z_{k+1}, \dots, z_n$. Отметим, что стабилизатор дуги α_k в B_n совпадает с подгруппой $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$. В частности, любая коса из B_n, сохраняющая дугу α_k, является вырожденной.

Лемма 2.9. Для любого $n \geqslant 2$ и любой косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. φ сопряжена с вырожденной косой;
2. φ расщепима, то есть сохраняет некоторую граничную дугу;
3. φ сохраняет некоторую разделяющую граничную дугу.

Доказательство. Сначала докажем, что из условия (1) следует условие (3). Предположим, что коса φ сопряжена с вырожденной косой. Тогда существует коса $\psi \in B_n$, для которой сопряжённая коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ представляется артиновским словом, не содержащим

[7] См. определения в разделе 1.2.1.

образующих σ_k и σ_k^{-1}. Поскольку каждая образующая $\sigma_i^{\pm 1}$, где $i \neq k$, сохраняет стандартную дугу α_k, коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ сохраняет дугу α_k. Следовательно, $(\varphi\psi^{-1})(\alpha_k) = \psi^{-1}(\alpha_k)$, что означает, что коса φ сохраняет разделяющую граничную дугу $\psi^{-1}(\alpha_k)$.

Очевидно, условие (3) влечёт условие (2). Покажем, что из условия (2) следует условие (3). Предположим, что коса φ сохраняет некоторую граничную дугу α. Если дуга α является разделяющей, доказывать нечего, поэтому предположим, что α является неразделяющей. В этом случае один конец дуги α лежит на крае, а другой — в проколе. Выберем регулярную окрестность дуги α. Тогда её граница, после стягивания отрезка на крае ∂D_n^2 в отмеченную точку, даёт разделяющую дугу, также сохраняемую косой φ.

Остаётся показать, что из условия (3) следует условие (1). Предположим, что коса φ сохраняет некоторую разделяющую граничную дугу α. Существует коса $\psi \in B_n$, переводящая дугу α в одну из стандартных разделяющих дуг α_k, где $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тогда сопряжённая коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ сохраняет дугу α_k. Следовательно, коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ является вырожденной, а значит, коса φ сопряжена с вырожденной косой. □

Теперь свяжем существование инвариантной неразделяющей граничной дуги с экстремальной расщепимостью косы.

Пусть символ δ_n обозначает неразделяющую дугу на D_n^2, соединяющую отмеченную точку $-i$ на крае ∂D_n^2 с проколом z_n и пересекающую диаметр диска только в этом проколе. Отметим, что стабилизатор дуги δ_n в B_n совпадает с подгруппой $B_{n-1} \subset B_n$.

Лемма 2.10. Для любого $n \geqslant 2$ и любой косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. φ экстремально расщепима;
2. φ сохраняет некоторую неразделяющую граничную дугу.

Доказательство. Сначала докажем, что из условия (1) следует условие (2). Пусть существует такая коса $\psi \in B_n$, что $\psi\varphi\psi^{-1} \in B_{n-1}$. Тогда коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ сохраняет стандартную дугу δ_n. Следовательно, коса φ сохраняет неразделяющую граничную дугу $\psi^{-1}(\delta_n)$.

Остаётся показать, что из условия (2) следует условие (1). Предположим, что коса φ сохраняет некоторую неразделяющую граничную дугу α. Один конец дуги α лежит на крае, а другой — в проколе. Существует коса $\psi \in B_n$, переводящая дугу α в стандартную дугу δ_n. Тогда коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ сохраняет дугу δ_n. Следовательно, $\psi\varphi\psi^{-1} \in B_{n-1}$, а значит, коса φ экстремально расщепима. □

2.3.2 Внешняя нормальная форма Нильсена–Тёрстона

Уточним конструкцию внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона[8] в случае $S = D_n^2$; см. [147, 146, 1, 148, 178].

Пусть $\varphi \in B_n$ — приводимая непериодическая коса. Тогда существует такая коса $\psi \in B_n$, что каждая компонента внешней инвариантной мультикривой сопряжённой

[8] См. определения в разделе 1.2.2.

косы $\psi\varphi\psi^{-1}$,

$$\mathrm{C}(\psi\varphi\psi^{-1}) = \psi(\mathrm{C}(\varphi)),$$

пересекает диаметр $[-1,1]$ диска D^2_n ровно в двух точках. Для такой косы $\psi\varphi\psi^{-1}$ процедура стягивания дисков, ограниченных компонентами этой мультикривой, в проколы задаёт гомеоморфизм $E' \cong D^2_r$, индуцирующий изоморфизм $\mathrm{Mod}(E') \cong B_r$ для некоторого $r \in \{2,\dots,n-1\}$. Далее опишем эту конструкцию в явном виде.

Пусть $r \geqslant 1$. Назовём косу $\theta \in B_r$ *совместимой* с набором целых чисел $n_1,\dots,n_r \geqslant 1$, если $n_i = n_j$ всякий раз, когда проколы z_i и z_j принадлежат одной орбите при действии косы θ. Через

$$B(n_1,\dots,n_r) \subseteq B_r$$

обозначим подгруппу кос, совместимых с заданным набором $n_1,\dots,n_r$. В работе [104] она называется *partitioned braid group*; в работе [278] она называется *colored braid group*; в работах [146, 263] она называется *mixed braid group*. Отметим, что

$$P_r \subseteq B(n_1,\dots,n_r).$$

Процедура раздутия проколов

Определим процедуру *раздутия проколов с параметрами* $n_1,\dots,n_r$ следующим образом; ср. [263, Section 2.3]. Пусть $\theta \in B(n_1,\dots,n_r)$. Зафиксируем *малые* непересекающиеся евклидовы диски

$$D_1,\dots,D_r \subset D^2$$

одного и того же радиуса с центрами в проколах $z_1,\dots,z_r$ исходного *внешнего* диска D^2_r. Выберем представляющий косу θ гомеоморфизм $h\colon D^2 \to D^2$, переставляющий малые диски D_i посредством параллельных переносов. Выбор можно провести так, чтобы существовала изотопия от h к тождественному гомеоморфизму, все сечения которой действуют на каждом малом диске D_i параллельным переносом; в частности, при таком типе изотопии малые диски «не вращаются». В каждом диске D_i поместим на отрезок $[-1,1] \cap D_i$ ровно n_i новых проколов (так, чтобы выбранный гомеоморфизм сохранял полученный набор проколов) и обозначим символом

$$\theta(n_1,\dots,n_r) \in B_n$$

косу, представленную тем же гомеоморфизмом h диска D^2_n, где $n := n_1 + \ldots + n_r$. Будем говорить, что коса $\theta(n_1,\dots,n_r)$ получается из косы θ *раздутием проколов*, отвечающим параметрам $n_1,\dots,n_r$.

Сопоставление $\theta \mapsto \theta(n_1,\dots,n_r)$ задаёт гомоморфизм

$$B(n_1,\dots,n_r) \to B_n.$$

Он инъективен, поскольку имеет левый обратный. Геометрически этот гомоморфизм соответствует «параллельному каблированию» нитей косы.

При $r \geqslant 2$ и $(n_1, \ldots, n_r) \neq (1, \ldots, 1)$ существенную мультикривую на D^2_n, отвечающую границе объединения тех дисков D_i, для которых $n_i \geqslant 2$, будем называть *инвариантной мультикривой, отвечающей раздутию проколов*. Символом

$$K(n_1, \ldots, n_r) \subset B_n$$

обозначим подгруппу кос, представленных гомеоморфизмами, которые действуют тождественно в дополнении объединения малых дисков D_i и, в частности, переводят каждый малый диск в себя. Отметим, что гомоморфизмы сдвига индексов индуцируют изоморфизм

$$K(n_1, \ldots, n_r) \cong B_{n_1} \times \ldots \times B_{n_r}$$

и что при $r \geqslant 2$ каждая коса из подгруппы $K(n_1, \ldots, n_r)$ расщепима.

Внешняя и трубчатая части косы

При $n \geqslant 3$ с каждой косой $\varphi \in B_n$ свяжем число $r \in \{2, \ldots, n\}$, её *внешнюю косу* $\varphi_{\mathrm{ext}} \in B_r$, являющуюся либо периодической, либо псевдоаносовской, и её *трубчатую косу* $\varphi_{\mathrm{tub}} \in B_n$.

Если коса φ является периодической или псевдоаносовской, положим $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi_{\mathrm{tub}} = \varphi$.

Согласно [178, Section 3], [146, Section 5.1] и [1, стр. 312], если коса φ является приводимой и не является периодической, то существуют число $r \in \{2, \ldots, n-1\}$, натуральные параметры $n_1, \ldots, n_r$, сумма которых равна n, периодическая или псевдоаносовская коса

$$\varphi_{\mathrm{ext}} \in B(n_1, \ldots, n_r) \subseteq B_r$$

и коса

$$\kappa \in K(n_1, \ldots, n_r) \subseteq B_n,$$

для которых коса φ сопряжена с некоторой косой φ', допускающей запись во *внешней нормальной форме Нильсена–Тёрстона*

$$\varphi' = \varphi_{\mathrm{tub}} \kappa,$$

где коса $\varphi_{\mathrm{tub}} := \varphi_{\mathrm{ext}}(n_1, \ldots, n_r)$ получается из косы φ_{ext} раздутием проколов с параметрами n_i. Косу κ будем называть *внутренней*; отметим, что в отличие от классов сопряжённости $\widehat{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ и $\widehat{\varphi_{\mathrm{tub}}}$, класс $\widehat{\kappa}$ не определяется косой φ однозначно. Инвариантная мультикривая, отвечающая такому раздутию, совпадает с внешней инвариантной мультикривой $\mathrm{C}(\varphi')$ сопряжённой косы φ'. Кроме того, для этой косы каноническое отождествление $E' \cong D^2_r$ задаёт изоморфизм $\mathrm{Mod}_{\mathrm{C}(\varphi')}(E') \cong B(n_1, \ldots, n_r)$.

В работе [1] класс сопряжённости $\widehat{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ называется *главным компаньоном* класса $\widehat{\varphi}$,

а класс $\widehat{\varphi}$ называется *сателлитом* класса $\widehat{\varphi_{\text{ext}}}$. Отметим, что в работах [147, 146], в отличие от работ [148, 178], коса φ_{ext} называется не внешней, а трубчатой.

Для периодических и псевдоаносовских кос положим $r = n$ и $n_1 = \ldots = n_r = 1$. Отметим, что $B(1, \ldots, 1) = B_n$.

Замечание 2.11. Согласно лемме 1.9, коса $\varphi \in B_n$ расщепима в том и только в том случае, если внешняя коса φ_{ext} тривиальна. ◊

Процедура стягивания дисков в проколы

Нам также потребуется следующая процедура *стягивания дисков в проколы*. Пусть коса $\varphi \in B_n$ сохраняет некоторую мультикривую, компоненты которой ограничивают, для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, попарно непересекающиеся диски $D_1, \ldots, D_k$, содержащие $n_1, \ldots, n_k$ проколов соответственно. Выберем гомеоморфизм диска D^2, представляющий косу φ и переставляющий диски D_i. Стянем каждый диск D_i в отдельный прокол и рассмотрим индуцированный гомеоморфизм полученного проколотого диска D^2_m, где $m = n - (n_1 + \ldots + n_k) + k$. Тогда класс сопряжённости косы, заданной этим гомеоморфизмом, корректно определён. Например, при применении этой процедуры к внешней инвариантной мультикривой приводимой непериодической косы φ получается класс сопряжённости внешней косы φ_{ext}.

2.3.3 Типы ахиральности

Нам потребуются необходимые и достаточные условия для различных типов ахиральности, введённых в разделе 1.2.3, подходящие для алгоритмического распознавания этих свойств.

Ахиральность

Напомним, что коса называется ахиральной (A), если некоторая её ненулевая степень сопряжена со своей обратной. Отметим, что экспоненциальная сумма любой ахиральной косы равна нулю.

Ниже покажем, что каждая ахиральная коса сопряжена со своей обратной.

Замечание 2.12. Для группы G и элемента $g \in G$ положим

$$R(g) := \{h \in G \mid h^{-1}gh = g^{-1}\}.$$

Если $R(g) \neq \varnothing$, выберем $h_0 \in R(g)$. Тогда выполняется равенство

$$R(g) = \{h_0 h \mid h \in C(g)\},$$

где символ $C(g)$ обозначает централизатор элемента g в группе G. Кроме того, для любого элемента $h \in R(g)$ имеем $h^2 \in C(g)$. ◊

Воспользуемся следующим результатом Х. Гонсалеса-Менесеса об извлечении корней в группах кос.

Лемма 2.13 [147]**.** Для $\varphi, \psi \in B_n$ и целого $m \neq 0$ косы φ и ψ сопряжены в том и только в том случае, если сопряжены косы φ^m и ψ^m. Кроме того, если

$$\varphi^m = \psi^m$$

и коса φ является псевдоаносовской, то $\varphi = \psi$. □

Отсюда получаем следующие эквивалентные описания ахиральных кос.

Предложение 2.14. Для $n \geqslant 2$ и косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. коса φ является ахиральной;
2. коса φ сопряжена со своей обратной;
3. существуют косы $\psi, \zeta \in B_n$, для которых коса ζ коммутирует с косой ψ^2 и выполняется соотношение $\varphi = \zeta\psi\zeta^{-1}\psi^{-1}$.

Кроме того, для любого $\psi \in B_n$ имеем

$$\{\varphi \in B_n \mid \psi \in R(\varphi)\} = \{[\zeta, \psi] \mid \zeta \in C(\psi^2)\}.$$

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 2.13. Если выполняются соотношения $\varphi = \zeta\psi\zeta^{-1}\psi^{-1}$ и $\zeta\psi^2 = \psi^2\zeta$, то $\psi^{-1}\zeta\psi = \psi\zeta\psi^{-1}$, откуда

$$\psi^{-1}\varphi\psi = \psi^{-1}\zeta\psi\zeta^{-1} = \psi\zeta\psi^{-1}\zeta^{-1} = \varphi^{-1}.$$

Обратно, пусть $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi^{-1}$. Тогда $(\varphi\psi)^2 = \psi^2$. По лемме 2.13 косы $\varphi\psi$ и ψ сопряжены, то есть существует коса $\zeta \in B_n$, для которой $\varphi\psi = \zeta\psi\zeta^{-1}$. Отсюда следует соотношение $\varphi = \zeta\psi\zeta^{-1}\psi^{-1}$. Наконец, получаем

$$\zeta\psi^2\zeta^{-1} = (\zeta\psi\zeta^{-1})^2 = (\varphi\psi)^2 = \psi^2.$$ □

Внешняя ахиральность

Заметим, что коса $\varphi \in B_n$ является внешне ахиральной (BA) в том и только в том случае, если внешняя коса

$$\varphi_{\text{ext}} \in B(n_1, \ldots, n_r) \subseteq B_r$$

ахиральна как элемент группы $B(n_1, \ldots, n_r)$. Приведём эквивалентные описания внешне ахиральных кос.

Предложение 2.15. Для $n \geqslant 3$ и косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. коса φ является внешне ахиральной;
2. в группе $B(n_1, \ldots, n_r)$ внешняя коса φ_{ext} сопряжена со своей обратной.

Кроме того, если внешняя коса φ_{ext} является периодической, то эти условия выполняются в том и только в том случае, если коса φ расщепима.

Доказательство. Пусть сначала внешняя коса φ_{ext} является псевдоаносовской. Если существуют коса $\psi \in B(n_1, \dots, n_r)$ и целое число $s \neq 0$, для которых $\psi\varphi_{\text{ext}}^s\psi^{-1} = \varphi_{\text{ext}}^{-s}$, то по второму утверждению леммы 2.13 получаем $\psi\varphi_{\text{ext}}\psi^{-1} = \varphi_{\text{ext}}^{-1}$. Если же внешняя коса φ_{ext} является периодической и ахиральной, то её экспоненциальная сумма равна нулю, откуда следует, что она тривиальна. По замечанию 2.11 это равносильно расщепимости косы φ. □

Замечание 2.16. Для групп кос алгоритм распознавания непустоты множества $R(g)$ и, в случае непустоты, нахождения его представителей см. в работе [141]. В частности, проблема распознавания ахиральности косы алгоритмически разрешима. Кроме того, в работе [146] получен алгоритм поиска образующих централизатора $C(g)$. Следовательно, поскольку вопрос о принадлежности заданной косы подгруппе $B(n_1, \dots, n_r)$ сводится к анализу соответствующей перестановки, проблема распознавания того, сопряжена ли в группе $B(n_1, \dots, n_r)$ заданная коса со своей обратной, также алгоритмически разрешима. В частности, проблема распознавания внешней ахиральности косы алгоритмически разрешима. ◊

Ахиральность после стягивания края

Напомним, что коса называется ахиральной после стягивания края (AC) в том и только в том случае, если её образ в фактор-группе $B_n/\langle\Delta_n^2\rangle$ является ахиральным. Переформулируем это условие следующим образом.

Свяжем с каждой косой φ целые числа

$$e := \exp(\varphi), \qquad d := \gcd\{|e|, n(n-1)\}, \qquad k_0 := \frac{n(n-1)}{d}, \qquad m_0 := -\frac{e}{d}.$$

Таким образом, пара (k_0, m_0) является примитивным целочисленным решением уравнения $ke + mn(n-1) = 0$, для которого $k_0 > 0$.[9]

Предложение 2.17. Для $n \geqslant 2$ и косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. коса φ является ахиральной после стягивания края;
2. коса $\varphi^{k_0}\Delta_n^{2m_0}$ сопряжена со своей обратной.

В частности, при $\exp(\varphi) = 0$ коса φ ахиральна после стягивания края в том и только в том случае, если она сопряжена со своей обратной.

Доказательство. Согласно следствию 1.11, ахиральность после стягивания края косы φ эквивалентна существованию таких целых чисел $k \neq 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, что коса $\varphi^k\Delta_n^{2m}$ является ахиральной и принадлежит коммутанту $[B_n, B_n]$. Принадлежность коммутанту эквивалентна равенству $\exp(\varphi^k\Delta_n^{2m}) = 0$. Каждое ненулевое решение такого уравнения имеет вид $(k, m) = t(k_0, m_0)$ для некоторого целого $t \neq 0$. Таким образом, условие (AC) эквивалентно ахиральности косы $\varphi^{k_0}\Delta_n^{2m_0}$, а по предложению 2.14 — её сопряжённости со своей обратной. □

[9] Отметим, что $ke + mn(n-1) = \exp(\varphi^k\Delta_n^{2m})$.

В частности, предложения 2.14 и 2.17 дают следующую эквивалентность:

$$\text{(A)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(AC) и } \exp(\varphi) = 0.$$

Замечание 2.18. Совмещая замечание 2.16 и предложение 2.17, получаем, что проблема распознавания ахиральности после стягивания края алгоритмически разрешима. ◊

Внешняя ахиральность после стягивания края

Заметим, что коса φ является внешне ахиральной после стягивания края (BAC) в том и только в том случае, если образ внешней косы φ_{ext} в фактор-группе $B(n_1, \ldots, n_r)/\langle\Delta_r^2\rangle$ является ахиральным. Переформулируем это условие следующим образом.

Свяжем с каждой косой φ следующую подгруппу группы $\mathbb{Z}^2$:

$$\Gamma_\varphi := \left\{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; \varphi_{\text{ext}}^k \Delta_r^{2m} \in [B(n_1, \ldots, n_r), B(n_1, \ldots, n_r)]\right\}.$$

Лемма 2.19. Подгруппа Γ_φ либо тривиальна, либо является бесконечной циклической.

Доказательство. Поскольку полный оборот Δ_r^2 является центральным, множество Γ_φ действительно является подгруппой группы $\mathbb{Z}^2$. Кроме того, эта подгруппа содержится в ядре гомоморфизма $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, заданного правилом

$$(k, m) \mapsto \exp(\varphi_{\text{ext}}^k \Delta_r^{2m}).$$

Поскольку этот гомоморфизм нетривиален[10], его ядро является бесконечной циклической группой и, следовательно, подгруппа Γ_φ либо тривиальна, либо также является бесконечной циклической. □

Если группа Γ_φ нетривиальна, обозначим через (k_0, m_0) её единственную образующую, для которой $k_0 > 0$.[11]

Предложение 2.20. Для $n \geqslant 3$ и косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. коса φ является внешне ахиральной после стягивания края;
2. группа Γ_φ нетривиальна и в подгруппе $B(n_1, \ldots, n_r)$ коса $\varphi_{\text{ext}}^{k_0} \Delta_r^{2m_0}$ сопряжена со своей обратной.

Кроме того, если внешняя коса φ_{ext} является периодической, то коса φ внешне ахиральна после стягивания края; более того, группа Γ_φ нетривиальна и коса $\varphi_{\text{ext}}^{k_0} \Delta_r^{2m_0}$ тривиальна.

Доказательство. Пусть сначала внешняя коса φ_{ext} является периодической с параметром p/q. Тогда $\varphi_{\text{ext}}^q = \Delta_r^{2p}$, и поэтому $(q, -p) \in \Gamma_\varphi$. В частности, группа Γ_φ нетривиальна.

[10] Действительно, образ элемента $(0, 1)$ равен $r(r-1) \neq 0$.

[11] Такой выбор возможен, поскольку первая координата любого нетривиального элемента группы Γ_φ отлична от нуля.

Выберем такое целое $t \neq 0$, что $(q, -p) = t(k_0, m_0)$. Тогда

$$\left(\varphi_{\text{ext}}^{k_0}\Delta_r^{2m_0}\right)^t = \varphi_{\text{ext}}^{q}\Delta_r^{-2p} = 1.$$

Поскольку группы кос не имеют кручения, коса $\varphi_{\text{ext}}^{k_0}\Delta_r^{2m_0}$ тривиальна.

Теперь докажем эквивалентность условий (1) и (2). Согласно следствию 1.12, внешняя ахиральность после стягивания края косы φ эквивалентна существованию такой пары $(k, m) \in \Gamma_\varphi$, что $k \neq 0$ и коса $\varphi_{\text{ext}}^{k}\Delta_r^{2m}$ является ахиральной как элемент группы $B(n_1, \ldots, n_r)$. Если группа Γ_φ нетривиальна, то $(k, m) = t(k_0, m_0)$ для некоторого целого $t \neq 0$. Таким образом, условие (BAC) эквивалентно ахиральности косы $\varphi_{\text{ext}}^{k_0}\Delta_r^{2m_0}$ как элемента подгруппы $B(n_1, \ldots, n_r)$. Эквивалентность такой ахиральности искомой сопряжённости со своей обратной устанавливается как в доказательстве предложения 2.15. □

В частности, предложения 2.15 и 2.20 дают следующую эквивалентность:

$$\text{(BA)} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(BAC) и } \exp(\varphi_{\text{ext}}) = 0.$$

Замечание 2.21. Проблема распознавания нетривиальности группы Γ_φ и, в нетривиальном случае, вычисления её примитивной образующей сводится к вычислению образа внешней косы φ_{ext} в абелизации группы $B(n_1, \ldots, n_r)$.[12] Алгоритм такого вычисления получен в работе [104, Proposition 3.5]. Следовательно, с учётом замечания 2.16, проблема распознавания внешней ахиральности после стягивания края алгоритмически разрешима. ◊

В заключение отметим, что для групп классов отображений произвольных поверхностей с непустым краем аналог предложения 2.14 не всегда верен; см. [64].

2.4 Замыкания кос

В случае $S = D_n^2$ общая конструкция раздела 1.3.1 отвечает стандартному разложению трёхмерной сферы в открытую книгу:

$$S^3 = \bigcup_{\theta \in S^1} H_\theta, \qquad A = \bigcap_{\theta \in S^1} H_\theta,$$

где переплёт $A := B_\varphi \subset S^3 = Y_\varphi$ представляет собой тривиальный узел, а каждая страница H_θ является диском с краем A. Зацепление $L_\varphi \subset S^3$ называется *замыканием* косы $\varphi \in B_n$, а переплёт A — его *осью* [213].

Замыкания сопряжённых кос изотопны. Отображения $B_{n-1} \to B_n$, заданные правилами $\varphi \mapsto \varphi\sigma_{n-1}$ и $\varphi \mapsto \varphi\sigma_{n-1}^{-1}$, называются соответственно *положительной* и *отрицательной стабилизациями*. При стабилизациях изотопический тип замыкания косы также сохраняется. Нам потребуется следующее более общее наблюдение.

[12] Действительно, группа Γ_φ совпадает с ядром гомоморфизма $\mathbb{Z}^2 \to B(n_1, \ldots, n_r)_{\text{ab}}$, заданного правилом $(k, m) \mapsto k[\varphi_{\text{ext}}] + m[\Delta_r^2]$.

Пусть в артиновском слове w одна из образующих Артина $\sigma_i^{\pm 1}$ встречается ровно один раз. Обозначим через $s_i(w)$ артиновское слово, полученное из w удалением этого единственного вхождения и последующей заменой образующих $\sigma_j^{\pm 1}$ с индексами $j > i$ на $\sigma_{j-1}^{\pm 1}$.

Лемма 2.22 [35, Lemma 3.4]**.** Замыкания кос, представленных словами w и $s_i(w)$, изотопны. □

Число компонент замыкания косы совпадает с числом орбит индуцированной ею перестановки множества проколов.

Замечание 2.23. По замечанию 2.8, если число n является простым и замыкание L_φ косы $\varphi \in B_n$ является узлом, то коса φ неприводима. ◊

Для всех целых $p \in \mathbb{Z}$ и $q \geqslant 1$ замыкание косы $\rho_q^p \in B_q$ является торическим зацеплением $T_{p,q}$. В частности, если замыкание периодической косы является узлом, то этот узел является торическим. Замыкание любой альтернированной косы является альтернированным зацеплением. Замыкания однородных кос относятся к классу так называемых однородных зацеплений [98, 35]. Замыкание любой нетривиальной брунновой косы является брунновым зацеплением; для крашеных кос верно и обратное: если замыкание крашеной косы является брунновым зацеплением, то эта коса является брунновой [224, Lemma 1.8].

Следующие результаты Т. Стэнфорда и Дж. Бирман связывают алгебраические свойства кос с инвариантами их замыканий.

Лемма 2.24 [289, Theorem 1]**.** Для любых $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 1$, крашеной косы $\varphi \in \gamma_m(P_n)$ и косы $\psi \in B_n$ замыкания кос $\varphi\psi$ и ψ неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше $m - 1$. □

Лемма 2.25 [53, Proposition 3.10]**.** Для любого $n \geqslant 3$ и любых кос $\varphi \in \mathrm{Bur}_n$ и $\psi \in B_n$, если замыкания кос $\varphi\psi$ и ψ являются узлами, то их модули Александера изоморфны. В частности, эти узлы имеют одинаковые многочлены Александера и одинаковые элементарные идеалы. □

Аналогичный результат для сигнатуры Левина–Тристрама будет установлен в разделе 11.2.1; см. предложение 11.12.

Наконец, нам потребуется реализация конструкции связной суммы зацеплений[13] на уровне представляющих их кос, предложенная Дж. Бирман и У. Менэско [55].

Пусть $p, q \geqslant 1$. Для кос $\varphi \in B_p$ и $\psi \in B_q$ положим

$$\varphi \# \psi := \varphi \cdot \mathrm{sh}_{p-1}(\psi) \in B_{p+q-1}.$$

Замыкание косы $\varphi\#\psi$ представляет собой связную сумму замыканий кос φ и ψ [235, p. 445]. Будем называть косы такого вида *стандартными составными косами*. Назо-

[13] Для многокомпонентных зацеплений связная сумма зависит от выбранных компонент.

вём косу *составной*, если она сопряжена некоторой стандартной составной косе, для которой $p, q \geqslant 2$. В частности, при $n \geqslant 3$ каждая расщепимая коса является составной.

Пусть $r \geqslant 1$ и $n_1, \ldots, n_r \geqslant 1$. Тогда для кос $\varphi_i \in B_{n_i}$ стандартная составная коса

$$\varphi_1 \# \ldots \# \varphi_r$$

имеет $n_1 + \ldots + n_r - (r-1)$ нитей, а её замыкание представляет связную сумму зацеплений L_{φ_i}. Зададим числа $s_1, \ldots, s_{r-1}$ правилом $s_j = n_1 + \ldots + n_j$ и положим

$$\kappa = \varphi_1 \cdot \mathrm{sh}_{s_1}(\varphi_2) \cdot \mathrm{sh}_{s_2}(\varphi_3) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sh}_{s_{r-1}}(\varphi_r).$$

Тогда $\kappa \in K(n_1, \ldots, n_r)$.

Лемма 2.26. Замыкание косы $\kappa\, \sigma_{s_1} \sigma_{s_2} \ldots \sigma_{s_{r-1}}$ изотопно замыканию стандартной составной косы $\varphi_1 \# \varphi_2 \# \ldots \# \varphi_r$. В частности, оно представляет связную сумму замыканий кос $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$.

Доказательство. Заметим, что коса $\kappa\, \sigma_{s_1} \sigma_{s_2} \ldots \sigma_{s_{r-1}}$ допускает артиновское слово, в котором каждая образующая $\sigma_{s_i}^{\pm 1}$ встречается ровно один раз. В частности, при $i = 1$ применима лемма 2.22, согласно которой при удалении образующей σ_{s_1} и последующем уменьшении на единицу индексов всех образующих с большими индексами, чем s_1, замыкание косы сохраняется. Повторяя эту процедуру $r-1$ раз, получаем косу

$$\varphi_1 \cdot \mathrm{sh}_{s_1 - 1}(\varphi_2) \cdot \mathrm{sh}_{s_2 - 2}(\varphi_3) \cdot \ldots \cdot \mathrm{sh}_{s_{r-1} - (r-1)}(\varphi_r),$$

то есть стандартную составную косу $\varphi_1 \# \ldots \# \varphi_r$. □

2.4.1 Минимальность, жёсткость и симметрии

Назовём косу *минимальной*, если число её нитей минимально среди всех представителей того же ориентированного зацепления. Минимальность сохраняется при сопряжении.

При $p \neq 0$ коса ρ_q^p минимальна тогда и только тогда, когда $q \leqslant |p|$ [100]. Любая коса, представленная альтернированным словом, в которое каждая образующая Артина входит не менее двух раз, является минимальной [261, 219]; ср. лемму 2.22.

Число нитей некоторой (следовательно, любой) минимальной косы, представляющей заданное ориентированное зацепление, называется *индексом косы* этого зацепления.

Назовём ориентированное зацепление *жёстким*, если любые два его минимальных представителя сопряжены. Назовём минимальную косу *жёсткой*, если её замыкание является жёстким[14].

Торические узлы являются жёсткими [47]. Отметим, что существуют зацепления, допускающие бесконечно много попарно несопряжённых минимальных представителей

[14] Выбор термина восходит к [236, Definition 3.6] и [236, Corollary 4.16]; ср. [85].

из одного и того же числа нитей; см. [50, p. 266] и [177].

Типы симметрий жёстких зацеплений отражаются в свойствах их минимальных представителей.

Предложение 2.27. Пусть коса $\varphi \in B_n$ является жёсткой. Тогда:

1. зацепление L_φ является отрицательно амфихиральным в том и только в том случае, если коса φ сопряжена с косой φ^{-1};

2. зацепление L_φ является положительно амфихиральным в том и только в том случае, если коса φ сопряжена с косой $\mu(\varphi)$;

3. зацепление L_φ является обратимым в том и только в том случае, если коса φ сопряжена с косой $\mu(\varphi)^{-1}$.

Доказательство. Заметим, что зацепления $L_{\varphi^{-1}}$ и $-L_\varphi^*$ изотопны, зацепления $L_{\mu(\varphi)}$ и L_φ^* изотопны, а также зацепления $L_{\mu(\varphi)^{-1}}$ и $-L_\varphi$ изотопны. Поскольку замыкания сопряжённых кос изотопны, каждое из трёх рассматриваемых свойств косы влечёт соответствующее свойство её замыкания.

Обратно, поскольку коса φ является жёсткой, она минимальна, и число n совпадает с индексом косы зацепления L_φ. Если L_φ обладает одним из рассматриваемых свойств, то соответственно одна из кос φ^{-1}, $\mu(\varphi)$ и $\mu(\varphi)^{-1}$ также представляет ориентированное зацепление L_φ. Каждая из этих кос имеет n нитей, а значит, является минимальной. Значит, она сопряжена с жёсткой косой φ, откуда следует соответствующее свойство косы φ. □

2.4.2 Исчисление Бирман–Менэско

Нам потребуется ряд так называемых упрощающих трафаретных преобразований замыканий кос, предложенных Дж. Бирман и У. Менэско и расширяющих классическую процедуру дестабилизации Маркова; см. [213]. Ограничимся определением допустимости этих преобразований.

Пусть $\varphi \in B_n$. Будем говорить, что класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает *дестабилизацию*, если коса φ сопряжена с косой вида $\gamma\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ для некоторого $\gamma \in B_{n-1}$. Эквивалентно,

$$\widehat{\varphi} \cap B_{n-1}\sigma_{n-1}^{\pm 1} \neq \varnothing.$$

Будем говорить, что класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает *рокировку* (англ. *exchange move*), если коса φ сопряжена с косой вида $\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{-1}$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{n-1}$. Эквивалентно,

$$\widehat{\varphi} \cap B_{n-1}\sigma_{n-1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{-1} \neq \varnothing.$$

Наконец, класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает *переворот* (англ. *flype*), если коса φ сопряжена с косой вида $\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{\pm 1}\gamma_3\sigma_{n-1}^{-1}$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in B_{n-1}$. Эквивалентно,

$$\widehat{\varphi} \cap B_{n-1}\sigma_{n-1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{\pm 1}B_{n-1}\sigma_{n-1}^{-1} \neq \varnothing.$$

Замечание 2.28. Согласно [235, Remark 4.4], при $n \geqslant 3$, если класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию, то он допускает рокировку, а если он допускает рокировку, то он допускает переворот. Кроме того, если коса φ является составной (например, расщепимой), то класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку; см. [235, Proposition 6.1]. $\Diamond$

Нам потребуются следующие результаты исчисления Бирман–Менэско.

Лемма 2.29 [235, Proposition 6.1]**.** При $n \geqslant 3$, если зацепление L_φ не является простым, то класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ косы $\varphi \in B_n$ допускает рокировку.

Доказательство. См. [57, 54] для случая тривиального зацепления и [55, 59] для случая расщепимого или составного зацепления. $\square$

Лемма 2.30 [248, 249]**.** Если L_φ является торическим узлом, то либо коса $\varphi \in B_n$ является периодической, либо класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. $\square$

Перейдём теперь к допустимости более общих упрощающих трафаретных преобразований исчисления Бирман–Менэско.

При $n \geqslant 3$ *блочно-нитевая диаграмма* $\mathcal{D}$ задаётся косами $\psi_1, \ldots, \psi_k \in B_n$ и k интервалами $[p_i, q_i]$ такими, что

$$1 \leqslant p_i \leqslant q_i < n, \qquad [p_i, q_i] \neq [1, n-1].$$

Каждый интервал $[p_i, q_i]$ задаёт собственную подгруппу в B_n, порождённую $\sigma_{p_i}, \ldots, \sigma_{q_i}$.

Класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ *допускает* блочно-нитевую диаграмму $\mathcal{D}$, если он содержит косу вида

$$\gamma_1\psi_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_k\psi_k$$

для некоторых γ_i, имеющих слова в образующих Артина $\sigma_s^{\pm 1}$ при $p_i \leqslant s \leqslant q_i$. В частности, поскольку $1 < p_i$ или $q_i < n-1$, косы γ_i вырождены.

Нам потребуется вариант так называемой теоремы Маркова без стабилизации, принадлежащей Дж. Бирман и У. Менэско; см. [213, Theorem 7.3]. Из этой теоремы следует, что класс сопряжённости каждой неминимальной косы допускает некоторое упрощающее трафаретное преобразование; в частности, допускает некоторую блочно-нитевую диаграмму.

Лемма 2.31 [52, Theorem 2]**.** Для любого $n \geqslant 3$ существует такое конечное множество $\mathcal{S}_n$ блочно-нитевых диаграмм, что класс сопряжённости любой нежёсткой (например, неминимальной) косы из B_n допускает диаграмму из $\mathcal{S}_n$. $\square$

Таким образом, приведённые результаты сводят ряд вопросов о топологии замыканий кос к существованию в их классе сопряжённости выражений определённого вида. Поэтому для получения признаков простоты замыкания, а также жёсткости представляющей его косы достаточно найти характеристику, значения которой ограничены на косах, допускающих соответствующие выражения. Конкретным примером такой характеристики служит коэффициент дробного скручивания Дена.

2.5 Закрученность: динамика кос и топология замыканий

Коэффициент дробного скручивания Дена[15] на группе B_n обозначается символом $\omega_n := \omega_\partial$ и называется *закрученностью*.

Пример 2.32. При $n = 2$ выполняется соотношение $2\,\omega_2 = \exp$. При $n = 3$ закрученность ω_3 тесно связана с так называемой функцией Радемахера на группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$; см. [140, 168]. ◊

Отметим следующее уточнение леммы 1.18 о рациональности значений коэффициентов дробного скручивания Дена.

Лемма 2.33 [229, Theorem 11.1]**.** При $n \geqslant 2$ выполняется равенство

$$\omega_n(B_n) = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant q \leqslant n \right\}.$$

В частности, множество значений функции $\omega_n \colon B_n \to \mathbb{R}$ дискретно. □

Нам также потребуется значение закрученности на зеркальном образе косы.

Лемма 2.34 [229, Theorem 8.1]**.** При $n \geqslant 2$ для любого $\varphi \in B_n$ имеем

$$\omega_n(\mu(\varphi)) = -\omega_n(\varphi).$$ □

2.5.1 Пороговые признаки качественных свойств

На качественном уровне применения закрученности в теории узлов восходят к следующему результату А. Малютина [227, 229], разрешающему гипотезы У. Менэско [202, Problem 1.84].

Лемма 2.35 [229, Theorem 14.2]**.** При $n \geqslant 3$ для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются следующие свойства:

1. если $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию или рокировку, то $|\omega_n(\varphi)| \leqslant 1$;
2. если $\widehat{\varphi}$ допускает переворот, то $|\omega_n(\varphi)| \leqslant 2$. □

Этот результат будет обобщён в разделе 9.2. Объединяя леммы 2.29 и 2.35, получаем следующий признак простоты.

Лемма 2.36 [235, Theorem 6.2]**.** При $n \geqslant 2$ для любой косы $\varphi \in B_n$, если $|\omega_n(\varphi)| > 1$, то зацепление L_φ является простым. □

Этот результат будет обобщён в разделе 9.2.1.

Далее, согласно результату П. Феллера и Д. Хаббард, закрученность даёт признак минимальности кос.

Лемма 2.37 [120, Theorem 1.1]**.** При $n \geqslant 2$ для любой косы $\varphi \in B_n$, если $|\omega_n(\varphi)| > n - 1$, то коса φ является минимальной. □

[15] См. раздел 1.2.4.

Более того, А. Малютин и Н. Нецветаев [235, Theorem 5.1] доказали для каждого $n \geqslant 3$ существование такой константы $\rho(n)$, что если $|\omega_n(\varphi)| > \rho(n)$, то класс сопряжённости косы $\varphi \in B_n$ не допускает никакой блочно-нитевой диаграммы; по лемме 2.31 это влечёт жёсткость косы φ. Этот результат будет обобщён в разделе 9.2.2.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 2.38. При $n \geqslant 2$ для любой жёсткой косы $\varphi \in B_n$, если $\omega_n(\varphi) \neq 0$, то зацепление L_φ является хиральным.

Доказательство. Совместим предложение 2.27 с леммами 1.15 и 2.34. □

Также приведём теорему Т. Ито, являющуюся частным случаем более общей теоремы Т. Ито и К. Кавамуро [182]; см. лемму 1.21.

Лемма 2.39 [172, Theorem 1.3]**.** При $n \geqslant 3$ предположим, что для косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство $|\omega_n(\varphi)| > 1$ и что зацепление L_φ является узлом. Тогда:

1. узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической;

2. узел L_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если коса φ является псевдоаносовской;

3. узел L_φ является сателлитным в том и только в том случае, если коса φ является приводимой. □

Этот результат, в частности, даёт эффективно проверяемый признак гиперболичности узлов в трёхмерной сфере. В разделе 9.4.3 будет приведено обобщение теоремы Ито, в котором закрученность заменяется более общими вещественнозначными функционалами.

2.5.2 Оценки численных характеристик замыкания

Приведём результаты Т. Ито, П. Феллера, М. Хеддена и Т. Марка, связывающие закрученность с численными характеристиками зацеплений. Первый из них будет обобщён в разделе 9.3.2.

Лемма 2.40 [171, Theorem 1.2] и [119, p. 277]**.** Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant \frac{-2\chi_3(L_\varphi)}{n+2} + \frac{3}{2}. \qquad \square$$

Лемма 2.41 [119, Theorem 3]**.** Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ выполняется неравенство

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant -\chi_4(L_\varphi) + n. \qquad \square$$

Лемма 2.42 [164, p. 17]**.** Для любого нечётного $n \geqslant 3$ и для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$|\omega_n(\varphi)| \leqslant \dim_{\mathbb{F}_2} \widehat{\mathrm{HF}}(\Sigma_2(L_\varphi)) + 2 \leqslant \dim_{\mathbb{F}_2} \widetilde{\mathrm{Kh}}(L_\varphi^*) + 2. \qquad \square$$

2.5.3 Распознавание динамики и ограничения закрученности

Наконец, покажем, что коэффициент дробного скручивания Дена может быть использован для распознавания качественных динамических свойств косы. Нам потребуется следующий результат.

Лемма 2.43 [229, Lemmas 5.2 & 13.3]**.** Для любого целого $n \geqslant 3$, кос $\varphi, \psi \in B_n$ и индекса $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняются неравенства

$$\omega_n(\varphi\psi) \leqslant \omega_n(\varphi\sigma_k\psi) \leqslant \omega_n(\varphi\psi) + 1. \qquad \square$$

Лемма 2.44. При $n \geqslant 3$ положительная коса $\varphi \in B_n$ нерасщепима тогда и только тогда, когда $\omega_n(\varphi) > 0$.

Доказательство. Если коса φ расщепима, то $\omega_n(\varphi) = 0$ по лемме 1.14. Теперь предположим, что коса φ нерасщепима, и выберем её произвольную запись в положительных образующих Артина. Тогда в ней встречается каждая из образующих $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$. Выберем по одному вхождению каждой такой образующей и рассмотрим слово, полученное удалением всех остальных букв:

$$w = \sigma_{i_1} \ldots \sigma_{i_{n-1}}.$$

Последовательно применяя нижнюю оценку из леммы 2.43, получаем $\omega_n(\varphi) \geqslant \omega_n(w)$. С другой стороны, по лемме 2.4 коса w сопряжена с косой $\rho_n = \sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}$, и потому из соотношения $\rho_n^n = \Delta_n^2$ получаем

$$\omega_n(\varphi) \geqslant \omega_n(w) = \omega_n(\rho_n) = \frac{\omega_n(\Delta_n^2)}{n} = \frac{1}{n} > 0. \qquad \square$$

Таким образом, в классе положительных кос закрученность позволяет распознать нерасщепимость.

Покажем, однако, что области применения закрученности существенно ограничены. Нам потребуется следующий результат.

Лемма 2.45 [229, Corollary 5.5]**.** Для любого целого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$, допускающей артиновское слово, не содержащее образующей σ_k^{-1} для некоторого индекса $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, имеем

$$\omega_n(\varphi) \geqslant 0. \qquad \square$$

Лемма 2.46. Для любого $n \geqslant 3$ и любой однородной косы смешанного знака $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение $\omega_n(\varphi) = 0$.

Доказательство. Выберем произвольное однородное артиновское слово смешанного знака для φ. Поскольку оно содержит положительную образующую σ_i, из однородности следует, что это слово не содержит образующих σ_i^{-1}. По лемме 2.45 получаем неравенство $\omega_n(\varphi) \geqslant 0$. Поскольку слово также содержит отрицательную образующую σ_j^{-1}, обратное слово, представляющее косу φ^{-1}, содержит образующую σ_j, но не содержит образующей σ_j^{-1}. Значит, по лемме 2.45 получаем неравенство $\omega_n(\varphi^{-1}) \geqslant 0$. По лемме 1.15 получаем $-\omega_n(\varphi) \geqslant 0$. Следовательно, $\omega_n(\varphi) = 0$. □

В частности, этот результат применим к следующим косам, дающим представителей класса альтернированных зацеплений.

Следствие 2.47. Для любого $n \geqslant 3$ и любой альтернированной косы $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение $\omega_n(\varphi) = 0$.

Доказательство. Если коса φ вырождена, утверждение следует из лемм 1.14 и 2.9. Иначе φ является однородной косой смешанного знака. В этом случае утверждение сводится к лемме 2.46. □

В главе 9 будет показано, что при $n \geqslant 3$ каждая нерасщепимая альтернированная коса из B_n является псевдоаносовской; см. следствие 9.36.

Вышеописанный корпус результатов, основанный в том числе на теории Бирман–Менэско, подтверждает для закрученности как качественную, так и количественную формы порогового принципа. Наряду с этим он показывает, что области применения закрученности ограничены: эта функция обращается в нуль на широких классах псевдоаносовских кос, замыкания которых являются зацеплениями неограниченной топологической и геометрической сложности. В дальнейшем роль закрученности будут играть асимптотические числа переноса изометрических действий групп кос и групп классов отображений поверхностей (глава 3), квазиморфизмы (глава 4) и относительная стабильная коммутаторная длина (глава 5).

ГЛАВА 3 АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ПЕРЕНОСА ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

В настоящей главе с каждым изометрическим действием группы G на метрическом пространстве X связывается асимптотическое число переноса

$$\ell_X \colon G \to [0, +\infty),$$

измеряющее скорость смещения орбит.

В разделе 3.1 вводятся числа переноса изометрий и действий и устанавливаются их основные свойства.

В разделе 3.2 описывается поведение асимптотических чисел переноса при квазиизометрических вложениях. В частности, рассматриваются действия групп на себе левыми сдвигами и естественные отображения между графами, отвечающими дугам и кривым на поверхности.

В разделе 3.3 показано, как асимптотические числа переноса могут использоваться для выявления топологической, геометрической и динамической сложности элементов группы и связанных с ними объектов, что иллюстрирует качественную и количественную формы порогового принципа.

В разделе 3.4 рассматриваются изометрические действия на пространствах, гиперболических по Громову. Описывается особая динамическая структура локсодромических элементов таких действий: пара неподвижных точек на границе Громова и динамика «источник–сток». На основе этой структуры вводятся ослабления классического условия вполне разрывности действий, использующиеся в главах 4 и 6.

3.1 Асимптотические числа переноса

Мы предполагаем известными такие базовые понятия геометрической теории групп, как словарная метрика, действия групп на топологических и метрических пространствах, орбиты и стабилизаторы [220].

Напомним, что отображение $\varphi \colon X \to Y$ метрических пространств X и Y называется *изометрическим* (или *изометрическим вложением*), если оно сохраняет расстояние: для каждой пары точек $p, q \in X$ выполняется соотношение

$$d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) = d_X(p, q).$$

Изометрическое отображение называется *изометрией*, если оно взаимно однозначно; в этом случае обратное отображение также является изометрическим.

Геодезической кривой (или просто *геодезической*) длины $L \geqslant 0$ в пространстве X называется изометрическое отображение вида $[0, L] \to X$, где отрезок $[0, L] \subset \mathbb{R}$ рассматривается со стандартной метрикой вещественной прямой. Метрическое простран-

ство называется *геодезическим*, если любые две его точки можно соединить геодезической [220, Definition 5.3.1]. Метрическое пространство X называется *собственным*, если для любых $x \in X$ и $r > 0$ замкнутый шар $B_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$ компактен.

Пример 3.1. Связный граф является собственным в том и только в том случае, если он локально конечен. Геометрическая реализация любого связного графа, рассматриваемая с метрикой кратчайшего пути, является геодезическим метрическим пространством [220, Proposition 5.3.8]. ◊

В дальнейшем, если не оговорено иное, под действием группы G на метрическом пространстве X подразумевается действие изометриями, то есть гомоморфизм

$$G \to \mathrm{Iso}(X).$$

Вместо обозначения действия $G \curvearrowright X$ мы часто будем писать просто X, подразумевая, что X рассматривается как G-пространство. Изометрия пространства X, соответствующая заданному элементу группы G, обозначается тем же символом.

3.1.1 Числа переноса изометрий

Числом переноса изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ называется величина [71, Chapter II.6]

$$\tau_X(\varphi) := \inf\{d(x, \varphi(x)) \mid x \in X\}.$$

Если пространство X является связным графом, то инфимум достигается и совпадает с соответствующим минимумом. Величину $d(x, \varphi(x))$ будем называть *смещением* точки x под действием изометрии φ.

Для определения асимптотической версии числа переноса нам потребуется следующее стандартное следствие леммы Фекете.

Лемма 3.2. Предположим, что последовательность $(a_m)_{m=1}^{\infty}$ вещественных чисел является *квазисубаддитивной*, то есть существует такая константа $C \geqslant 0$, что для всех $m, n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n + C.$$

Тогда существует предел последовательности a_m/m, возможно равный $-\infty$, причём

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} = \inf_{m\geqslant 1} \frac{a_m + C}{m}.$$

Если, кроме того, последовательность $(a_m)_{m=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию *квазиаддитивности*

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leqslant C,$$

то предел последовательности a_m/m конечен.

Доказательство. Последовательность $b_m := a_m + C$ субаддитивна:

$$b_{m+n} = a_{m+n} + C \leqslant (a_m + C) + (a_n + C) = b_m + b_n.$$

По лемме Фекете существует предел последовательности b_m/m, причём выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b_m}{m} = \inf_{m\geqslant 1} \frac{b_m}{m}.$$

Поскольку $a_m/m = b_m/m - C/m$, предел последовательности a_m/m также существует и равен пределу последовательности b_m/m.

При дополнительном предположении о квазиаддитивности последовательность a_m/m ограничена снизу:

$$\frac{a_m}{m} \geqslant a_1 - \frac{(m-1)C}{m} \geqslant a_1 - C.$$

Следовательно, предел этой последовательности не равен $-\infty$. □

Асимптотическим числом переноса изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ называется величина

$$\ell_X(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \inf_{x\in X} \frac{d(x, \varphi^m(x))}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m}.$$

Следующая лемма, в частности, показывает, что этот предел существует, и даёт его интерпретацию как величины среднего смещения по орбите.

Лемма 3.3. Для любых $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ и $x \in X$ предел последовательности $d(x, \varphi^m(x))/m$ существует и не зависит от выбора точки x. Более того,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d(x, \varphi^m(x))}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m}.$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и положим $a_m(x) := d(x, \varphi^m(x))$. Тогда для всех $m, n \geqslant 1$ имеем

$$a_{m+n}(x) = d(x, \varphi^{m+n}(x)) \leqslant d(x, \varphi^m(x)) + d(\varphi^m(x), \varphi^{m+n}(x)) = a_m(x) + a_n(x),$$

поскольку φ^m является изометрией. Следовательно, последовательность $a_m(x)$ субаддитивна, и по лемме 3.2 предел $L(x)$ последовательности $a_m(x)/m$ существует, а именно,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m(x)}{m} = \inf_{m\geqslant 1} \frac{a_m(x)}{m}.$$

Далее покажем независимость от выбора точки x. Для $x, y \in X$ и целого $m \geqslant 1$ имеем

$$a_m(x) = d(x, \varphi^m(x)) \leqslant d(x, y) + d(y, \varphi^m(y)) + d(\varphi^m(y), \varphi^m(x)) = a_m(y) + 2d(x, y).$$

Меняя точки x и y местами, получаем соотношение $|a_m(x) - a_m(y)| \leqslant 2d(x, y)$. Деля на m и переходя к пределу, заключаем, что $L(x) = L(y)$. Следовательно, величина $L(x)$

не зависит от выбора точки x. Положим $L := L(x)$.

Наконец, покажем, что L совпадает с пределом последовательности $\tau_X(\varphi^m)/m$. По определению инфимума, для любого $x \in X$ имеем $\tau_X(\varphi^m) \leqslant a_m(x)$. Переходя к верхнему пределу, получаем

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{a_m(x)}{m} = L.$$

По определению инфимума, для любых $n \geqslant 1$ и $x \in X$ имеем

$$L \leqslant \frac{a_n(x)}{n}.$$

Переходя к инфимуму по всем $x \in X$, получаем

$$L \leqslant \frac{\tau_X(\varphi^n)}{n}.$$

Следовательно,

$$L \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^n)}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^n)}{n} \leqslant L. \qquad \square$$

Таким образом, с каждым метрическим пространством X связаны функции

$$\tau_X, \ell_X \colon \mathrm{Iso}(X) \to [0, +\infty).$$

В дальнейшем, если это не вызывает путаницы, мы называем их *числами переноса*. Приведём основные свойства этих функций.

Лемма 3.4. Пусть X — метрическое пространство и $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}(X)$.

1. Функции τ_X и ℓ_X инвариантны относительно сопряжения:

$$\tau_X(\psi\varphi\psi^{-1}) = \tau_X(\varphi), \qquad \ell_X(\psi\varphi\psi^{-1}) = \ell_X(\varphi).$$

2. Функция ℓ_X *абсолютно однородна*: для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\ell_X(\varphi^m) = |m|\ell_X(\varphi).$$

3. Если изометрия φ имеет неподвижную точку, то $\tau_X(\varphi) = \ell_X(\varphi) = 0$. Если она имеет ограниченную орбиту, то $\ell_X(\varphi) = 0$.

4. Выполняется соотношение $\ell_X(\varphi) \leqslant \tau_X(\varphi)$.

Доказательство. Инвариантность функции τ_X относительно сопряжения следует из равенств

$$\tau_X(\psi\varphi\psi^{-1}) = \inf_{x\in X} d\big(x, \psi\varphi\psi^{-1}(x)\big) = \inf_{x\in X} d\big(\psi^{-1}(x), \varphi\psi^{-1}(x)\big) = \inf_{y\in X} d(y, \varphi(y)) = \tau_X(\varphi).$$

Инвариантность функции ℓ_X теперь следует из определения.

Далее, для $m \geqslant 1$ имеем

$$\ell_X(\varphi^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_X((\varphi^m)^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^{mn})}{n} = m \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^{mn})}{mn} = m\ell_X(\varphi).$$

Кроме того,

$$\tau_X(\varphi^{-1}) = \inf_{x\in X} d(x, \varphi^{-1}(x)) = \inf_{x\in X} d(\varphi(x), x) = \inf_{y\in X} d(y, \varphi(y)) = \tau_X(\varphi),$$

откуда $\ell_X(\varphi^{-1}) = \ell_X(\varphi)$. Это доказывает утверждение (2).

Утверждение о неподвижной точке следует непосредственно из определения. Если орбита точки $x \in X$ при действии изометрии φ ограничена, то последовательность $d(x, \varphi^m(x))$ ограничена, поэтому

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \frac{d(x, \varphi^m(x))}{m} = 0.$$

Наконец, для $m \geqslant 1$ и $x \in X$ имеем

$$d(x, \varphi^m(x)) \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} d(\varphi^k(x), \varphi^{k+1}(x)) = m\, d(x, \varphi(x)).$$

Переходя к инфимуму по $x \in X$, деля на m и переходя к пределу, получаем

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \frac{\tau_X(\varphi^m)}{m} \leqslant \tau_X(\varphi). \qquad \square$$

Отметим, что функции τ_X и ℓ_X не обязательно квазисубаддитивны относительно композиции изометрий: число переноса произведения может не быть ограничено сверху в терминах чисел переноса сомножителей.

Пример 3.5. Композиция двух отражений вещественной прямой $\mathbb{R}$ является параллельным переносом на расстояние, равное удвоенному расстоянию между центрами этих отражений. $\lozenge$

3.1.2 Локсодромические изометрии

Назовём изометрию $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ *локсодромической*, если $\ell_X(\varphi) > 0$. В этом случае расстояния между некоторой (следовательно, любой) точкой и её итерациями растут линейно.

Изометрия называется *эллиптической*, если некоторая (следовательно, любая) её орбита ограничена. Согласно утверждению (3) леммы 3.4, эллиптические изометрии не являются локсодромическими.

Наконец, изометрию, не являющуюся ни эллиптической, ни локсодромической, назовём *параболической*. Таким образом, каждая изометрия относится ровно к одному из трёх динамических типов: эллиптическому, параболическому или локсодромическому.

Отметим, что динамический тип изометрии сохраняется при сопряжении и при возведении в ненулевую степень.

Приведём два описания локсодромических изометрий в действиях групп классов отображений, которые будут использоваться далее.[1] Начнём с теоремы Х. Мазура и Я. Мински.

Лемма 3.6 [242, Proposition 3.6]**.** Изометрия графа кривых $\mathcal{C}(S)$, отвечающая классу отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S, является локсодромической в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским.

Следующий результат получен А. Расмуссеном[2].

Лемма 3.7 [271, Lemma 3.4]**.** Изометрия графа $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$, отвечающая классу отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂, является локсодромической в том и только в том случае, если внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона[3] класса φ является псевдоаносовской.

Более общий результат, включающий описание локсодромических изометрий в действии на графе дуг $\mathcal{A}(S)$, см. в работе [91].

3.1.3 Числа переноса действий

Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Описанные выше конструкции позволяют связать с этим действием функции

$$\tau_X, \ell_X \colon G \to [0, +\infty).$$

Действие называется *локсодромическим*, если G содержит хотя бы один локсодромический элемент. Обозначим через

$$Z_X := \{g \in G \mid \ell_X(g) = 0\} \subseteq G$$

множество всех нелоксодромических элементов действия.

Нижние оценки расстояний

Значения чисел переноса могут использоваться для получения нижних оценок расстояний. Так, если группа G действует на метрическом пространстве X, то для любой пары точек $p, q \in X$, лежащих в одной орбите, и для любого элемента $g \in G$, для

[1] Определения рассматриваемых графов приведены в разделе 1.1.2.

[2] В работе [271] этот результат сформулирован в терминах действия группы $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$ на графе петель $\mathcal{L}_\partial(S)$, а мы переформулируем его, используя лемму 3.15 ниже, в терминах действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$.

[3] См. определение в разделе 1.2.2.

которого $g(p) = q$, выполняются неравенства

$$\ell_X(g) \leqslant \tau_X(g) \leqslant d_X(p, q).$$

В случае, когда пространство X является связным графом, а число орбит вершин действия конечно, имеется следующая оценка для произвольной пары вершин.

Выберем представителей $v_1, \ldots, v_m$ орбит действия и положим $r := \operatorname{diam}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Тогда для любых вершин $p, q \in X$ и элементов $a, b \in G$, удовлетворяющих условиям $a(v_i) = p$ и $b(v_j) = q$ для некоторых i, j, выполняется соотношение

$$\ell_X(ab^{-1}) \leqslant \tau_X(ab^{-1}) \leqslant d_X(p, q) + r.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d_X(p, q) &\geqslant d_X((ab^{-1})(q), q) - d_X(p, (ab^{-1})(q)) \\ &= d_X(a(v_j), q) - d_X(a(v_i), a(v_j)) \\ &= d_X(a(v_j), q) - d_X(v_i, v_j) \\ &\geqslant \tau_X(ab^{-1}) - r \geqslant \ell_X(ab^{-1}) - r. \end{aligned}$$

3.2 Крупномасштабное сравнение действий

Опишем поведение асимптотического числа переноса при «крупномасштабных» отображениях действий, таких как квазиизометрические вложения, а затем применим полученные результаты в контексте действий группы на себе левыми сдвигами и действий группы классов отображений на графах, отвечающих дугам и кривым.

3.2.1 Крупномасштабные отображения

Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется *грубо липшицевым*, если существуют такие константы $K, L \geqslant 0$, что для каждой пары точек $p, q \in X$ выполняется соотношение

$$d_Y(f(p), f(q)) \leqslant K \cdot d_X(p, q) + L.$$

В этом случае f называется (K, L)-*грубо липшицевым*. В частности, $(K, 0)$-грубо липшицевы отображения называются K-*липшицевыми*.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *квазиизометрическим вложением*, если существуют такие константы $A \geqslant 1$ и $B \geqslant 0$, что для каждой пары точек $p, q \in X$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{A} d_X(p, q) - B \leqslant d_Y(f(p), f(q)) \leqslant A \cdot d_X(p, q) + B.$$

Замечание 3.8. Из леммы 3.3 следует, что изометрия $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ метрического пространства X является локсодромической в том и только в том случае, если для некоторой (следовательно, для любой) точки $x \in X$ отображение $\mathbb{Z} \to X$, заданное формулой $m \mapsto \varphi^m(x)$, является квазиизометрическим вложением. ◊

Квазиизометрическое вложение $f\colon X \to Y$ называется *квазиизометрией*, если оно *почти сюръективно*, то есть некоторая метрическая окрестность образа $\mathrm{im}(f)$ совпадает с Y. Эквивалентно, существует квазиизометрическое вложение $g\colon Y \to X$, для которого композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ находятся на конечном расстоянии от тождественных отображений; это означает, что существует такая константа $C \geqslant 0$, что

$$d_X(g(f(x)), x) \leqslant C, \qquad d_Y(f(g(y)), y) \leqslant C$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Пространства X и Y *квазиизометричны*, если между ними существует квазиизометрия. В этом случае мы используем обозначение $X \simeq Y$.

Квазигеодезической в пространстве X называется квазиизометрическое вложение из некоторого отрезка вещественной прямой в X. Пространство называется *квазигеодезическим*, если существуют такие $A \geqslant 1$ и $B \geqslant 0$, что любые две его точки можно соединить некоторой (A, B)-квазигеодезической [220, Definition 5.3.4]. В частности, любой связный граф является квазигеодезическим.

Пусть группа G действует на множествах X и Y. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *эквивариантным*, если для всех $x \in X$ и $\varphi \in G$ выполняется соотношение

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)).$$

Предположим теперь, что множества X и Y снабжены метриками, а действия группы G являются изометрическими. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *грубо эквивариантным*, если существует такая константа $C \geqslant 0$, что для всех $x \in X$ и $\varphi \in G$ выполняется соотношение

$$d_Y(f(\varphi(x)), \varphi(f(x))) \leqslant C.$$

В этом случае f называется *C-грубо эквивариантным*.

Следуя [4], назовём изометрические действия группы G на X и Y *эквивалентными*, если существует грубо эквивариантная квазиизометрия $X \to Y$.

Пример 3.9. Если группа G является конечно порождённой, то с каждым её конечным порождающим множеством связана словарная метрика на G и изометрическое действие группы G на себе левыми сдвигами. Любые два таких действия эквивалентны: тождественное отображение является эквивариантной квазиизометрией. ◊

Замечание 3.10. Согласно [4, Proposition 3.14], для любой группы каждое действие на геодезическом метрическом пространстве эквивалентно некоторому действию на связном графе. В связи с этим в ряде последующих конструкций мы ограничимся действиями на связных графах. ◊

Функции $f, g\colon Q \to [0, +\infty]$, заданные на некотором множестве Q, называются *сравнимыми с точностью до мультипликативной константы*, если существует такое вещественное число $c > 0$, что

$$\frac{1}{c}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant c\, g(x)$$

для всех $x \in Q$. В этом случае мы используем обозначение $f \asymp g$ или $f(x) \asymp g(x)$. Если выполняется лишь односторонняя оценка $f(x) \leqslant c\, g(x)$, мы используем обозначение $f \lesssim g$ или $f(x) \lesssim g(x)$.

3.2.2 Сравнение чисел переноса

Следующая лемма является основным инструментом для сравнения динамической сложности одного и того же элемента относительно различных действий.

Лемма 3.11. Пусть группа G действует на метрических пространствах X и Y.

1. Предположим, что существует C-грубо эквивариантное (K, L)-грубо липшицево отображение $f\colon X \to Y$. Тогда для всех $g \in G$ выполняются соотношения

$$\tau_Y(g) \leqslant K \cdot \tau_X(g) + L + C, \qquad \ell_Y(g) \leqslant K \cdot \ell_X(g).$$

В частности,

$$\ell_Y \lesssim \ell_X$$

и имеется включение множеств нелоксодромических элементов: $Z_X \subseteq Z_Y$.

2. Предположим, что существует грубо эквивариантное (A, B)-квазиизометрическое вложение $f\colon X \to Y$. Тогда для всех $g \in G$ выполняются соотношения

$$\frac{1}{A}\ell_X(g) \leqslant \ell_Y(g) \leqslant A \cdot \ell_X(g).$$

В частности,

$$\ell_X \asymp \ell_Y,$$

и множества нелоксодромических элементов в двух действиях совпадают: $Z_X = Z_Y$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (1) зафиксируем $x \in X$ и $g \in G$. Пользуясь неравенством треугольника, грубой липшицевостью и грубой эквивариантностью, оценим смещение точки $f(x)$ в пространстве Y:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), g(f(x))) &\leqslant d_Y(f(x), f(g(x))) + d_Y(f(g(x)), g(f(x))) \\ &\leqslant K \cdot d_X(x, g(x)) + L + C. \end{aligned}$$

Переходя к инфимуму по всем $x \in X$, получаем

$$\tau_Y(g) \leqslant \inf_{x \in X} d_Y(f(x), g(f(x))) \leqslant K \cdot \tau_X(g) + L + C,$$

откуда следует требуемое неравенство. Для перехода к асимптотическому числу переноса применим полученную оценку к элементу g^m:

$$\ell_Y(g) = \lim_{m\to\infty} \frac{\tau_Y(g^m)}{m} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{K\cdot\tau_X(g^m)+L+C}{m} = K\cdot\lim_{m\to\infty}\frac{\tau_X(g^m)}{m} = K\cdot\ell_X(g).$$

Докажем утверждение (2). Поскольку любое (A,B)-квазиизометрическое вложение является (A,B)-грубо липшицевым, верхняя оценка $\ell_Y(g)\leqslant A\cdot\ell_X(g)$ следует из утверждения (1). Остаётся доказать нижнюю оценку $\ell_X(g)/A\leqslant\ell_Y(g)$.

Пользуясь (A,B)-квазиизометричностью, неравенством треугольника и C-грубой эквивариантностью, для $m\geqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}d_X(x,g^m(x)) - B &\leqslant d_Y(f(x),f(g^m(x)))\\ &\leqslant d_Y(f(x),g^m(f(x))) + d_Y(g^m(f(x)),f(g^m(x)))\\ &\leqslant d_Y(f(x),g^m(f(x))) + C.\end{aligned}$$

Разделив полученную оценку на m и переходя к пределу, получаем

$$\frac{1}{A}\ell_X(g)\leqslant\ell_Y(g). \qquad \square$$

Таким образом, последовательность грубо эквивариантных грубо липшицевых отображений

$$X_1\to X_2\to\ldots\to X_n\to\ldots$$

метрических пространств, на которых действует фиксированная группа G, задаёт иерархию асимптотических чисел переноса

$$\ldots\lesssim\ell_{X_n}\lesssim\ldots\lesssim\ell_{X_2}\lesssim\ell_{X_1},$$

и фильтрацию

$$Z_{X_1}\subseteq Z_{X_2}\subseteq\ldots\subseteq Z_{X_n}\subseteq\ldots$$

группы G.

3.2.3 Действия групп на себе и искажённые элементы

Пусть конечно порождённая группа G действует изометриями на метрическом пространстве X. Зафиксируем на G словарную метрику, отвечающую произвольному конечному порождающему множеству S, и точку $x\in X$. Тогда отображение

$$G\to X,$$

заданное правилом $g \mapsto g(x)$, является эквивариантным и K-липшицевым, где

$$K := \max_{s \in S} d_X(x, s(x)).$$

Поэтому из леммы 3.11 для каждого $g \in G$ следует оценка

$$\ell_X(g) \leqslant K \cdot \ell_G(g).$$

Таким образом, асимптотическое число переноса в действии группы G на себе даёт, с точностью до мультипликативной константы, универсальную верхнюю оценку чисел переноса во всех её изометрических действиях.

Следуя [150, 3], назовём элемент g конечно порождённой группы G *искажённым*, если он является нелоксодромическим в её действии на себе со словарной метрикой, отвечающей некоторому (следовательно, любому) конечному порождающему множеству S этой группы. Эквивалентно, последовательность длин степеней элемента g в словарной метрике на группе G имеет сублинейный рост:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{|g^m|_S}{m} = 0.$$

Следуя [81, Definition 2.9], назовём элемент произвольной группы *искажённым*, если он содержится в некоторой конечно порождённой подгруппе, относительно которой является искажённым в смысле вышеописанного определения. Множество всех искажённых элементов обозначается символом $\mathrm{Dist}(G)$. В частности, любой элемент конечного порядка является искажённым:

$$\mathrm{Tor}(G) \subseteq \mathrm{Dist}(G).$$

Вышеописанное рассуждение приводит к следующему результату.

Лемма 3.12. Для любой группы G каждый искажённый элемент действует нелоксодромически при любом изометрическом действии этой группы:

$$\mathrm{Dist}(G) \subseteq \bigcap_{G \curvearrowright X} Z_X. \qquad \square$$

3.2.4 Действия на графах, отвечающих дугам и кривым

Далее воспользуемся обозначениями графов, отвечающих дугам и кривым, которые введены в разделе 1.1.2. Нам потребуется следующий результат М. Коркмаза и А. Пападопулоса.

Лемма 3.13 [207, Theorem 1.3]**.** Для любой неисключительной поверхности S, отличной от тора $\Sigma_{1,0}$, естественное включение из $\mathcal{C}(S)$ в $\mathcal{AC}(S)$ является эквивариантной квазиизометрией:

$$\mathcal{C}(S) \simeq \mathcal{AC}(S).$$

Более того, для каждой пары вершин x, y графа $\mathcal{C}(S)$ имеем

$$\frac{1}{2} d_{\mathcal{C}}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{AC}}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{C}}(x, y) + B,$$

где $B = 0$, если поверхность S не является спорадической, и $B = 2$, если S — спорадическая поверхность. В частности, действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{C}(S)$ эквивалентно её действию на графе $\mathcal{AC}(S)$. □

Следствие 3.14. Для любой неисключительной поверхности S, отличной от тора $\Sigma_{1,0}$, выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} \ell_{\mathcal{C}(S)} \leqslant \ell_{\mathcal{AC}(S)} \leqslant \ell_{\mathcal{C}(S)}.$$ □

Нам потребуется эквивалентная модель действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$.

Лемма 3.15 [10, Lemma 3.4]**.** Для любой неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂ тождественное вложение из графа петель $\mathcal{L}_\partial(S)$ в граф $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ является эквивариантной квазиизометрией:

$$\mathcal{L}_\partial(S) \simeq \mathcal{A}^\circ_\partial(S).$$

Более того, для каждой пары вершин x, y графа $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\partial(S)$ имеем

$$\frac{1}{2} d_{\mathcal{L}}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{A}^\circ_\partial}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{L}}(x, y).$$ □

Нам потребуется ещё одна эквивалентная модель графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$ в виде фактор-графа графа $\mathcal{A}_\partial$ по действию скручивания Дена T_∂.

Лемма 3.16. Пусть поверхность S имеет единственную компоненту края ∂. Тогда естественное сюръективное отображение

$$q \colon \mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle \to \mathcal{A}^\circ_\partial$$

является эквивариантной $(1, 2)$-квазиизометрией. В частности, действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ эквивалентно её действию на фактор-графе $\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle$, причём выполняется соотношение $\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial} = \ell_{\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle}$.

Доказательство. Отображение q сюръективно, эквивариантно относительно действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ и является 1-липшицевым. По замечанию 1.3 оно взаимно однозначно на подграфе лучей $\mathcal{R}_\partial(S) \subseteq \mathcal{A}^\circ_\partial(S)$, состоящем из классов свободной изотопии граничных дуг с несовпадающими концами. Прообраз в факторе $\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle$ каждой вершины подграфа петель $\mathcal{L}_\partial(S) \subseteq \mathcal{A}^\circ_\partial(S)$, отвечающего классам свободной изотопии граничных дуг с совпадающими концами, состоит из ровно двух вершин, находящихся на расстоянии 1. Кроме того, любой путь в графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ допускает поднятие в графе $\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle$, имеющее ту же длину. Отсюда следует, что q является $(1, 2)$-квазиизометрией; в частности, для

каждой пары вершин x, y фактор-графа $\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle$ имеем

$$d_{\mathcal{A}^\circ_\partial}(q(x), q(y)) \leqslant d_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{A}^\circ_\partial}(q(x), q(y)) + 2.$$

Равенство $\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial} = \ell_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}$ следует по лемме 3.11. □

Наконец, покажем, что действие на графе $\mathcal{A}_\partial$ эквивалентно действию на его подграфе $\mathcal{NA}_\partial$ неразделяющих граничных дуг.

Лемма 3.17. Для любой неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂ тождественное отображение из $\mathcal{NA}_\partial$ в $\mathcal{A}_\partial$ является почти сюръективным изометрическим вложением. В частности, $\ell_{\mathcal{A}_\partial} = \ell_{\mathcal{NA}_\partial}$.

Доказательство. Поскольку обе компоненты дополнения любой существенной разделяющей граничной дуги на S отличны от диска, на них найдётся неразделяющая граничная дуга. Это показывает, что каждая вершина графа $\mathcal{A}_\partial$ находится на расстоянии не более 1 от подграфа $\mathcal{NA}_\partial$.

Для доказательства изометричности возьмём произвольный геодезический путь

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y$$

в графе $\mathcal{A}_\partial$ между некоторыми вершинами $x, y \in \mathcal{NA}_\partial$. Последовательно устраним из него все разделяющие вершины. Для каждой такой вершины x_i выберем её представителя α_i и представителей α_{i-1} и α_{i+1} вершин x_{i-1} и x_{i+1} соответственно, не пересекающих дугу α_i. Дуги α_{i-1} и α_{i+1} лежат по одну сторону от α_i: иначе они бы не пересекались, и путь не был бы геодезическим. Следовательно, на другой стороне найдётся неразделяющая граничная дуга α'_i. Она не пересекает ни α_{i-1}, ни α_{i+1}, поэтому вершину x_i можно заменить на вершину x'_i, соответствующую дуге α'_i. Повторяя эту процедуру, получаем путь в $\mathcal{NA}_\partial$ из x в y той же длины. Таким образом,

$$d_{\mathcal{NA}_\partial}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{A}_\partial}(x, y).$$

Обратное неравенство очевидно; это показывает изометричность. Равенство чисел переноса следует из леммы 3.11. □

3.3 Пороговый принцип для чисел переноса: основные примеры

Опишем основные примеры использования асимптотических чисел переноса в одномерной динамике, динамике классов отображений поверхностей и трёхмерной геометрии и топологии, подтверждающие пороговый принцип для этих характеристик.

3.3.1 Число вращения Пуанкаре

Начнём с классического примера. Обозначим символом G группу

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) = \{f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R}) \mid f(x+m) = f(x) + m \text{ для всех } m \in \mathbb{Z} \text{ и } x \in \mathbb{R}\}$$

автогомеоморфизмов вещественной прямой $\mathbb{R}$, сохраняющих её ориентацию и коммутирующих с параллельными переносами на целочисленные расстояния.

Снабдим эту группу метрикой

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Супремум конечен, поскольку разность $f(x)-g(x)$ периодична. Зададим действие группы G на полученном метрическом пространстве $X := G$ умножением справа на обратный элемент: автогомеоморфизму $f \in G$ сопоставляется изометрия $h \mapsto h \circ f^{-1}$. Это действие является изометрическим.

Напомним, что *числом вращения Пуанкаре*[4] автогомеоморфизма $f \in G$ называется предел [196, 142, 128]

$$\mathrm{rot}(f) := \lim_{m\to\infty} \frac{f^m(x) - x}{m},$$

который существует, конечен и не зависит от точки $x \in \mathbb{R}$.

Пример 3.18. Асимптотическое число переноса вышеописанного действия группы G на себе совпадает с абсолютным значением числа вращения Пуанкаре. Действительно, для любого элемента $f \in G$ последовательность $(f^m(x) - x)/m$ сходится к числу вращения $\mathrm{rot}(f)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ [196], и значит,

$$\ell_X(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{d_\infty(\mathrm{id}, f^{-m})}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{d_\infty(\mathrm{id}, f^m)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sup_x |f^m(x) - x|}{m} = |\mathrm{rot}(f)|.$$

В частности, по теореме Пуанкаре элемент $f \in G$ является нелоксодромическим в том и только в том случае, если он имеет неподвижную точку на $\mathbb{R}$.

Число вращения Пуанкаре

$$\mathrm{rot}\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathbb{R}$$

является $(1,2)$-квазиизометрическим вложением:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| - 2 \leqslant |\mathrm{rot}(f) - \mathrm{rot}(g)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + 2.$$

Более того, оно является квазиизометрией: отображение i, сопоставляющее вещественному числу α параллельный перенос $T_\alpha(x) := x + \alpha$, является изометрическим, причём $\mathrm{rot} \circ i = \mathrm{id}$ и $d_\infty(T_{\mathrm{rot}(f)}, f) \leqslant 1$. ◊

[4] В некоторых работах функция rot называется *числом переноса*; см. [234].

3.3.2 Динамика классов отображений

Перейдём к действиям групп классов отображений поверхностей. Начнём с интерпретации топологической энтропии[5] как асимптотического числа переноса.

Пример 3.19. Согласно теоремам У. Тёрстона и Л. Берса [118, 117], для любой неисключительной поверхности S без края и отрицательной эйлеровой характеристики и любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ его асимптотическое число переноса в действии на пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$ с метрикой Тейхмюллера совпадает с логарифмом дилатации и топологической энтропией:

$$\ell_{\mathrm{T}}(\varphi) = \log \lambda(\varphi) = \mathrm{ent}(\varphi). \qquad \Diamond$$

Следующий пример показывает, что нижнюю оценку той же меры динамической сложности даёт асимптотическое число переноса в графе кривых; ср. [200, 205].

Пример 3.20. Для любой неисключительной поверхности S отрицательной эйлеровой характеристики и любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \lesssim \mathrm{ent}(\varphi).$$

В случае, когда поверхность S не имеет компонент края, это следует из теоремы Х. Мазура и Я. Мински [242, 154], согласно которой отображение

$$\mathcal{T}(S) \to \mathcal{C}(S),$$

сопоставляющее гиперболической структуре произвольно выбранную существенную кривую наименьшей длины, является грубо эквивариантным и грубо липшицевым. Применяя лемму 3.11, получаем требуемое неравенство в случае, когда класс φ является псевдоаносовским; для непсевдоаносовских классов левая часть равна нулю по лемме 3.6, и неравенство выполнено. Для поверхности с краем дополнительно используем гомоморфизм стягивания края и равенство

$$\mathrm{ent}(\mathrm{Cap}(\varphi)) = \mathrm{ent}(\varphi). \qquad \Diamond$$

Нижняя оценка энтропии с константами, приведёнными в явном виде, будет установлена в разделе 8.3.3.

Число переноса в графе кривых связано и с другими динамическими характеристиками. Для гомеоморфизма $f\colon S \to S$ символом $\mathrm{Fix}(f)$ обозначим множество его неподвижных точек без учёта проколов и символом $\#\mathrm{Fix}(f)$ — число элементов этого мно-

[5] См. раздел 1.2.4.

жества. Для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ положим

$$\#\mathrm{Fix}(\varphi) := \min\{\#\mathrm{Fix}(f) \mid f \in \mathrm{Homeo}_+(S, \partial S, \{z_1, \dots, z_n\}),\ [f] = \varphi\} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\},$$

где $z_1, \dots, z_n$ — отмеченные точки во внутренности поверхности S.

Пример 3.21. Согласно теореме Т. Аугаба, Д. Футера и С. Тейлора [9, Corollary 1.3], для любой неисключительной поверхности S без края и отрицательной эйлеровой характеристики асимптотическое число переноса в графе кривых $\mathcal{C}(S)$ даёт нижнюю оценку числа неподвижных точек псевдоаносовских классов отображений[6]:

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \lesssim \log\left(\#\mathrm{Fix}(\varphi) + 1\right) + 1. \qquad \Diamond$$

3.3.3 Трёхмерная геометрия и топология

Числа переноса класса отображений поверхности также связаны с геометрическими и топологическими характеристиками ассоциированных с ним многообразий, которые введены в разделе 1.3. Начнём с примеров, относящихся к гиперболическому объёму.

Пример 3.22. Согласно теореме Дж. Брока [73, 74, 126, 125], для любой неисключительной поверхности S без края и отрицательной эйлеровой характеристики и любого псевдоаносовского класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ его число переноса в действии на пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}(S)$ с метрикой Вейля–Петерсона сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с гиперболическим объёмом тора отображения:

$$\ell_{\mathrm{WP}}(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(T_\varphi). \qquad \Diamond$$

Особенно важным для дальнейшего развития в главе 8 является следующий пример.

Пример 3.23. Согласно теореме Д. Футера и С. Шлеймера [135], для любой поверхности S с выделенной компонентой края ∂ асимптотическое число переноса любого псевдоаносовского класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ в действии на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с объёмом максимальной орисферической окрестности $C_\partial \subset T_\varphi$ каспа тора отображения, отвечающего компоненте ∂:

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial}(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C_\partial). \qquad \Diamond$$

Аналогичное сравнение известно для графа дуг.

Пример 3.24. Согласно переформулировке теоремы Футера–Шлеймера, приведённой М. Лакенби и Дж. Парсел [212, Theorem 1.2], если граф $\mathcal{A}(S)$ непуст, то для любого

[6] В работе [9] этот результат сформулирован в виде $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \prec \log \#\mathrm{Fix}(\varphi)$, где символ $\prec$ обозначает сравнение с точностью до мультипликативной и аддитивной констант.

псевдоаносовского класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$\ell_{\mathcal{A}}(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C),$$

где $C \subset T_\varphi$ — максимальная орисферическая окрестность совокупности каспов тора отображения. ◊

Теперь перейдём к примерам, связанным с триангуляциями, несжимаемыми поверхностями, разбиениями Хегора и разложениями в открытую книгу.

Пример 3.25. Согласно теореме М. Лакенби и Дж. Парсел [212, Theorem 1.3], для любой замкнутой поверхности S рода хотя бы два и без проколов асимптотическое число переноса любого псевдоаносовского класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ в действии группы $\mathrm{Mod}(S)$ на себе, отвечающем некоторому (следовательно, любому) конечному порождающему множеству этой группы, сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с триангуляционной сложностью[7] тора отображения:

$$\ell_{\mathrm{Mod}(S)}(\varphi) \asymp \Delta(T_\varphi).$$ ◊

Далее, число переноса в графе кривых даёт нижнюю оценку рода замкнутых несжимаемых поверхностей в многообразии M_φ, полученном каноническим заполнением Дена тора отображения T_φ. Так, для замкнутого трёхмерного многообразия M обозначим через $g_{\mathrm{inc}}(M)$ минимальное значение[8], которое принимает род на множестве всех замкнутых связных несжимаемых поверхностей, вложенных в M.

Пример 3.26. Согласно результату М. Дженгиза [88, Proposition 3.1], для любой неисключительной поверхности S с ровно одной компонентой края, рода хотя бы 2 и без проколов асимптотическое число переноса любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ в действии на графе $\mathcal{C}(S)$ удовлетворяет неравенству[9]

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 4\, g_{\mathrm{inc}}(M_\varphi) + 6.$$

В частности, при $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 6$ многообразие M_φ является неприводимым, и при $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 10$ оно является аторическим. ◊

Родственный результат будет установлен для модельного случая проколотого диска в разделе 9.3.3.

Наконец, приведём пороговые признаки минимальности рода разбиения Хегора и максимальности эйлеровой характеристики страницы разложения в открытую книгу.

[7] *Триангуляционной сложностью* $\Delta(M)$ замкнутого ориентируемого многообразия M называется минимальное число тетраэдров среди всех его триангуляций.

[8] Здесь минимум по пустому множеству предполагается равным бесконечности.

[9] В работе [88] этот результат сформулирован в терминах графа $\mathcal{AC}^*$, а мы переформулируем его, используя неравенства $\ell_{\mathcal{C}} \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{AC}} \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{AC}^*} \leqslant 2\,\tau_{\mathcal{AC}^*}$.

Пример 3.27. Из [88, Theorem 1.2] следует, что для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности с ровно одной компонентой края, рода хотя бы 2 и без проколов, если

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 4\,|\chi(S)| + 8,$$

то разбиение Хегора многообразия M_φ, индуцированное его каноническим разложением в открытую книгу, является минимальным по роду и единственным, с точностью до изотопии, минимальным разбиением Хегора этого многообразия; в частности, род Хегора многообразия M_φ равен $|\chi(S)| + 1$.

Объединяя это с примером 3.26, также получаем, что при $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 4\,|\chi(S)| + 8$ многообразие M_φ является гиперболическим[10]. ◊

Этот пороговый признак гиперболичности будет расширен на случай поверхностей с проколами в разделе 8.2.1.

Пример 3.28. Из теоремы Дж. Джонсона [191, Theorem 1] следует, что для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности с ровно одной компонентой края и без проколов, если[11]

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 8\,|\chi(S)| + 16,$$

то каноническое разложение многообразия M_φ в открытую книгу является максимальным по эйлеровой характеристике страницы и единственным, с точностью до изотопии, максимальным разложением в открытую книгу этого многообразия. ◊

Родственный признак для случая проколотого диска будет установлен в разделе 9.2.2.

Таким образом, асимптотические числа переноса отражают топологические, геометрические и динамические меры сложности элементов группы и связанных с ними объектов, а также подтверждают количественную и качественную формы порогового принципа. Кроме того, от выбора действия существенно зависит, с какими свойствами и характеристиками будет связано соответствующее число переноса.

3.4 Действия на пространствах, гиперболических по Громову

Ориентируясь на работу [105], напомним базовые сведения о пространствах, гиперболических по Громову.

Пусть X — метрическое пространство. Напомним, что для $x, y, z \in X$ *произведением Громова* называется величина

$$(x, y)_z := \frac{1}{2}\left[d(x, z) + d(y, z) - d(x, y)\right].$$

[10] Действительно, в этом случае его род Хегора составляет не менее 4, а род Хегора любого замкнутого неприводимого аторического многообразия, являющегося зейфертовым, не превосходит двух [63].

[11] В работе [191] этот результат сформулирован в терминах графа $\mathcal{AC}^*$.

Пространство X называется *гиперболическим по Громову* (или просто *гиперболическим*), если существует такое $\delta \geqslant 0$, что для любых четырёх точек $x, y, z, w \in X$ выполняется соотношение

$$(x, y)_w \geqslant \min\{(x, z)_w, (y, z)_w\} - \delta.$$

В этом случае пространство X называется *δ-гиперболическим* [105, Definition 3.3.2].

Отметим, что в некоторых источниках в определении гиперболичности по Громову дополнительно предполагается, что пространство X является геодезическим. Для квазигеодезических метрических пространств свойство гиперболичности сохраняется при квазиизометриях [220, Proposition 7.2.9].

Пример 3.29. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ и любое дерево являются 0-гиперболическими. Пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$ размерности $n \geqslant 1$ является гиперболическим. ◊

Пример 3.30. Согласно теореме Х. Мазура и Я. Мински [242, Theorem 1.1], граф кривых $\mathcal{C}(S)$ любой неисключительной поверхности является гиперболическим. Следовательно, по лемме 3.13 граф дуг и кривых $\mathcal{AC}(S)$ для $S \neq \Sigma_{1,0}$ также гиперболичен. Согласно теореме Х. Мазура и С. Шлеймера [241, Theorem 20.2], если граф дуг $\mathcal{A}(S)$ непуст, то он является гиперболическим. Согласно теореме С. Гензеля, П. Пшитицкого и Р. Уэбба, для любой неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂ граф $\mathcal{A}^\circ_\partial$ является гиперболическим[12]; см. [10, Proposition 3.3], [166] и [206, Theorem 1.3]. Отметим, что соответствующие константы гиперболичности являются равномерными, то есть могут быть выбраны независимо от S. ◊

Нам потребуется следующая оценка асимптотического числа переноса в терминах смещения точки и произведения Громова.

Лемма 3.31 [16, Corollary 2.8]**.** Для δ-гиперболического пространства X, точки $x_0 \in X$ и изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ положим

$$d = d(x_0, \varphi(x_0)), \qquad p = (\varphi^{-1}(x_0), \varphi(x_0))_{x_0}.$$

Если $d > 2p + 3\delta$, то

$$|\ell_X(\varphi) - (d - 2p)| \leqslant 2\delta. \qquad \square$$

3.4.1 Граница Громова и динамика локсодромических элементов

Пусть X — метрическое пространство и $x_0 \in X$ — отмеченная точка. Будем говорить, что последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ точек в X *сходится на бесконечности*, если произведения Громова $(x_n, x_m)_{x_0}$ стремятся к бесконечности, когда $\min\{n, m\}$ стремится к бесконечности; эта сходимость не зависит от выбора точки $x_0 \in X$.

[12] В работе [10] утверждение сформулировано для графа петель; требуемая формулировка следует из квазиизометрии, описанной в лемме 3.15.

Две сходящиеся на бесконечности последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ назовём *сонаправленными*, если $(x_n, y_m)_{x_0}$ стремится к бесконечности, когда $\min\{n, m\}$ стремится к бесконечности; это отношение не зависит от выбора точки $x_0 \in X$. Если пространство X является гиперболическим, то сонаправленность является отношением эквивалентности.

Определим *границу Громова* ∂X гиперболического по Громову пространства X как пространство классов сонаправленных сходящихся на бесконечности последовательностей из X; см. [105, Definition 3.4.2]. Для точки $x \in \partial X$, представленной последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, мы пишем

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

и говорим, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится к точке* x.

Замечание 3.32. Квазиизометрическое вложение $f\colon X \to Y$ гиперболических по Громову пространств индуцирует непрерывное инъективное отображение $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$. Если отображение f почти сюръективно, то ∂f является гомеоморфизмом; см. [305, Theorem 5.35]. ◊

Замыкание Громова

$$\overline{X} := X \cup \partial X$$

наделяется естественной топологией, согласованной с топологией на X и сходимостью на бесконечности; эта топология метризуема [105, Section 3.4.2].

Каждая изометрия пространства X продолжается до автогомеоморфизма его замыкания $\overline{X}$; тем самым любое изометрическое действие на X продолжается до действия на $\overline{X}$ автогомеоморфизмами.

Пример 3.33. Замыкание Громова пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ представляет собой замкнутый n-мерный шар. ◊

В случае графов, отвечающих дугам и кривым на поверхности, граница Громова допускает интерпретацию в терминах геодезических ламинаций.

Пример 3.34. Согласно теореме Э. Кларрайх [203, 153, 269], для любой неисключительной поверхности S без края существует гомеоморфизм между границей $\partial\mathcal{C}(S)$ графа кривых и пространством минимальных заполняющих поверхность S геодезических ламинаций с так называемой грубой топологией Хаусдорфа, эквивариантный относительно действия группы $\mathrm{Mod}(S)$; для поверхностей с краем отображение стягивания края устанавливает эквивариантный гомеоморфизм $\partial\mathcal{C}(S) \cong \partial\mathcal{C}(S^{\dagger})$. Аналогичное описание границы графа дуг $\mathcal{A}$ получено С. Шлеймером; см. [269, Theorem 1.2]. Описание границы графа $\mathcal{A}_{\partial}^{\circ}$ см. в работах [32, 271, 33]. ◊

Сопоставим каждой локсодромической изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ гиперболического пространства X две точки границы ∂X по правилу

$$\varphi_+ := \lim_{n\to\infty} \varphi^n(x_0), \qquad \varphi_- := \lim_{n\to\infty} \varphi^{-n}(x_0).$$

Они не зависят от выбора точки $x_0 \in X$. Действие любой локсодромической изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ на $\overline{X}$ имеет динамику «источник–сток»[13]: точка φ_+ является притягивающей, а точка φ_- — отталкивающей.

Для рассматриваемых далее действий эти точки имеют непосредственный геометрический смысл.

Пример 3.35. Пусть S — неисключительная поверхность. Для действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых $\mathcal{C}(S)$ неподвижные точки $\varphi_\pm$ псевдоаносовского класса φ отвечают его устойчивой и неустойчивой геодезическим ламинациям. Аналогичный результат верен для действия на графе дуг $\mathcal{A}(S)$, когда этот граф непуст.

Если на поверхности S имеется выделенная компонента края ∂, то для класса φ, действующего на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ локсодромически, точки $\varphi_\pm \in \partial\mathcal{A}^\circ_\partial$ отвечают устойчивой и неустойчивой геодезическим ламинациям его внешней компоненты φ_{ext}; см. [271, p. 841]. $\lozenge$

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 3.36. Для локсодромической изометрии $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ гиперболического пространства X и изометрии $\psi \in \mathrm{Iso}(X)$ предположим, что $\psi(\varphi_+) \neq \varphi_-$. Тогда выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ell_X(\varphi^m\psi)}{m} = \ell_X(\varphi).$$

Доказательство. Положим $g_m := \varphi^m\psi$, зафиксируем точку $x_0 \in X$ и положим

$$d_m := d\big(x_0, g_m(x_0)\big).$$

По лемме 3.3 получаем

$$\ell_X(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \frac{d\big(\psi(x_0), \varphi^m(\psi(x_0))\big)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{d\big(x_0, \varphi^m(\psi(x_0))\big)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{d_m}{m}.$$

Таким образом, для доказательства искомого соотношения достаточно показать, что пределы последовательностей $\ell_X(g_m)/m$ и d_m/m совпадают.

Положим

$$p_m := \big(g_m^{-1}(x_0), g_m(x_0)\big)_{x_0}.$$

Заметим, что условие $\psi(\varphi_+) \neq \varphi_-$ эквивалентно условию $\varphi_+ \neq \psi^{-1}(\varphi_-)$. Значит, последовательности

$$g_m(x_0) = \varphi^m(\psi(x_0)), \qquad g_m^{-1}(x_0) = \psi^{-1}(\varphi^{-m}(x_0))$$

сходятся к различным точкам границы ∂X. Следовательно, существует такое $P > 0$, что $p_m \leqslant P$ для всех m.

Поскольку последовательность d_m/m сходится к числу $\ell_X(\varphi) > 0$, для всех достаточно больших m выполняется неравенство $d_m > 2p_m + 3\delta$. По лемме 3.31 для таких m

[13] В частности, для любой точки $x \in \overline{X}$, отличной от φ_-, и для любой окрестности U точки φ_+ образы $\varphi^m(x)$ лежат в U для всех достаточно больших m.

выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\ell_X(g_m) &\geqslant d_m - 2p_m - 2\delta \\ &\geqslant d_m - 2P - 2\delta.\end{aligned}$$

Таким образом, вместе с неравенством $\ell_X(g_m) \leqslant d_m$ получаем искомое соотношение:

$$\begin{aligned}\ell_X(\varphi) &= \lim_{m\to\infty} \frac{d_m - 2P - 2\delta}{m} \\ &\leqslant \liminf_{m\to\infty} \frac{\ell_X(g_m)}{m} \leqslant \limsup_{m\to\infty} \frac{\ell_X(g_m)}{m} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{d_m}{m} = \ell_X(\varphi).\end{aligned}$$ □

Пусть группа G действует на гиперболическом пространстве X. Будем говорить, что локсодромический элемент $\varphi \in G$ *действует ахирально*, если существует такой элемент $\psi \in G$, что

$$\psi(\varphi_+) = \varphi_-, \qquad \psi(\varphi_-) = \varphi_+,$$

где $\varphi_+, \varphi_- \in \partial X$ обозначают притягивающую и отталкивающую неподвижные точки элемента φ. Иначе, если такого элемента ψ не существует, будем говорить, что элемент φ *действует хирально*.

Отметим, что если локсодромический элемент ахирален[14], то он действует ахирально. Обратное в общем случае неверно; достаточное условие ахиральности будет приведено в следствии 3.51 ниже.

3.4.2 Предельные множества и действия общего типа

Изометрическое действие группы G на метрическом пространстве X называется *кокомпактным*, если существует такое ограниченное подмножество в X, что его образы под действием группы G покрывают всё пространство X.

Пусть группа G действует на гиперболическом пространстве X. Подмножество

$$\Lambda(G) \subset \partial X,$$

состоящее из всех предельных точек некоторой (следовательно, любой) орбиты действия группы G, называется *предельным множеством* этого действия.

Если действие является кокомпактным, то $\Lambda(G) = \partial X$.

Число элементов множества $\Lambda(G)$ равно 0, 1, 2 или ∞. Если действие является локсодромическим, то $|\Lambda(G)| \geqslant 2$.

Действие называется *линеальным*, если все локсодромические элементы имеют одну и ту же неупорядоченную пару неподвижных точек на ∂X; в этом случае $|\Lambda(G)| = 2$.

Действие называется *фокальным*, если оно имеет ровно одну глобальную неподвиж-

[14] Напомним, что элемент группы называется ахиральным, если некоторая его ненулевая степень сопряжена со своей обратной; см. раздел 1.2.3.

ную точку в ∂X.

Наконец, локсодромическое действие имеет *общий тип*, если оно имеет пару *независимых* локсодромических элементов, то есть таких $\varphi, \psi \in G$, что

$$\{\varphi_+, \varphi_-\} \cap \{\psi_+, \psi_-\} = \varnothing.$$

В этом случае $|\Lambda(G)| = \infty$.

Согласно [105, Proposition 6.2.14], каждое локсодромическое действие относится ровно к одному из этих трёх типов.

Пример 3.37. Предположим, что поверхность S является неисключительной. Тогда действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых $\mathcal{C}(S)$ имеет общий тип. Действительно, в случае, когда S является неспорадической, это следует из [42, Proposition 6]. Если S является спорадической, то граф $\mathcal{C}(S)$ является графом Фарея, и утверждение следует из стандартного анализа действия модулярной группы; см. [117, Section 4.1]. ◊

Нам потребуются следующие свойства действий общего типа.

Лемма 3.38 [105, Proposition 7.4.7]**.** Пусть группа G действует на гиперболическом по Громову пространстве X. Если действие имеет общий тип, то множество упорядоченных пар

$$(\varphi_+, \varphi_-) \in \partial X \times \partial X,$$

возникающих из локсодромических элементов $\varphi \in G$, плотно в $\Lambda(G) \times \Lambda(G)$. □

Следствие 3.39. Пусть группа G действует на гиперболическом по Громову пространстве X, причём действие имеет общий тип. Пусть $U \subset \partial X$ — открытое подмножество, пересекающее предельное множество $\Lambda(G)$, а $F \subset \partial X$ — конечное множество. Тогда существует локсодромический элемент $\theta \in G$, для которого $\theta_+ \in U$ и $\theta_- \notin F$.

Доказательство. Поскольку действие имеет общий тип, предельное множество $\Lambda(G)$ бесконечно. Поэтому дополнение $\Lambda(G) \backslash F$ непусто. Кроме того, граница ∂X метризуема, а значит, конечное множество F замкнуто. Следовательно, произведение

$$(U \cap \Lambda(G)) \times (\Lambda(G) \backslash F)$$

является непустым открытым подмножеством пространства $\Lambda(G) \times \Lambda(G)$. По лемме 3.38 существует локсодромический элемент $\theta \in G$, для которого

$$(\theta_+, \theta_-) \in (U \cap \Lambda(G)) \times (\Lambda(G) \backslash F).$$

Отсюда $\theta_+ \in U$ и $\theta_- \notin F$, что и требовалось доказать. □

Следствие 3.40. Пусть группа G действует на гиперболическом по Громову пространстве X, причём действие имеет общий тип. Тогда для любого локсодромического элемента $\varphi \in G$ и любого $\eta \in G$ существует элемент $\psi \in G$, сопряжённый с элементом η,

для которого выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ell_X(\varphi^m\psi)}{m} = \ell_X(\varphi).$$

Доказательство. Согласно лемме 3.36, достаточно показать, что существует сопряжённый с элементом η элемент ψ, для которого выполняется неравенство $\psi(\varphi_+) \neq \varphi_-$.

Если элемент η действует на $\Lambda(G)$ тождественно, то, поскольку $\varphi_- \neq \varphi_+$, можно взять $\psi = \eta$. Далее предполагаем, что элемент η действует на $\Lambda(G)$ нетождественно.

Выберем такую точку $\xi \in \Lambda(G)$, что $\eta(\xi) \neq \xi$. По непрерывности можно выбрать непересекающиеся открытые окрестности $U, V \subset \partial X$ точек ξ и $\eta(\xi)$ соответственно, для которых $\eta(U) \subset V$. Согласно следствию 3.39, существует локсодромический элемент θ, для которого $\theta_+ \in U$ и $\theta_- \notin \{\varphi_+, \varphi_-\}$. Поскольку обе точки φ_+ и φ_- отличны от θ_-, обе последовательности $\theta^k(\varphi_+)$ и $\theta^k(\varphi_-)$ сходятся к точке θ_+. Поскольку $\theta_+ \in U$, для всех достаточно больших k получаем $\theta^k(\varphi_+) \in U$ и $\theta^k(\varphi_-) \in U$. Отсюда получаем

$$\eta(\theta^k(\varphi_+)) \in \eta(U) \subset V, \qquad \theta^k(\varphi_-) \in U.$$

Поскольку окрестности U и V не пересекаются, в этом случае $\eta(\theta^k(\varphi_+)) \neq \theta^k(\varphi_-)$. Зафиксируем такое достаточно большое значение k и положим

$$\psi := \theta^{-k}\eta\theta^k.$$

Тогда элемент ψ сопряжён с элементом η, а предыдущее неравенство эквивалентно неравенству $\psi(\varphi^+) \neq \varphi_-$. Таким образом, требуемый элемент ψ построен. □

3.4.3 Вполне разрывные действия и их обобщения

Нам потребуются различные формы «разрывности» действий на гиперболических пространствах. Начнём с классического условия вполне разрывности, затем перейдём к его ослаблениям (WPD) и (WWPD).

Вполне разрывные действия

Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Назовём действие *вполне разрывным* (англ. *properly discontinuous*, или *PD*), если для всех $x \in X$ и $C > 0$ множество

$$\{\varphi \in G \mid d(x, \varphi(x)) \leqslant C\}$$

является конечным; ср. [71, Section 8.2]. В этом случае, в частности, стабилизатор каждой точки $x \in X$ конечен.

Согласно лемме Шварца–Милнора [220, Corollary 5.4.2], если пространство X является собственным и квазигеодезическим, а действие является кограниченным и вполне

разрывным, то группа G конечно порождена, и для каждой словарной метрики на G и для каждой точки $x \in X$ отображение $G \to X$, заданное правилом $g \mapsto g(x)$, является эквивариантной квазиизометрией; ср. раздел 3.2.3. В частности, действие группы G на X эквивалентно её действию на себе левыми сдвигами.

Пример 3.41. Для любого замкнутого риманова многообразия M действие его фундаментальной группы $\pi_1(M)$ скольжениями на универсальном накрывающем $\widetilde{M}$ является кограниченным и вполне разрывным. ◊

Пример 3.42. Для любой неисключительной поверхности S действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых $\mathcal{C}(S)$ кограничено, но не является вполне разрывным: стабилизатор любой вершины этого графа бесконечен. В частности, когда край поверхности S непуст, скручивание Дена вдоль любой компоненты края действует на $\mathcal{C}(S)$ тривиально. ◊

Конечно порождённая группа G называется *гиперболической*, если она допускает кограниченное вполне разрывное действие на некотором собственном геодезическом гиперболическом пространстве X. По лемме Шварца–Милнора это эквивалентно тому, что она является гиперболической в словарной метрике, отвечающей некоторому (следовательно, любому) своему конечному порождающему множеству [220, Definition 7.3.1].

Группа называется *виртуально циклической*, если она содержит циклическую подгруппу конечного индекса. Виртуально циклические гиперболические группы называются *элементарными*.

Пример 3.43. Фундаментальные группы замкнутых гиперболических многообразий и свободные группы F_n ранга $n \geqslant 1$ являются гиперболическими; при $n \geqslant 2$ группа F_n неэлементарна. ◊

Пример 3.44. Если поверхность S является неисключительной, то группа $\mathrm{Mod}(S)$ не является виртуально циклической. Если S является неспорадической или $S = D_3^2$, то группа $\mathrm{Mod}(S)$ не является гиперболической. При этом группы классов отображений тора $\Sigma_{1,0}$, тора с одним проколом $\Sigma_{1,0,1}$ и проколотой сферы S_4^2 являются неэлементарными гиперболическими. ◊

Слабо вполне разрывные действия

Следуя [131, Definition 3.16] и [79, Definition 3.51], приведём ослабление свойства вполне разрывности, применимое к таким пространствам, как граф кривых.

Пусть группа G действует изометриями на метрическом пространстве X. Будем говорить, что локсодромический элемент $\psi \in G$ действует *слабо вполне разрывно* (англ. *weakly properly discontinuously*, или *WPD*) или является *слабо вполне разрывным*, если для некоторой (следовательно, для любой) точки $x \in X$ и каждого $C > 0$ существует такое целое $N \geqslant 1$, что множество всех элементов $\varphi \in G$, удовлетворяющих условию

$$d(x, \varphi(x)) \leqslant C \quad \text{и} \quad d\left(\psi^N(x), \varphi(\psi^N(x))\right) \leqslant C,$$

является конечным; ср. [42, 264, 156]. Это означает, что существует лишь конечное число элементов группы, «сохраняющих» достаточно длинный фрагмент квазиоси[15] локсодромического элемента ψ.

Замечание 3.45. В любом вполне разрывном действии каждый локсодромический элемент действует слабо вполне разрывно. Если действие на собственном метрическом пространстве имеет слабо вполне разрывный локсодромический элемент, то оно является вполне разрывным. ◊

Пример 3.46. Для любой гиперболической группы G каждый элемент бесконечного порядка действует слабо вполне разрывно на G со словарной метрикой, отвечающей некоторому (следовательно, любому) конечному порождающему множеству этой группы. В частности, в гиперболических группах каждый искажённый элемент имеет конечный порядок. ◊

Пример 3.47. Из теоремы М. Бествины и К. Фудживары [42, Proposition 11] следует, что для любой неисключительной поверхности S без края (возможно, с проколами) действие любого локсодромического элемента (то есть псевдоаносовского класса отображений) группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых $\mathcal{C}(S)$ является слабо вполне разрывным; ср. [66]. ◊

Назовём действие группы G на пространстве X *слабо вполне разрывным*, если оно является локсодромическим и любой локсодромический элемент действует слабо вполне разрывно.

В частности, для локсодромических действий из вполне разрывности следует слабая вполне разрывность:

$$(\mathrm{PD}) \implies (\mathrm{WPD}).$$

Пример 3.48. Согласно теореме Дж. Столлингса, если число концов конечно порождённой группы бесконечно, то такая группа представляется в виде нетривиального HNN-расширения над конечной подгруппой или свободного произведения с объединённой конечной подгруппой; см. [71, Theorem 8.32] и [220, Theorem 8.2.14]. В этом случае такая группа действует на соответствующем дереве Басса–Серра [283, 62], и это действие является слабо вполне разрывным; ср. [130]. ◊

Группа называется *ацилиндрически гиперболической*, если она не является виртуально циклической и допускает слабо вполне разрывное действие на некотором гиперболическом пространстве [264].

В частности, все неэлементарные гиперболические группы, группы классов отображений всех неисключительных поверхностей без края, фактор-группы $B_n/\langle\Delta_n^2\rangle$ при $n \geqslant 3$

[15] *Квазиосью* локсодромической изометрии $\psi \in \mathrm{Iso}(X)$ называется квазиизометрическое вложение $\mathbb{Z} \to X$, образ которого сохраняется изометрией ψ.

и конечно порождённые группы с бесконечным числом концов являются ацилиндрически гиперболическими. Группы классов отображений поверхностей с непустым краем и группы кос B_n ацилиндрически гиперболическими не являются [264, Corollary 7.2].

Замечание 3.49. Согласно теореме Д. Осина [264, Theorem 1.2], любая ацилиндрически гиперболическая группа допускает слабо вполне разрывное действие на некотором связном гиперболическом графе. ◊

Сверхслабо вполне разрывные действия

Нам потребуется ещё большее ослабление вполне разрывности, введённое М. Бествиной, К. Бромбергом и К. Фудживарой [41]; ср. [271, 156].

Пусть группа G действует изометриями на гиперболическом пространстве X. Следуя [271, Definition 2.6], будем говорить, что локсодромический элемент $\psi \in G$ действует *сверхслабо вполне разрывно* (англ. *weakly weakly properly discontinuously*, или *WWPD*), если для любой последовательности $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ элементов группы G из того, что последовательности $\varphi_n(\psi_+)$ и $\varphi_n(\psi_-)$ точек границы ∂X сходятся соответственно к точкам ψ_+ и ψ_-, следует существование такого натурального N, что

$$\varphi_n(\psi_+) = \psi_+, \qquad \varphi_n(\psi_-) = \psi_-$$

при всех $n \geqslant N$. Эквивалентно, в индуцированном действии группы G на произведении $\partial X \times \partial X$ орбита пары (ψ_+, ψ_-) является дискретной.

Отметим, что действие любого слабо вполне разрывного элемента является сверхслабо вполне разрывным:

$$(\mathrm{WPD}) \implies (\mathrm{WWPD}).$$

Связь этих условий описана в следующем результате.

Лемма 3.50 [156, Corollary 2.4]**.** Локсодромический элемент $\varphi \in G$ действует слабо вполне разрывно в том и только в том случае, если он действует сверхслабо вполне разрывно и стабилизатор пары (φ_+, φ_-) в индуцированном действии группы G на произведении $\partial X \times \partial X$ является виртуально циклическим. □

Это утверждение позволяет связать ахиральность элемента группы с ахиральностью его действия на границе Громова.

Следствие 3.51. Пусть локсодромический элемент $\varphi \in G$ действует слабо вполне разрывно. Тогда φ ахирален как элемент группы G в том и только в том случае, если он действует ахирально.

Доказательство. Ахиральность действия любого ахирального локсодромического элемента была отмечена выше. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что существует элемент $\psi \in G$, для которого $\psi(\varphi_+) = \varphi_-$ и $\psi(\varphi_-) = \varphi_+$. Поскольку φ действует слабо вполне разрывно, по лемме 3.50 стабилизатор упорядоченной пары (φ_+, φ_-) является виртуально циклическим. Элементы φ^{-1} и $\psi\varphi\psi^{-1}$ принадлежат этому стабилизатору и имеют бесконечный порядок. Следовательно, они соизмеримы: существуют ненулевые целые числа m и n, для которых

$$(\psi\varphi\psi^{-1})^m = \varphi^n.$$

Заменяя при необходимости одновременно m и n на противоположные, будем считать, что $m > 0$. Поскольку притягивающей неподвижной точкой элемента $(\psi\varphi\psi^{-1})^m$ является φ_-, имеем $n < 0$.

Поскольку асимптотическое число переноса инвариантно относительно сопряжения и абсолютно однородно, имеем

$$m\ell_X(\varphi) = \ell_X((\psi\varphi\psi^{-1})^m) = \ell_X(\varphi^n) = |n|\ell_X(\varphi).$$

Поскольку $\ell_X(\varphi) > 0$, получаем $m = |n|$. Таким образом,

$$\psi\varphi^m\psi^{-1} = \varphi^{-m},$$

то есть элемент φ ахирален. □

Для применений к группам классов отображений нам потребуется также следующий результат Дж. Маккарти.

Лемма 3.52 [245, Theorem 1]**.** Пусть S — неисключительная поверхность без края (возможно, с проколами). В группе $\mathrm{Mod}(S)$ стабилизатор пары, состоящей из устойчивой и неустойчивой геодезических ламинаций произвольного псевдоаносовского класса отображений, является виртуально циклическим. □

Таким образом, асимптотическое число переноса отражает как качественные свойства, так и количественные меры сложности элементов группы и связанных с ними объектов, а подходящие отображения действий позволяют организовать числа переноса в согласованную систему численных характеристик.

Для гиперболических пространств локсодромичность отражается в динамике действия на границе Громова, а условия (WPD) и (WWPD) позволяют связать эту динамику с алгебраическими свойствами элемента, в частности с его ахиральностью. В дальнейшем это будет использоваться для построения квазиморфизмов (глава 4), выявления положительности относительной стабильной коммутаторной длины (главы 5 и 6) и применения к задачам теории узлов (глава 11).

ГЛАВА 4 КВАЗИМОРФИЗМЫ И ЧИСЛА ПЕРЕНОСА

В настоящей главе исследуется возможность использования однородных квазиморфизмов для получения нижних оценок асимптотических чисел переноса.

В разделе 4.1 вводятся однородные квазиморфизмы, приводятся их основные свойства и описывается связь со вторыми ограниченными когомологиями группы.

В разделе 4.2 рассматриваются две основные конструкции квазиморфизмов. Первая связана с действиями групп на прямой и окружности, восходит к числу вращения Пуанкаре и приводит, в частности, к коэффициентам дробного скручивания Дена. Вторая связана с действиями на гиперболических пространствах и приводит к конструкциям так называемых считающих квазиморфизмов и квазиморфизмов де Рама.

В разделе 4.3 изучается связь этих конструкций с числами переноса изометрических действий. Для рассматриваемых квазиморфизмов f устанавливается свойство липшицевости

$$|f(g)| \lesssim \ell_X(g),$$

позволяющее использовать значения квазиморфизмов как нижние оценки расстояний и асимптотических чисел переноса. В главе 5 это послужит отправной точкой для введения стабильной коммутаторной длины действия и изучения так называемых свойств сравнения.

4.1 Квазиморфизмы и ограниченные когомологии

4.1.1 Однородные квазиморфизмы

Для группы G вещественнозначная функция $f\colon G \to \mathbb{R}$ называется *квазиморфизмом* (или *квазигомоморфизмом*, или *квазихарактером*, или 1-*квазикоциклом*), если супремум

$$D(f) := \sup_{a,b\in G} |f(ab) - f(a) - f(b)|$$

конечен. Величина $D(f)$ называется *дефектом* квазиморфизма f.[1]

Квазиморфизмы f, для которых $D(f) = 0$, являются гомоморфизмами; они также называются 1-*коциклами* или *характерами*.

Лемма 4.1 [79]**.** Дефект обладает следующими свойствами.

1. *Абсолютная однородность*: для всех квазиморфизмов f и чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$D(\lambda f) = |\lambda|\, D(f).$$

[1] В дальнейшем нас прежде всего будут интересовать квазиморфизмы, дефекты которых допускают явную или эффективную верхнюю оценку.

2. *Субаддитивность*: для всех квазиморфизмов f и g имеем

$$D(f+g) \leqslant D(f) + D(g). \qquad \square$$

Квазиморфизм f называется *однородным*, если для всех $g \in G$ и $m \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение

$$f(g^m) = mf(g),$$

то есть если сужение квазиморфизма f на каждую циклическую подгруппу является гомоморфизмом. Однородные квазиморфизмы также называют *псевдохарактерами*.

Согласно [79, Section 2.2.2], произвольный квазиморфизм можно превратить в однородный с помощью процедуры *усреднения* $f \mapsto \widetilde{f}$, где

$$\widetilde{f}(g) := \lim_{m\to\infty} \frac{f(g^m)}{m}.$$

Лемма 4.2 [79, Corollary 2.59]**.** Для любого квазиморфизма f выполняется неравенство

$$D(\widetilde{f}) \leqslant 2D(f). \qquad \square$$

Замечание 4.3. В настоящей работе в формулировках нижних оценок сложности, опирающихся на значения квазиморфизмов, используются именно однородные квазиморфизмы. Каждая такая оценка допускает переформулировку в терминах произвольных квазиморфизмов: согласно [79, Lemma 2.21], для любого квазиморфизма f группы G и для любого элемента $g \in G$ имеем

$$|f(g) - \widetilde{f}(g)| \leqslant D(f).$$

В частности, если $|f(g)| > D(f)$, то $\widetilde{f}(g) \neq 0$, причём при $D(\widetilde{f}) > 0$ получаем

$$\frac{|\widetilde{f}(g)|}{D(\widetilde{f})} \geqslant \frac{|f(g)| - D(f)}{D(\widetilde{f})} \geqslant \frac{|f(g)| - D(f)}{2D(f)} = \frac{|f(g)|}{2D(f)} - \frac{1}{2}. \qquad \lozenge$$

Замечание 4.4. Усреднение $f \mapsto \widetilde{f}$ задаёт проектор вещественного векторного пространства всех квазиморфизмов группы G на его подпространство однородных квазиморфизмов. В дальнейшем именно последнее пространство будет играть основную роль. $\lozenge$

Следующая лемма посвящена основным свойствам однородных квазиморфизмов.

Лемма 4.5. Для любого однородного квазиморфизма f группы G выполняются следующие свойства.

1. *Инвариантность относительно сопряжения*: для всех $a, b \in G$ имеем

$$f(bab^{-1}) = f(a).$$

2. *Квазиаддитивность*: для всех $a, b \in G$ имеем

$$f(a) + f(b) - D(f) \leqslant f(ab) \leqslant f(a) + f(b) + D(f).$$

3. *Аддитивность для коммутирующих элементов*: если $a, b \in G$ коммутируют, то

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

4. Если элемент $a \in G$ является искажённым или ахиральным[2], то $f(a) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем $a, b \in G$. Для любого $m \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\left|mf(bab^{-1}) - mf(a)\right| &= \left|f((bab^{-1})^m) - f(a^m)\right| \\
&= \left|f(ba^m b^{-1}) - f(a^m)\right| \\
&\leqslant \left|f(ba^m b^{-1}) - f(ba^m) + f(b)\right| + \left|f(ba^m) - f(b) - f(a^m)\right| \\
&= \left|f(ba^m b^{-1}) - f(ba^m) - f(b^{-1})\right| + \left|f(ba^m) - f(b) - f(a^m)\right| \\
&\leqslant 2D(f).
\end{aligned}$$

Деля на m и устремляя m к бесконечности, получаем $f(bab^{-1}) = f(a)$.

Утверждение (2) является переформулировкой определяющего свойства дефекта.

Для доказательства утверждения (3) предположим, что a и b коммутируют. Тогда $(ab)^m = a^m b^m$, откуда получаем

$$\begin{aligned}
\left|mf(ab) - mf(a) - mf(b)\right| &= \left|f((ab)^m) - f(a^m) - f(b^m)\right| \\
&= \left|f(a^m b^m) - f(a^m) - f(b^m)\right| \\
&\leqslant D(f).
\end{aligned}$$

Деля на m и устремляя m к бесконечности, получаем $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Наконец, докажем утверждение (4). Пусть элемент a является искажённым в подгруппе $H \subseteq G$, допускающей конечное порождающее множество S. Положим

$$C := \max_{s \in S^{\pm 1}} |f(s)| + D(f).$$

Если $a^m = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k$ — кратчайшая запись в образующих из S, то из свойств квазиморфизма f получаем

$$|mf(a)| = |f(a^m)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(s_i)| + (k-1)D(f) \leqslant C \cdot |a^m|_S.$$

[2]Определения искажённых и ахиральных элементов см. соответственно в разделах 3.2.3 и 1.2.3.

Деля на m и устремляя m к бесконечности, получаем

$$|f(a)| \leqslant C \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{|a^m|_S}{m} = 0.$$

Следовательно, $f(a) = 0$.

Пусть теперь элемент a ахирален, то есть существует такое $m \neq 0$, что элемент a^m сопряжён с элементом a^{-m}. Согласно однородности и утверждению (1), получаем

$$f(a) = \frac{f(a^m)}{m} = \frac{f(a^{-m})}{m} = \frac{-mf(a)}{m} = -f(a),$$

откуда следует, что $f(a) = 0$. □

Обозначим символом $Q(G)$ вещественное векторное пространство всех однородных квазиморфизмов группы G и символом $H^1(G;\mathbb{R})$ его подпространство, состоящее из всех вещественнозначных гомоморфизмов.

Согласно лемме 4.1, дефект $f \mapsto D(f)$ наделяет $Q(G)$ структурой полунормированного пространства. Он также наделяет фактор-пространство $Q(G)/H^1(G;\mathbb{R})$ структурой банахова пространства; см. [79, Section 2.4.3].

Замечание 4.6. Каждый групповой гомоморфизм $h\colon G \to H$ индуцирует непрерывное линейное отображение $h^*\colon Q(H) \to Q(G)$, сопоставляющее однородному квазиморфизму f его композицию $f \circ h$ с этим гомоморфизмом. При этом выполняется неравенство

$$D(f \circ h) \leqslant D(f).$$

Если гомоморфизм h сюръективен, то достигается равенство. Кроме того, если h сюръективен или если индекс его образа $\mathrm{im}(h)$ в H конечен, то линейное отображение h^* инъективно. ◊

Далее опишем когомологическую интерпретацию пространства $Q(G)$.

4.1.2 Ограниченные когомологии и отображение сравнения

Мы предполагаем известными основные понятия классической теории когомологий дискретных групп [79, 128]. Следуя [79, Chapter 2], напомним необходимые для дальнейшего изложения сведения о пространстве вторых ограниченных когомологий.

Функции вида $u\colon G^m \to \mathbb{R}$ называются *m-коцепями*. Обозначим символом $C^m(G;\mathbb{R})$ вещественное векторное пространство всех m-коцепей и символом

$$C^m_b(G;\mathbb{R}) := \{u \in C^m(G;\mathbb{R}) : \|u\|_\infty < \infty\}$$

его подпространство *ограниченных* коцепей, где

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in G^m} |u(x)|.$$

Норма $\|\cdot\|_\infty$ наделяет $C_b^m(G;\mathbb{R})$ структурой банахова пространства. Зададим отображение

$$\delta\colon C^m(G;\mathbb{R}) \to C^{m+1}(G;\mathbb{R})$$

формулой

$$(\delta u)(g_1,\dots,g_{m+1}) := u(g_2,\dots,g_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i u(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{m+1}) + (-1)^{m+1}u(g_1,\dots,g_m).$$

В частности, для $f\colon G\to\mathbb{R}$ имеем

$$(\delta f)(a,b) = f(a) + f(b) - f(ab).$$

Пространство вторых ограниченных когомологий группы G определяется как факторпространство

$$H_b^2(G;\mathbb{R}) := Z_b^2(G;\mathbb{R})/B_b^2(G;\mathbb{R}),$$

где

$$Z_b^2(G;\mathbb{R}) = \{f\in C_b^2(G;\mathbb{R}) \mid \delta f = 0\}, \qquad B_b^2(G;\mathbb{R}) = \{\delta f \mid f\in C_b^1(G;\mathbb{R})\}.$$

Иными словами, элементы группы $H_b^2(G;\mathbb{R})$ представляются *ограниченными* 2*-коциклами* с точностью до *ограниченных* 2*-кограниц*.

Норма $\|\cdot\|_\infty$ индуцирует полунорму на $H_b^2(G;\mathbb{R})$ по правилу

$$\|\alpha\|_\infty := \inf\left\{\|f\|_\infty : f\in Z_b^2(G;\mathbb{R}),\quad [f]=\alpha\right\}.$$

Как показали Н. Иванов [187], М. Мацумото и М. Морита [244], эта полунорма является нормой и наделяет $H_b^2(G;\mathbb{R})$ структурой банахова пространства.

Естественное вложение комплекса ограниченных коцепей в комплекс всех коцепей индуцирует *отображение сравнения*

$$H_b^2(G;\mathbb{R}) \to H^2(G;\mathbb{R}).$$

Функция $f\colon G\to\mathbb{R}$ является квазиморфизмом в том и только в том случае, если 2-коцикл δf является ограниченным. Поэтому каждый квазиморфизм f задаёт класс $[\delta f]\in H_b^2(G;\mathbb{R})$. Для однородных квазиморфизмов это даёт линейное отображение

$$Q(G) \to H_b^2(G;\mathbb{R}).$$

Следующий результат связывает его с отображением сравнения.

Лемма 4.7 [79, Theorem 2.50]**.** Для любой группы G указанные гомоморфизмы обра-

зуют точную последовательность

$$0 \to H^1(G;\mathbb{R}) \to Q(G) \to H_b^2(G;\mathbb{R}) \to H^2(G;\mathbb{R}).$$

В частности, если пространство $H^1(G;\mathbb{R})$ конечномерно (например, если группа G конечно порождена) и пространство $Q(G)$ бесконечномерно, то пространство $H_b^2(G;\mathbb{R})$ также бесконечномерно. □

Отметим, что если группа G является ацилиндрически гиперболической[3], то пространства $H_b^2(G;\mathbb{R})$ и $Q(G)$ бесконечномерны; см. пример 4.19 ниже. Напротив, пространства $H_b^m(G;\mathbb{R})$ тривиальны во всех положительных степенях $m \geqslant 1$, если группа G является *аменабельной*, что означает существование определённого левоинвариантного среднего $C_b^1(G;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; см. [79, Definition 2.46] и [128].

4.2 Конструкции квазиморфизмов

Рассмотрим два источника однородных квазиморфизмов, основанных на действиях групп. Первый возникает из одномерной динамики и восходит к числу вращения Пуанкаре. Второй связан с геометрией Лобачевского и представлен в двух формах — непрерывной и дискретной.

4.2.1 Квазиморфизмы из одномерной динамики

В примере 3.18 абсолютное значение числа вращения Пуанкаре было интерпретировано как асимптотическое число переноса некоторого изометрического действия. У числа вращения имеется и когомологическая интерпретация: оно является однородным квазиморфизмом.

Пример 4.8. Число вращения Пуанкаре задаёт на группе $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ однородный квазиморфизм, дефект которого равен 1; см. [142]. Более того, пространство однородных квазиморфизмов группы $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ одномерно [142, 256]:

$$Q\left(\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)\right) = \langle \mathrm{rot} \rangle_{\mathbb{R}}. \qquad \Diamond$$

Следующие примеры показывают, как число вращения Пуанкаре порождает квазиморфизмы на группах, действующих автогомеоморфизмами вещественной прямой.

Пример 4.9. Для любой неисключительной поверхности S с выделенной компонентой края ∂ имеется мономорфизм

$$\mathrm{Mod}(S) \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1),$$

называющийся *представлением Нильсена–Тёрстона* [285, 169, 168, 1, 197, 95, 122]; он

[3] См. определение в разделе 3.4.3.

переводит скручивание Дена T_∂ вдоль выделенной компоненты края в параллельный перенос $x \mapsto x+1$. Композиция представления Нильсена–Тёрстона с числом вращения Пуанкаре совпадает с коэффициентом дробного скручивания Дена ω_∂. $\Diamond$

Нам потребуется вариант представления Нильсена–Тёрстона, предложенный в работе [1, Раздел 4.5.1] и удобный для вычисления коэффициента дробного скручивания Дена; ср. [234]. В оставшейся части этого описания под символом S будем понимать проколотую поверхность $S\backslash\{z_1,\dots,z_n\}$.

Зафиксируем гиперболическую структуру на S и универсальное накрытие $\widetilde{S} \to S$. Поднимая гиперболическую структуру с S на $\widetilde{S}$, отождествим $\widetilde{S}$ с замкнутым выпуклым подмножеством плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$, граница которого представляет собой счётный набор попарно непересекающихся геодезических. Край

$$\mathcal{S} := \partial\big(\mathrm{cl}(\widetilde{S})\big) \subseteq \overline{\mathbb{H}}^2$$

замыкания множества $\widetilde{S}$ на естественной компактификации плоскости Лобачевского называется *идеальной окружностью*. Напомним, что на выделенной компоненте края ∂ отмечена точка x_*; выберем её поднятие $\widetilde{x}_* \in \widetilde{S}$ и обозначим символом $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$ компоненту связности прообраза компоненты края ∂ при накрытии $\widetilde{S} \to S$, содержащую точку $\widetilde{x}_*$. Дополнение $\mathcal{R} := \mathcal{S}\backslash\mathcal{I}$ называется *идеальной прямой*. Ориентация поверхности S задаёт ориентацию идеальной окружности $\mathcal{S}$, а значит, линейный порядок $\preccurlyeq$ на $\mathcal{R}$.

Для каждого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ существует единственное поднятие $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ гомеоморфизма, представляющего класс φ, которое действует тождественно на $\mathcal{I}$; оно продолжается на идеальную окружность, сохраняет идеальную прямую и сохраняет порядок $\preccurlyeq$. Тем самым получается гомоморфизм

$$\mathrm{A}\colon\ \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Homeo}_+(\mathcal{R}).$$

Подгруппа в группе скольжений универсального накрытия, состоящая из элементов, под действием которых множество $\mathcal{I}$ переходит в себя, является бесконечной циклической. Символом $\mathsf{t}\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ обозначается индуцированный одной из двух её образующих гомеоморфизм идеальной прямой, отвечающий скручиванию Дена вдоль компоненты края ∂:

$$\mathrm{A}(T_\partial) = \mathsf{t}.$$

Для $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ положим $\mathrm{A}_\varphi := \mathrm{A}(\varphi)$.

Лемма 4.10 [1, Предложение 4.5.3]**.** Для любых $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и $p \in \mathcal{R}$ выполняется соотношение

$$\omega_\partial(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\max\big\{s \in \mathbb{Z} \;\big|\; \mathsf{t}^s(p) \preccurlyeq \mathrm{A}_{\varphi^k}(p)\big\}}{k}. \qquad \square$$

Замечание 4.11. Описание числа вращения Пуанкаре в разделе 3.3.1 также позволяет

интерпретировать абсолютное значение коэффициента дробного скручивания Дена как асимптотическое число переноса, отвечающее некоторому действию группы $\mathrm{Mod}(S)$; ср. [37]. ◊

Завершим раздел ещё одним примером того, как число вращения Пуанкаре может быть использовано для построения однородных квазиморфизмов.

Пример 4.12. Пусть $\Sigma_{g,1}$ — связная компактная ориентируемая поверхность рода $g \geqslant 1$ с единственной компонентой края и без проколов. Фундаментальная группа поверхности $\Sigma_{g,1}$ свободна: $\pi_1(\Sigma_{g,1}) \cong F_{2g}$. С каждой гиперболической структурой на $\Sigma_{g,1}$ связано представление

$$\pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Homeo}_+(S^1),$$

отвечающее действию скольжениями на универсальном накрывающем $\widetilde{\Sigma_{g,1}}$. Каждое такое представление допускает хотя бы одно поднятие вида

$$\pi_1(\Sigma_{g,1}) \to \widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R}) \subseteq \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1).$$

Композиции таких поднятий с числом вращения Пуанкаре представляют собой однородные квазиморфизмы на свободной группе F_{2g}. ◊

Согласно [79, Section 4.2.4], последняя конструкция допускает интерпретацию в терминах 2-формы площади на гиперболической поверхности. Далее рассмотрим близкие конструкции, непосредственно использующие геометрию пространства Лобачевского.

4.2.2 Квазиморфизмы из действий на гиперболических пространствах

Начнём с конструкции, предложенной Ж. Баржем и Э. Жисом [27]; см. [26, Section 2.3] и [79, Section 2.3.1].

Пример 4.13. Для замкнутого гиперболического многообразия M и 1-формы α на M зададим функцию $q_\alpha\colon \pi_1(M) \to \mathbb{R}$ на фундаментальной группе $\pi_1(M)$ следующим образом. Обозначим символом L_γ единственную ориентированную локально геодезическую петлю с началом в отмеченной точке (и, возможно, с изломом в этой точке), представляющую гомотопический класс $\gamma \in \pi_1(M)$, и положим

$$q_\alpha(\gamma) := \int_{L_\gamma} \alpha.$$

Тогда $D(q_\alpha) \leqslant \pi \|d\alpha\|_\infty$, где символ

$$\|\beta\|_\infty := \sup_{x\in M} \sup_{\substack{u,v\in T_xM \\ |u|,\,|v|\leqslant 1}} |\beta_x(u,v)|$$

обозначает комассу 2-формы β на M. В частности, если 1-форма α является замкнутой ($d\alpha = 0$), то квазиморфизм q_α является гомоморфизмом. ◊

Перейдём от фундаментальной группы к её действию скольжениями на универсальном накрывающем и обобщим конструкцию Баржа–Жиса следующим образом.

Пример 4.14. Предположим, что группа G действует изометриями на пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$, где $n \geqslant 1$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{H}^n$ и выберем 1-форму α на $\mathbb{H}^n$, инвариантную относительно действия группы G, для которой комасса $\|d\alpha\|_\infty$ конечна. Зададим *квазиморфизм де Рама* $q_\alpha\colon G \to \mathbb{R}$ формулой

$$q_\alpha(\varphi) := \int\limits_{[x_0,\varphi(x_0)]} \alpha,$$

где интегрирование проводится вдоль геодезического отрезка, идущего из точки x_0 в точку $\varphi(x_0)$. Тогда, используя теорему Стокса и то, что площадь любого геодезического треугольника в $\mathbb{H}^n$ не превосходит π, получаем $D(q_\alpha) \leqslant \pi\|d\alpha\|_\infty$. Отметим, что усреднение $\widetilde{q}_\alpha$ квазиморфизма q_α не зависит от выбора точки $x_0 \in \mathbb{H}^n$. $\Diamond$

Пример 4.15. Пусть группа G действует изометриями на пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Назовём подпространством *квазиморфизмов де Рама* в $Q(G)$ подпространство

$$Q_{\mathrm{dR}} := \{\widetilde{q}_\alpha \mid \alpha \in \Omega\} \subseteq Q(G),$$

где символ Ω обозначает пространство всех G-инвариантных 1-форм α на $\mathbb{H}^n$, для которых комасса $\|d\alpha\|_\infty$ конечна.

Согласно теореме Ж. Баржа и Э. Жиса [27, 29], в случае действия фундаментальной группы $G = \pi_1(M)$ замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности M скольжениями на универсальном накрывающем пространство Q_{dR} бесконечномерно. В частности, в этом случае пространство $Q(G)$ бесконечномерно. $\Diamond$

В следующих примерах мы переходим к дискретным аналогам квазиморфизмов де Рама, применимым в случае, когда группа действует на гиперболическом по Громову графе. В этих аналогах роль 1-форм, интерпретируемых как правила приписывания «весов» касательным векторам многообразия, играют правила приписывания «весов» путям в графе.

Следуя [79, Definition 2.25] и [149, Section 5], начнём с конструкции, предложенной Р. Бруксом [75]; ср. [190].

Пример 4.16. Пусть $F(S)$ — свободная группа с базисом S. Для двух несократимых слов $w = x_1 \dots x_n$ и $u = y_1 \dots y_m$, где $x_i, y_i \in S^{\pm 1}$, пусть символ $C_w(u)$ обозначает общее число вхождений слова w в слово u в качестве подслова, или, иными словами, число таких индексов $s \in \{0, 1, \dots, m-n\}$, что $x_i = y_{i+s}$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Зададим функцию $H_w\colon F(S) \to \mathbb{Z}$ формулой

$$H_w(u) := C_w(u) - C_{w^{-1}}(u).$$

Тогда $D(H_w) \leqslant 3(|w|-1)$, где $|w|$ обозначает длину слова w. В частности, если $|w|=1$, то H_w является гомоморфизмом.

В работе [79, Section 2.3.2] квазиморфизмы H_w называются *большими считающими*. Наряду с ними рассматриваются *малые считающие* квазиморфизмы

$$h_w(u) := c_w(u) - c_{w^{-1}}(u),$$

где $c_w(u)$ обозначает максимальное число *непересекающихся* вхождений слова w в слово u. Имеем $c_w = C_w$ и $h_w = H_w$, если никакой непустой собственный суффикс слова w не совпадает ни с каким непустым собственным префиксом, то есть для любой несократимой записи вида $w = vw'v$ следует, что слово v является пустым. Кроме того, для любого несократимого слова w имеем $D(h_w) \leqslant 2$. ◊

Пример 4.17. Для любого $n \geqslant 2$ усреднения считающих квазиморфизмов Брукса на свободной группе F_n образуют бесконечномерное подпространство пространства $Q(F_n)$. В частности, семейство квазиморфизмов $f_k := \widetilde{h}_{w_k}$, где $w_k := ab^k$ для базисных образующих a, b и индекса $k \geqslant 1$, является линейно независимым; см. [113, Proposition 1.3] и ср. [79, Example 2.62]. Более того, $Q(F_n)$ содержит копию бесконечномерного пространства ℓ^1 вещественных абсолютно суммируемых последовательностей [131, p. 77]: искомое вложение сопоставляет каждой последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ однородный квазиморфизм[4]

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k.$$

Отметим, что в этой конструкции функция f действительно является квазиморфизмом, поскольку дефекты квазиморфизмов f_k равномерно ограничены. ◊

Конструкция Брукса является прототипом следующей более общей конструкции, которая введена Д. Эпштейном и К. Фудживарой [113, 129, 130], уточнена М. Бествиной и К. Фудживарой [42, 43] и позволяет связать семейство квазиморфизмов с каждым действием группы на гиперболическом графе; см. [79, 131, 41] и [84, Section 8.3].

Пример 4.18. Следуя [79, Section 3.5], предположим, что группа G действует на связном δ-гиперболическом графе X. Зафиксируем вершину $x_0 \in X$. Для двух ориентированных путей σ и γ в X пусть $|\gamma|$ обозначает длину пути γ и $|\gamma|_\sigma$ обозначает максимальное число непересекающихся вхождений образов $\psi(\sigma)$ пути σ в путь γ, где $\psi \in G$. Для $\varphi \in G$ положим

$$c_\sigma(\varphi) := d(x_0, \varphi(x_0)) - \min_\gamma(|\gamma| - |\gamma|_\sigma),$$

где минимум берётся по множеству всех ориентированных путей γ, идущих из верши-

[4] Этот ряд сходится абсолютно, поскольку для каждого фиксированного $g \in F_n$ последовательность $|f_k(g)|$ ограничена.

ны x_0 в вершину $\varphi(x_0)$. Зададим *считающий квазиморфизм* $h_\sigma\colon G \to \mathbb{Z}$ формулой

$$h_\sigma(\varphi) := c_\sigma(\varphi) - c_{\sigma^{-1}}(\varphi),$$

где символ σ^{-1} обозначает тот же путь σ, рассматриваемый с противоположной ориентацией. Согласно [129, Proposition 3.10], существует такая константа $C = C(\delta)$, что для любого пути σ длины не менее 2 выполняется соотношение $D(h_\sigma) \leqslant C$. Отметим, что усреднение $\widetilde{h}_\sigma$ считающего квазиморфизма h_σ не зависит от выбора вершины $x_0 \in X$. ◊

Пример 4.19. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X. Положим

$$Q^h_X := \operatorname{span}\{\widetilde{h}_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_X\} \subseteq Q(G),$$

где символ Σ_X обозначает множество всех ориентированных путей в X, длина которых составляет по меньшей мере 2, и назовём подпространством *считающих квазиморфизмов* в $Q(G)$ пересечение

$$Q_X := \operatorname{seq}(Q^h_X) \cap Q(G),$$

где символ $\operatorname{seq}(A)$ обозначает секвенциальное замыкание подпространства $A \subseteq \mathbb{R}^G$ в топологии поточечной сходимости[5].

Согласно теореме М. Бествины и К. Фудживары [42, Theorem 7], если группа G не является виртуально циклической, а действие является слабо вполне разрывным[6], то пространство Q_X содержит подпространство, изоморфное пространству ℓ^1; см. [79, Section 3.5]. Таким образом, для любой ацилиндрически гиперболической группы G размерность пространства $Q(G)$ несчётна[7]; см. замечание 3.49. ◊

Пример 4.20. Для любой неисключительной поверхности S пространство считающих квазиморфизмов $Q_{\mathcal{C}} \subseteq Q(\operatorname{Mod}(S))$, отвечающее действию группы классов отображений на графе кривых $\mathcal{C}(S)$, содержит подпространство, изоморфное пространству ℓ^1. Действительно, в случае, когда поверхность S не имеет компонент края, это следует из примеров 4.19, 3.44 и 3.47. В общем случае это следует из того, что действие на $\mathcal{C}(S)$ пропускается через гомоморфизм стягивания края; см. замечание 4.6.

В частности, при $n \geqslant 3$ это даёт вложение пространства ℓ^1 в пространство $Q(B_n)$ однородных квазиморфизмов группы кос; ср. [119, Section 4]. ◊

Альтернативные конструкции квазиморфизмов групп кос будут приведены в главе 10.

[5] Переход к секвенциальному замыканию позволяет, в частности, рассматривать сходящиеся ряды, как в примере 4.17.

[6] См. определение в разделе 3.4.3.

[7] В работе [156, Theorem 2.10] М. Хендел и Л. Мошер обобщили теорему Бествины–Фудживары, заменив предположения о том, что группа не является виртуально циклической, и о слабой вполне разрывности на предположение, что действие имеет общий тип и содержит сверхслабо вполне разрывный элемент.

4.3 Липшицевы квазиморфизмы

Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Назовём однородный квазиморфизм $f \in Q(G)$ *липшицевым относительно числа переноса* (или просто *липшицевым*)[8], если существует такая константа $c > 0$, что для любого $\varphi \in G$ выполняется неравенство[9]

$$|f(\varphi)| \leqslant c \cdot \ell_X(\varphi).$$

Это неравенство позволяет получать нижние оценки расстояний и асимптотических чисел переноса непосредственно из значений функции f. В частности, ненулевое значение $f(\varphi)$ служит признаком локсодромичности элемента φ.

Отметим, что если квазиморфизм f является липшицевым относительно ℓ_X, то для каждого нелоксодромического элемента $\varphi \in Z_X$ выполняется равенство $f(\varphi) = 0$.

Далее покажем, что однородные квазиморфизмы, построенные в разделе 4.2, являются липшицевыми относительно подходящих действий.

4.3.1 Считающие квазиморфизмы и квазиморфизмы де Рама

Установим липшицевость считающих квазиморфизмов и квазиморфизмов де Рама. В случае усреднений $\widetilde{h}_\sigma$ считающих квазиморфизмов докажем липшицевость с константой $|\sigma|^{-1} \leqslant 1/2$.

Предложение 4.21. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X. Тогда для любого ориентированного пути σ в X, длина которого составляет по меньшей мере 2, усреднение $\widetilde{h}_\sigma$ соответствующего считающего квазиморфизма является липшицевым относительно асимптотического числа переноса: для любого $\varphi \in G$ имеем

$$|\widetilde{h}_\sigma(\varphi)| \leqslant \frac{1}{|\sigma|}\, \ell_X(\varphi).$$

Доказательство. Зафиксируем вершину $x_0 \in X$, ориентированный путь σ, как выше, и элемент $\varphi \in G$. Напомним, что для $m \geqslant 1$ имеем

$$c_\sigma(\varphi^m) = d(x_0, \varphi^m(x_0)) - \min_\gamma(|\gamma| - |\gamma|_\sigma),$$

где минимум берётся по множеству всех ориентированных путей γ, идущих из вершины x_0 в вершину $\varphi^m(x_0)$. Поскольку $|\sigma| \cdot |\gamma|_\sigma \leqslant |\gamma|$, получаем

$$0 \leqslant c_\sigma(\varphi^m) \leqslant \frac{1}{|\sigma|}\, d(x_0, \varphi^m(x_0)).$$

[8] Ср. [198].

[9] В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать случай, при котором константа c допускает явное или эффективное выражение в терминах дефекта квазиморфизма f.

Аналогичное соотношение выполняется для обратного пути σ^{-1}. Поэтому

$$|h_\sigma(\varphi^m)| = |c_\sigma(\varphi^m) - c_{\sigma^{-1}}(\varphi^m)| \leqslant \frac{1}{|\sigma|}\, d(x_0, \varphi^m(x_0)).$$

Таким образом,

$$|\widetilde{h}_\sigma(\varphi)| = \lim_{m\to\infty} \frac{|h_\sigma(\varphi^m)|}{m} \leqslant \frac{1}{|\sigma|} \lim_{m\to\infty} \frac{d(x_0, \varphi^m(x_0))}{m} = \frac{1}{|\sigma|}\, \ell_X(\varphi). \qquad \square$$

Теперь покажем, что аналогичные рассуждения также применимы к квазиморфизмам де Рама $\widetilde{q}_\alpha$, для которых комасса

$$\|\alpha\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{H}^n} \sup_{\substack{v\in T_x\mathbb{H}^n \\ |v|\leqslant 1}} |\alpha_x(v)|$$

соответствующей 1-формы α ограничена.

Предложение 4.22. Пусть группа G действует на пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$, а 1-форма α на $\mathbb{H}^n$ является G-инвариантной, причём комассы $\|\alpha\|_\infty$ и $\|d\alpha\|_\infty$ конечны. Тогда усреднение $\widetilde{q}_\alpha$ соответствующего квазиморфизма де Рама является липшицевым относительно асимптотического числа переноса: для любого $\varphi \in G$ имеем

$$|\widetilde{q}_\alpha(\varphi)| \leqslant \|\alpha\|_\infty \cdot \ell_{\mathbb{H}^n}(\varphi).$$

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{H}^n$ и элемент $\varphi \in G$. Напомним, что для любого целого $m \geqslant 1$ имеем

$$q_\alpha(\varphi^m) = \int\limits_{[x_0, \varphi^m(x_0)]} \alpha,$$

где интегрирование проводится вдоль геодезического отрезка, идущего из точки x_0 в точку $\varphi^m(x_0)$. Из определения комассы формы α получаем

$$|q_\alpha(\varphi^m)| \leqslant \|\alpha\|_\infty \cdot \big|[x_0, \varphi^m(x_0)]\big| = \|\alpha\|_\infty \cdot d\big(x_0, \varphi^m(x_0)\big).$$

Таким образом,

$$|\widetilde{q}_\alpha(\varphi)| = \lim_{m\to\infty} \frac{|q_\alpha(\varphi^m)|}{m} \leqslant \|\alpha\|_\infty \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{d\big(x_0, \varphi^m(x_0)\big)}{m} = \|\alpha\|_\infty \cdot \ell_{\mathbb{H}^n}(\varphi). \qquad \square$$

Замечание 4.23. Если действие группы G на пространстве $\mathbb{H}^n$ коограничено, то условие конечности комасс выполняется автоматически, поскольку в этом случае комасса любой G-инвариантной формы ω ограничена. Действительно, пусть $K \subseteq \mathbb{H}^n$ — ограниченное подмножество, чьи образы под действием группы G покрывают всё пространство. Поскольку замыкание $\mathrm{cl}(K) \subseteq \mathbb{H}^n$ компактно, функция $x \mapsto \|\omega_x\|$ ограничена на $\mathrm{cl}(K)$. С другой стороны, из G-инвариантности формы ω следует, что $\|\omega_{\varphi(x)}\| = \|\omega_x\|$ для всех $\varphi \in G$ и $x \in \mathbb{H}^n$. Поскольку $G(K) = \mathbb{H}^n$, отсюда следует ограниченность

комассы $\|\omega\|_\infty$ на всём пространстве $\mathbb{H}^n$.

В частности, предложение 4.22 применимо к действию фундаментальной группы любого замкнутого гиперболического многообразия скольжениями на универсальном накрывающем. ◊

4.3.2 Коэффициенты дробного скручивания Дена

Пусть S — поверхность с выделенной компонентой края ∂, для которой $\chi(S) < 0$. Согласно разделу 1.2.4, с ней связан однородный квазиморфизм ω_∂ на группе классов отображений $\mathrm{Mod}(S)$; в разделе 4.2.1 была приведена формула для его вычисления. Покажем, что ω_∂ является липшицевым относительно действия на графе $\mathcal{A}_\partial(S)$ закреплённых граничных дуг[10]; ср. [176].

Следуя [1, Раздел 3.1.5], сопоставим каждой вершине $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(S)$ точку p_α идеальной прямой $\mathcal{R}$. Выберем представителя соответствующего изотопического класса граничных дуг и обозначим его тем же символом. Если концы дуги α не совпадают, ориентируем её от точки x_*. Если оба конца дуги совпадают с точкой x_*, ориентируем эту дугу от того конца, чья окрестность встречается первой при обходе малой полуокружности с центром x_* согласно ориентации компоненты края ∂, индуцированной ориентацией поверхности S. Этот выбор инвариантен относительно действия группы $\mathrm{Mod}(S)$.

Рассмотрим поднятие ориентированной дуги α до вложенного отрезка $\widetilde{\alpha} \subset \widetilde{S}$, начинающегося в точке $\widetilde{x}_*$. Положим $p_\alpha \in \mathcal{R} \subset \mathrm{cl}(\widetilde{S})$ равным концу этого вложенного отрезка. Тогда для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$\mathrm{A}_\varphi(p_\alpha) = p_{\varphi(\alpha)}.$$

Лемма 4.24. Если вершины $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\partial$ совпадают или смежны, то выполняются сравнения

$$\mathsf{t}^{-1}(p_\alpha) \preccurlyeq p_\beta \preccurlyeq \mathsf{t}(p_\alpha).$$

Доказательство. В случае $\alpha = \beta$ утверждение выполнено; далее считаем, что вершины α и β различны. Выберем непересекающихся представителей соответствующих изотопических классов и обозначим их теми же символами.

Выберем отображение скольжения $f\colon \widetilde{S} \to \widetilde{S}$, сохраняющее множество $\mathcal{I}$ и индуцирующее отображение t идеальной прямой $\mathcal{R}$. Рассмотрим следующие поднятия дуг α и β:

$$f^{-1}(\widetilde{\alpha}), \qquad \widetilde{\beta}, \qquad f(\widetilde{\alpha}).$$

Первое и третье из них начинаются соответственно в точках $f^{-1}(\widetilde{x}_*)$ и $f(\widetilde{x}_*)$, а их концы совпадают соответственно с точками $\mathsf{t}^{-1}(p_\alpha)$ и $\mathsf{t}(p_\alpha)$. Поскольку дуги α и β не пересекаются, во внутренности множества $\widetilde{S} \subset \mathbb{H}^2$ поднятие $\widetilde{\beta}$ не имеет общих точек пересечения ни с одним из поднятий дуги α, в частности, с вложенными отрезками $f^{-1}(\widetilde{\alpha})$ и $f(\widetilde{\alpha})$. В

[10] См. определение в разделе 1.1.2.

пространстве $\mathrm{cl}(\widetilde{S}) \subseteq \overline{\mathbb{H}}^2$ последние два вложенных отрезка ограничивают область, пересечение края которой с $\mathcal{I}$ содержит точку $\widetilde{x}_*$. Следовательно, вложенный отрезок $\widetilde{\beta}$ целиком лежит в этой области. Поэтому его конец лежит между вторыми концами вложенных отрезков $f^{-1}(\widetilde{\alpha})$ и $f(\widetilde{\alpha})$, откуда $\mathsf{t}^{-1}(p_\alpha) \preccurlyeq p_\beta \preccurlyeq \mathsf{t}(p_\alpha)$. □

Предложение 4.25. Для любого $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$|\omega_\partial(\varphi)| \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi).$$

Доказательство. Зафиксируем $m \geqslant 1$, вершину $\alpha \in \mathcal{A}_\partial$, положим $r_m := d_{\mathcal{A}_\partial}(\alpha, \varphi^m(\alpha))$ и выберем геодезический путь $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r_m} = \varphi^m(\alpha)$ в графе $\mathcal{A}_\partial$. Последовательно применяя лемму 4.24 и то, что отображение t сохраняет порядок, получаем сравнения

$$\mathsf{t}^{-r_m}(p_\alpha) \preccurlyeq p_{\varphi^m(\alpha)} \preccurlyeq \mathsf{t}^{r_m}(p_\alpha).$$

Поскольку $\mathrm{A}_{\varphi^m}(p_\alpha) = p_{\varphi^m(\alpha)}$, имеем

$$-r_m \leqslant \max\{s \in \mathbb{Z} \mid \mathsf{t}^s(p_\alpha) \preccurlyeq \mathrm{A}_{\varphi^m}(p_\alpha)\} \leqslant r_m.$$

Деля на m и переходя к пределу, по лемме 4.10 получаем

$$-\ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi) = \lim_{m\to\infty} \frac{-r_m}{m} \leqslant \omega_\partial(\varphi) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{r_m}{m} = \ell_{\mathcal{A}_\partial}(\varphi),$$

откуда следует искомое неравенство. □

Таким образом, липшицевы квазиморфизмы возникают систематически. В главе 5 все кандидаты на однородные квазиморфизмы, липшицевы относительно числа переноса заданного действия, будут объединены в единую характеристику — стабильную коммутаторную длину этого действия, а одним из центральных станет вопрос о сравнении этой характеристики с асимптотическим числом переноса. В дальнейшем такое сравнение будет установлено для основных действий групп классов отображений (глава 6) и использовано для получения эффективных нижних оценок динамических, геометрических и топологических характеристик (глава 11).

ГЛАВА 5 СТАБИЛЬНАЯ КОММУТАТОРНАЯ ДЛИНА ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

В настоящей главе с каждым изометрическим действием группы G на метрическом пространстве X связывается подпространство

$$V_X = \{f \in Q(G) \mid f(Z_X) = 0\}$$

в пространстве однородных квазиморфизмов, где Z_X обозначает множество нелоксодромических элементов действия, и величина

$$\mathrm{scl}_X(g) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_X \\ D(f) \leqslant 1}} |f(g)|.$$

Функция scl_X объединяет все кандидаты на однородные квазиморфизмы, липшицевы относительно числа переноса[1], в единую характеристику. Её ненулевые значения служат признаками локсодромичности, поэтому эта характеристика наследует от асимптотического числа переноса ℓ_X качественную форму порогового принципа. В случае, когда выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X,$$

она также наследует количественную форму этого принципа.

В разделе 5.1 рассматривается классическая стабильная коммутаторная длина scl и приводятся её алгебраическое, топологическое и функционально-аналитическое описания.

В разделе 5.2 рассматривается понятие относительной стабильной коммутаторной длины scl_V, отвечающей заданному подпространству $V \subseteq Q(G)$ однородных квазиморфизмов; исследуются его эквивалентные описания и основные свойства.

В разделе 5.3 это понятие применяется к пространству V_X; в частности, описывается связь между стабильными коммутаторными длинами действий, связанных эквивариантными грубо липшицевыми отображениями. Устанавливается ряд необходимых и достаточных условий положительности функции scl_X, а также вводятся различные формы свойства сравнения.

В разделе 5.4 устанавливаются необходимые и достаточные условия выполнения свойств сравнения для действий на графах. В частности, показывается, что для сравнения $\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X$ достаточно, чтобы группа G порождалась множеством своих нелоксодромических элементов и число орбит рёбер графа X было конечным.

В разделе 5.5 описываются модельные задачи, которые во многом задают структуру последующей части диссертации: построение иерархий, распознавание и интерпретация положительности значений рассматриваемых функций, построение эффективно вычислимых липшицевых квазиморфизмов и проекторов на подпространство V_X.

[1] См. определение в разделе 4.3.

5.1 Классическая стабильная коммутаторная длина

Геометрические истоки стабильной коммутаторной длины восходят к работам М. Каллера [101], А. Дункана и Дж. Хоуи [110]. Описание этого понятия в терминах однородных квазиморфизмов было установлено К. Бавароом [30]. Позднее Д. Калегари [79] также получил его описание в терминах отображений поверхностей, аналогичное определению симплициального объёма и нормы Громова.

Далее приведём три эквивалентных определения стабильной коммутаторной длины: алгебраическое, в терминах коммутаторов, топологическое, полученное Калегари, и функционально-аналитическое, представляющее собой теорему двойственности Бавара.

Алгебраическое описание

Напомним, что *коммутаторной длиной* $\mathrm{cl}(g)$ элемента $g \in [G,G]$ называется наименьшее неотрицательное m, для которого g представим в виде произведения m коммутаторов:

$$g = [a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_m, b_m],$$

где $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m \in G$. *Стабильной коммутаторной длиной* элемента $g \in [G,G]$ называется предел

$$\mathrm{scl}(g) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{cl}(g^m)}{m}.$$

Этот предел существует и конечен по лемме 3.2, поскольку последовательность $\mathrm{cl}(g^m)$ субаддитивна.

Величина $\mathrm{scl}(g)$ показывает, насколько эффективно степени элемента g могут быть представлены в виде произведения коммутаторов.

Замечание 5.1. Если абелизация $G^{ab} = G/[G,G]$ конечна, то определение стабильной коммутаторной длины можно расширить на все элементы группы G. А именно, в этом случае для любого $g \in G$ существует такое $N > 0$, что $g^N \in [G,G]$, и можно положить $\mathrm{scl}(g) := \mathrm{scl}(g^N)/N$. По однородности функции scl на $[G,G]$ правая часть не зависит от выбора N. ◊

Покажем, что функция scl представляется как асимптотическое число переноса для действия группы $[G,G]$ на себе левыми сдвигами.

Пример 5.2. Следуя [79, Example 3.33] и [83, Lemma 2.6], зададим на коммутанте

$$X := [G,G]$$

группы G словарную метрику, отвечающую порождающему множеству из всех коммутаторов из G. Пусть группа $[G,G]$ действует на этом метрическом пространстве левыми сдвигами. Тогда число переноса для этого действия совпадает с коммутаторной длиной,

а асимптотическое число переноса — со стабильной коммутаторной длиной: для любого $g \in [G, G]$ имеем

$$\tau_X(g) = \mathrm{cl}(g), \qquad \ell_X(g) = \mathrm{scl}(g). \qquad \Diamond$$

Топологическое описание

Пусть $G = \pi_1(X)$ — фундаментальная группа линейно связного топологического пространства X. Тогда коммутаторная длина элемента $g \in [G, G]$ совпадает с минимальным значением, которое принимает род связной компактной ориентированной поверхности с одной компонентой края, допускающей непрерывное отображение в пространство X, сужение которого на край является петлёй, представляющей элемент g; см. [79, Section 1.1.5].

Для компактной ориентированной поверхности S с компонентами связности $S_1, \ldots, S_m$ положим

$$-\chi^-(S) := \sum_{k=1}^{m} \max\{-\chi(S_k), 0\}.$$

Для петли $\gamma\colon S^1 \to X$ отображение $f\colon S \to X$ называется *допустимым*, если существует такое непрерывное отображение $p\colon \partial S \to S^1$, что сужение отображения f на край ∂S совпадает с композицией $\gamma \circ p$. Обозначим символом n суммарную степень отображения p; при необходимости обращая ориентацию поверхности S, будем считать, что $n \geqslant 0$. Тогда, согласно [79, Proposition 2.10], стабильная коммутаторная длина элемента $g \in [G, G]$, представляемого петлёй γ, совпадает с инфимумом величины $-\chi^-(S)/(2n)$, взятым по всем допустимым отображениям f, для которых $n > 0$:

$$\mathrm{scl}(g) = \inf_{(S,f)} \frac{-\chi^-(S)}{2n}.$$

Приведём ряд примеров, показывающих, как коммутаторная длина и стабильная коммутаторная длина возникают в теории узлов, теории групп классов отображений поверхностей и одномерной динамике; также см. [79, p. 14]. Начнём с примера, касающегося фундаментальной группы дополнения узла.

Пример 5.3. Согласно [136, Corollary 6.22] и [79, Proposition 4.4], род Зейферта любого нетривиального узла $K \subset S^3$ в трёхмерной сфере равен коммутаторной длине параллели в группе $\pi_1(S^3 \backslash K)$ этого узла, а также получается из стабильной коммутаторной длины добавлением числа $1/2$:

$$g(K) = \mathrm{cl}(\lambda) = \mathrm{scl}(\lambda) + \frac{1}{2}. \qquad \Diamond$$

Теперь рассмотрим группы классов отображений замкнутых поверхностей.

Пример 5.4. Пусть S — связная замкнутая ориентированная поверхность рода не менее 2 и пусть $G = \mathrm{Mod}(S)$. Отметим, что абелизация группы $\mathrm{Mod}(S)$ конечна. Для

элемента $\varphi \in [G, G]$ пусть $g(\varphi)$ обозначает наименьшее значение, которое принимает род на множестве всех связных компактных ориентированных поверхностей $\Sigma_{g,1}$ с одной компонентой края, для которых существует локально тривиальное расслоение с базой $\Sigma_{g,1}$ и слоем S, ограничение которого на край $\partial\Sigma_{g,1}$ изоморфно стандартному расслоению тора отображения T_φ над окружностью. Тогда

$$g(\varphi) = \mathrm{cl}(\varphi).$$

Данное наблюдение лежит в основе ряда оценок стабильной коммутаторной длины в группах классов отображений замкнутых поверхностей, формулирующихся в терминах инвариантов четырёхмерных многообразий; см. [79, Section 3.6.1]. ◊

Напомним, что согласно примеру 3.18, абсолютное значение числа вращения Пуанкаре может быть представлено как асимптотическое число переноса. Следующий пример показывает, что это значение может быть выражено в терминах стабильной коммутаторной длины.

Пример 5.5. Группа $G = \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ совпадает со своим коммутантом, и согласно теореме Д. Айзенбада, У. Хирша и В. Ноймана [79, Theorem 2.43], в этом случае стабильная коммутаторная длина пропорциональна абсолютному значению числа вращения Пуанкаре: для любого элемента $g \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}(g) = \frac{|\mathrm{rot}(g)|}{2}.$$

Отметим, что в этом примере топологическое определение стабильной коммутаторной длины приводит к теореме Милнора–Вуда [255, 310] о трансверсальных слоениях на пространствах расслоений с поверхностью в качестве базы и окружностью в качестве слоя; см. [79, Example 2.51]. ◊

Функционально-аналитическое описание

Наконец, приведём функционально-аналитическое определение стабильной коммутаторной длины, ключевое для настоящей работы. Согласно теореме двойственности Бавара, для любого $g \in [G, G]$ выполняются следующие соотношения:

$$\mathrm{scl}(g) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in Q(G) \\ D(f) \leqslant 1}} |f(g)| = \sup_{\substack{f \in Q(G) \\ D(f) > 0}} \frac{|f(g)|}{2D(f)}.$$

Замечание 5.6. Д. Калегари [79, Section 2.6] показал, что теорему Бавара можно интерпретировать как утверждение о двойственности, аналогичное двойственности между пространствами ℓ^1 и ℓ^∞. В частности, стабильная коммутаторная длина задаёт корректно определённую полунорму на пространстве вещественных 1-границ в G. ◊

Заметим, что для любого однородного квазиморфизма $f \in Q(G)$ и для любого элемента $g \in [G, G]$ выполняется соотношение

$$|f(g)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}(g)\, D(f).$$

Квазиморфизм $f \in Q(G)$ называется *экстремальным* для g, если в этом неравенстве достигается равенство; см. [79, Section 2.7.1].

Пример 5.7. Из примера 4.8 следует, что число вращения Пуанкаре rot на $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ является единственным, с точностью до пропорциональности, экстремальным квазиморфизмом для параллельного переноса $x \mapsto x + 1$. ◊

Этот пример является прототипом аналогичного результата о коэффициенте дробного скручивания Дена, представленного в теореме 10.9 ниже.

Пример 5.8. Продолжая пример 5.5, напомним, что теорема Милнора–Вуда допускает эквивалентную переформулировку в терминах представлений фундаментальной группы замкнутой ориентированной поверхности Σ_g в группу $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ автогомеоморфизмов окружности, сохраняющих её ориентацию. В этой переформулировке рассматривается гомоморфизм из свободной группы F_{2g} в группу $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$, получающийся после выбора стандартных образующих группы $\pi_1(\Sigma_g)$ и их поднятий. В этом случае, согласно [78, Section 3.5] и [79, Theorem 4.78], изучение квазиморфизмов группы F_{2g}, экстремальных для элемента, отвечающего стандартному определяющему соотношению группы $\pi_1(\Sigma_g)$, приводит к результатам, аналогичным теореме жёсткости Мацумото о «геометризации» (полусопряжённости фуксовым действиям) максимальных представлений группы $\pi_1(\Sigma_g)$ [243, 237]. ◊

5.2 Относительная стабильная коммутаторная длина

Понятие относительной стабильной коммутаторной длины неявно возникло в работах Д. Калегари и К. Фудживары [82], М. Клэя, М. Форестера и Дж. Лаусмы [96], С. Иванова и А. Клячко [189]; оно было формализовано Л. Ченом [89] и далее развито в работе Л. Чена и Н. Хойера [90]. Далее рассмотрим различные подходы к определению этого понятия и опишем связь между ними.

С каждым подпространством $V \subseteq Q(G)$ в пространстве однородных квазиморфизмов группы G свяжем функцию

$$\mathrm{scl}_V \colon G \to [0, +\infty],$$

положив

$$\mathrm{scl}_V(g) := \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V \\ D(f) \leqslant 1}} |f(g)|.$$

Мы называем функцию scl_V *относительной стабильной коммутаторной длиной*.

Замечание 5.9. Указанный супремум не обязательно конечен. Функция scl_V принимает бесконечные значения, если V содержит ненулевой гомоморфизм. ◊

Замечание 5.10. Для $V \subseteq Q(G)$ и $g \in G$ пусть значение $\mathrm{scl}_V(g)$ конечно. Тогда

$$\mathrm{scl}_V(g) = \sup_{\substack{f \in V \\ D(f)>0}} \frac{|f(g)|}{2D(f)}.$$

В частности, для существования вычислимой нижней оценки величины $\mathrm{scl}_V(g)$ достаточно существования вычислимого квазиморфизма $f \in V$, чей дефект $D(f)$ допускает вычислимую верхнюю оценку. Кроме того, для любого $f \in V$ выполняется неравенство

$$|f(g)| \leqslant 2\ \mathrm{scl}_V(g)\, D(f).$$ ◊

Лемма 5.11. Функция scl_V обладает следующими свойствами.

1. *Инвариантность относительно сопряжения*: для всех $g, h \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}_V(hgh^{-1}) = \mathrm{scl}_V(g).$$

2. *Абсолютная однородность*: для любых $g \in G$ и $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathrm{scl}_V(g^m) = |m| \cdot \mathrm{scl}_V(g).$$

3. *Квазисубаддитивность*: для всех $g, h \in G$ имеем

$$2\,\mathrm{scl}_V(gh) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_V(g) + 2\,\mathrm{scl}_V(h) + 1.$$

4. *Субаддитивность для коммутирующих элементов*: если $gh = hg$, то

$$\mathrm{scl}_V(gh) \leqslant \mathrm{scl}_V(g) + \mathrm{scl}_V(h).$$

5. Если элемент $g \in G$ является искажённым или ахиральным[2], то $\mathrm{scl}_V(g) = 0$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из утверждения (1) леммы 4.5. Утверждение (2) следует из однородности рассматриваемых квазиморфизмов.

Если хотя бы одно из значений $\mathrm{scl}_V(g)$ или $\mathrm{scl}_V(h)$ бесконечно, то утверждение (3) выполняется автоматически. Предположим теперь, что оба значения конечны, и зафиксируем $f \in V$. Тогда, согласно утверждению (2) леммы 4.5, имеем

$$\begin{aligned} |f(gh)| &\leqslant |f(g)| + |f(h)| + D(f) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_V(g)\, D(f) + 2\,\mathrm{scl}_V(h)\, D(f) + D(f) \\ &= (2\,\mathrm{scl}_V(g) + 2\,\mathrm{scl}_V(h) + 1)\, D(f). \end{aligned}$$

[2]Определения искажённых и ахиральных элементов см. соответственно в разделах 3.2.3 и 1.2.3.

Переходя к супремуму по всем $f \in V$ со свойством $D(f) \leqslant 1$, получаем утверждение (3). Доказательство утверждения (4) аналогично.

Остаётся доказать утверждение (5). Если элемент $g \in G$ является искажённым или ахиральным, то, согласно утверждению (4) леммы 4.5, для любого однородного квазиморфизма f, в частности для любого $f \in V$, имеем $f(g) = 0$. Следовательно, $\mathrm{scl}_V(g) = 0$. □

Далее перейдём к эквивалентному определению относительной стабильной коммутаторной длины, в котором вместо линейного подпространства пространства $Q(G)$ за основу берётся подмножество группы G.

Соответствие Галуа

С каждым линейным подпространством $V \subseteq Q(G)$ связано множество общих нулей

$$\mathbb{A}(V) := \{g \in G \mid f(g) = 0 \ \text{ для всех } f \in V\} = \bigcap_{f \in V} f^{-1}(0) = \{g \in G \mid \mathrm{scl}_V(g) = 0\}.$$

Включение $V \subseteq W$ индуцирует обратное включение $\mathbb{A}(W) \subseteq \mathbb{A}(V)$. Кроме того, с каждым подмножеством $A \subseteq G$ связано пространство

$$\mathbb{V}(A) := \{f \in Q(G) \mid f(g) = 0 \ \text{ для всех } \ g \in A\}.$$

Включение $A \subseteq B$ индуцирует обратное включение $\mathbb{V}(B) \subseteq \mathbb{V}(A)$.

Операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{V}$ удовлетворяют эквивалентности

$$A \subseteq \mathbb{A}(V) \quad \Longleftrightarrow \quad V \subseteq \mathbb{V}(A).$$

Иными словами, они устанавливают обращающее порядок соответствие Галуа между решёткой подмножеств группы G и решёткой линейных подпространств пространства $Q(G)$. С этим соответствием связаны операторы замыкания

$$\overline{A} := \mathbb{A}(\mathbb{V}(A)), \qquad \overline{V} := \mathbb{V}(\mathbb{A}(V)).$$

Назовём линейное подпространство $V \subseteq Q(G)$ *замкнутым по Галуа*, если $\overline{V} = V$. Аналогично, назовём подмножество $A \subseteq G$ *замкнутым по Галуа*, если $\overline{A} = A$. Отображение $\mathbb{V}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми по Галуа подмножествами группы G и замкнутыми по Галуа подпространствами пространства $Q(G)$.

Замечание 5.12. Из утверждения (5) леммы 5.11 следует, что любое замкнутое по Галуа подмножество группы G содержит объединение множеств ахиральных и иска-

жённых элементов:

$$\mathrm{Ach}(G) \cup \mathrm{Dist}(G). \qquad \Diamond$$

Вышеописанное соответствие мотивирует связать с каждым подмножеством $A \subseteq G$ относительную стабильную коммутаторную длину

$$\mathrm{scl}_A := \mathrm{scl}_{\mathbb{V}(A)}.$$

Замечание 5.13. Если $V \subseteq W \subseteq Q(G)$ и $A \subseteq B \subseteq G$, то

$$\mathrm{scl}_V \leqslant \mathrm{scl}_W, \qquad \mathrm{scl}_B \leqslant \mathrm{scl}_A.$$

Кроме того,

$$\mathrm{scl}_V \leqslant \mathrm{scl}_{\overline{V}}, \qquad \mathrm{scl}_A = \mathrm{scl}_{\overline{A}}. \qquad \Diamond$$

В работах [82, 90, 89] относительная стабильная коммутаторная длина определяется на основе семейства подгрупп $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ исходной группы G. Согласно относительной версии двойственности Бавара [90, Lemma 2.14], это определение совпадает с введённым выше определением, отвечающим подмножеству

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \subseteq G.$$

Обратно, с каждым подмножеством $A \subseteq G$ можно связать семейство циклических подгрупп $\{\langle a\rangle\}_{a\in A}$. Поскольку однородный квазиморфизм обращается в нуль на элементе a тогда и только тогда, когда он обращается в нуль на всей циклической подгруппе $\langle a\rangle$, относительная стабильная коммутаторная длина, отвечающая такому семейству, совпадает с функцией scl_A, введённой выше.

Отметим, что квазиморфизмы, принимающие нулевое значение на заданных подмножествах, также рассматривались в работе [267].

Алгебраическое описание

Для подмножества $A \subseteq G$ положим

$$A^\natural := \{ha^n h^{-1} \mid a \in A,\ h \in G,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Отметим, что $\overline{A^\natural} = \overline{A}$.

Для элемента $g \in \langle A \cup [G,G]\rangle$ определим *относительную коммутаторную длину* $\mathrm{cl}_A(g)$ как наименьшее значение выражения $m + k/2$, для которого g представим в

виде произведения m коммутаторов из G и k элементов из $A^\natural$:

$$g = [b_1, c_1] \cdot \ldots \cdot [b_m, c_m] \cdot d_1 \cdot \ldots \cdot d_k,$$

для некоторых $b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \in G$ и $d_1, \ldots, d_k \in A^\natural$. Тогда, согласно [82, Remark 5.3] и [90, Lemma 2.14], выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_A(g) = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_A(g^m)}{m}.$$

Этот предел существует и конечен по лемме 3.2, поскольку последовательность $\mathrm{cl}_A(g^m)$ субаддитивна.

Тем самым величина $\mathrm{scl}_A(g)$ показывает, насколько эффективно степени элемента g могут быть представлены в виде произведения коммутаторов и элементов из $A^\natural$.

Замечание 5.14. Как и в примере 5.2, относительную стабильную коммутаторную длину можно интерпретировать как асимптотическое число переноса. Пусть $A \subseteq G$ и $H := \langle A \cup [G, G] \rangle$. Зададим на группе H левоинвариантную метрику $d(g, h) := \mathrm{cl}_A(g^{-1}h)$ и рассмотрим действие группы H на полученном метрическом пространстве левыми сдвигами. Поскольку функция cl_A инвариантна относительно сопряжений, для любого $g \in H$ имеем

$$\tau_H(g) = \mathrm{cl}_A(g), \qquad \ell_H(g) = \mathrm{scl}_A(g). \qquad \Diamond$$

В разделе 5.4 это описание позволит установить сравнение между асимптотическим числом переноса изометрического действия на графе и подходящей относительной стабильной коммутаторной длиной; см. теорему 5.36.

Топологическое описание

Пусть $G = \pi_1(X)$ — фундаментальная группа линейно связного топологического пространства X. Для петли $\gamma\colon S^1 \to X$ отображение $f\colon S \to X$ компактной ориентированной поверхности с непустым краем назовём *A-допустимым*, если край поверхности S допускает такое разбиение $\partial S = \partial_0 S \sqcup \partial_A S$, что выполняются следующие свойства. Существует такое непрерывное отображение $p\colon \partial_0 S \to S^1$, что сужение отображения f на $\partial_0 S$ совпадает с композицией $\gamma \circ p$, а его сужение на каждую компоненту $C \subseteq \partial_A S$ представляет элемент из $A^\natural$. Обозначим символом n суммарную степень отображения p; при необходимости обращая ориентацию поверхности S, будем считать, что $n \geqslant 0$. Тогда, согласно [89, Proposition 2.9], относительная стабильная коммутаторная длина элемента $g \in \langle A \cup [G, G] \rangle$, представляемого петлёй γ, совпадает с инфимумом величины $-\chi^-(S)/(2n)$, взятым по всем A-допустимым отображениям f, для которых $n > 0$:

$$\mathrm{scl}_A(g) = \inf_{(S,f)} \frac{-\chi^-(S)}{2n}.$$

Это описание относительной стабильной коммутаторной длины аналогично описанию относительной нормы Громова; см. [238].

Конечность и экстремальные квазиморфизмы

Далее приведём основные свойства относительной стабильной коммутаторной длины.

Для подмножества $B \subseteq G$ определим функцию

$$\lambda_B \colon \langle B^\natural \rangle \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

следующим образом: $\lambda_B(g)$ есть наименьшее неотрицательное k, для которого элемент g представим в виде произведения k элементов из $B^\natural$. Поскольку множество $B^\natural$ инвариантно относительно сопряжений и обращения, функция λ_B также инвариантна относительно сопряжений. Кроме того, она субаддитивна:

$$\lambda_B(gh) \leqslant \lambda_B(g) + \lambda_B(h).$$

Для элемента $g \in \langle B^\natural \rangle$ положим

$$\widehat{\lambda}_B(g) := \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_B(g^m)}{m}.$$

Этот предел существует и конечен по лемме 3.2, поскольку последовательность $\lambda_B(g^m)$ субаддитивна. Получающаяся функция $\widehat{\lambda}_B$ инвариантна относительно сопряжений и абсолютно однородна относительно возведения в целую степень. Кроме того,

$$\widehat{\lambda}_B(g) \leqslant \lambda_B(g).$$

Замечание 5.15. Для случая, когда B — множество всех элементов конечного порядка группы G, функции λ_B и $\widehat{\lambda}_B$ рассматривались в работах [208, Section 2.2] и [11]. В случае, когда B — множество всех непсевдоаносовских классов отображений группы $\mathrm{Mod}(S)$, функция λ_B аналогична классическим нормам фрагментации в теории гомеоморфизмов многообразий [23, 76, 79, 70]. ◊

Лемма 5.16. Пусть $B \subseteq A \subseteq G$. Тогда для любого элемента $g \in \langle B^\natural \rangle$ выполняются соотношения

$$2\,\mathrm{scl}_A(g) \leqslant \widehat{\lambda}_B(g) \leqslant \lambda_B(g).$$

В частности, если $G = \langle B^\natural \rangle$, то функция scl_A принимает лишь конечные значения на G. Кроме того, дефект наделяет $\mathbb{V}(A)$ структурой нормированного пространства:

$$\mathbb{V}(A) \cap H^1(G;\mathbb{R}) = \{0\}.$$

Иными словами, для любого ненулевого $f \in \mathbb{V}(A)$ имеем $D(f) > 0$.

Доказательство. Зафиксируем $g \in \langle B^\natural \rangle$. Поскольку $B \subseteq A$, имеем $B^\natural \subseteq A^\natural$. Для каждого $m \geqslant 1$ выберем представление $g^m = d_1 \cdots d_k$, где $d_i \in B^\natural$ и $k = \lambda_B(g^m)$. Из определения относительной коммутаторной длины следует неравенство

$$\mathrm{cl}_A(g^m) \leqslant \frac{\lambda_B(g^m)}{2}.$$

Деля на m и переходя к пределу, получаем

$$\mathrm{scl}_A(g) \leqslant \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_B(g).$$

Неравенство $\widehat{\lambda}_B(g) \leqslant \lambda_B(g)$ следует из субаддитивности функции λ_B.

Пусть теперь $G = \langle B^\natural \rangle$ и $f \in \mathbb{V}(A) \cap H^1(G;\mathbb{R})$. Поскольку $B \subseteq A$, гомоморфизм f обращается в нуль на B, а следовательно, и на $B^\natural$. Так как множество $B^\natural$ порождает G, имеем $f = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 5.17. Пусть $A \subseteq G$ и функция scl_A принимает лишь конечные значения на G. Тогда для любого $g \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}_A(g) = \frac{1}{2} \max_{\substack{f \in \mathbb{V}(A) \\ D(f) \leqslant 1}} |f(g)|.$$

Доказательство. Покажем, что подмножество $\mathcal{B}_A := \{f \in \mathbb{V}(A) \mid D(f) \leqslant 1\}$ компактно в топологии поточечной сходимости на $Q(G)$.

По замечанию 5.10 для любого квазиморфизма $f \in \mathcal{B}_A$ и элемента $g \in G$ имеем

$$|f(g)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}_A(g) \cdot D(f) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_A(g).$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}_A \subseteq K := \prod_{g \in G} [-2\,\mathrm{scl}_A(g), 2\,\mathrm{scl}_A(g)] \subseteq \mathbb{R}^G.$$

Поскольку каждый сомножитель является компактным, согласно теореме Тихонова, произведение K компактно. Кроме того, подмножество $\mathcal{B}_A \subseteq K$ замкнуто: каждое из определяющих его условий — однородность, нулевое значение на каждом элементе из A и ограниченность дефекта единицей — задаёт замкнутое подмножество относительно топологии поточечной сходимости. Следовательно, множество $\mathcal{B}_A$ компактно.

Для фиксированного $g \in G$ отображение $\mathcal{B}_A \to \mathbb{R}$, заданное правилом $f \mapsto |f(g)|$, непрерывно. Поэтому существует такой квазиморфизм $f_0 \in \mathcal{B}_A$, что

$$|f_0(g)| = \max_{f \in \mathcal{B}_A} |f(g)|.$$

Следовательно, супремум в определении величины $\mathrm{scl}_A(g)$ совпадает с соответствующим максимумом. □

Пусть $V \subseteq Q(G)$ и значение $\mathrm{scl}_V(g)$ конечно. Однородный квазиморфизм $f \in V$ назовём *V-экстремальным* для элемента g, если в неравенстве из замечания 5.10 достигается равенство:

$$|f(g)| = 2\ \mathrm{scl}_V(g) \cdot D(f).$$

Следствие 5.18. Пусть $A \subseteq G$ и функция scl_A принимает лишь конечные значения на G. Тогда для любого элемента $g \in G$ существует $\mathbb{V}(A)$-экстремальный квазиморфизм.

Доказательство. Согласно лемме 5.17, существует квазиморфизм $f_0 \in \mathbb{V}(A)$, для которого $D(f_0) \leqslant 1$ и

$$|f_0(g)| = 2\,\mathrm{scl}_A(g).$$

Если $\mathrm{scl}_A(g) = 0$, то экстремальным является, например, нулевой квазиморфизм. Покажем, что если $\mathrm{scl}_A(g) > 0$, то $D(f_0) = 1$. Действительно, в противном случае после умножения квазиморфизма f_0 на положительную константу можно было бы увеличить значение $|f_0(g)|$, сохранив условие $D(f_0) \leqslant 1$, что противоречит максимальности. Следовательно,

$$|f_0(g)| = 2\,\mathrm{scl}_A(g) D(f_0),$$

как и требовалось. □

5.3 Стабильная коммутаторная длина действия

Применим понятие относительной стабильной коммутаторной длины к изометрическим действиям. Конструкция, аналогичная изложенной ниже, рассматривалась в контексте действий групп на деревьях в работах М. Клэя, М. Форестера и Дж. Лаусмы [96], Л. Чена [89], Л. Чена и Н. Хойера [90].

Пусть группа G действует на метрическом пространстве X.

Введём пространство однородных квазиморфизмов, обращающихся в нуль на всех нелоксодромических элементах:

$$V_X := \mathbb{V}(Z_X) = \{f \in Q(G) \mid f(a) = 0 \text{ для всех } a \in Z_X\}.$$

Зададим соответствующую относительную стабильную коммутаторную длину:

$$\mathrm{scl}_X(a) := \mathrm{scl}_{Z_X}(a) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_X \\ D(f) \leqslant 1}} |f(a)|.$$

Будем называть её *стабильной коммутаторной длиной действия*.

Согласно описаниям, приведённым в разделе 5.2, функция scl_X измеряет, насколько эффективно степени данного элемента могут быть представлены в виде произведения коммутаторов и нелоксодромических элементов. В частности, условие $\mathrm{scl}_X(a) \neq 0$ возможно лишь для локсодромических элементов $a \in G$.

Следующие примеры показывают, что понятие стабильной коммутаторной длины действия обобщает классическую стабильную коммутаторную длину.

Пример 5.19. Зафиксируем конечное порождающее множество конечно порождённой группы G и рассмотрим её действие на себе левыми сдвигами. Тогда, поскольку по лемме 4.5 любой однородный квазиморфизм принимает нулевое значение на каждом искажённом элементе, имеем $V_X = Q(G)$, откуда для всех $a \in G$ получаем

$$\mathrm{scl}_X(a) = \mathrm{scl}(a). \qquad \Diamond$$

Пример 5.20. Предположим, что группа G совпадает со своим коммутантом. Пусть тогда, как и в примере 5.2, на $X := [G, G]$ задана словарная метрика, отвечающая порождающему множеству, состоящему из всех коммутаторов группы G, и группа G действует на метрическом пространстве X левыми сдвигами. Поскольку $\ell_X(a) = \mathrm{scl}(a)$, из оценки $|f(a^m)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}(a^m)D(f)$ получаем $V_X = Q(G)$. Следовательно, для всех $a \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}_X(a) = \mathrm{scl}(a) = \ell_X(a). \qquad \Diamond$$

5.3.1 Конечность и изменение при крупномасштабных отображениях

Если группа G порождается множеством Z_X, обозначим через

$$\lambda_Z := \lambda_{Z_X}, \qquad \widehat{\lambda}_Z := \widehat{\lambda}_{Z_X}$$

соответствующие функции длин, введённые в разделе 5.2.

Нам также потребуется подмножество

$$F_X \subseteq Z_X$$

всех элементов, имеющих конечную орбиту в X. Если $G = \langle F_X \rangle$, положим

$$\lambda_F := \lambda_{F_X}, \qquad \widehat{\lambda}_F := \widehat{\lambda}_{F_X}.$$

Поскольку множества Z_X и F_X инвариантны относительно сопряжений и возведения в целую степень, в данном случае выполняются равенства $Z_X^{\natural} = Z_X$ и $F_X^{\natural} = F_X$.

Следствие 5.21. Пусть группа G действует на пространстве X. Если $G = \langle Z_X \rangle$, то для любого $a \in G$ выполняются соотношения

$$2\,\mathrm{scl}_X(a) \leqslant \widehat{\lambda}_Z(a) \leqslant \lambda_Z(a).$$

В частности, функция scl_X принимает лишь конечные значения на G. Более того, со-

ответствующий супремум достигается: для любого $a \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}_X(a) = \frac{1}{2} \max_{\substack{f \in V_X \\ D(f) \leqslant 1}} |f(a)|.$$

Кроме того, дефект наделяет V_X структурой нормированного пространства:

$$V_X \cap H^1(G; \mathbb{R}) = \{0\}.$$

Если $G = \langle F_X \rangle$, то для любого $a \in G$ выполняются соотношения

$$2\,\mathrm{scl}_X(a) \leqslant \widehat{\lambda}_Z(a) \leqslant \widehat{\lambda}_F(a) \leqslant \lambda_F(a).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из лемм 5.16 и 5.17, применённых к множествам $A = B = Z_X$. Во втором случае применим лемму 5.16 к $B = F_X \subseteq A = Z_X$ и воспользуемся неравенством $\widehat{\lambda}_Z(a) \leqslant \widehat{\lambda}_F(a)$, следующим из включения $F_X \subseteq Z_X$. □

Замечание 5.22. В отличие от асимптотического числа переноса ℓ_X, учитывающего «масштаб» действия, функция scl_X зависит лишь от множества Z_X его нелоксодромических элементов. Так, двум действиям с одинаковыми множествами нелоксодромических элементов отвечают одинаковые пространства квазиморфизмов и стабильные коммутаторные длины. В частности, при замене метрики d_X на метрику $c \cdot d_X$ для некоторой константы $c > 0$ множество Z_X не изменяется, а значит, не изменяются V_X и scl_X. ◊

Следующий результат, в частности, показывает, что пространство V_X и функция scl_X являются инвариантами относительно эквивалентности действий[3].

Лемма 5.23. Пусть группа G действует на метрических пространствах X и Y.

1. Если существует грубо эквивариантное грубо липшицево отображение $X \to Y$, то $Z_X \subseteq Z_Y$. В частности, $V_Y \subseteq V_X$ и для всех $a \in G$ выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_Y(a) \leqslant \mathrm{scl}_X(a).$$

2. Если существует грубо эквивариантное квазиизометрическое вложение $X \to Y$, то $Z_X = Z_Y$. В частности, $V_Y = V_X$ и для всех $a \in G$ выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_Y(a) = \mathrm{scl}_X(a).$$

Доказательство. Соответствующие включение и равенство множеств нелоксодромических элементов следуют из леммы 3.11. Остальные утверждения следуют из монотонности отображения $A \mapsto \mathbb{V}(A)$ и относительной стабильной коммутаторной длины, установленной в разделе 5.2. □

[3] См. определение в разделе 3.2.

Таким образом, последовательность грубо эквивариантных грубо липшицевых отображений

$$X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_n \to \ldots$$

метрических пространств, на которых действует фиксированная группа G, задаёт фильтрацию

$$\ldots \subseteq V_{X_n} \subseteq \ldots \subseteq V_{X_2} \subseteq V_{X_1}$$

пространства $Q(G)$ и иерархию стабильных коммутаторных длин

$$\ldots \leqslant \mathrm{scl}_{X_n} \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{scl}_{X_2} \leqslant \mathrm{scl}_{X_1}.$$

В дальнейшем нам потребуется следующий модельный случай.

Замечание 5.24. Пусть группа G действует на связном графе X. Каждой нормальной подгруппе $N \trianglelefteqslant G$ отвечает индуцированное действие группы G на фактор-графе X/N. Мы имеем

$$d_{X/N}([x],[y]) = \min_{n\in N} d_X(x, n(y)),$$

где символ $[x]$ обозначает класс эквивалентности вершины x. В частности, для каждого элемента $g \in G$ существует вершина $x \in X$ и элемент $n \in N$, для которых выполняется соотношение

$$\tau_{X/N}(g) = d_X(x, n(g(x))).$$

Кроме того, естественное отображение $X \to X/N$ является эквивариантным и 1-липшицевым, откуда по леммам 3.11 и 5.23 имеем

$$\ell_{X/N}(g) \leqslant \ell_X(g), \qquad Z_{X/N} \supseteq Z_X, \qquad V_{X/N} \subseteq V_X, \qquad \mathrm{scl}_{X/N} \leqslant \mathrm{scl}_X.$$

Наконец, выполняется включение $N \subseteq Z_{X/N}$ и, следовательно,

$$V_{X/N} \subseteq \{f \in V_X \mid f(N) = 0\}. \qquad \lozenge$$

5.3.2 Положительность стабильной коммутаторной длины

Приведём ряд необходимых и достаточных условий, при которых значение стабильной коммутаторной длины действия не равно нулю. Начнём с признаков её обращения в нуль.

Замечание 5.25. Согласно определению пространства V_X и утверждению (5) леммы 5.11, для любого нелоксодромического или ахирального элемента $a \in G$ имеем

$$\mathrm{scl}_X(a) = 0. \qquad \lozenge$$

Следствие 5.26. Пусть группа G действует изометриями на гиперболическом пространстве X. Если локсодромический элемент $\varphi \in G$ действует ахирально и слабо вполне разрывно, то $\mathrm{scl}_X(\varphi) = 0$.

Доказательство. Совместим следствие 3.51 и замечание 5.25. □

Нам потребуется относительный вариант замечания 5.25.

Лемма 5.27. Для группы H и её нормальной подгруппы $N \trianglelefteqslant H$ пусть однородный квазиморфизм $f \in Q(H)$ обращается в нуль на N. Тогда для любых $h \in H$ и $n \in N$ имеем

$$f(hn) = f(h).$$

В частности, функция $\overline{f}\colon H/N \to \mathbb{R}$, заданная правилом $\overline{f}(hN) := f(h)$, корректно определена и является однородным квазиморфизмом. При этом $D(\overline{f}) = D(f)$.

Доказательство. Зафиксируем квазиморфизм $f \in Q(H)$, принимающий нулевое значение на подгруппе N. Для $h \in H$ и $n \in N$ положим $g_k := h^{-k}nh^k \in N$. Тогда для $m \geqslant 1$ имеем

$$h^{-m}(hn)^m = g_{m-1}g_{m-2}\dots g_0 \in N.$$

Следовательно,

$$f(h^{-m}(hn)^m) = 0.$$

Из определения дефекта и однородности квазиморфизма f получаем

$$|-mf(h) + mf(hn)| \leqslant D(f).$$

Деля на m и устремляя m к бесконечности, получаем $f(hn) = f(h)$. Отсюда следуют требуемые утверждения. □

Следствие 5.28. Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Предположим, что элемент $a \in G$ содержится в подгруппе $H \subseteq G$, для которой существует такая нормальная подгруппа $N \trianglelefteqslant H$, что $N \subseteq Z_X$ и образ элемента a в факторгруппе H/N ахирален. Тогда $\mathrm{scl}_X(a) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем квазиморфизм $f \in V_X$. Тогда он принимает нулевое значение на подгруппе N. По лемме 5.27 его сужение на подгруппу H индуцирует однородный квазиморфизм $\overline{f}\colon H/N \to \mathbb{R}$. Поскольку образ $\overline{a}$ элемента a в факторгруппе H/N ахирален, имеем $\overline{f}(\overline{a}) = 0$, и, следовательно, $f(a) = 0$. Поскольку это верно для любого $f \in V_X$, получаем $\mathrm{scl}_X(a) = 0$. □

Нам потребуется следующая лемма, являющаяся основным источником квазиморфизмов, распознающих хиральные локсодромические элементы. В случае слабо вполне разрывных действий она следует из [42, Proposition 5]. Общий случай см. в работе [41, Corollary 3.2]; ср. [156, Theorem 2.10].

Лемма 5.29. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X. Если локсодромический элемент $\varphi \in G$ действует хирально и сверхслабо вполне разрывно[4] (например, если φ хирален и действует слабо вполне разрывно), то существует такой ориентированный путь σ в X, что $\widetilde{h}_\sigma(\varphi) > 0$.[5] □

Предложение 5.30. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X. Тогда соответствующее пространство считающих квазиморфизмов[6] удовлетворяет включению

$$Q_X \subseteq V_X.$$

Доказательство. Согласно предложению 4.21, квазиморфизмы $\widetilde{h}_\sigma$ являются липшицевыми относительно асимптотического числа переноса ℓ_X. Следовательно, они принимают нулевое значение на каждом нелоксодромическом элементе. Искомое соотношение теперь следует из того, что пространство V_X линейно и замкнуто относительно поточечной сходимости. □

Теорема 5.31. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X. Если локсодромический элемент $\varphi \in G$ действует хирально и сверхслабо вполне разрывно, то $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$.

Доказательство. Согласно лемме 5.29, существует такой ориентированный путь σ в X, что $\widetilde{h}_\sigma(\varphi) > 0$. По предложению 5.30 имеем $\widetilde{h}_\sigma \in V_X$. Если $D(\widetilde{h}_\sigma) \leqslant 1$, то

$$\mathrm{scl}_X(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}|\widetilde{h}_\sigma(\varphi)| > 0.$$

Если же $D(\widetilde{h}_\sigma) > 1$, то

$$\mathrm{scl}_X(\varphi) \geqslant \frac{|\widetilde{h}_\sigma(\varphi)|}{2D(\widetilde{h}_\sigma)} > 0.$$ □

Следствие 5.32. Пусть группа G действует на связном гиперболическом графе X слабо вполне разрывно. Тогда для любого элемента $\varphi \in G$ неравенство $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$ выполняется в том и только в том случае, если φ является локсодромическим и хиральным.

Доказательство. Если $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$, то элемент φ является локсодромическим и хиральным по замечанию 5.25.

Обратно, в силу слабой вполне разрывности действия любой локсодромический элемент действует слабо вполне разрывно; значит, если локсодромический элемент φ является хиральным, то он действует хирально. В этом случае по теореме 5.31 имеем $\mathrm{scl}_X(\varphi) > 0$. □

[4] См. определения в разделах 3.4.1 и 3.4.3.

[5] Отметим, что дефект такого квазиморфизма $\widetilde{h}_\sigma$ ограничен сверху константой, зависящей только от константы гиперболичности пространства X, причём эта зависимость является эффективной.

[6] См. определение в разделе 4.2.2.

Иными словами, для слабо вполне разрывных действий замыкание Галуа $\overline{Z}_X$ множества Z_X нелоксодромических элементов получается присоединением всех ахиральных элементов группы G:

$$\overline{Z}_X = Z_X \cup \mathrm{Ach}(G).$$

В частности, Z_X замкнуто по Галуа в том и только том случае, если действие не имеет ахиральных локсодромических элементов.

5.3.3 Сравнение стабильной коммутаторной длины с числами переноса

Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Будем говорить, что действие обладает *свойством сравнения*, если

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X.$$

В случае, когда существует такая константа $c > 0$, что для каждого $a \in G$ выполняется соотношение

$$2\,\mathrm{scl}_X(a) \leqslant c \cdot \ell_X(a),$$

будем говорить, что число c является *константой сравнения*.

Свойство сравнения означает, что каждый квазиморфизм из V_X является липшицевым относительно асимптотического числа переноса, причём, с точностью до нормировки по дефекту, константы липшицевости равномерно ограничены.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 5.33. Пусть действие группы G на связном графе X обладает свойством сравнения с константой c. Тогда для любой нормальной подгруппы $N \trianglelefteqslant G$ индуцированное действие группы G на фактор-графе X/N обладает свойством сравнения с той же константой c. Кроме того, выполняется соотношение

$$V_{X/N} = \{f \in V_X \mid f(N) = 0\}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что для любого квазиморфизма $f \in V_X$, удовлетворяющего условию $f(N) = 0$, и для любого элемента $a \in G$ выполняется соотношение

$$|f(a)| \leqslant c \cdot \ell_{X/N}(a) \cdot D(f).$$

Действительно, по замечанию 5.24 для каждого $m \geqslant 1$ выберем вершину $x_m \in X$ и элемент $n_m \in N$, для которых выполняется соотношение

$$\tau_{X/N}(a^m) = d_X(x_m, n_m(a^m(x_m))).$$

По лемме 5.27 и свойству сравнения получаем[7]

$$\begin{aligned} m\,|f(a)| = |f(a^m)| = |f(n_m a^m)| &\leqslant c\cdot \ell_X(n_m a^m)\cdot D(f)\\ &\leqslant c\cdot \tau_X(n_m a^m)\cdot D(f)\\ &\leqslant c\cdot d_X(x_m, n_m(a^m(x_m)))\cdot D(f)\\ &\leqslant c\cdot \tau_{X/N}(a^m)\cdot D(f). \end{aligned}$$

Деля на m и переходя к пределу, получаем искомое неравенство.

В частности, если $\ell_{X/N}(a) = 0$, то $f(a) = 0$. Тем самым $f \in V_{X/N}$, откуда

$$V_{X/N} \supseteq \{f \in V_X \mid f(N) = 0\}.$$

Обратное включение следует из замечания 5.24. □

Нам также потребуются следующие усиленные формы свойства сравнения.

Будем говорить, что действие обладает *свойством сравнения в сильной форме*, если $G = \langle Z_X\rangle$ и существует такая константа $c > 0$, что для каждого $a \in G$ выполняется соотношение

$$\lambda_Z(a) \leqslant c\cdot \tau_X(a) + 1.$$

Будем говорить, что действие обладает *свойством сравнения в сверхсильной форме*, если $G = \langle F_X\rangle$ и существует такая константа $c > 0$, что для каждого $a \in G$ выполняется соотношение

$$\lambda_F(a) \leqslant c\cdot \tau_X(a) + 1.$$

Замечание 5.34. Из сверхсильной формы свойства сравнения следует сильная форма, а из сильной формы — обычная. Действительно, если $G = \langle F_X\rangle$, то $\lambda_Z \leqslant \lambda_F$, поэтому сверхсильная форма влечёт сильную.

Пусть теперь действие обладает свойством сравнения в сильной форме. Применяя соответствующую оценку к степеням a^m, получаем

$$\widehat{\lambda}_Z(a) = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_Z(a^m)}{m} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{c\cdot\tau_X(a^m)+1}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{c\cdot\tau_X(a^m)}{m} = c\cdot\ell_X(a).$$

Применяя теперь следствие 5.21, получаем

$$2\,\mathrm{scl}_X(a) \leqslant \widehat{\lambda}_Z(a) \leqslant c\cdot\ell_X(a).$$ ◊

Сверхсильная форма свойства сравнения позволяет существенно упростить описание пространства V_X.

Лемма 5.35. Пусть группа G действует на метрическом пространстве X. Если действие

[7] Мы применяем лемму 5.27 к элементу $g_m := a^{-m}n_m a^m \in N$ и используем равенство $n_m a^m = a^m g_m$.

обладает свойством сравнения в сверхсильной форме, то выполняется равенство

$$V_X = \mathbb{V}(F_X).$$

Более того, для любого однородного квазиморфизма $f \in Q(G)$ следующие условия эквивалентны:

1. f обращается в нуль на всех нелоксодромических элементах, то есть $f \in V_X$;
2. f обращается в нуль на всех эллиптических элементах;
3. f обращается в нуль на всех элементах, имеющих конечную орбиту;
4. f обращается в нуль на всех элементах, имеющих неподвижную точку.

Доказательство. Легко видеть, что каждое из условий (1), (2), (3) влечёт непосредственно следующее за ним.

Покажем, что из условия (4) следует условие (3). Пусть элемент $a \in G$ имеет конечную орбиту. Тогда для некоторой точки $x \in X$ существуют такие целые числа n и m, что $m > n \geqslant 0$ и $a^m(x) = a^n(x)$. Следовательно, элемент a^{m-n} имеет неподвижную точку. По однородности квазиморфизма f и условию (4) получаем

$$(m-n)f(a) = f(a^{m-n}) = 0,$$

откуда $f(a) = 0$.

Остаётся доказать, что из условия (3) следует условие (1). Пусть $f(F_X) = \{0\}$. Если $D(f) = 0$, то f является гомоморфизмом. Поскольку $G = \langle F_X \rangle$, из условия $f(F_X) = \{0\}$ следует $f = 0$, и потому $f \in V_X$.

Пусть теперь $D(f) > 0$. По замечанию 5.10 и лемме 5.16 для любого элемента $a \in G$ имеем

$$|f(a)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}_{F_X}(a) \cdot D(f) \leqslant \widehat{\lambda}_F(a) \cdot D(f).$$

С другой стороны, из свойства сравнения в сверхсильной форме, применённого к степеням элемента a, получаем

$$\widehat{\lambda}_F(a) \leqslant c \cdot \ell_X(a).$$

Поэтому

$$|f(a)| \leqslant \widehat{\lambda}_F(a) \cdot D(f) \leqslant c \cdot \ell_X(a) \cdot D(f).$$

Если $a \in Z_X$, то $\ell_X(a) = 0$, и следовательно, $f(a) = 0$. Таким образом, $f \in V_X$. □

5.4 Критерии свойств сравнения для действий на графах

Назовём действие группы G на связном графе X *кокомпактным*, если пространство орбит $|X|/G$ индуцированного действия этой группы на геометрической реализации $|X|$ является компактным. Эквивалентно, действие кокомпактно, если число орбит рёбер является конечным.

Следующий результат показывает, что такой конечности достаточно для выполнения свойства сравнения.

Теорема 5.36. Пусть группа G действует на связном графе X, причём $G = \langle Z_X \rangle$. Если это действие кокомпактно, то оно обладает свойством сравнения.

Доказательство. Положим $A = Z_X$ и рассмотрим метрику на $H := \langle A \cup [G, G] \rangle = G$, введённую в замечании 5.14, то есть $d(g, h) = \mathrm{cl}_A(g^{-1}h)$. Тогда $\ell_H = \mathrm{scl}_X$. Выберем по представителю v_i каждой орбиты вершин графа X, и для каждой вершины $x \in G(v_i)$ выберем такой элемент $g_x \in G$, что $g_x(v_i) = x$. Зададим отображение

$$f \colon X \to H$$

правилом $f(x) := g_x$. Тогда отображение f является грубо эквивариантным. Действительно, для $g \in G$ имеем

$$h := f(g(x))^{-1} g(f(x)) \in F_X \subseteq Z_X,$$

откуда $2\,\mathrm{cl}_Z(h) \leqslant 1$ и, следовательно, $2\,d(f(g(x)), g(f(x))) \leqslant 1$.

Если число орбит рёбер конечно, то отображение f также является грубо липшицевым. Действительно, выберем в каждой орбите ориентированных рёбер по представителю (u_j, v_j) и положим

$$M := \max_j d(f(u_j), f(v_j)).$$

Тогда для каждого ребра $(x, y) = g(u_j, v_j)$ имеем

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leqslant d\big(f(g(u_j)), g(f(u_j))\big) + d\big(g(f(u_j)), g(f(v_j))\big) + d\big(g(f(v_j)), f(g(v_j))\big) \\ &\leqslant M + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, по лемме 3.11 получаем

$$\mathrm{scl}_X = \ell_H \leqslant (M + 1)\,\ell_X. \qquad \square$$

Замечание 5.37. Аналогичные условия конечности используются в работе [65]. $\lozenge$

Далее перейдём к критериям и признакам, позволяющим уточнить величину константы сравнения и учесть различные формы свойства сравнения. В частности, расширение теоремы 5.36, учитывающее сверхсильную форму свойства сравнения, см. в теореме 5.42 ниже.

Пусть группа G действует на связном графе X. Будем говорить, что путь $v_0, v_1, \ldots, v_r$ длины $r \geqslant 1$ в графе X является *G-простым*, если его начало v_0 и конец v_r лежат в одной орбите, а все внутренние вершины $v_1, \ldots, v_{r-1}$ принадлежат попарно различным орбитам, отличным от орбиты концов.

Будем говорить, что функция $\lambda\colon G \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *согласована с действием*, если выполняются следующие условия:

$$\lambda(1) = 0, \qquad \lambda(gh) \leqslant \lambda(g) + \lambda(h), \qquad \lambda(hgh^{-1}) = \lambda(g)$$

для любых $g, h \in G$, а также $\lambda(g) \leqslant 1$ для каждого $g \in F_X$.

Зафиксируем такую функцию λ. Назовём λ-длиной G-простого пути $v_0, \ldots, v_r$ величину

$$\frac{1}{r} \min\{\lambda(g) \mid g \in G, \quad g(v_0) = v_r\}.$$

При $G = \langle Z_X \rangle$ и $\lambda = \lambda_Z$ будем называть эту величину Z_X*-длиной* пути, а при $G = \langle F_X \rangle$ и $\lambda = \lambda_F$ — его F_X*-длиной*.

Предложение 5.38. Пусть группа G действует на связном графе X и функция λ согласована с этим действием. Тогда λ-длины всех G-простых геодезических путей в X равномерно ограничены сверху в том и только в том случае, если существует такая константа $c > 0$, что для каждого элемента $a \in G$ выполняется неравенство

$$\lambda(a) \leqslant c \cdot \tau_X(a) + 1.$$

В частности:

1. если $G = \langle Z_X \rangle$, то действие обладает свойством сравнения в сильной форме в том и только в том случае, если Z_X-длины всех G-простых геодезических путей в X равномерно ограничены сверху;

2. если $G = \langle F_X \rangle$, то действие обладает свойством сравнения в сверхсильной форме в том и только в том случае, если F_X-длины всех G-простых геодезических путей в X равномерно ограничены сверху.

Доказательство. Предположим сначала, что для некоторой константы $c > 0$ и каждого $a \in G$ выполняется неравенство

$$\lambda(a) \leqslant c \cdot \tau_X(a) + 1.$$

Возьмём произвольный G-простой геодезический путь $v_0, v_1, \ldots, v_r$. Поскольку его концы лежат в одной орбите, существует элемент $g \in G$, для которого $g(v_0) = v_r$. Тогда

$$\tau_X(g) \leqslant d_X(v_0, g(v_0)) = r,$$

откуда

$$\frac{\lambda(g)}{r} \leqslant c + \frac{1}{r} \leqslant c + 1.$$

Следовательно, λ-длины рассматриваемых путей равномерно ограничены.

Докажем обратную импликацию. Предположим, что λ-длины всех G-простых геодезических путей не превосходят некоторой константы $c > 0$. Сначала покажем, что

для каждой пары вершин $p, q \in X$, лежащих в одной орбите, существует такой элемент $b \in G$, что выполняются соотношения $b(p) = q$ и

$$\lambda(b) \leqslant c \cdot d_X(p, q).$$

Доказательство проведём индукцией по $m := d_X(p, q)$. При $m = 0$ в качестве b возьмём нейтральный элемент. Далее предполагаем, что $m \geqslant 1$.

Выберем геодезический путь $v_0, v_1, \ldots, v_m$ от вершины $v_0 := p$ к вершине $v_m := q$. Среди всех подпутей $v_s, v_{s+1}, \ldots, v_t$ с концами в одной орбите, где $0 \leqslant s < t \leqslant m$, выберем один из подпутей минимальной длины. Такой подпуть существует, поскольку концы v_0 и v_m лежат в одной орбите. По минимальности выбранного подпути его внутренние вершины принадлежат попарно различным орбитам, отличным от орбиты его концов, и поэтому этот подпуть является G-простым. Кроме того, он является геодезическим, поскольку исходный путь является геодезическим. Согласно предположению, существует такой элемент $g \in G$, что $g(v_s) = v_t$ и

$$\lambda(g) \leqslant c \cdot (t - s).$$

В случае $(s, t) = (0, m)$ можно взять $b := g$, поскольку $\lambda(g) \leqslant c \cdot (t - s) \leqslant c \cdot m$. Далее считаем, что $(s, t) \neq (0, m)$, откуда следует, что $t - s < m$. Имеем следующий путь длины $m - (t - s)$:

$$g(v_0), \ldots, g(v_{s-1}), g(v_s) = v_t, v_{t+1}, \ldots, v_m.$$

Заметим, что его концы лежат в одной орбите. Поскольку

$$d_X(g(v_0), v_m) \leqslant m - (t - s) < m,$$

применимо предположение индукции: найдётся элемент $b' \in G$, переводящий вершину $g(v_0)$ в вершину v_m, для которого

$$\lambda(b') \leqslant c \cdot d_X(g(v_0), v_m) \leqslant c \cdot \big(m - (t - s)\big).$$

Тогда элемент $b := b'g$ переводит вершину v_0 в вершину v_m, причём

$$\lambda(b) \leqslant \lambda(b') + \lambda(g) \leqslant c \cdot \big(m - (t - s)\big) + c \cdot (t - s) = c \cdot m.$$

Вспомогательное утверждение доказано.

Зафиксируем теперь элемент $a \in G$ и положим $m = \tau_X(a)$. Выберем вершину $v \in X$, для которой $d_X(v, a(v)) = m$. По доказанному выше утверждению существует такой элемент $b \in G$, что выполняются соотношения $b(v) = a(v)$ и $\lambda(b) \leqslant c \cdot m$. Поскольку элемент $b^{-1}a$ сохраняет вершину v, имеем $b^{-1}a \in F_X$, откуда следует, что $\lambda(b^{-1}a) \leqslant 1$.

Таким образом, поскольку $a = b \cdot b^{-1}a$, получаем

$$\lambda(a) \leqslant \lambda(b) + \lambda(b^{-1}a) \leqslant \lambda(b) + 1 \leqslant c \cdot \tau_X(a) + 1.$$

Эквивалентность доказана. Последние два утверждения следуют из определений сильной и сверхсильной форм свойства сравнения. □

Нам потребуется следующее утверждение, позволяющее учитывать наряду с элементами из Z_X или F_X выделенный центральный элемент.

Лемма 5.39. Пусть группа G действует на связном графе X, и пусть $G = \langle B \rangle$ для некоторого $B \in \{Z_X, F_X\}$. Предположим, что существует центральный элемент $z \in Z(G)$, для которого $2\,\mathrm{scl}_X(z) \leqslant 1$. Для $g \in G$ положим

$$\lambda_{B,z}(g) := \min_{m \in \mathbb{Z}} \big(|m| + \lambda_B(z^{-m}g)\big).$$

Тогда функция $\lambda_{B,z}$ согласована с действием группы G на X, и для каждого $g \in G$ выполняется неравенство

$$2\ \mathrm{scl}_X(g) \leqslant \lambda_{B,z}(g).$$

В частности, если $\lambda_{B,z}$-длины всех G-простых геодезических путей в X не превосходят некоторой константы $c > 0$, то действие обладает свойством сравнения с константой c.

Доказательство. Сначала проверим, что функция $\lambda_{B,z}$ согласована с действием. Поскольку элемент z является центральным, а функция λ_B инвариантна относительно сопряжений, функция $\lambda_{B,z}$ также инвариантна относительно сопряжений. Далее пусть $g, h \in G$, и выберем числа $m, n \in \mathbb{Z}$, на которых достигаются минимумы в определениях величин $\lambda_{B,z}(g)$ и $\lambda_{B,z}(h)$. Используя центральность элемента z и субаддитивность функции λ_B, получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_{B,z}(gh) &\leqslant |m+n| + \lambda_B\big(z^{-(m+n)}gh\big) \\
&= |m+n| + \lambda_B\big((z^{-m}g)(z^{-n}h)\big) \\
&\leqslant |m| + |n| + \lambda_B(z^{-m}g) + \lambda_B(z^{-n}h) \\
&= \lambda_{B,z}(g) + \lambda_{B,z}(h).
\end{aligned}$$

Кроме того, $\lambda_{B,z}(1) = 0$. Наконец, если $g \in F_X$, то $g \in B$ и

$$\lambda_{B,z}(g) \leqslant \lambda_B(g) \leqslant 1.$$

Таким образом, функция $\lambda_{B,z}$ согласована с действием.

Докажем теперь неравенство $2\ \mathrm{scl}_X(g) \leqslant \lambda_{B,z}(g)$. Зафиксируем $g \in G$, выберем число $m \in \mathbb{Z}$, на котором достигается минимум в определении величины $\lambda_{B,z}(g)$, и положим $k := \lambda_B(z^{-m}g)$. Поскольку $B^\natural = B$, существуют элементы $b_1, \ldots, b_k \in B$, для

которых выполняется соотношение

$$g = z^m b_1 \cdots b_k.$$

Поскольку $2\,\mathrm{scl}_X(z) \leqslant 1$ и $B \subseteq Z_X$, имеем

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{scl}_X(g) &\leqslant 2\,|m|\,\mathrm{scl}_X(z) + 2\,\mathrm{scl}_X(b_1 \cdot \ldots \cdot b_k) \\ &\leqslant |m| + 2\,\mathrm{scl}_X(b_1) + \ldots + 2\,\mathrm{scl}_X(b_k) + k \\ &= |m| + k = \lambda_{B,z}(g). \end{aligned}$$

Предположим, наконец, что $\lambda_{B,z}$-длины всех G-простых геодезических путей не превосходят константы c. По предложению 5.38 для каждого $a \in G$ и каждого натурального n имеем

$$2\ \mathrm{scl}_X(a^n) \leqslant \lambda_{B,z}(a^n) \leqslant c \cdot \tau_X(a^n) + 1.$$

Используя однородность функции scl_X, деля на n и переходя к пределу, получаем

$$2\ \mathrm{scl}_X(a) \leqslant c \cdot \ell_X(a). \qquad \square$$

Теперь приведём достаточные условия свойства сравнения, которые будут применяться в дальнейшем. Для этого обратимся к индуцированному действию группы G на множестве рёбер графа X.

Выберем систему представителей $\{v_i\}_{i\in\Lambda}$ орбит действия группы G на множестве вершин графа X. Обозначим символом Ψ множество орбит направленных рёбер. Для каждого $e \in \Psi$ однозначно определены индексы $s(e), t(e) \in \Lambda$, для которых начало любого ребра из e принадлежит орбите $G(v_{s(e)})$, а конец — орбите $G(v_{t(e)})$.

Назовём *системой переходов*, согласованной с системой представителей $\{v_i\}_{i\in\Lambda}$, такое семейство $\{\varphi_e\}_{e\in\Psi}$ элементов группы G, что направленное ребро $(v_{s(e)}, \varphi_e(v_{t(e)}))$ принадлежит орбите e.

Обозначим символом Σ множество последовательностей орбит направленных рёбер, представленных всевозможными G-простыми геодезическими путями. Для последовательности $\sigma = (e_1, \ldots, e_m) \in \Sigma$ положим $|\sigma| := m$ и

$$\varphi_\sigma := \varphi_{e_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{e_m}.$$

Лемма 5.40. Пусть группа G действует на связном графе X, для этого действия выбрана система переходов $\{\varphi_e\}_{e\in\Psi}$, а функция $\lambda\colon G \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ согласована с действием. Предположим, что существует такая константа $c \geqslant 1$, что для каждой последовательности $\sigma \in \Sigma$ выполняется неравенство

$$\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant (c-1)|\sigma| + 1.$$

Тогда λ-длины всех G-простых геодезических путей не превосходят c. В частности, для каждого $a \in G$ имеем

$$\lambda(a) \leqslant c \cdot \tau_X(a) + 1.$$

Следовательно:

1. при $G = \langle Z_X \rangle$ и $\lambda = \lambda_Z$ действие обладает свойством сравнения в сильной форме с константой c;

2. при $G = \langle F_X \rangle$ и $\lambda = \lambda_F$ действие обладает свойством сравнения в сверхсильной форме с константой c;

3. в условиях леммы 5.39 при $\lambda = \lambda_{B,z}$ действие обладает свойством сравнения с константой c.

Кроме того, в первых двух случаях достаточно потребовать, чтобы для каждой последовательности $\sigma \in \Sigma$ элемент φ_σ принадлежал соответственно множеству Z_X или F_X; тогда можно взять $c = 1$.

Доказательство. Пусть имеется G-простой геодезический путь $x_0, x_1, \ldots, x_m$ в графе X. Для каждого $i \in \{0, \ldots, m\}$ выберем такой индекс $k_i \in \Lambda$, что $x_i \in G(v_{k_i})$. Поскольку концы G-простого пути принадлежат одной орбите, имеем $k_0 = k_m$.

Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ обозначим через e_i орбиту направленного ребра (x_{i-1}, x_i) и положим $\varphi_i := \varphi_{e_i}$. Тогда $\sigma := (e_1, \ldots, e_m) \in \Sigma$. Положим $u_0 := v_{k_0}$ и

$$u_i := (\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_i)(v_{k_i})$$

при $i \in \{1, \ldots, m\}$. По определению системы переходов для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ направленное ребро

$$(u_{i-1}, u_i) = (\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{i-1})(v_{k_{i-1}}, \varphi_i(v_{k_i}))$$

принадлежит орбите e_i. Кроме того, из равенства $k_0 = k_m$ следует, что $u_m = \varphi_\sigma(u_0)$.

Тем самым для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ существует такой элемент $\psi_i \in G$, что

$$\psi_i(u_{i-1}) = x_{i-1}, \qquad \psi_i(u_i) = x_i.$$

Для $i \in \{2, \ldots, m\}$ положим $a_i := \psi_i \psi_{i-1}^{-1}$. Тогда $a_i(x_{i-1}) = x_{i-1}$, откуда $a_i \in F_X$ и, следовательно, $\lambda(a_i) \leqslant 1$. При $m \geqslant 2$ положим

$$h := a_m a_{m-1} \ldots a_2 \cdot \psi_1 \varphi_\sigma \psi_1^{-1},$$

а при $m = 1$ положим $h := \psi_1 \varphi_\sigma \psi_1^{-1}$. Из определения элементов a_i следует равенство $a_m \ldots a_2 \cdot \psi_1 = \psi_m$, откуда $h = \psi_m \varphi_\sigma \psi_1^{-1}$ и

$$h(x_0) = \psi_m(\varphi_\sigma(u_0)) = \psi_m(u_m) = x_m.$$

Используя субаддитивность функции λ, её инвариантность относительно сопряже-

ний и неравенства $\lambda(a_i) \leqslant 1$, получаем

$$\lambda(h) \leqslant (m-1) + \lambda(\varphi_\sigma) \leqslant (m-1) + (c-1)m + 1 = cm.$$

Таким образом, λ-длина исходного пути не превосходит c. По предложению 5.38 отсюда следует неравенство

$$\lambda(a) \leqslant c \cdot \tau_X(a) + 1$$

для всех $a \in G$.

Первые два частных случая непосредственно следуют из определений сильной и сверхсильной форм свойства сравнения, а третий — из леммы 5.39. Наконец, если $\varphi_\sigma \in Z_X$ (соответственно $\varphi_\sigma \in F_X$) для каждой последовательности $\sigma \in \Sigma$, то $\lambda_Z(\varphi_\sigma) \leqslant 1$ (соответственно $\lambda_F(\varphi_\sigma) \leqslant 1$), поэтому соответствующее утверждение применимо с константой $c = 1$. □

Для согласованной с действием функции λ положим

$$K_\lambda := \sup_{e \in \Psi} \lambda(\varphi_e).$$

Следствие 5.41. Пусть группа G действует на связном графе X, для этого действия выбрана система переходов $\{\varphi_e\}_{e \in \Psi}$, а функция λ согласована с действием. Если $K_\lambda < \infty$, то для любого $a \in G$ выполняется неравенство

$$\lambda(a) \leqslant (K_\lambda + 1) \cdot \tau_X(a) + 1.$$

В частности:

1. если $G = \langle Z_X \rangle$ и при $\lambda = \lambda_Z$ имеем $K_\lambda < \infty$, то действие обладает свойством сравнения в сильной форме с константой $c = K_\lambda + 1$;
2. если $G = \langle F_X \rangle$ и при $\lambda = \lambda_F$ имеем $K_\lambda < \infty$, то действие обладает свойством сравнения в сверхсильной форме с константой $c = K_\lambda + 1$.

Если выполнены условия леммы 5.39 и $K_\lambda < \infty$ для $\lambda = \lambda_{B,z}$, то действие обладает свойством сравнения с константой $c = K_\lambda + 1$.

Доказательство. Пусть $\sigma = (e_1, \ldots, e_m) \in \Sigma$. По субаддитивности функции λ получаем

$$\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant \lambda(\varphi_{e_1}) + \ldots + \lambda(\varphi_{e_m}) \leqslant K_\lambda \, |m| = K_\lambda \, |\sigma| \leqslant K_\lambda |\sigma| + 1.$$

Остаётся применить лемму 5.40 с константой $c = K_\lambda + 1$. Частные случаи следуют из той же леммы и леммы 5.39. □

Теорема 5.42. Пусть группа G действует на связном графе X. Предположим, что число орбит рёбер графа X относительно действия группы G является конечным.

1. Если $G = \langle Z_X \rangle$, то действие обладает свойством сравнения в сильной форме.
2. Если $G = \langle F_X \rangle$, то действие обладает свойством сравнения в сверхсильной форме.

Доказательство. Выберем для действия систему переходов. Из конечности числа орбит рёбер следует конечность числа орбит направленных рёбер, поэтому множество Ψ конечно. Следовательно, в рассматриваемых случаях константы K_λ конечны. Остаётся применить следствие 5.41. □

5.5 Общая схема применения

В настоящем разделе свяжем с каждым изометрическим действием группы G на метрическом пространстве X ряд вопросов, в совокупности описывающих общую схему применения стабильной коммутаторной длины действия к задачам динамики, геометрии и топологии.

Задача сравнения

Требуется определить, обладает ли действие свойством сравнения

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X,$$

а также, по возможности, установить сильную или сверхсильную форму этого свойства и получить эффективные оценки константы сравнения.

Поскольку значения липшицевых квазиморфизмов дают нижние оценки расстояний и асимптотических чисел переноса, решение задачи сравнения позволяет использовать для тех же целей произвольные квазиморфизмы из V_X.

Для действий на связных графах предложение 5.38 и теорема 5.42 сводят проверку различных форм свойства сравнения к анализу орбит рёбер и G-простых геодезических путей.

Задача построения иерархических систем

Различные действия одной и той же группы могут отражать различные свойства её элементов. Это приводит к рассмотрению систем действий, связанных грубо эквивариантными грубо липшицевыми отображениями. Согласно леммам 3.11 и 5.23, каждая такая система задаёт иерархию асимптотических чисел переноса, иерархию пространств квазиморфизмов и иерархию соответствующих стабильных коммутаторных длин.

Возникает задача построения таких систем и описания того, как при переходе между уровнями изменяются соответствующие величины. Это позволяет выбирать действие в соответствии с той характеристикой элемента или связанного с ним объекта, которую требуется исследовать.

Для эквивариантных липшицевых отображений связных графов, отвечающих факторизации по действию нормальной подгруппы, первичные результаты описаны в замечании 5.24 и лемме 5.33.

Задача распознавания положительности

Для выявления качественных свойств элементов группы существенной задачей является описание элементов $a \in G$, для которых выполняются неравенства

$$\ell_X(a) > 0, \qquad \mathrm{scl}_X(a) > 0.$$

Условие $\mathrm{scl}_X(a) > 0$ влечёт локсодромичность элемента a; множество

$$\mathbb{A}(V_X) = \{g \in G \mid \mathrm{scl}_X(g) = 0\}$$

показывает ограничения подхода к оценке расстояний и чисел переноса на основе квазиморфизмов.

Для слабо вполне разрывных действий на гиперболических графах следствие 5.32 позволяет связать положительность функции scl_X с локсодромичностью и хиральностью. Для других действий возникает задача получения аналогичных критериев. В системах из нескольких действий подобные критерии позволяют установить, какие динамические типы различаются на каждом уровне иерархии.

Задача интерпретации положительности

Не менее важным является вопрос о содержательном смысле функций ℓ_X и scl_X. В качественной форме задача состоит в нахождении пороговых значений, превышение которых влечёт заданные свойства элемента группы или связанного с ним объекта. В количественной форме предполагается связать число переноса и стабильную коммутаторную длину с различными мерами динамической, геометрической и топологической сложности.

Такая интерпретация позволяет использовать квазиморфизмы, липшицевы относительно числа переноса, для распознавания качественных свойств и получения нижних оценок численных характеристик рассматриваемых объектов.

Задача построения липшицевых квазиморфизмов

Для эффективного применения рассматриваемой схемы одну из центральных ролей играет задача поиска вычислимых квазиморфизмов, липшицевых относительно числа переноса. Более широкой является задача поиска естественных представителей или образующих пространства V_X и определения его размерности.

Для действий на гиперболических графах общим источником квазиморфизмов из V_X служит конструкция Бествины–Фудживары; см. предложение 5.30.

Более систематическая постановка состоит в построении эффективно вычислимого проектора

$$Q(G) \to V_X.$$

При наличии свойства сравнения такой проектор позволяет получать вычислимые липшицевы квазиморфизмы из уже известных вычислимых квазиморфизмов группы G.

Для реализации рассматриваемой схемы требуется также проверять ряд вспомогательных условий. В частности, полезно описывать множество Z_X нелоксодромических элементов и его подмножество F_X элементов, имеющих конечную орбиту, и устанавливать равенства $G = \langle Z_X \rangle$ и $G = \langle F_X \rangle$. Первое из них обеспечивает, согласно следствию 5.21, конечность функции scl_X и существование экстремальных квазиморфизмов, а второе позволяет использовать длину λ_F и сверхсильную форму свойства сравнения.

Для основных действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ в дальнейшем будет решена значительная часть вышеописанных задач. В главе 6 исследуются задачи сравнения и построения иерархической системы, а в главе 7 положительность значений соответствующих чисел переноса и стабильных коммутаторных длин получает динамическую интерпретацию в терминах разложения Нильсена–Тёрстона. В главах 8 и 9 также устанавливаются взаимосвязи этих функций с геометрическими и топологическими свойствами и численными характеристиками пар «многообразие — зацепление». Наконец, в главе 10 для модельного случая $S = D_n^2$ исследуется структура пространства липшицевых квазиморфизмов, строятся проекторы на первые уровни иерархии и рассматривается ряд семейств эффективно вычислимых квазиморфизмов. Приложения этих результатов приведены в главе 11.

ГЛАВА 6 ТРЁХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА ДЕЙСТВИЙ ГРУППЫ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящей главе, если не оговорено иное, символ S обозначает неисключительную поверхность с ровно одной компонентой края ∂ и отмеченной точкой $x_* \in \partial$. Рассматриваются действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графах[1]

$$\mathcal{A}_\partial = \mathcal{A}_\partial(S), \qquad \mathcal{A}^\circ_\partial = \mathcal{A}^\circ_\partial(S), \qquad \mathcal{AC} = \mathcal{AC}(S), \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}(S).$$

С этими действиями связаны асимптотические числа переноса

$$\ell_\partial := \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}, \qquad \ell_\circ := \ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}, \qquad \ell_{\mathcal{AC}} := \ell_{\mathcal{AC}(S)}, \qquad \ell_{\mathcal{C}} := \ell_{\mathcal{C}(S)},$$

пространства однородных квазиморфизмов[2]

$$V_\partial := V_{\mathcal{A}_\partial(S)}, \qquad V_\circ := V_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}, \qquad V_{\mathcal{C}} := V_{\mathcal{C}(S)}, \qquad V_{\mathcal{AC}} := V_{\mathcal{AC}(S)}$$

и стабильные коммутаторные длины

$$\mathrm{scl}_\partial := \mathrm{scl}_{\mathcal{A}_\partial(S)}, \qquad \mathrm{scl}_\circ := \mathrm{scl}_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}, \qquad \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}} := \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}(S)}, \qquad \mathrm{scl}_{\mathcal{C}} := \mathrm{scl}_{\mathcal{C}(S)}.$$

Предложение 6.1. Естественные отображения

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}^\circ_\partial \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C}$$

индуцируют неравенства чисел переноса

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}} \leqslant \ell_{\mathcal{AC}} \leqslant \ell_\circ \leqslant \ell_\partial,$$

включения пространств квазиморфизмов

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{AC}} \subseteq V_\circ \subseteq V_\partial$$

и неравенства относительных стабильных коммутаторных длин

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}} = \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}} \leqslant \mathrm{scl}_\circ \leqslant \mathrm{scl}_\partial.$$

Доказательство. Первая цепочка неравенств следует из замечания 1.2, леммы 3.11 и следствия 3.14. Вторая и третья цепочки сводятся к лемме 5.23. □

В разделе 6.1 рассматривается первый уровень иерархической системы: исследуется пространство V_∂, его элементы и функции ℓ_∂ и scl_∂; устанавливается сравнимость,

[1] Определения этих графов см. в разделе 1.1.2.
[2] Определение пространств V_X и функций scl_X см. в разделе 5.3.

с точностью до мультипликативной константы, чисел переноса класса отображений и его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона; находится оптимальная константа сравнения числа переноса и стабильной коммутаторной длины.

В разделе 6.2 проводится аналогичное исследование для второго уровня системы.

В разделе 6.3 показывается, что в определённом смысле различие между первыми двумя уровнями описывается коэффициентом дробного скручивания Дена ω_∂.

В разделе 6.4 рассматривается третий уровень системы: исследуется пространство $V_\mathcal{C}$ и функции $\ell_\mathcal{C}$ и $\mathrm{scl}_\mathcal{C}$, а в модельном случае проколотого диска устанавливается свойство сравнения с равномерной константой сравнения.

Прежде чем переходить к исследованию первого уровня, отметим следующие свойства, общие для трёх уровней системы.

Лемма 6.2. Пусть $X \in \{\mathcal{A}_\partial, \mathcal{A}_\partial^\circ, \mathcal{AC}, \mathcal{C}\}$. Тогда для действия группы $G = \mathrm{Mod}(S)$ на X:

1. выполняются равенства $G = \langle F_X \rangle = \langle Z_X \rangle$;[3]
2. действие имеет конечное число орбит рёбер и, в частности, коограничено;
3. действие обладает свойством сравнения в сверхсильной форме.

Кроме того, действия на графах $\mathcal{A}_\partial^\circ$, $\mathcal{AC}$ и $\mathcal{C}$ имеют общий тип.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) сводятся к лемме 1.5. По теореме 5.42 из них следует утверждение (3). Оставшаяся часть следует из примеров 3.35 и 3.37. □

Следствие 6.3. Для $X \in \{\mathcal{A}_\partial, \mathcal{A}_\partial^\circ, \mathcal{AC}, \mathcal{C}\}$ функция scl_X принимает лишь конечные значения. Более того, соответствующий супремум достигается, и для любого элемента группы $G = \mathrm{Mod}(S)$ существует V_X-экстремальный квазиморфизм. Кроме того, дефект наделяет V_X структурой нормированного пространства.

Доказательство. Совместим лемму 6.2 и следствие 5.21. □

В частности, из утверждения (3) леммы 6.2 следуют сравнения с эффективными константами

$$\mathrm{scl}_\partial \lesssim \ell_\partial, \qquad \mathrm{scl}_\circ \lesssim \ell_\circ, \qquad \mathrm{scl}_\mathcal{C} \lesssim \ell_\mathcal{C}.$$

Замечание 6.4. Согласно следствию 5.41, для получения верхней оценки константы сравнения на каждом из трёх уровней достаточно выбрать представителей орбит вершин и построить подходящую систему переходов $\{\varphi_e\}_{e\in\Psi}$. Стандартный, но громоздкий комбинаторный анализ позволяет представить классы отображений φ_e, возникающие в доказательстве леммы 1.5, в виде произведений скручиваний Дена и полускручиваний, откуда можно получить явную такую оценку в терминах эйлеровой характеристики поверхности S. Доказательству существования явных равномерных констант сравнения посвящены теоремы 6.21, 6.35 и 6.45 ниже. ◊

[3] Напомним, что Z_X — множество нелоксодромических элементов и F_X — множество элементов, имеющих конечную орбиту.

6.1 Первый уровень: закреплённые граничные дуги

Напомним, что вершинами графа $\mathcal{A}_\partial$ дуг, закреплённых на компоненте ∂, являются изотопические классы дуг, у которых хотя бы один из концов совпадает с отмеченной точкой на компоненте края ∂, а две вершины смежны, если соответствующие изотопические классы имеют непересекающихся представителей.

Пример 6.5. Пусть $S = D^2_n$. При $n = 1$ граф $\mathcal{A}_\partial$ состоит из единственной вершины. При $n \geqslant 2$ граф $\mathcal{A}_\partial$ связен и имеет бесконечный диаметр[4]. ◊

6.1.1 Число переноса первого уровня

Напомним, что согласно предложению 4.25, для любого $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$|\omega_\partial(\varphi)| \leqslant \ell_\partial(\varphi).$$

Приведём пример, в котором щель в этой оценке является сколь угодно большой.

Пример 6.6. Пусть класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является псевдоаносовским. По лемме 1.18 существуют такие целые p и $q \neq 0$, что $\omega_\partial(\varphi) = p/q$. Положим

$$\psi := \varphi^q T_\partial^{-p}.$$

Тогда класс ψ является псевдоаносовским и $\omega_\partial(\psi^m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. В то же время, по лемме 3.6 имеем $\ell_{\mathcal{C}}(\psi) > 0$, откуда по предложению 6.1 получаем

$$\ell_\partial(\psi) \geqslant \ell_{\mathcal{C}}(\psi)/2 > 0.$$

Следовательно, последовательность

$$\ell_\partial(\psi^m) = |m| \cdot \ell_\partial(\psi)$$

стремится к бесконечности. ◊

Положим $\tau_\partial := \tau_{\mathcal{A}_\partial(S)}$.[5]

Замечание 6.7. Для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ равенство $\tau_\partial(\varphi) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда φ расщепим. В этом случае $\ell_\partial(\varphi) = 0$. ◊

Следствие 6.8. Пусть поверхность S неисключительна или $S = D^2_2$. Для любого периодического класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ с параметром p/q имеем

$$\ell_\partial(\varphi) = \left|\frac{p}{q}\right|.$$

[4] Бесконечность диаметра также следует из предложения 4.25.
[5] Определения числа переноса τ_X см. в разделе 3.1.

Доказательство. Сначала покажем, что $\ell_\partial(T_\partial) = 1$. Для любой вершины $\alpha \in \mathcal{A}_\partial$ имеем $d(\alpha, T_\partial(\alpha)) \leqslant 1$, откуда

$$\ell_\partial(T_\partial) \leqslant \tau_\partial(T_\partial) \leqslant 1.$$

С другой стороны, по лемме 1.15 имеем $\omega_\partial(T_\partial) = 1$. По предложению 4.25 получаем

$$1 = |\omega_\partial(T_\partial)| \leqslant \ell_\partial(T_\partial).$$

Объединяя два неравенства, получаем искомое равенство.

Пусть целые числа $p, q \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют соотношению $\varphi^q = T_\partial^p$. По абсолютной однородности функции ℓ_∂ получаем

$$|q|\,\ell_\partial(\varphi) = \ell_\partial(\varphi^q) = \ell_\partial(T_\partial^p) = |p|\,\ell_\partial(T_\partial) = |p|,$$

откуда следует требуемое соотношение. □

Число переноса внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона

Покажем, что число переноса класса отображений и число переноса внешней компоненты его разложения Нильсена–Тёрстона[6], рассматриваемые как функции на группе $\mathrm{Mod}(S)$, сравнимы с точностью до мультипликативной константы:

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \ell_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Лемма 6.9. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}(\varphi).$$

Доказательство. Для периодического или псевдоаносовского класса φ имеем $E' = S$ и $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi$, поэтому утверждение выполняется.

Предположим, что класс φ является приводимым и непериодическим. Следуя лемме 3.11, построим 1-липшицево отображение

$$T\colon \mathcal{A}_\partial(S) \to \mathcal{A}_\partial(E').$$

Возьмём произвольную вершину $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(S)$. Выберем представителя соответствующего изотопического класса α так, чтобы число его точек пересечения с мультикривой $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\varphi)$ было наименьшим возможным; обозначим его тем же символом. Рассмотрим компоненты связности пересечения $\alpha \cap E$, инцидентные точке x_*. Их образы при отображении $E \to E'$ являются существенными граничными дугами. Если оба конца дуги α совпадают с точкой x_*, таким образом могут быть получены две дуги; во всех остальных случаях так получается ровно одна дуга; ср. [240] и [241, Section 4]. Изото-

[6] См. определение в разделе 1.2.2.

пические классы полученных дуг зависят только от изотопического класса α, а любые две из них имеют непересекающихся представителей.

Кроме того, если вершина $\beta \in \mathcal{A}_\partial(S)$ смежна с вершиной α, то представители соответствующих изотопических классов можно выбрать так, чтобы число точек пересечения мультидуги $\alpha \cup \beta$ с мультикривой C было наименьшим возможным; ср. [117, Section 1.2.7]. При таком выборе компоненты связности пересечений $\alpha \cap E$ и $\beta \cap E$, инцидентные точке x_*, не пересекаются, а значит, не пересекаются и их образы на E'.

Обозначим множество вершин графа $A_\partial(E')$, получающихся из вершины α вышеописанной конструкцией, через $P(\alpha)$. Множество $P(\alpha)$ непусто и

$$\operatorname{diam} P(\alpha) \leqslant 1.$$

Положим $T(\alpha)$ равным произвольному элементу множества $P(\alpha)$.

Если вершины $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\partial(S)$ равны или смежны, то каждая вершина из $P(\alpha)$ равна или смежна с каждой вершиной из $P(\beta)$. Следовательно, отображение T является 1-липшицевым.

По построению множеств $P(\alpha)$ для каждой вершины $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(S)$ и элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ выполняется равенство

$$P\big(\psi(\alpha)\big) = \rho(\psi)\big(P(\alpha)\big),$$

где через $\rho\colon \mathrm{Stab}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Mod}(E')$ обозначается естественный гомоморфизм, индуцированный отображением $E \to E'$. Поскольку $\operatorname{diam} P(\alpha) \leqslant 1$, отображение T является 1-грубо эквивариантным относительно действия группы $\mathrm{Stab}(\mathrm{C})$. Следовательно, по лемме 3.11 для каждого $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ получаем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\rho(\psi)) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}(\psi).$$

Подставляя $\psi = \varphi$ и учитывая, что $\rho(\varphi) = \varphi_{\mathrm{ext}}$, получаем требуемое неравенство. □

Лемма 6.10. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Доказательство. Для периодического или псевдоаносовского класса φ имеем $E' = S$ и $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi$, поэтому утверждение выполняется.

Предположим, что класс φ является приводимым и непериодическим. Следуя лемме 3.11, построим 2-липшицево отображение

$$V\colon \mathcal{A}_\partial(E') \to \mathcal{A}_\partial(S),$$

эквивариантное относительно группы $\mathrm{Stab}(\mathrm{C})$.

Возьмём произвольную вершину $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(E')$; выберем представителя соответствующего изотопического класса и обозначим его тем же символом. Если оба конца дуги α

совпадают или её конец, отличный от x_*, не является одним из новых проколов, полученных стягиванием компонент края поверхности E, то положим $V(\alpha)$ равным изотопическому классу прообраза дуги α при отображении $E \to E'$.

Пусть теперь второй конец дуги α совпадает с одним из новых проколов z_B, полученным стягиванием некоторой компоненты края $B \subseteq \partial E$. Выберем вложенный отрезок $\overline{\alpha} \subset E$, соединяющий точку x_* с компонентой B, образ которого при отображении $E \to E'$ изотопен дуге α. Обозначим символом $C_B \subseteq \mathrm{C}$ компоненту внешней инвариантной мультикривой, соответствующую компоненте B. Выберем регулярную окрестность $N_\alpha \subset S$ объединения $C_B \cup \overline{\alpha}$. Граница окрестности N_α содержит дугу с концами на компоненте ∂. Стягивая отрезок $N_\alpha \cap \partial$ в отмеченную точку на крае, получаем граничную дугу $\widehat{\alpha} \subset S$ с совпадающими концами. Она существенна, поскольку кривая C_B существенна. Положим $V(\alpha)$ равным изотопическому классу дуги $\widehat{\alpha}$.

Покажем, что отображение V определено корректно. Неоднозначность выбора дуги $\overline{\alpha}$ отвечает изотопии и применению степени скручивания Дена вдоль кривой C_B. Дуга $\widehat{\alpha}$ имеет представителя, не пересекающего кривую C_B, поэтому её изотопический класс при таком скручивании не изменяется. Неоднозначность выбора регулярной окрестности также не меняет изотопический класс полученной дуги. Для дуг, второй конец которых не является новым проколом, применяется аналогичное рассуждение. Следовательно, отображение V определено корректно.

Покажем, что отображение V является 2-липшицевым. Пусть дуги α и β не пересекаются и задают смежные вершины графа $\mathcal{A}_\partial(E')$. Проверим, что выполняется неравенство

$$d_{\mathcal{A}_\partial(S)}\big(V(\alpha), V(\beta)\big) \leqslant 2.$$

Сначала предположим, что второй конец хотя бы одной из дуг α или β не является новым проколом. Тогда соответствующие представители на E можно выбрать непересекающимися, а регулярную окрестность, используемую при построении образа второй дуги, — достаточно малой, чтобы она не пересекала первого представителя. Поэтому вершины $V(\alpha)$ и $V(\beta)$ равны или смежны.

Предположим теперь, что концы обеих дуг, отличные от точки x_*, являются новыми проколами z_B и $z_{B'}$. Сначала рассмотрим случай, при котором $z_B \neq z_{B'}$, то есть $B \neq B'$.

Если $C_B \neq C_{B'}$, то соответствующие вложенные отрезки $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ можно выбрать непересекающимися. Поскольку кривые C_B и $C_{B'}$ также не пересекаются, регулярные окрестности в определении изотопических классов $V(\alpha)$ и $V(\beta)$ можно выбрать так, что полученные дуги $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ имеют непересекающихся представителей. Значит, вершины $V(\alpha)$ и $V(\beta)$ равны или смежны.

Пусть теперь $C := C_B = C_{B'}$. Поскольку $B \neq B'$, компоненты B и B' являются двумя граничными копиями одной и той же кривой C, возникающими в результате разрезания поверхности S по C. Выберем окрестность $A \cong C \times [-1, 1]$ кривой C так, чтобы компонентам B и B' отвечали различные стороны этой окрестности. Вложенные отрезки $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ можно выбрать так, чтобы они подходили к C соответственно с этих двух

сторон. Тогда регулярные окрестности объединений $C \cup \alpha$ и $C \cup \beta$ можно выбрать так, чтобы соответствующие дуги $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ проходили по разным сторонам окрестности A и не пересекались. Значит, вершины $V(\alpha)$ и $V(\beta)$ равны или смежны.

Остаётся рассмотреть случай, при котором $z_B = z_{B'}$; тогда $B = B'$. Если дуги α и β свободно изотопны, то $\beta = T_\partial^\varepsilon(\alpha)$ для некоторого $\varepsilon \in \{1, -1\}$. По построению отображение V коммутирует со скручиванием вдоль компоненты ∂, поэтому

$$V(\beta) = T_\partial^\varepsilon(V(\alpha)).$$

Следовательно, вершины $V(\alpha)$ и $V(\beta)$ равны или смежны.

Наконец, если дуги α и β не являются свободно изотопными, то на E' имеется существенная граничная дуга γ с обоими концами в точке x_*, не пересекающая ни дугу α, ни дугу β. По уже рассмотренным случаям вершина $V(\gamma)$ совпадает или смежна с вершиной $V(\alpha)$, а также совпадает или смежна с вершиной $V(\beta)$, откуда

$$d_{\mathcal{A}_\partial(S)}\big(V(\alpha), V(\beta)\big) \leqslant 2.$$

Таким образом, отображение V является 2-липшицевым.

По построению этого отображения для каждой вершины $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(E')$ и элемента $\psi \in \mathrm{Stab(C)}$ выполняется равенство[7]

$$V\big(\rho(\psi)(\alpha)\big) = \psi\big(V(\alpha)\big),$$

где через $\rho\colon \mathrm{Stab(C)} \to \mathrm{Mod}(E')$ обозначается естественный гомоморфизм, индуцированный отображением $E \to E'$. Таким образом, 2-липшицево отображение V является эквивариантным относительно действия группы Stab(C). Следовательно, по лемме 3.11 для каждого элемента $\psi \in \mathrm{Stab(C)}$ имеем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}(\psi) \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\rho(\psi)).$$

Подставляя $\psi = \varphi$ и учитывая, что $\rho(\varphi) = \varphi_{\mathrm{ext}}$, получаем требуемое неравенство. □

Предложение 6.11. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются неравенства

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Доказательство. Совместим леммы 6.9 и 6.10. □

Напомним, что внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона является либо периодической, либо псевдоаносовской. Следующий результат показывает, что в пе-

[7] Действительно, выберем гомеоморфизм $h\colon S \to S$, представляющий класс ψ, сохраняющий мультикривую $\mathrm{C}(\varphi)$ и внешнюю область E; тогда он переводит компоненту C_B в компоненту $h(C_B)$, вложенный отрезок $\overline{\alpha}$ — во вложенный отрезок $h(\overline{\alpha})$, а регулярную окрестность их объединения — в регулярную окрестность объединения $h(C_B) \cup h(\overline{\alpha})$.

риодическом случае число переноса ℓ_∂ сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с абсолютным значением соответствующего параметра.

Следствие 6.12. Если внешняя компонента φ_{ext} класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является периодической с параметром p/q, то

$$\left|\frac{p}{q}\right| \leqslant \ell_\partial(\varphi) \leqslant 2\left|\frac{p}{q}\right|.$$

Доказательство. Если класс φ является периодическим, соотношения сводятся к следствию 6.8. В общем случае достаточно объединить это рассуждение с предложением 6.11. □

6.1.2 Стабильная коммутаторная длина первого уровня

Назовём

$$V_\partial = \{f \in Q(\mathrm{Mod}(S)) \mid f(Z_{\mathcal{A}_\partial}) = 0\}$$

пространством *липшицевых квазиморфизмов первого уровня* (или квазиморфизмов, *липшицевых на первом уровне*). Соответствующую относительную стабильную коммутаторную длину

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_\partial \\ D(f) \leqslant 1}} |f(\varphi)|$$

назовём *стабильной коммутаторной длиной первого уровня*.

Согласно лемме 6.2, действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на $\mathcal{A}_\partial$ обладает свойством сравнения в сверхсильной форме. В частности, функция scl_∂ принимает лишь конечные значения, а определяющий её супремум достигается.

Лемма 6.13. Для любого однородного квазиморфизма $f \in Q(\mathrm{Mod}(S))$ следующие условия эквивалентны:

1. f является липшицевым на первом уровне, то есть $f \in V_\partial$;
2. f обращается в нуль на всех расщепимых классах отображений.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 5.35, поскольку для поверхностей с единственной компонентой края класс отображений расщепим тогда и только тогда, когда он сохраняет некоторую вершину графа $\mathcal{A}_\partial$. □

Следствие 6.14. Если класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ ахирален или расщепим, то $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 5.11 и 6.13. □

Далее вычислим значение функции scl_∂ на периодических классах отображений. Начнём с нижней оценки дефекта квазиморфизмов из V_∂, дающей верхнюю оценку значения $\mathrm{scl}_\partial(T_\partial)$. Следующее рассуждение предложено А. Малютиным.

Лемма 6.15 [1, Предложение 4.5.11]**.** Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого квазиморфизма $f \in V_\partial$ выполняется неравенство

$$|f(T_\partial)| \leqslant D(f).$$

Доказательство. Поскольку $\chi(S) \leqslant -2$, применимо «соотношение фонаря»: согласно [117, Proposition 5.1], на S найдутся кривые x, y, z, b_2, b_3, b_4, для которых

$$T_x T_y T_z = T_\partial T_{b_2} T_{b_3} T_{b_4},$$

причём классы T_x, T_y и $T_{b_2} T_{b_3} T_{b_4} T_z^{-1}$ сохраняют некоторые существенные граничные дуги; в частности, они являются расщепимыми. Используя лемму 6.13 и то, что скручивание Дена T_∂ является центральным, получаем

$$f(T_x T_y) = f(T_\partial T_{b_2} T_{b_3} T_{b_4} T_z^{-1}) = f(T_\partial) + f(T_{b_2} T_{b_3} T_{b_4} T_z^{-1}) = f(T_\partial).$$

Следовательно,

$$|f(T_\partial)| = |f(T_x T_y) - f(T_x) - f(T_y)| \leqslant D(f). \qquad \square$$

Теперь установим нижнюю оценку значения $\mathrm{scl}_\partial(T_\partial)$, используя коэффициент дробного скручивания Дена ω_∂. Из предложения 4.25 получается следующий результат.

Следствие 6.16. Мы имеем: $\omega_\partial \in V_\partial$. $\square$

Замечание 6.17. Имеется альтернативный подход к доказательству следствия 6.16. По лемме 1.14 коэффициент ω_∂ обращается в нуль на каждом классе отображений, сохраняющем некоторую вершину графа $\mathcal{A}_\partial$. Поскольку действие на этом графе обладает свойством сравнения в сверхсильной форме, принадлежность $\omega_\partial \in V_\partial$ теперь следует по лемме 6.13. $\lozenge$

Следствие 6.18. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого периодического класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ с параметром p/q имеем

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \left|\frac{p}{q}\right|.$$

Доказательство. Согласно следствию 6.16, имеем $\omega_\partial \in V_\partial$. Применяя следствие 1.17, получаем

$$\left|\frac{p}{q}\right| = |\omega_\partial(\varphi)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(\omega_\partial),$$

откуда

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \geqslant \left|\frac{p}{q}\right|.$$

Осталось показать обратное неравенство.

Согласно лемме 6.15, имеем $2\mathrm{scl}_\partial(T_\partial) \leqslant 1$. Следовательно, $2\,\mathrm{scl}_\partial(T_\partial) = 1$.

Пусть целые числа $p, q \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют соотношению $\varphi^q = T_\partial^p$. По абсолютной однородности функции scl_∂ получаем

$$2|q|\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi^q) = 2\,\mathrm{scl}_\partial(T_\partial^p) = |p|,$$

откуда следует требуемое соотношение. □

Этот результат будет расширен в главе 7; см. следствие 7.13.

6.1.3 Оптимальная константа сравнения для первого уровня

Установим сравнение $\mathrm{scl}_\partial \lesssim \ell_\partial$ с оптимальной константой $c = 1$. Начнём со вспомогательных результатов о действии группы $G := \mathrm{Mod}(S)$ на графе $X := \mathcal{NA}_\partial$ неразделяющих граничных дуг[8].

Поскольку топологический тип неразделяющей граничной дуги однозначно определяется тем, совпадают ли её концы, вершины графа X разбиваются не более чем на две орбиты относительно действия группы G: множество L дуг с совпадающими концами и множество R дуг с несовпадающими концами.

Лемма 6.19. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$.

1. Для любых смежных вершин $\alpha, \beta \in L$ существует расщепимый класс $\psi \in G$, для которого $\psi(\alpha) = \beta$.

2. Для любых смежных вершин $\alpha, \beta \in R$ существует класс $\psi \in G$, для которого $\psi(\alpha) = \beta$, причём либо класс ψ расщепим, либо $\psi = T_\partial^{\pm 1}$.

3. Если множества L и R непусты, то для любой вершины $\alpha \in L$ действие её стабилизатора $\mathrm{Stab}(\alpha) \subseteq G$ на множестве вершин из R, смежных с вершиной α, имеет не более двух орбит. Если таких орбит ровно две, в первой из них найдётся вершина, смежная некоторой вершине из второй орбиты; если такая орбита ровно одна, она содержит пару смежных вершин.

Доказательство. Пусть вершины $\alpha, \beta \in L$ смежны. Выберем непересекающихся представителей соответствующих изотопических классов и обозначим их теми же символами. Выберем малую регулярную окрестность N объединения $\partial S \cup \alpha \cup \beta$, не содержащую проколов.

Предположим сначала, что концы дуг α и β чередуются в точке x_*, то есть при обходе малой полуокружности с центром x_* эти дуги встречаются поочерёдно. В этом случае поверхность N имеет род один и две компоненты края: компоненту ∂ и некоторую компоненту c, лежащую во внутренности поверхности S.

Выберем на поверхности N простую замкнутую кривую d, полученную из объединения $\alpha \cup \beta$ разрешением особой точки и малой изотопией так, чтобы кривая d пересекала каждую из дуг α и β ровно один раз. Тогда для некоторого $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ выполняется соотношение $T_d^\varepsilon(\alpha) = \beta$; см. [117, Figure 3.3].

[8] Определение этого графа см. в разделе 1.1.2.

Выберем также граничную дугу $\gamma \subset N$ с обоими концами в точке x_*, не пересекающую кривую d и отделяющую компоненту края c от кривой d. Покажем, что дуга γ существенна на S. Одна из компонент дополнения дуги γ содержит кривую d и потому не является диском. Если бы другая компонента была диском, то поверхность $S \setminus \operatorname{int} N$ также была бы диском, откуда следовало бы равенство $S = \Sigma_{1,1}$, что исключено предположением леммы. Следовательно, дуга γ является существенной.

Класс T_d^ε сохраняет изотопический класс дуги γ, поэтому он расщепим. В этом случае можно положить $\psi := T_d^\varepsilon$.

Предположим теперь, что концы дуг α и β не чередуются в точке x_*. Тогда поверхность N имеет род нуль и четыре компоненты края. Обозначим три компоненты, отличные от ∂, символами c_1, c_2, c_3 так, чтобы дуга α отделяла c_1 от $c_2 \cup c_3$, а дуга β отделяла c_3 от $c_1 \cup c_2$.

Положим $C := \operatorname{cl}(S \setminus N)$. Покажем, что компоненты края c_1 и c_3 инцидентны одной и той же компоненте связности поверхности C. Предположим обратное. Поскольку дуга α является неразделяющей, компоненты c_1 и c_2 инцидентны одной и той же компоненте связности поверхности C. Аналогично, поскольку дуга β является неразделяющей, некоторая компонента связности поверхности C инцидентна кривым c_3 и c_2. Это противоречит тому, что компоненте c_2 инцидентна единственная компонента связности поверхности C. Обозначим через C_0 компоненту связности поверхности C, инцидентную компонентам края c_1 и c_3.

Выберем в C_0 простую дугу δ, соединяющую компоненту c_1 с компонентой c_3 и не проходящую через проколы. В поверхности N выберем непересекающиеся дуги ρ_1 и ρ_3, соединяющие точку x_* соответственно с компонентами края c_1 и c_3. Объединение

$$\rho_1 \cup \delta \cup \rho_3$$

задаёт некоторую граничную дугу γ на S, оба конца которой совпадают с точкой x_*.

Дуга γ является неразделяющей. Действительно, результат разрезания поверхности N по объединению $\rho_1 \cup \rho_3$ является связным, поскольку каждая из дуг ρ_i соединяет различные компоненты края. По той же причине поверхность, полученная из C_0 разрезанием по δ, связна. После обратной склейки вдоль оставшихся компонент края получаем, что результат разрезания поверхности S по дуге γ также связен.

Выберем гомеоморфизм поверхности N, неподвижный на ∂, меняющий местами компоненты края c_1 и c_3, меняющий местами дуги ρ_1 и ρ_3, сохраняющий компоненту края c_2 и переводящий дугу α в дугу β. С другой стороны, в регулярной окрестности объединения $c_1 \cup \delta \cup c_3 \subset C_0$ выберем гомеоморфизм, сохраняющий дугу δ и меняющий местами кривые c_1 и c_3, и продолжим его тождественно на остальную часть поверхности S. Изменяя построенные гомеоморфизмы в воротниках компонент края c_1 и c_3, можно считать, что их сужения на эти компоненты совпадают. В результате склейки получаем класс $\psi \in G$, для которого $\psi(\alpha) = \beta$ и $\psi(\gamma) = \gamma$. Поскольку граничная дуга γ является существенной, класс ψ расщепим. Утверждение (1) доказано.

Перейдём к доказательству утверждения (2). Пусть $\alpha, \beta \in R$ — смежные вершины; выберем непересекающихся представителей соответствующих изотопических классов и обозначим их теми же символами. Тогда каждый из них соединяет точку x_* с некоторым проколом.

Предположим сначала, что эти проколы различны. Обозначим символом δ соединяющую их дугу, полученную из объединения $\alpha \cup \beta$ дуг α и β в результате выталкивания их общего граничного конца во внутренность поверхности. Тогда полускручивание вдоль дуги δ или обратное к нему переводит дугу α в дугу β. Поскольку поверхность S является неисключительной, класс ψ, отвечающий такому полускручиванию, расщепим.

Пусть теперь проколы, являющиеся концами дуг α и β, совпадают. Если эти дуги свободно изотопны, то $\beta = T_\partial^\varepsilon(\alpha)$ для некоторого $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Поэтому можно взять $\psi = T_\partial^\varepsilon$.

Предположим, что дуги α и β не являются свободно изотопными. Вытолкнув общий конец x_* дуг α и β во внутренность поверхности, получим простую петлю δ с базовой точкой в их общем конце, являющемся проколом. Тогда дуги α и β связаны так называемым «отображением протаскивания» (англ. push map) вдоль простой петли δ; см. [117, Section 4.2.2]. Поскольку дуги α и β не являются свободно изотопными, в компоненте связности дополнения регулярной окрестности петли δ, инцидентной компоненте края ∂, можно выбрать существенную граничную дугу. Отображение протаскивания сохраняет её изотопический класс и, следовательно, является расщепимым.

Остаётся доказать утверждение (3). Предположим, что множества L и R непусты, выберем вершину $\alpha \in L$ и выберем её представителя, обозначаемого тем же символом. Обозначим символом S_α поверхность, полученную из S разрезанием по дуге α. Точке x_* отвечают две отмеченные точки $x_*^+, x_*^- \in \partial S_\alpha$, соответствующие двум сторонам дуги α.

Пусть вершина $\beta \in R$ смежна с вершиной α. Выберем представителя вершины β; его прообраз при отображении $S_\alpha \to S$ соединяет некоторый прокол с одной из точек x_*^+ или x_*^-. Для фиксированной точки x_*^ε, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, все такие дуги принадлежат одной орбите при действии стабилизатора $\mathrm{Stab}(\alpha)$ вершины α. Действительно, результат разрезания поверхности S_α по любой такой дуге является связным, поэтому существует гомеоморфизм этой поверхности, переводящий одну такую дугу в другую. Он индуцирует гомеоморфизм поверхности S, представляющий элемент из $\mathrm{Stab}(\alpha)$, переводящий одну дугу в другую.

Таким образом, действие стабилизатора $\mathrm{Stab}(\alpha)$ имеет не более двух орбит на множестве вершин из R, смежных с вершиной α; эти орбиты соответствуют точкам x_*^+ и x_*^-.

Предположим, что имеется ровно две такие орбиты. Выберем некоторый прокол z поверхности S_α; он существует, поскольку множество R непусто. Выберем на поверхности S_α непересекающиеся дуги от точек x_*^+ и x_*^- к проколу z. Их образы при отображении $S_\alpha \to S$ задают вершины из R, принадлежащие двум различным орбитам при действии стабилизатора $\mathrm{Stab}(\alpha)$; эти вершины смежны друг с другом и смежны с

вершиной α. $\square$

Далее применим результаты раздела 5.4. Положим

$$B := Z_X, \qquad z := T_\partial, \qquad \lambda := \lambda_{B,z}.$$

По леммам 3.17 и 3.11 имеем $Z_{\mathcal{A}_\partial} = Z_{\mathcal{N}\mathcal{A}_\partial} = B$. В частности, $G = \langle B \rangle$ по лемме 6.2. Также отметим, что $\lambda(b) \leqslant 1$ для каждого $b \in B \cup \{z, z^{-1}\}$ и что $\lambda(g) = \lambda(g^{-1})$ для каждого $g \in G$.

Лемма 6.20. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для действия группы G на графе X можно выбрать такую систему переходов $\{\varphi_e\}_{e \in \Psi}$, что $\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$.

Доказательство. Начнём с выбора представителей множеств L и R. Если множество L непусто, выберем вершину $v_L \in L$ произвольно. Если множество L пусто, а множество R — непусто, выберем вершину $v_R \in R$ произвольно. Если оба множества непусты, по утверждению (3) леммы 6.19 для выбранной вершины v_L существуют смежные с ней и друг с другом вершины $v_R^+, v_R^- \in R$, чьи образы под действием подгруппы $\mathrm{Stab}(v_L)$ покрывают всё множество вершин из R, смежных с вершиной v_L. Положим $v_R := v_R^+$.

Перейдём к построению системы $\{\varphi_e\}_{e \in \Psi}$. Пусть орбита e направленных рёбер относится к типу $L{-}L$. Тогда она содержит ребро (v_L, w) для некоторой вершины $w \in L$. По утверждению (1) леммы 6.19 существует такой класс $\varphi_e \in B$, что $\varphi_e(v_L) = w$. Тогда

$$\big(v_L, \varphi_e(v_L)\big) \in e, \qquad \lambda(\varphi_e) \leqslant 1.$$

Пусть теперь орбита e направленных рёбер относится к типу $R{-}R$. Тогда она содержит ребро (v_R, w) для некоторой вершины $w \in R$. По утверждению (2) леммы 6.19 существует такой класс $\varphi_e \in B \cup \{z, z^{-1}\}$, что $\varphi_e(v_R) = w$. Тогда

$$\big(v_R, \varphi_e(v_R)\big) \in e, \qquad \lambda(\varphi_e) \leqslant 1.$$

Если имеется ровно одна орбита e_+ направленных рёбер из L в R, то $(v_L, v_R) \in e_+$, и можно положить $\varphi_{e_+} := 1$.

Пусть теперь имеется ровно две орбиты направленных рёбер из L в R. Обозначим их символами e_+ и e_- так, что $(v_L, v_R^+) \in e_+$ и $(v_L, v_R^-) \in e_-$. Поскольку $v_R = v_R^+$, можно положить $\varphi_{e_+} := 1$. Вершины v_R^+ и v_R^- смежны, поэтому по утверждению (2) леммы 6.19 существует класс $\eta \in G$, для которого

$$\eta \in B \cup \{z, z^{-1}\}, \qquad \eta(v_R^+) = v_R^-.$$

Положим $\varphi_{e_-} := \eta$. Тогда

$$\big(v_L, \varphi_{e_-}(v_R)\big) \in e_-, \qquad \lambda(\varphi_{e_-}) \leqslant 1.$$

Наконец, для орбит e направленных рёбер из R в L положим $\varphi_e := \varphi_{\overline{e}}^{-1}$, где символ $\overline{e}$ обозначает орбиту направленного ребра, полученного из некоторого направленного ребра, принадлежащего орбите e, обращением направления. Это определение корректно, поскольку если $(v_L, \varphi_e(v_R)) \in e$, то $(v_R, \varphi_e^{-1}(v_L)) \in \overline{e}$.

Остаётся показать, что для всех $\sigma \in \Sigma$ выполняется неравенство $\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant 1$.

Выберем произвольную последовательность $\sigma = (e_1, \dots, e_r)$ орбит направленных рёбер, представленную некоторым G-простым геодезическим путём. Поскольку каждый G-простой геодезический путь в X имеет длину не более 2, выполняется неравенство $r \leqslant 2$.

Если $r = 1$, то оба конца ребра e_1 лежат в одной орбите вершин. Следовательно, это ребро имеет тип $L{-}L$ или $R{-}R$. По построению $\lambda(\varphi_\sigma) = \lambda(\varphi_{e_1}) \leqslant 1$.

Пусть теперь $r = 2$. Тогда путь имеет тип $L{-}R{-}L$ или $R{-}L{-}R$. Если имеется ровно одна орбита рёбер из L в R, то по построению имеем $\varphi_\sigma = 1$. Если таких орбит ровно две, то $\varphi_{e_+} = 1$ и $\varphi_{e_-} = \eta$. Для некоторых $i, j \in \{+, -\}$ имеем соответственно $\varphi_\sigma = \varphi_{e_i}\varphi_{e_j}^{-1}$ в случае пути типа $L{-}R{-}L$, либо $\varphi_\sigma = \varphi_{e_i}^{-1}\varphi_{e_j}$ в случае пути типа $R{-}L{-}R$. В обоих случаях получаем

$$\varphi_\sigma \in \{1, \eta, \eta^{-1}\}.$$

Поскольку

$$\lambda(\eta^{-1}) = \lambda(\eta) \leqslant 1,$$

получаем $\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant 1$. Лемма доказана. □

Теорема 6.21. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \ell_\partial(\varphi).$$

Доказательство. По лемме 3.17 действие группы $G := \mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}_\partial$ эквивалентно её действию на графе $X := \mathcal{N}\mathcal{A}_\partial$ неразделяющих граничных дуг, причём $\ell_X = \ell_\partial$. Кроме того, по лемме 5.23 имеем $\mathrm{scl}_X = \mathrm{scl}_\partial$. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$2\,\mathrm{scl}_X(\varphi) \leqslant \ell_X(\varphi).$$

По лемме 6.2 выполняется равенство $G = \langle B \rangle$. Элемент z является центральным, и согласно следствию 6.18, имеем $2\,\mathrm{scl}_\partial(z) = 1 \leqslant 1$. По лемме 5.39 функция λ согласована с действием группы G на X. По лемме 6.20 существует такая система переходов $\{\varphi_e\}_{e \in \Psi}$, что $\lambda(\varphi_\sigma) \leqslant 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Применяя утверждение (3) леммы 5.40 с константой $c = 1$, получаем искомое неравенство. □

Замечание 6.22. Поскольку $2\,\mathrm{scl}_\partial(T_\partial) = \ell_\partial(T_\partial) = 1$, константа сравнения $c = 1$ является оптимальной. ◊

Замечание 6.23. Щель в оценке $2\,\mathrm{scl}_\partial \leqslant \ell_\partial$ может быть сколь угодно большой; ср. пример 6.47 ниже. ◊

6.2 Второй уровень: скользящие граничные дуги

Напомним, что вершинами графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$ дуг, инцидентных компоненте ∂, являются классы свободной изотопии дуг, у которых хотя бы один из концов лежит на крае, а две вершины смежны, если соответствующие классы имеют непересекающихся представителей.

Пример 6.24. Пусть $S = D^2_n$. При $n = 1$ граф $\mathcal{A}^\circ_\partial$ состоит из единственной вершины; при $n = 2$ он конечен; согласно [80, Example 2.6.2], при $n = 3$ он связен и квазиизометричен графу Фарея. ◊

Переход от первого уровня ко второму можно интерпретировать как факторизацию по действию скручивания Дена вдоль компоненты края ∂: по лемме 3.16 действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ эквивалентно её действию на фактор-графе $\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle$.

6.2.1 Число переноса второго уровня

Положим $\tau_\circ := \tau_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}$.

Лемма 6.25. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$.

1. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\tau_\circ(\varphi \cdot T^m_\partial) = \tau_\circ(\varphi), \qquad \ell_\circ(\varphi \cdot T^m_\partial) = \ell_\circ(\varphi).$$

2. Если внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса φ является периодической, то $\ell_\circ(\varphi) = 0$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из того, что классы φ и $\varphi \cdot T^m_\partial$ индуцируют одну и ту же изометрию графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$. Утверждение (2) следует из леммы 3.7. □

Замечание 6.26. Если внешняя компонента φ_{ext} класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является периодической, то действие класса φ на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ имеет конечную орбиту. Более того, любая существенная граничная дуга, целиком лежащая во внешней области E, имеет конечную орбиту. ◊

Число переноса внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона

Покажем, что число переноса класса отображений и число переноса его внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона, рассматриваемые как функции на группе $\mathrm{Mod}(S)$, сравнимы с точностью до мультипликативной константы:

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Лемма 6.27. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}(\varphi).$$

Доказательство. Для периодического или псевдоаносовского класса φ имеем $E' = S$ и $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi$, поэтому утверждение выполняется.

Предположим, что класс φ является приводимым и непериодическим. Пользуясь конструкцией из доказательства леммы 6.9, сопоставим каждой вершине $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(S)$ множество $P(\alpha) \subseteq \mathcal{A}_\partial(E')$. По построению множества $P(\alpha)$ для каждой вершины α и элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ выполняется равенство

$$P\big(\psi(\alpha)\big) = \rho(\psi)\big(P(\alpha)\big),$$

где через $\rho\colon \mathrm{Stab}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Mod}(E')$ обозначается естественный гомоморфизм, индуцированный отображением $E \to E'$. В частности, поскольку $T_\partial \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ и $\rho(T_\partial) = T_\partial$, для любого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется соотношение

$$P(T_\partial^k(\alpha)) = T_\partial^k(P(\alpha)).$$

Поэтому для каждой вершины $x \in \mathcal{A}_\partial(S)/\langle T_\partial\rangle$ образ множества $P(\alpha)$ в фактор-графе

$$\mathcal{A}_\partial(E')/\langle T_\partial\rangle$$

не зависит от выбора представителя α вершины x; обозначим его символом $P(x)$.

Как установлено в доказательстве леммы 6.9, множество $P(x)$ непусто и его диаметр не превосходит 1; кроме того, если вершины x и y равны или смежны, то каждая вершина из $P(x)$ равна или смежна с каждой вершиной из $P(y)$. Положим $T(x)$ равным произвольному элементу множества $P(x)$. Тогда отображение

$$T\colon \mathcal{A}_\partial(S)/\langle T_\partial\rangle \to \mathcal{A}_\partial(E')/\langle T_\partial\rangle$$

является 1-липшицевым.

Поскольку для каждой вершины x и каждого элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ обе вершины $T(\psi(x))$ и $\rho(\psi)(T(x))$ принадлежат множеству $P(\psi(x))$, получаем

$$d\big(T(\psi(x)), \rho(\psi)(T(x))\big) \leqslant 1.$$

Таким образом, 1-липшицево отображение T является 1-грубо эквивариантным относительно действия группы $\mathrm{Stab}(\mathrm{C})$. Следовательно, по лемме 3.11 для каждого элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ имеем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')/\langle T_\partial\rangle}(\rho(\psi)) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial(S)/\langle T_\partial\rangle}(\psi).$$

Подставляя $\psi = \varphi$, используя равенство $\rho(\varphi) = \varphi_{\mathrm{ext}}$ и применяя лемму 3.16, получаем

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}(\varphi). \qquad \square$$

Лемма 6.28. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Доказательство. Для периодического или псевдоаносовского класса φ имеем $E' = S$ и $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi$, поэтому утверждение выполняется.

Предположим, что класс φ является приводимым и непериодическим. Воспользуемся 2-липшицевым отображением

$$V\colon \mathcal{A}_\partial(E') \to \mathcal{A}_\partial(S)$$

из доказательства леммы 6.10. По построению этого отображения для каждой вершины $\alpha \in \mathcal{A}_\partial(E')$ и элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ выполняется равенство

$$V\big(\rho(\psi)(\alpha)\big) = \psi\big(V(\alpha)\big),$$

где через $\rho\colon \mathrm{Stab}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Mod}(E')$ обозначается естественный гомоморфизм, индуцированный отображением $E \to E'$. В частности, при $\psi = T_\partial$ получаем

$$V\big(T_\partial(\alpha)\big) = T_\partial\big(V(\alpha)\big).$$

Следовательно, отображение V индуцирует 2-липшицево отображение

$$\mathcal{A}_\partial(E')/\langle T_\partial\rangle \to \mathcal{A}_\partial(S)/\langle T_\partial\rangle,$$

эквивариантное относительно действия группы $\mathrm{Stab}(\mathrm{C})$. Следовательно, по лемме 3.11 для каждого элемента $\psi \in \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ имеем

$$\ell_{\mathcal{A}_\partial(S)/\langle T_\partial\rangle}(\psi) \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{A}_\partial(E')/\langle T_\partial\rangle}(\rho(\psi)).$$

Подставляя $\psi = \varphi$, используя равенство $\rho(\varphi) = \varphi_{\mathrm{ext}}$ и применяя лемму 3.16, получаем

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}(\varphi) \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}). \qquad \square$$

Предложение 6.29. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются неравенства

$$\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(S)}(\varphi) \leqslant 2\ell_{\mathcal{A}^\circ_\partial(E')}(\varphi_{\mathrm{ext}}).$$

Доказательство. Совместим леммы 6.27 и 6.28. $\square$

6.2.2 Стабильная коммутаторная длина второго уровня

Назовём

$$V_\circ = \{f \in Q(\mathrm{Mod}(S)) \mid f(Z_{\mathcal{A}^\circ_\partial}) = 0\}$$

пространством *липшицевых квазиморфизмов второго уровня* (или квазиморфизмов, *липшицевых на втором уровне*). Соответствующую относительную стабильную коммутаторную длину

$$\mathrm{scl}_\circ(\varphi) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_\circ \\ D(f) \leqslant 1}} |f(\varphi)|$$

назовём *стабильной коммутаторной длиной второго уровня*.

Согласно лемме 6.2, действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ обладает свойством сравнения в сверхсильной форме. В частности, функция $\mathrm{scl}_\circ$ принимает лишь конечные значения, а определяющий её супремум достигается.

Применим результаты раздела 5.4, воспользовавшись эквивалентностью действий на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ и на фактор-графе $\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle$.

Следствие 6.30. Выполняются соотношения

$$V_\circ = V_{\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle}, \qquad \mathrm{scl}_\circ = \mathrm{scl}_{\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle}.$$

Доказательство. Совместим лемму 3.16 с леммой 5.23. □

Дадим описание пространства $V_\circ$ липшицевых квазиморфизмов второго уровня в терминах пространства V_∂ квазиморфизмов, липшицевых на первом уровне.

Следствие 6.31. Выполняется соотношение

$$V_\circ = \{f \in V_\partial \mid f(T_\partial) = 0\}.$$

Доказательство. По лемме 3.16 и лемме 5.33, применённой к $N = \langle T_\partial \rangle$, имеем

$$V_\circ = V_{\mathcal{A}_\partial / \langle T_\partial \rangle} = \{f \in V_\partial \mid f(\langle T_\partial \rangle) = 0\} = \{f \in V_\partial \mid f(T_\partial) = 0\}.$$ □

Замечание 6.32. Гомоморфизм стягивания края индуцирует взаимно однозначное соответствие между множеством однородных квазиморфизмов группы $\mathrm{Mod}(S)$, принимающих нулевое значение на скручивании Дена T_∂, и множеством однородных квазиморфизмов группы $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$.[9] Следствие 6.31 уточняет это соответствие. ◊

Лемма 6.33. Для любого однородного квазиморфизма $f \in Q(\mathrm{Mod}(S))$ следующие условия эквивалентны:

1. f является липшицевым на втором уровне, то есть $f \in V_\circ$;
2. f обращается в нуль на всех классах отображений, чья внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона является непсевдоаносовской;

[9] См. определения в разделе 1.2.

3. f обращается в нуль на всех классах отображений, сохраняющих некоторую вершину графа $\mathcal{A}^\circ_\partial$;

4. f обращается в нуль на T_∂ и на всех расщепимых классах отображений.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 3.7. Эквивалентность условий (1) и (3) следует из леммы 5.35. Эквивалентность условий (1) и (4) сводится к следствию 6.31 и лемме 6.13. □

Лемма 6.34. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$.

1. Если класс φ является ахиральным или если внешняя компонента φ_{ext} его разложения Нильсена–Тёрстона является непсевдоаносовской, то $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) = 0$.

2. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathrm{scl}_\circ(\varphi \cdot T_\partial^m) = \mathrm{scl}_\circ(\varphi).$$

Доказательство. Утверждение (1) следует из замечания 5.25 и леммы 6.33. Утверждение (2) следует из аддитивности однородных квазиморфизмов для коммутирующих элементов и нелоксодромичности действия скручивания Дена T_∂ на $\mathcal{A}^\circ_\partial$. □

Наконец, установим теорему сравнения для второго уровня с равномерной константой сравнения.

Теорема 6.35. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ имеем

$$2\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \ell_\circ(\varphi).$$

Доказательство. По теореме 6.21 действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе $\mathcal{A}_\partial$ удовлетворяет свойству сравнения с константой $c = 1$. По лемме 5.33, применённой к $N = \langle T_\partial \rangle$, получаем

$$2\,\mathrm{scl}_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}(\varphi) \leqslant \ell_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}(\varphi).$$

Остаётся применить лемму 3.16 и следствие 6.30. □

6.3 Связь первых двух уровней

6.3.1 Числа переноса

Покажем, что число переноса на первом уровне сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с суммой числа переноса на втором уровне и абсолютного значения коэффициента дробного скручивания Дена:

$$\ell_\partial \asymp \ell_\circ + |\omega_\partial|.$$

Предложение 6.36. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются соотношения

$$\ell_\partial(\varphi) - |\omega_\partial(\varphi)| \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\partial(\varphi).$$

Доказательство. Правая оценка следует из предложения 6.1. Докажем левую оценку. Для этого воспользуемся леммой 3.16, согласно которой $\ell_\circ = \ell_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}$.

Зафиксируем вершину $x \in \mathcal{A}_\partial$ и число $m \geqslant 1$. Мы имеем

$$D_m := d_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}([x], \varphi^m([x])) = \min_{k\in\mathbb{Z}} d_{\mathcal{A}_\partial}(x, (\varphi^m\, T_\partial^k)(x)).$$

Выберем число $k_m \in \mathbb{Z}$, для которого минимум достигается. Тогда по предложению 4.25 получаем

$$D_m \geqslant \ell_\partial(\varphi^m\, T_\partial^{k_m}) \geqslant |\omega_\partial(\varphi^m\, T_\partial^{k_m})| = |m\,\omega_\partial(\varphi) + k_m|,$$

откуда $|k_m| \leqslant m\,|\omega_\partial(\varphi)| + D_m$. Используя центральность элемента T_∂ и оценку

$$d_{\mathcal{A}_\partial}(x, T_\partial^m(x)) \leqslant |m|,$$

получаем

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{A}_\partial}(x, \varphi^m(x)) &\leqslant d_{\mathcal{A}_\partial}(x, (\varphi^m\, T_\partial^{k_m})(x)) + d_{\mathcal{A}_\partial}((\varphi^m\, T_\partial^{k_m})(x), \varphi^m(x)) \\ &= D_m + d_{\mathcal{A}_\partial}(T_\partial^{k_m}(x), x) \\ &\leqslant D_m + |k_m| \\ &\leqslant 2D_m + m\,|\omega_\partial(\varphi)|, \end{aligned}$$

откуда, после деления на m и перехода к пределу, получаем

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{A}_\partial/\langle T_\partial\rangle}(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)| = 2\,\ell_\circ(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)|. \qquad \square$$

6.3.2 Пространства квазиморфизмов

Свяжем пространства V_∂ и $V_\circ$, используя коэффициент дробного скручивания Дена.

Предложение 6.37. Имеется разложение

$$V_\partial = V_\circ \oplus \langle\omega_\partial\rangle_{\mathbb{R}}.$$

А именно, каждый квазиморфизм $f \in V_\partial$ единственным образом представляется в виде

$$f = f_\circ + f(T_\partial)\,\omega_\partial,$$

где

$$f_\circ(\varphi) := f(\varphi) - f(T_\partial)\,\omega_\partial(\varphi),$$

причём выполняется неравенство

$$D(f_\circ) \leqslant D(f) + |f(T_\partial)|.$$

Кроме того, если $S \neq \Sigma_{1,1}$, то выполняется неравенство

$$D(f_\circ) \leqslant 2D(f).$$

Доказательство. Поскольку $\omega_\partial \in V_\partial$ и $\omega_\partial(T_\partial) = 1$, для любого $f \in V_\partial$ квазиморфизм $f_\circ$ принадлежит пространству $V_\circ$ по следствию 6.31. Указанная сумма прямая: если $c\,\omega_\partial \in V_\circ$ для некоторого вещественного числа c, то

$$0 = (c\,\omega_\partial)(T_\partial) = c.$$

Наконец, для $f \in V_\partial$ имеем

$$\begin{aligned} &|f_\circ(xy) - f_\circ(x) - f_\circ(y)| \\ &= |f(xy) - f(x) - f(y) - f(T_\partial)\,(\omega_\partial(xy) - \omega_\partial(x) - \omega_\partial(y))\,| \\ &\leqslant |f(xy) - f(x) - f(y)| + |f(T_\partial)| \cdot |\omega_\partial(xy) - \omega_\partial(x) - \omega_\partial(y)|. \end{aligned}$$

По лемме 1.13 имеем $D(\omega_\partial) \leqslant 1$, откуда

$$D(f_\circ) \leqslant D(f) + |f(T_\partial)| \cdot D(\omega_\partial) \leqslant D(f) + |f(T_\partial)|.$$

Последнее утверждение следует из того, что при $S \neq \Sigma_{1,1}$ по лемме 6.15 выполняется неравенство $|f(T_\partial)| \leqslant D(f)$. □

Таким образом, отображение $f \mapsto f_\circ$ устраняет слагаемое, определяемое коэффициентом дробного скручивания Дена.

6.3.3 Стабильные коммутаторные длины

Покажем, что при $S \neq \Sigma_{1,1}$ стабильная коммутаторная длина первого уровня сравнима, с точностью до мультипликативной константы, с суммой стабильной коммутаторной длины второго уровня и абсолютного значения коэффициента дробного скручивания Дена:

$$\mathrm{scl}_\partial \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_\partial|.$$

Лемма 6.38. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и для

любого квазиморфизма $f \in V_\partial$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |f(\varphi)| &\leqslant 4\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \cdot D(f) + |f(T_\partial)| \cdot |\omega_\partial(\varphi)| \\ &\leqslant (4\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)|)\, D(f). \end{aligned}$$

Доказательство. Используя разложение из предложения 6.37, представим квазиморфизм $f \in V_\partial$ в виде

$$f = f_\circ + f(T_\partial) \cdot \omega_\partial,$$

где $f_\circ \in V_\circ$ и $D(f_\circ) \leqslant 2D(f)$. По определению стабильной коммутаторной длины второго уровня имеем

$$|f_\circ(\varphi)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \cdot D(f_\circ) \leqslant 4\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \cdot D(f).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |f(\varphi)| &\leqslant |f_\circ(\varphi)| + |f(T_\partial)| \cdot |\omega_\partial(\varphi)| \\ &\leqslant 4\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \cdot D(f) + |f(T_\partial)| \cdot |\omega_\partial(\varphi)|. \end{aligned}$$

Наконец, согласно лемме 6.15, выполняется неравенство $|f(T_\partial)| \leqslant D(f)$, что даёт требуемую оценку. □

Следствие 6.39. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются неравенства

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) - \frac{|\omega_\partial(\varphi)|}{2} \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi).$$

Доказательство. Первое неравенство следует из леммы 6.38 и определения функции scl_∂. Второе неравенство следует из предложения 6.1. □

Следствие 6.40. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$ и $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$. Если $\omega_\partial(\varphi) = 0$, то выполняются неравенства

$$\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \ell_\circ(\varphi).$$

Доказательство. Совместим следствие 6.39 и теорему 6.35. □

6.4 Третий уровень: дуги и кривые

Напомним, что вершинами графа кривых $\mathcal{C}$ являются изотопические классы кривых на S, а множество вершин графа дуг и кривых $\mathcal{AC}$ является объединением множеств вершин графа дуг $\mathcal{A}$ и графа кривых $\mathcal{C}$; см. определения в разделе 1.1.2.

6.4.1 Числа переноса третьего уровня

Положим $\tau_{\mathcal{C}} := \tau_{\mathcal{C}(S)}$ и $\tau_{\mathcal{AC}} := \tau_{\mathcal{AC}(S)}$.

Лемма 6.41. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и $X \in \{\mathcal{C}, \mathcal{AC}\}$.

1. Равенство $\tau_X(\varphi) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда класс отображений φ является связно приводимым. В этом случае $\ell_X(\varphi) = 0$.
2. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\tau_X(\varphi \cdot T_\partial^m) = \tau_X(\varphi), \qquad \ell_X(\varphi \cdot T_\partial^m) = \ell_X(\varphi).$$

3. Если класс φ является непсевдоаносовским, то $\ell_X(\varphi) = 0$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 1.6. Утверждение (2) следует из того, что классы φ и $\varphi \cdot T_\partial^m$ индуцируют одну и ту же изометрию графа X. Утверждение (3) сводится к лемме 3.6 и следствию 3.14. □

6.4.2 Стабильная коммутаторная длина третьего уровня

Согласно предложению 6.1, действиям группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графах $\mathcal{C}(S)$ и $\mathcal{AC}(S)$ отвечает одно и то же пространство

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{AC}} = \{f \in Q(\mathrm{Mod}(S)) \mid f(Z_{\mathcal{C}}) = 0\}$$

липшицевых квазиморфизмов третьего уровня (или квазиморфизмов, *липшицевых на третьем уровне*). Соответствующую относительную стабильную коммутаторную длину

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{scl}_{\mathcal{AC}}(\varphi) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{f \in V_{\mathcal{C}} \\ D(f) \leqslant 1}} |f(\varphi)|$$

назовём *стабильной коммутаторной длиной третьего уровня*.

Согласно лемме 6.2, оба действия обладают свойством сравнения в сверхсильной форме. В частности, функция $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}$ принимает лишь конечные значения, а определяющий её супремум достигается.

Лемма 6.42. Для любого однородного квазиморфизма $f \in Q(\mathrm{Mod}(S))$ следующие условия эквивалентны:

1. f является липшицевым на третьем уровне, то есть $f \in V_{\mathcal{C}}$;
2. f обращается в нуль на любом непсевдоаносовском классе отображений;
3. f обращается в нуль на любом приводимом классе отображений;
4. f обращается в нуль на любом связно приводимом классе отображений.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 3.6. Эквивалентность условий (1) и (4) следует из леммы 5.35. Очевидно, из условия (3) следует

условие (4). Обратно, предположим, что f обращается в нуль на любом связно приводимом классе отображений, и пусть класс φ приводим. Тогда φ сохраняет существенную мультикривую. Поскольку орбита любой выбранной компоненты этой мультикривой конечна, действие класса φ имеет конечную орбиту. Следовательно, по утверждению (3) леммы 5.35, получаем $f(\varphi) = 0$. □

Для модельного случая проколотого диска $S = D_n^2$ это описание будет уточнено в разделе 10.1.2; см. лемму 10.16.

Лемма 6.43. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$.

1. Если φ является ахиральным или непсевдоаносовским, то $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) = 0$.
2. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi \cdot T_\partial^m) = \mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Доказательство. Утверждение (1) следует из замечания 5.25 и леммы 3.6. Утверждение (2) следует из аддитивности однородных квазиморфизмов для коммутирующих элементов и нелоксодромичности действия скручивания Дена T_∂ на $\mathcal{C}$. □

6.4.3 Равномерная константа сравнения для третьего уровня

Установим равномерную константу сравнения $c = 2$ для действия группы $G := \mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых $X := \mathcal{C}(S)$ в модельном случае $S = D_n^2$.

Согласно лемме 6.2, имеем $G = \langle F_X \rangle$. Для применения следствия 5.41 построим систему переходов, все элементы которой принадлежат множеству F_X.

Лемма 6.44. Можно выбрать представителей $\{v_i\}_{i\in\Lambda}$ орбит действия группы G на вершинах графа X так, что для каждой орбиты $e \in \Psi$ направленных рёбер, начало которой принадлежит орбите $G(v_i)$, а конец — орбите $G(v_j)$, существует такой элемент $\varphi_e \in F_X$, что направленное ребро $(v_i, \varphi_e(v_j))$ принадлежит орбите e.

Доказательство. Сначала предположим, что поверхность S является неспорадической, то есть $n \geqslant 4$. В этом случае рёбра графа X отвечают парам изотопических классов кривых, имеющих непересекающихся представителей.

Пусть $s, t \in \{1, \dots, n\}$ и $s < t$. Под *стандартной кривой, охватывающей проколы* $z_s, z_{s+1}, \dots, z_t$, мы понимаем простую замкнутую кривую в D_n^2, пересекающую диаметр $[-1, 1]$ трансверсально и ровно в двух точках, расположенных на интервалах (z_{s-1}, z_s) и (z_t, z_{t+1}), где $z_0 := -1$ и $z_{n+1} := 1$. В частности, для $k \in \{2, \dots, n-1\}$ обозначим символом γ_k стандартную кривую, охватывающую проколы $z_1, \dots, z_k$. Будем считать, что каждая кривая γ_k содержится во внутренности диска, ограниченного кривой γ_{k+1}, и обозначим символом $v_k \in X$ вершину, отвечающую кривой γ_k.

Поскольку орбита произвольной вершины графа X определяется числом проколов в диске, ограниченном представляющей её кривой, вершины $v_2, \dots, v_{n-1}$ образуют систему представителей орбит действия группы G на X.

Зафиксируем орбиту $e \in \Psi$ направленных рёбер, начало которой принадлежит орбите $G(v_a)$, а конец — орбите $G(v_b)$. Диски, ограниченные непересекающимися представителями концов такого ребра, либо вложены один в другой, либо имеют непересекающиеся внутренности. В первом случае орбита ребра имеет представителя (v_a, v_b), и можно положить $\varphi_e = 1$. Во втором случае диски, ограниченные кривыми, содержат соответственно a и b проколов, причём $a + b \leqslant n$.

Если $a + b < n$, выберем сохраняющий множество проколов гомеоморфизм диска, ограниченного кривой γ_{a+b}, неподвижный на γ_{a+b} и переводящий кривую γ_b в стандартную кривую, охватывающую проколы $z_{a+1}, \ldots, z_{a+b}$. Продолжив его тождественно на дополнение в D^2_n, получим косу $\varphi_e \in B_n$. Эта коса сохраняет кривую γ_{a+b}, поэтому $\varphi_e \in F_X \subseteq Z_X$. При этом вершина $\varphi_e(v_b)$ смежна с вершиной v_a и направленное ребро $(v_a, \varphi_e(v_b))$ принадлежит орбите e.

Пусть теперь $a + b = n$. Заметим, что образ вершины v_b под действием фундаментальной косы Гарсайда $\varphi_e := \Delta_n$ может быть представлен стандартной кривой, охватывающей проколы $z_{a+1}, \ldots, z_n$. Коса φ_e является периодической, поэтому $\varphi_e \in F_X \subseteq Z_X$. При этом вершина $\varphi_e(v_b)$ смежна с вершиной v_a и направленное ребро $(v_a, \varphi_e(v_b))$ принадлежит орбите e. Таким образом, утверждение доказано при $n \geqslant 4$.

При $n = 3$ имеется ровно одна орбита вершин в $\mathcal{C}(D^2_n)$, и аналогичный анализ показывает, что любой G-простой геодезический путь имеет длину 1. Остаётся заметить, что любые две смежные вершины в $\mathcal{C}(D^2_3)$ связаны действием некоторой периодической косы. □

Теорема 6.45. Для любого $n \geqslant 3$ и любой косы $\varphi \in B_n$ имеем

$$2\,\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 2\,\ell_{\mathcal{C}}(\varphi).$$

Доказательство. По лемме 6.2 имеем $G = \langle F_X \rangle$. По лемме 6.44 существует такая система переходов $\{\varphi_e\}_{e \in \Psi}$, что $\varphi_e \in F_X$ для всех $e \in \Psi$, откуда $\lambda_F(\varphi_e) \leqslant 1$. Следовательно,

$$K_{\lambda_F} = \sup_{e \in \Psi} \lambda_F(\varphi_e) \leqslant 1.$$

Значит, по утверждению (2) следствия 5.41 действие группы G на X обладает свойством сравнения в сверхсильной форме с константой $c = K_{\lambda_F} + 1 \leqslant 2$. □

Замечание 6.46. Вышеописанные рассуждения могут быть расширены на случай произвольной поверхности S. Согласно предварительному анализу, соответствующие классы φ_e также могут быть выбраны из множества F_X, что даёт равномерную константу сравнения $c = 2$. Мы не приводим это расширение ввиду громоздкости такого анализа и того, что далее в работе соответствующий результат не используется. ◊

Приведём пример, в котором разница между величинами $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ и $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi)$ является сколь угодно большой.

Пример 6.47. Пусть поверхность S не является спорадической. Для каждого натурального $m \geqslant 3$ выберем на S пару кривых α_m и β_m, находящихся на расстоянии m в графе $\mathcal{C}(S)$. Зафиксируем натуральное r и положим

$$\varphi_m := T_{\alpha_m}^{a_1} T_{\beta_m}^{b_1} \cdot \ldots \cdot T_{\alpha_m}^{a_r} T_{\beta_m}^{b_r},$$

где $a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r \in \mathbb{Z}$. Согласно теореме Х. Бэка и Ч. Кима [17, Theorem 3.1], если абсолютные значения всех показателей a_i, b_i строго больше определённой константы, то

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi_m) = 2r(m-2).$$

С другой стороны, каждый из множителей $T_{\alpha_m}^{a_i}$ и $T_{\beta_m}^{b_i}$ приводим. Следовательно,

$$2\,\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi_m) \leqslant \lambda_{Z\mathcal{C}}(\varphi_m) \leqslant 2r.$$

Устремляя m к бесконечности, получаем щель сколь угодно большого размера. $\Diamond$

Таким образом, для трёх уровней иерархической системы установлены сравнения стабильных коммутаторных длин с асимптотическими числами переноса; получены эффективные, а в основных случаях равномерные константы сравнения; описаны взаимосвязи между разными уровнями. В главе 7 будет исследована качественная сторона этой системы в контексте динамики классов отображений. В главе 11 константы сравнения, полученные на трёх уровнях, будут применены для установления эффективных нижних оценок динамических, геометрических и топологических характеристик, а в главе 10 для модельного случая $S = D_n^2$ структура пространств липшицевых квазиморфизмов на трёх уровнях иерархии будет детализирована.

ГЛАВА 7 ЧИСЛА ПЕРЕНОСА И СТАБИЛЬНЫЕ КОММУТАТОРНЫЕ ДЛИНЫ В ДИНАМИКЕ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ

Настоящая глава посвящена изучению взаимосвязи качественных динамических свойств класса отображений φ с асимптотическими числами переноса

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_{\circ}(\varphi) \leqslant \ell_{\partial}(\varphi)$$

и стабильными коммутаторными длинами

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}_{\circ}(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}_{\partial}(\varphi)$$

введённой в предыдущей главе трёхуровневой системы действий группы $\mathrm{Mod}(S)$. В частности, будут установлены необходимые и достаточные условия положительности функций ℓ_X и scl_X в терминах разложения Нильсена–Тёрстона и типов ахиральности классов отображений.

В разделе 7.1 описываются необходимые и достаточные условия положительности значений чисел переноса трёх уровней.

В разделе 7.2 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функций scl_{∂} и $\mathrm{scl}_{\circ}$. Вместе с тем рассматривается свойство внешней ахиральности после стягивания края и приводятся примеры, показывающие, что стабильные коммутаторные длины класса отображений и внешней компоненты его разложения Нильсена–Тёрстона в общем случае не сравнимы с точностью до мультипликативной константы.

В разделе 7.3 устанавливаются необходимые и достаточные условия положительности значений функции $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}$. В заключение результаты трёх уровней объединяются в единую характеризацию.

В этой главе, если не оговорено иное, символ S обозначает неисключительную поверхность с ровно одной компонентой края ∂.

7.1 Положительность чисел переноса трёх уровней

Напомним, что в разделе 1.2.2 для каждого класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ была определена внешняя компонента φ_{ext} его разложения Нильсена–Тёрстона.

Теорема 7.1. Для любого $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются следующие утверждения:

1. $\ell_{\partial}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда внешняя компонента φ_{ext} является нетривиальной;

2. $\ell_{\circ}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской;

3. $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда класс φ является псевдоаносовским.

Доказательство. Утверждение (3) следует из леммы 3.6. Утверждение (2) следует из леммы 3.7. Докажем утверждение (1). Если внешняя компонента φ_{ext} тривиальна, то по лемме 1.9 и замечанию 6.7 получаем $\ell_\partial(\varphi) = 0$.

Обратно, предположим, что $\ell_\partial(\varphi) = 0$. Тогда по неравенству $\ell_\circ(\varphi) \leqslant \ell_\partial(\varphi)$ получаем $\ell_\circ(\varphi) = 0$. Следовательно, по лемме 3.7 внешняя компонента φ_{ext} не является псевдоаносовской; тогда она является периодической. Согласно следствию 6.12, эта компонента является тривиальной. Тем самым утверждение (1) доказано. □

Замечание 7.2. По лемме 1.9 утверждение (1) теоремы 7.1 допускает следующую переформулировку: для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неравенство $\ell_\partial(\varphi) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда класс φ является нерасщепимым. ◊

Таким образом, первый уровень иерархической системы позволяет распознать нетривиальность внешней компоненты разложения Нильсена–Тёрстона; согласно результатам раздела 6.3, этот уровень расширяет сведения, относящиеся к коэффициенту дробного скручивания Дена. Переход ко второму уровню нивелирует вклад коэффициента дробного скручивания Дена и исключает из рассмотрения периодическую динамику. Третий уровень позволяет дополнительно исключить приводимую динамику и сосредоточиться на псевдоаносовской.

Замечание 7.3. В представленном доказательстве теоремы 7.1 утверждение (2) сводится к результату, полученному А. Расмуссеном [271, Lemma 3.4], а утверждение (3) — к результату, полученному Х. Мазуром и Я. Мински [242, Proposition 3.6]. Вместе с тем утверждение (2) непосредственно выводится из утверждения (3), предложения 6.29, неравенства $\ell_{\mathcal{C}} \leqslant 2\,\ell_\circ$ и замечания 6.26. ◊

Следствие 7.4. Для действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графах $\mathcal{A}_\partial$, $\mathcal{A}_\partial^\circ$ и $\mathcal{C}$ выполняются следующие утверждения:

1. множество $Z_{\mathcal{A}_\partial}$ совпадает с множеством всех расщепимых классов отображений;
2. множество $Z_{\mathcal{A}_\partial^\circ}$ совпадает с множеством всех классов отображений, чья внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона является периодической;
3. множество $Z_{\mathcal{C}}$ совпадает с множеством всех непсевдоаносовских классов отображений.

Для всех трёх действий каждый элемент является либо эллиптическим, либо локсодромическим, причём любой эллиптический элемент имеет конечную орбиту; иными словами, для каждого $X \in \{\mathcal{A}_\partial, \mathcal{A}_\partial^\circ, \mathcal{C}\}$ выполняется соотношение[1]

$$F_X = Z_X.$$

Доказательство. Пусть сначала $X = \mathcal{A}_\partial$. Согласно утверждению (1) теоремы 7.1, условие $\ell_\partial(\varphi) = 0$ влечёт расщепимость класса φ. Эквивалентно, класс φ сохраняет некоторую вершину графа $\mathcal{A}_\partial$. Отсюда, в частности, следует утверждение (1).

[1] Напомним, что Z_X — множество нелоксодромических элементов и F_X — множество элементов, имеющих конечную орбиту.

Пусть теперь $X = \mathcal{A}^\circ_\partial$. Согласно утверждению (2) теоремы 7.1, из условия $\ell_\circ(\varphi) = 0$ следует, что внешняя компонента φ_{ext} не является псевдоаносовской. Значит, класс φ_{ext} является периодическим. Согласно замечанию 6.26, действие класса φ на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ имеет конечную орбиту. Отсюда, в частности, следует утверждение (2).

Наконец, пусть $X = \mathcal{C}$. Согласно утверждению (3) теоремы 7.1, из условия $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) = 0$ следует, что класс φ не является псевдоаносовским. Значит, класс φ является периодическим или приводимым. В периодическом случае любая орбита при действии класса φ конечна. В приводимом непериодическом случае орбита любой компоненты внешней инвариантной мультикривой при действии класса φ конечна. Отсюда, в частности, следует утверждение (3). □

7.2 Положительность стабильных коммутаторных длин первых двух уровней

Установим необходимые и достаточные условия положительности значений стабильных коммутаторных длин scl_∂ и $\mathrm{scl}_\circ$. Нам потребуются основные типы ахиральности классов отображений, введённые в разделе 1.2.3.

7.2.1 Внешняя хиральность после стягивания края

Лемма 7.5. Если класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является внешне ахиральным после стягивания края, то $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) = 0$.

Доказательство. Напомним, что $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\varphi)$ обозначает внешнюю инвариантную мультикривую класса φ и E' обозначает поверхность, полученную из внешней области $E(\varphi, \partial)$ разложения Нильсена–Тёрстона класса φ стягиванием в отдельный прокол каждой компоненты края, соответствующей компоненте мультикривой C. Рассмотрим композицию ρ естественных гомоморфизмов

$$\mathrm{Stab}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E') \to \mathrm{Cap}(\mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E'))$$

и положим $N := \ker \rho$.

Покажем, что $N \subseteq Z_{\mathcal{A}^\circ_\partial}$. Действительно, если $\psi \in N$, то внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона класса ψ не является псевдоаносовской. В этом случае элемент ψ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ нелоксодромически.

По определению внешней ахиральности после стягивания края образ элемента φ в группе $\rho(\mathrm{Stab}(\mathrm{C}))$ ахирален. Применяя теперь следствие 5.28 к $H := \mathrm{Stab}(\mathrm{C})$ и $N = \ker \rho$, получаем $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) = 0$. □

Нам потребуется следующий результат А. Расмуссена.

Лемма 7.6 [271, Theorem 1.1]**.** Каждый класс отображений, действующий на $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ локсодромически, действует сверхслабо вполне разрывно[2]. □

Отметим, что ни один элемент группы $\mathrm{Mod}(S)$ не действует на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ слабо вполне разрывно, поскольку бесконечная циклическая подгруппа $\langle T_\partial \rangle$ действует тривиально; ср. пример 3.42.

Лемма 7.7. Образ $\mathrm{Cap}(\varphi) \in \mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$ класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ при гомоморфизме стягивания края действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ слабо вполне разрывно в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским.

Доказательство. Следуя лемме 3.50, заметим, что если локсодромический элемент φ не является псевдоаносовским, то стабилизатор пары (φ_+, φ_-) на границе Громова $\partial\mathcal{A}^\circ_\partial$ не является виртуально циклическим: он содержит бесконечное ядро гомоморфизма

$$\mathrm{Cap}\big(\mathrm{Stab}(\mathrm{C}(\varphi))\big) \to \mathrm{Cap}\big(\mathrm{Mod}_\mathrm{C}(E')\big)$$

с бесконечным образом.

Обратно, согласно лемме 3.52, для псевдоаносовского класса φ в группе $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$ стабилизатор пары, состоящей из устойчивой и неустойчивой геодезических ламинаций класса φ, является виртуально циклическим. По лемме 7.6 класс $\mathrm{Cap}(\varphi)$ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ сверхслабо вполне разрывно. Следовательно, по лемме 3.50 он действует слабо вполне разрывно. □

Предложение 7.8. Пусть класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ действует на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ локсодромически. Его действие ахирально[3] в том и только в том случае, если класс φ является внешне ахиральным после стягивания края.

Доказательство. Как и выше, пусть $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\varphi)$ — внешняя инвариантная мультикривая и E' — поверхность, полученная из внешней области $E(\varphi, \partial)$ стягиванием в проколы компонент края, соответствующих компонентам мультикривой C. Напомним, что внешняя компонента $\varphi_\mathrm{ext} \in \mathrm{Mod}_\mathrm{C}(E')$ является образом класса φ при естественном гомоморфизме $\mathrm{Stab}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Mod}_\mathrm{C}(E')$. Поскольку класс φ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ локсодромически, по лемме 3.7 класс φ_ext является псевдоаносовским.

Напомним, что класс φ называется внешне ахиральным после стягивания края, если образ $\overline{\varphi} := \mathrm{Cap}(\varphi_\mathrm{ext})$ его внешней компоненты при гомоморфизме

$$\mathrm{Cap}\colon\ \mathrm{Mod}_\mathrm{C}(E') \to \mathrm{Mod}(E^\dagger)$$

ахирален в группе $G_\mathrm{ext} := \mathrm{Cap}(\mathrm{Mod}_\mathrm{C}(E'))$. Поскольку класс φ_ext является псевдоаносовским, его образ $\overline{\varphi}$ также является псевдоаносовским. Следовательно, по лемме 3.6 класс $\overline{\varphi}$ действует локсодромически на графе кривых $\mathcal{C}(E^\dagger)$. Согласно примеру 3.47,

[2] См. определение в разделе 3.4.3.
[3] См. определение в разделе 3.4.1.

это действие является слабо вполне разрывным. Поэтому, согласно следствию 3.51, элемент $\overline{\varphi}$ ахирален в группе G_{ext} тогда и только тогда, когда его действие на $\mathcal{C}(E^\dagger)$ ахирально.

Остаётся показать, что ахиральность действия элемента $\overline{\varphi}$ на $\mathcal{C}(E^\dagger)$ эквивалентна ахиральности действия класса φ на $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$.

Сначала предположим, что класс φ является внешне ахиральным после стягивания края. Тогда элемент $\overline{\varphi}$ ахирален в G_{ext}, а значит, его действие на $\mathcal{C}(E^\dagger)$ ахирально. Следовательно, существует элемент $\overline{\psi} \in G_{\text{ext}}$, меняющий местами притягивающую и отталкивающую неподвижные точки элемента $\overline{\varphi}$ на границе графа кривых $\mathcal{C}(E^\dagger)$. Согласно примеру 3.35, эти точки отвечают устойчивой и неустойчивой ламинациям внешней компоненты φ_{ext}. Выберем прообраз $\psi_{\text{ext}} \in \text{Mod}_{\text{C}}(E')$ элемента $\overline{\psi}$, а затем его прообраз

$$\psi \in \text{Stab}(\text{C}) \subseteq \text{Mod}(S).$$

Согласно примеру 3.35, притягивающая и отталкивающая точки $\varphi_+, \varphi_- \in \partial\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ также отвечают устойчивой и неустойчивой ламинациям класса $\varphi_{\text{ext}} \in \text{Mod}_{\text{C}}(E')$. Поэтому элемент ψ меняет точки φ_+ и φ_- местами. Следовательно, класс φ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ ахирально.

Обратно, предположим, что класс φ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial(S)$ ахирально. Тогда существует класс $\psi \in \text{Mod}(S)$, для которого $\psi(\varphi_+) = \varphi_-$ и $\psi(\varphi_-) = \varphi_+$. Выберем гомеоморфизм $q\colon S \to S$, представляющий класс ψ и меняющий местами устойчивую $L_+ \subset E$ и неустойчивую $L_- \subset E$ геодезические ламинации внешней компоненты φ_{ext}, отвечающие точкам φ_+ и φ_-. Поскольку эти ламинации заполняют поверхность E, имеем $q(E) = E$. В частности, класс ψ сохраняет внешнюю инвариантную мультикривую C, то есть $\psi \in \text{Stab}(\text{C})$. Тогда образ класса ψ при композиции

$$\text{Stab}(\text{C}) \to \text{Mod}_{\text{C}}(E') \to \text{Mod}(E^\dagger)$$

меняет местами устойчивую и неустойчивую ламинации псевдоаносовского класса $\overline{\varphi}$ и, следовательно, действие этого класса на $\mathcal{C}(E^\dagger)$ является ахиральным.

Как отмечено выше, элемент $\overline{\varphi}$ действует на $\mathcal{C}(E^\dagger)$ слабо вполне разрывно. Значит, согласно следствию 3.51, элемент $\overline{\varphi}$ ахирален в группе G_{ext}. Таким образом, класс φ является внешне ахиральным после стягивания края, и утверждение доказано. □

Замечание 7.9. Совмещая предложение 7.8 и лемму 7.5, получаем, что если класс отображений $\varphi \in \text{Mod}(S)$ действует на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$ ахирально, то выполняется равенство $\text{scl}_\circ(\varphi) = 0$; ср. следствие 5.26. ◊

Теорема 7.10. Для любого класса $\varphi \in \text{Mod}(S)$ неравенство $\text{scl}_\circ(\varphi) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда класс φ является внешне хиральным после стягивания края.

Доказательство. Если $\text{scl}_\circ(\varphi) > 0$, то класс φ является внешне хиральным после стягивания края по лемме 7.5.

Обратно, по лемме 3.7 класс φ действует на $\mathcal{A}^\circ_\partial$ локсодромически, и по лемме 7.6 он действует сверхслабо вполне разрывно. Кроме того, по предложению 7.8 он действует хирально. Применяя теперь теорему 5.31, получаем $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$. □

Для модельного случая проколотого диска $S = D^2_n$ это описание будет уточнено в разделе 10.1; см. предложение 10.2.

7.2.2 Внешняя ахиральность и коэффициент дробного скручивания Дена

Опишем значения квазиморфизмов и стабильной коммутаторной длины первого уровня на классах отображений, внешне ахиральных после стягивания края.

Лемма 7.11. Если класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является внешне ахиральным после стягивания края, то для любого квазиморфизма $f \in V_\partial$ выполняется соотношение

$$f(\varphi) = f(T_\partial) \cdot \omega_\partial(\varphi).$$

Доказательство. Используя предложение 6.37, запишем $f = f_\circ + f(T_\partial) \cdot \omega_\partial$, где $f_\circ \in V_\circ$. Согласно лемме 7.5, получаем $f_\circ(\varphi) = 0$. Таким образом, $f(\varphi) = f(T_\partial) \cdot \omega_\partial(\varphi)$. □

Следствие 7.12. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Тогда для любого внешне ахирального после стягивания края класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется соотношение

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = |\omega_\partial(\varphi)|.$$

Иными словами, квазиморфизм ω_∂ является V_∂-экстремальным для каждого класса отображений, внешне ахирального после стягивания края.

Доказательство. Согласно леммам 6.15 и 7.11, для любого квазиморфизма $f \in V_\partial$ имеем

$$|f(\varphi)| = |f(T_\partial)| \cdot |\omega_\partial(\varphi)| \leqslant |\omega_\partial(\varphi)| \cdot D(f).$$

Переходя к супремуму, получаем оценку $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant |\omega_\partial(\varphi)|$. С другой стороны, $\omega_\partial \in V_\partial$ и $D(\omega_\partial) = 1$, откуда $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \geqslant |\omega_\partial(\varphi)|$. □

В частности, получаем аналог следствия 6.12, обобщающий следствие 6.18.

Следствие 7.13. Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$. Если внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является периодической с параметром p/q, то

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \left|\frac{p}{q}\right|.$$

Доказательство. Совместим следствие 7.12 и следствие 1.17. □

Следствие 7.14. Пусть класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является внешне ахиральным после стягивания края. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. φ является внешне ахиральным;
2. выполняется соотношение $\omega_\partial(\varphi) = 0$;
3. выполняется соотношение $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что условия (1) и (2) эквивалентны. По следствию 1.12 существуют такие целые числа $k \neq 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, что класс

$$\theta := \varphi_{\mathrm{ext}}^k T_\partial^m$$

ахирален в группе $\mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$. Из утверждения (4) леммы 4.5 получаем $\omega_\partial(\theta) = 0$. Применяя лемму 1.16, центральность элемента T_∂, однородность квазиморфизма ω_∂ и равенство $\omega_\partial(T_\partial) = 1$, получаем

$$0 = \omega_\partial(\theta) = k\,\omega_\partial(\varphi_{\mathrm{ext}}) + m\,\omega_\partial(T_\partial) = k\,\omega_\partial(\varphi) + m,$$

откуда $k\,\omega_\partial(\varphi) = -m$. Если $\omega_\partial(\varphi) = 0$, то $m = 0$, и значит, класс φ является внешне ахиральным. Обратно, если класс φ является внешне ахиральным, то в соотношении выше можно взять $m = 0$ и $k \neq 0$, откуда $\omega_\partial(\varphi) = 0$.

Покажем теперь эквивалентность условий (2) и (3). По лемме 7.11 для каждого $f \in V_\partial$ имеем $f(\varphi) = f(T_\partial) \cdot \omega_\partial(\varphi)$. Поэтому из равенства $\omega_\partial(\varphi) = 0$ следует, что все квазиморфизмы из V_∂ обращаются в нуль на φ, и значит, $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$.

Обратно, поскольку $\omega_\partial \in V_\partial$, из равенства $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$ непосредственно следует $\omega_\partial(\varphi) = 0$. Эквивалентность трёх условий доказана. □

Покажем, что в общем случае величина $\mathrm{scl}_\circ(\varphi)$ не сравнима с точностью до мультипликативной константы с величиной $\mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}})$.

Пример 7.15. Рассмотрим трёхнитевую псевдоаносовскую косу $\theta := \sigma_1^2\sigma_2^{-2} \in B_3$. Заметим, что коса θ ахиральна, а именно, $\Delta_3\theta\Delta_3^{-1} = \theta^{-1}$.

Положим $\varphi := \theta(2, 2, 1) \in B_5$.[4] Анализ нормализатора подгруппы $\langle\theta\rangle \subset B_3$ показывает, что всякий элемент из B_3, обращающий ненулевую степень косы θ, меняет местами проколы z_1 и z_3. Следовательно, коса φ не является внешне ахиральной; ср. предложение 2.15. Поскольку закрученность косы φ равна нулю[5], согласно следствию 7.14, коса φ не является внешне ахиральной после стягивания края.

Согласно теореме 7.10, имеем $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$. При этом, поскольку коса θ ахиральна, получаем $\mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) = 0$. ♢

Применим предыдущие результаты и установим необходимые и достаточные условия положительности значений стабильной коммутаторной длины scl_∂.

Теорема 7.16. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неравенство $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда класс φ является внешне хиральным.

[4] Определение операции раздутия проколов см. в разделе 2.3.2.

[5] Действительно, $\omega_5(\varphi) = \omega_3(\theta) = 0$; первое равенство следует из леммы 1.16, а второе — из следствия 2.47.

Доказательство. Если $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$, то класс φ является внешне хиральным по следствию 7.14.

Теперь предположим, что класс φ является внешне хиральным, и покажем, что выполняется неравенство $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$. Если класс φ является внешне ахиральным после стягивания края, то $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$ по следствию 7.14; действительно, в случае $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$ класс φ был бы внешне ахиральным.

Пусть теперь класс φ является внешне хиральным после стягивания края. Тогда внешняя компонента φ_{ext} не может быть периодической и, следовательно, является псевдоаносовской. Тогда, согласно теореме 7.10, получаем

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \geqslant \mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0. \qquad \square$$

Для модельного случая проколотого диска $S = D^2_n$ это описание будет уточнено в разделе 10.1; см. предложение 10.1.

7.3 Положительность стабильной коммутаторной длины третьего уровня

Установим необходимые и достаточные условия положительности значений стабильной коммутаторной длины $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}$.

Лемма 7.17. Если класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является ахиральным после стягивания края, то $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм стягивания края

$$\mathrm{Cap}\colon \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$$

и положим $N := \ker(\mathrm{Cap}) = \langle T_\partial \rangle$. Заметим, что $N \subseteq Z_{\mathcal{C}}$.

По предположению элемент $\mathrm{Cap}(\varphi)$ ахирален в группе $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$. Применяя теперь следствие 5.28 к $H := \mathrm{Mod}(S)$ и $N = \ker(\mathrm{Cap})$, получаем $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) = 0$. $\square$

Лемма 7.18. Каждый класс отображений, действующий на $\mathcal{C}(S)$ локсодромически, действует сверхслабо вполне разрывно.

Доказательство. Напомним, что действие класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ совпадает с действием его образа $\mathrm{Cap}(\varphi) \in \mathrm{Mod}(S^\dagger)$ при гомоморфизме стягивания края. Согласно примеру 3.47, этот образ действует слабо вполне разрывно. По лемме 3.50 он действует сверхслабо вполне разрывно. Следовательно, элемент φ также действует сверхслабо вполне разрывно; ср. [156, Corollary 2.5]. $\square$

Лемма 7.19. Пусть класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ действует на графе $\mathcal{C}(S)$ локсодромически. Его действие ахирально в том и только в том случае, если класс φ является ахиральным после стягивания края.

Доказательство. Поскольку действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графе кривых пропускается через гомоморфизм стягивания края, достаточно показать, что действие элемента $\mathrm{Cap}(\varphi)$ ахирально в том и только в том случае, если он является ахиральным в группе $\mathrm{Mod}_*(S^\dagger)$. Поскольку любой ахиральный локсодромический элемент действует ахирально, достаточно показать, что если действие элемента $\mathrm{Cap}(\varphi)$ является ахиральным, то он является ахиральным.

Согласно примеру 3.47, действие элемента $\mathrm{Cap}(\varphi)$ является слабо вполне разрывным. Таким образом, искомое утверждение сводится к следствию 3.51. □

Теорема 7.20. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неравенство $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда класс φ является хиральным после стягивания края и псевдоаносовским.

Доказательство. Если $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$, то класс φ является хиральным после стягивания края и псевдоаносовским по лемме 7.17 и утверждению (1) леммы 6.43 соответственно.

Обратно, по лемме 3.6 класс φ действует на $\mathcal{C}$ локсодромически, и по лемме 7.18 он действует сверхслабо вполне разрывно. Кроме того, по лемме 7.19 он действует хирально. Применяя теперь теорему 5.31, получаем $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$. □

Для модельного случая проколотого диска $S = D_n^2$ это описание будет уточнено в разделе 10.1; см. предложение 10.3.

В заключение приведём переформулировку результатов о положительности стабильных коммутаторных длин, подчёркивающую их сходство с теоремой 7.1.

Теорема 7.21. Для любого $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняются следующие утверждения:

1. $\mathrm{scl}_{\partial}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда класс φ является внешне хиральным и внешняя компонента φ_{ext} является нетривиальной;
2. $\mathrm{scl}_{\circ}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда класс φ является внешне хиральным после стягивания края и внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской;
3. $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$ тогда и только тогда, когда класс φ является хиральным после стягивания края и псевдоаносовским.

Доказательство. Утверждение (3) составляет содержание теоремы 7.20. Утверждение (2) эквивалентно теореме 7.10, поскольку внешняя компонента разложения Нильсена–Тёрстона любого класса, внешне хирального после стягивания края, является псевдоаносовской. Утверждение (1) эквивалентно теореме 7.16, поскольку внешняя компонента любого внешне хирального класса нетривиальна. □

Следствие 7.22. Для действий группы $\mathrm{Mod}(S)$ на графах $\mathcal{A}_\partial$, $\mathcal{A}_\partial^\circ$ и $\mathcal{C}$ выполняются следующие утверждения[6]:

1. замыкание Галуа $\overline{Z}_{\mathcal{A}_\partial}$ совпадает с множеством всех внешне ахиральных классов отображений;

[6] Определение замыкания Галуа см. в разделе 5.2.

2. замыкание Галуа $\overline{Z}_{\mathcal{A}^\circ_\partial}$ совпадает с множеством всех классов отображений, внешне ахиральных после стягивания края;

3. замыкание Галуа $\overline{Z}_{\mathcal{C}}$ совпадает с объединением множества всех непсевдоаносовских классов отображений и множества всех классов отображений, ахиральных после стягивания края.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 7.21 и того, что для любого изометрического действия группы G на пространстве X выполняются соотношения

$$\overline{Z}_X = \mathbb{A}(V_X) = \{g \in G \mid \mathrm{scl}_X(g) = 0\}. \qquad \square$$

Таким образом, с точностью до элементов, обладающих свойством ахиральности подходящего типа, стабильные коммутаторные длины трёх уровней не равны нулю в тех же случаях, в которых не равны нулю соответствующие числа переноса. Это даёт пороговые признаки качественных свойств динамики классов отображений поверхностей.

В главе 8 эти результаты будут также дополнены нижними оценками топологической энтропии. Эти оценки будут получены на основе результатов, связывающих асимптотические числа переноса со свойствами и характеристиками торов отображений и пар «трёхмерное многообразие — зацепление». В главе 9 эти результаты будут детализированы для модельного случая проколотого диска.

ГЛАВА 8 ЧИСЛА ПЕРЕНОСА В ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПАР «МНОГООБРАЗИЕ — ЗАЦЕПЛЕНИЕ»

В настоящей главе устанавливаются пороговые признаки и нижние оценки геометрической и топологической сложности дополнения $M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi$ зацепления L_φ в терминах чисел переноса

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant \ell_\partial(\varphi).$$

Основное внимание уделяется числам переноса первых двух уровней иерархии.

В разделе 8.1 описываются взаимосвязи чисел переноса с геометрией каспа тора отображения T_φ, отвечающего компоненте края ∂.

В разделе 8.2 эти результаты используются для получения достаточных условий гиперболичности; также устанавливается соответствие между динамическим типом класса отображений и геометрическим типом соответствующей пары «многообразие — зацепление».

В разделе 8.3 приводятся нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов, а также топологической энтропии.

В этой главе, если не оговорено иное, символ S обозначает неисключительную поверхность с ровно одной компонентой края ∂.

8.1 Параметры каспа, отвечающего компоненте края

Приведём интерпретацию чисел переноса $\ell_\partial(\varphi)$ и $\ell_\circ(\varphi)$ в терминах тора отображения T_φ. Нам потребуются обозначения и понятия, введённые в разделе 1.3.

Пусть класс отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является псевдоаносовским. Тогда его тор отображения T_φ является гиперболическим. Компоненте края ∂ поверхности S отвечает касп тора отображения. Рассмотрим максимальную орисферическую окрестность

$$C = C_\partial \subset T_\varphi$$

этого каспа. Гиперболическая метрика на T_φ индуцирует евклидову метрику на торе ∂C. Выберем в изотопических классах ориентированных кривых

$$\gamma_\partial = \gamma_\partial(\varphi), \qquad \gamma_{\mathrm{lat}} = \gamma_{\mathrm{lat}}(\varphi)$$

на торе ∂C геодезических представителей; эти представители также будем обозначать символами γ_∂ и γ_{lat}.

Выберем вещественные числа $x, y, z \in \mathbb{R}$, для которых $x, z > 0$, и сохраняющую ориентацию изометрию

$$\partial C \cong \mathbb{R}^2/\langle (x, 0), (y, z) \rangle,$$

которая переводит ориентированные кривые γ_∂ и γ_{lat} в кривые, отвечающие векто-

рам $(x, 0)$ и (y, z) соответственно. Положим

$$\operatorname{height}(\partial C) := z, \qquad \operatorname{area}(\partial C) := xz, \qquad \operatorname{skew}(\partial C) := \frac{y}{x}.$$

Таким образом, величина $\operatorname{height}(\partial C)$ является высотой фундаментального параллелограмма, порождённого кривыми γ_∂ и γ_{lat}, величина $\operatorname{area}(\partial C)$ — его площадью, а величина $\operatorname{skew}(\partial C)$ измеряет горизонтальное смещение кривой γ_{lat} относительно кривой γ_∂.

Приведём результат Д. Футера и С. Шлеймера, согласно которому число переноса в графе скользящих граничных дуг сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с высотой этого фундаментального параллелограмма:

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \operatorname{height}(\partial C).$$

Лемма 8.1 [135, Theorem 1.5]**.** Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{3|\chi(S)|}\, z \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant 536\, |\chi(S)|^4\, z. \qquad \square$$

Для описания числа переноса первого уровня нам потребуется результат М. Шмалиана, связывающий величину горизонтального смещения с коэффициентом дробного скручивания Дена.

Лемма 8.2 [282, Theorem 2]**.** Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняется неравенство[1]

$$\left|\omega_\partial(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6\, |\chi(S)|\, \tau_\circ(\varphi) + 3. \qquad \square$$

Нам потребуется вариант этого результата для асимптотического числа переноса.

Лемма 8.3. Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\left|\omega_\partial(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6\, |\chi(S)|\, \ell_\circ(\varphi).$$

Доказательство. Для каждого целого числа $m \geqslant 1$ класс φ^m является псевдоаносовским, а его тор отображения T_{φ^m} представляет собой m-листное циклическое накрытие тора отображения T_φ в направлении, трансверсальном слоям.

Рассмотрим касп в T_{φ^m}, лежащий над рассматриваемым каспом тора отображения T_φ. Кривая $\gamma_\partial(\varphi^m)$ накрывает кривую $\gamma_\partial(\varphi)$ однократно, тогда как кривая $\gamma_{\mathrm{lat}}(\varphi^m)$ накрывает кривую $\gamma_{\mathrm{lat}}(\varphi)$ с кратностью m. Поэтому относительно евклидовых координат на границе поднятой орисферической окрестности этим кривым отвечают векторы $(x, 0)$ и (my, mz). При расширении поднятой орисферической окрестности до максимальной $C_\partial(\varphi^m) \subset T_{\varphi^m}$ евклидова метрика на её границе умножается на некоторую

[1] Символ $\tau_\circ$ обозначает число переноса в действии на графе $\mathcal{A}^\circ_\partial$.

положительную константу. Поскольку горизонтальное смещение сохраняется при гомотетиях, получаем

$$\operatorname{skew}(\partial C(\varphi^m)) = m\frac{y}{x}.$$

С другой стороны, по однородности коэффициента дробного скручивания Дена имеем

$$\omega_\partial(\varphi^m) = m\omega_\partial(\varphi).$$

Применяя лемму 8.2 к классу φ^m, получаем

$$m\left|\omega_\partial(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6\,|\chi(S)|\,\tau_\circ(\varphi^m) + 3.$$

Деля на m и переходя к пределу, получаем

$$\left|\omega_\partial(\varphi) - \frac{y}{x}\right| \leqslant 6\,|\chi(S)| \lim_{m\to\infty}\frac{\tau_\circ(\varphi^m)}{m} = 6\,|\chi(S)|\,\ell_\circ(\varphi). \qquad \square$$

Объединяя эти оценки с результатами раздела 6.3, получаем следующее сравнение:

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \operatorname{height}(\partial C) + |\operatorname{skew}(\partial C)|.$$

Следствие 8.4. Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\frac{z + |y/x|}{9\,|\chi(S)| + 1} \leqslant \ell_\partial(\varphi) \leqslant 4288\,|\chi(S)|^5\,(z + |y/x|)\,.$$

Доказательство. По лемме 8.3 имеем

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant |\omega_\partial(\varphi)| + 6\,|\chi(S)|\,\ell_\circ(\varphi),$$

откуда по лемме 8.1 и предложениям 6.1 и 4.25 получаем левое неравенство:

$$\begin{aligned} z + \left|\frac{y}{x}\right| &\leqslant 3\,|\chi(S)|\,\ell_\circ(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)| + 6\,|\chi(S)|\,\ell_\circ(\varphi) \\ &\leqslant (9\,|\chi(S)| + 1)\ell_\partial(\varphi). \end{aligned}$$

Применяя предложение 6.36 и лемму 8.3, получаем

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)| \leqslant (6\,|\chi(S)| + 2)\ell_\circ(\varphi) + \left|\frac{y}{x}\right|.$$

По лемме 8.1 и оценке $|\chi(S)| \geqslant 1$ отсюда следует правое неравенство:

$$\begin{aligned} \ell_\partial(\varphi) &\leqslant 536\,|\chi(S)|^4(6\,|\chi(S)| + 2)z + \left|\frac{y}{x}\right| \\ &\leqslant 4288\,|\chi(S)|^5 z + \left|\frac{y}{x}\right| \\ &\leqslant 4288\,|\chi(S)|^5\left(z + \left|\frac{y}{x}\right|\right). \end{aligned} \qquad \square$$

Для произвольного класса отображений φ аналогичная интерпретация получается при переходе к внешней компоненте φ_{ext} его разложения Нильсена–Тёрстона[2].

Если эта компонента является периодической, то $\ell_\circ(\varphi) = 0$ по лемме 6.25, а по следствию 6.12 число переноса $\ell_\partial(\varphi)$ сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с абсолютным значением коэффициента дробного скручивания Дена $|\omega_\partial(\varphi)|$. Если же внешняя компонента является псевдоаносовской, к ней применимы описанные выше конструкции, а предложения 6.11 и 6.29 позволяют сравнить числа переноса класса φ с числами переноса внешней компоненты φ_{ext}.

В частности, для произвольного класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$, для которого $\ell_\circ(\varphi) > 0$, число переноса $\ell_\partial(\varphi)$ сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с суммой высоты и абсолютной величины горизонтального смещения фундаментального параллелограмма каспа тора отображения $T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ внешней компоненты:

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C(\varphi_{\mathrm{ext}})) + |\mathrm{skew}(\partial C(\varphi_{\mathrm{ext}}))|.$$

При переходе к числу переноса $\ell_\circ$ вклад горизонтального смещения нивелируется:

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \mathrm{height}(\partial C(\varphi_{\mathrm{ext}})).$$

В заключение отметим, что число переноса $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi)$ также сравнимо, с точностью до мультипликативной константы, с некоторой геометрической характеристикой тора отображений T_φ; см. [8, Theorem 3.1].

8.2 Пороговые признаки геометрических и топологических свойств

Свяжем число переноса $\ell_\partial(\varphi)$ со свойствами многообразия

$$M_\varphi = T_\varphi(\gamma_{\mathrm{lat}}),$$

полученного каноническим заполнением Дена тора отображения. Для этого, следуя лемме 1.19, установим нижнюю оценку длины кривой γ_{lat}.

Лемма 8.5. Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ имеем

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant 4289\,|\chi(S)|^5\, l(\gamma_{\mathrm{lat}}).$$

Доказательство. Напомним стандартное неравенство $x \geqslant 1$; см. [252] или [282, Lemma 8]. Получаем

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{y^2 + z^2} = l(\gamma_{\mathrm{lat}}).$$

[2] См. определение в разделе 1.2.2.

По леммам 8.1 и 8.3 имеем

$$\begin{aligned}|\omega_\partial(\varphi)| &\leqslant \left|\frac{y}{x}\right| + 6\,|\chi(S)|\,\ell_\circ(\varphi)\\ &\leqslant l(\gamma_{\text{lat}}) + 6\,|\chi(S)|\,536\,|\chi(S)|^4\,z\\ &\leqslant l(\gamma_{\text{lat}}) + 6\,|\chi(S)|\,536\,|\chi(S)|^4\,l(\gamma_{\text{lat}})\\ &= (3216\,|\chi(S)|^5 + 1)\,l(\gamma_{\text{lat}}).\end{aligned}$$

По предложению 6.36 и лемме 8.1 получаем

$$\begin{aligned}\ell_\partial(\varphi) &\leqslant 2\ell_\circ(\varphi) + |\omega_\partial(\varphi)|\\ &\leqslant 1072\,|\chi(S)|^4\,l(\gamma_{\text{lat}}) + (3216\,|\chi(S)|^5 + 1)\,l(\gamma_{\text{lat}})\\ &\leqslant 4289\,|\chi(S)|^5\,l(\gamma_{\text{lat}}).\end{aligned}$$

□

8.2.1 Признаки гиперболичности

Лемма 8.6. Пусть класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является псевдоаносовским. Если

$$\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4,$$

то для каждой простой замкнутой евклидовой геодезической $s \subset \partial C$, неизотопной кривой γ_∂, многообразие $T_\varphi(s)$ является гиперболическим.

Доказательство. Поскольку многообразие T_φ является гиперболическим, по лемме 1.19 достаточно показать, что евклидова длина кривой s удовлетворяет неравенству $l(s) > 2\pi$. Поскольку длина любой простой замкнутой геодезической на евклидовом торе ∂C, неизотопной кривой γ_∂, составляет не менее z, по лемме 8.1 имеем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\,z \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\,l(s).$$

Поэтому если $\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4$, то

$$l(s) \geqslant \frac{\ell_\circ(\varphi)}{536\,|\chi(S)|^4} > 2\pi.$$

□

Теорема 8.7. Пусть класс $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ является псевдоаносовским. Если

$$\ell_\partial(\varphi) > 26949\,|\chi(S)|^5$$

или

$$\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4,$$

то многообразие M_φ является гиперболическим.

Доказательство. Поскольку $M_\varphi = T_\varphi(\gamma_{\text{lat}})$, во втором случае достаточно применить

лемму 8.6 для кривой $s = \gamma_{\text{lat}}$. В первом случае аналогично применим лемму 1.19, воспользовавшись тем, что по лемме 8.5 имеем

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant 4289\,|\chi(S)|^5\, l(\gamma_{\text{lat}}),$$

поэтому если $\ell_\partial(\varphi) > 26949\,|\chi(S)|^5$, то

$$l(\gamma_{\text{lat}}) \geqslant \frac{\ell_\partial(\varphi)}{4289\,|\chi(S)|^5} > \frac{26949}{4289} > 2\pi. \qquad \square$$

Следствие 8.8. Если для класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4,$$

то многообразие M_φ является гиперболическим.

Доказательство. По лемме 3.6 класс φ является псевдоаносовским. Согласно предложению 6.1, имеем $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi)/2 \leqslant \ell_\circ(\varphi)$. Утверждение теперь сводится к теореме 8.7. $\square$

Замечание 8.9. Пример 3.27 показывает, что в случае, когда поверхность S не имеет проколов, пороговое значение в этом признаке может быть существенно уменьшено. $\lozenge$

8.2.2 Соответствие между динамическим и геометрическим типами

Покажем, что при превышении числом переноса $\ell_\partial(\varphi)$ определённого порогового значения динамический тип класса отображений φ напрямую отражается в геометрии и топологии многообразия M_φ.

Начнём с версии для числа переноса $\ell_\circ(\varphi)$. Нам потребуется следующий результат.

Лемма 8.10. Пусть внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ неисключительной поверхности S является псевдоаносовской и многообразие $M_{\varphi_{\text{ext}}}$ является гиперболическим. Тогда, если класс φ является приводимым, то вложенные в M_φ торы, отвечающие орбитам при действии класса φ на компонентах внешней инвариантной мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$, являются существенными. В частности, многообразие M_φ не является ни гиперболическим, ни зейфертовым.

Доказательство. Пусть $T \subset M_\varphi$ — набор торов, отвечающих внешней инвариантной мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. Этот набор разбивает многообразие M_φ на многообразие $M_{\varphi_{\text{ext}}}$ и его дополнение (возможно, несвязное), которое обозначим символом N. Поверхность T представляет собой объединение компонент края как многообразия $M_{\varphi_{\text{ext}}}$, так и многообразия N.

Поскольку многообразие $M_{\varphi_{\text{ext}}}$ является гиперболическим, поверхность T несжимаема в $M_{\varphi_{\text{ext}}}$; см. [239, Proposition 9.3.4] и [239, Proposition 4.2.20].

Компоненты многообразия N представляют собой торы отображений классов, получающихся из φ в результате разрезания поверхности S по мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. Со-

гласно [239, Section 11.4.6] и [239, Proposition 9.3.4], торические компоненты края таких многообразий несжимаемы. В частности, поверхность T несжимаема в N. Поскольку поверхность T несжимаема и в N, и в $M_{\varphi_{\text{ext}}}$, она несжимаема в M_φ.

Ни один из торов набора T не параллелен краю. Действительно, если один из них параллелен другой компоненте края многообразия $M_{\varphi_{\text{ext}}}$, то получаем пару нестягиваемых свободно гомотопных простых замкнутых кривых на двух различных компонентах края этого многообразия, что невозможно по [239, Proposition 4.2.20]. Если же он параллелен другой компоненте края многообразия N, то либо одна из компонент мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$ стягивается в прокол или на край, либо две её компоненты параллельны; ср. [239, Proof of Proposition 11.4.15]. Следовательно, поверхность T является существенной.

Наконец, многообразие M_φ не является гиперболическим, поскольку гиперболические многообразия не содержат существенных торов. Оно не является зейфертовым, поскольку иначе многообразие $M_{\varphi_{\text{ext}}}$ также было бы зейфертовым[3], что противоречит его гиперболичности. □

Предложение 8.11. Пусть для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4.$$

Тогда:

1. многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским;

2. многообразие M_φ содержит существенный тор в том и только в том случае, если класс φ является приводимым.

Доказательство. Одна из импликаций первого утверждения следует из теоремы 8.7. Поскольку $\ell_\circ(\varphi) > 0$, по лемме 3.7 внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской. В частности, класс φ является псевдоаносовским или приводимым.

Согласно предложению 6.29, имеем

$$\ell_\circ(\varphi_{\text{ext}}) \geqslant \frac{1}{2}\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4 \geqslant 1072\,\pi\,|\chi(E')|^4.$$

Следовательно, по теореме 8.7 многообразие $M_{\varphi_{\text{ext}}}$ является гиперболическим. Отсюда, применяя лемму 8.10, получаем, что если класс φ является приводимым, то многообразие M_φ содержит существенный тор. Это доказывает одну из импликаций второго утверждения. Поскольку гиперболические многообразия не содержат существенных торов, это также доказывает обратные импликации обоих утверждений. □

Наконец, перейдём к версии для числа переноса ℓ_∂.

[3] Действительно, каждая компонента многообразия, полученного из зейфертова многообразия разрезанием по конечному набору попарно непересекающихся несжимаемых торов, является зейфертовой; см. [239, Sections 10.3-10.4, 11.5].

Теорема 8.12. Пусть для класса отображений $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\partial(\varphi) > 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4 + 1.$$

Тогда:

1. многообразие M_φ является зейфертовым в том и только в том случае, если класс φ является периодическим;

2. многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если класс φ является псевдоаносовским;

3. многообразие M_φ содержит существенный тор в том и только в том случае, если класс φ является приводимым.

Доказательство. По предложению 6.36 имеем

$$\ell_\partial(\varphi) - |\omega_\partial(\varphi)| \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi).$$

Если $|\omega_\partial(\varphi)| > 1$, то все три утверждения следуют из леммы 1.21. Поэтому далее будем считать, что $|\omega_\partial(\varphi)| \leqslant 1$. Тогда

$$2\,\ell_\circ(\varphi) \geqslant \ell_\partial(\varphi) - |\omega_\partial(\varphi)| > 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4,$$

откуда $\ell_\circ(\varphi) > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4$. Утверждения (2) и (3) теперь следуют из предложения 8.11.

Остаётся доказать утверждение (1). Поскольку $\ell_\circ(\varphi) > 0$, по лемме 3.7 внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской. В частности, класс φ не является периодическим.

Если класс φ является псевдоаносовским, то многообразие M_φ является гиперболическим по предложению 8.11 и, следовательно, не является зейфертовым. Пусть теперь класс φ является приводимым. Согласно предложению 6.29,

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \geqslant \frac{1}{2}\,\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4 \geqslant 1072\,\pi\,|\chi(E')|^4.$$

По теореме 8.7 многообразие $M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является гиперболическим. Применяя лемму 8.10, получаем, что в этом случае многообразие M_φ также не является зейфертовым.

Таким образом, при $|\omega_\partial(\varphi)| \leqslant 1$ ни класс φ не является периодическим, ни многообразие M_φ не является зейфертовым. Это доказывает утверждение (1). □

В главе 9 для модельного случая $S = D_n^2$ будет приведён аналог этого результата, имеющий существенно меньшее пороговое значение.

8.3 Оценки геометрической и динамической сложности

Начнём с того, что приведём примеры, показывающие, что ни коэффициент дробного скручивания Дена $\omega_\partial(\varphi)$, ни число переноса $\ell_\partial(\varphi)$ не дают линейных нижних оценок гиперболического объёма многообразия M_φ:

$$|\omega_\partial(\varphi)| \not\gtrsim \operatorname{vol}(M_\varphi) + 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \not\gtrsim \operatorname{vol}(M_\varphi) + 1.$$

Пример 8.13. Пусть псевдоаносовский класс $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ удовлетворяет неравенству $\ell_\circ(\varphi) > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4$. Для каждого целого числа m положим

$$\psi_m := T_\partial^m\,\varphi,$$

где через T_∂ обозначается скручивание Дена вдоль компоненты края ∂. Согласно лемме 6.25, имеем $\ell_\circ(\psi_m) = \ell_\circ(\varphi)$. Поскольку образы всех классов отображений ψ_m при гомоморфизме стягивания края совпадают, торы отображений T_{ψ_m} гомеоморфны. Поскольку эти торы отображений являются гиперболическими, они изометричны. В частности,

$$\operatorname{vol}(T_{\psi_m}) = \operatorname{vol}(T_\varphi).$$

Применяя, как и в доказательстве теоремы 8.7, лемму 1.19, получаем, что многообразия M_{ψ_m} являются гиперболическими, причём

$$\operatorname{vol}(T_\varphi) = \operatorname{vol}(T_{\psi_m}) > \operatorname{vol}(M_{\psi_m}).$$

Таким образом, объёмы многообразий M_{ψ_m} равномерно ограничены.

С другой стороны, по лемме 1.15 и однородности коэффициента дробного скручивания Дена,

$$\omega_\partial(\psi_m) = \omega_\partial(\varphi) + m.$$

Следовательно, последовательность $|\omega_\partial(\psi_m)|$ неограниченна. Поскольку

$$|\omega_\partial(\psi_m)| \leqslant \ell_\partial(\psi_m)$$

по предложению 4.25, последовательность $\ell_\partial(\psi_m)$ также неограниченна. ◊

Напротив, далее покажем, что число переноса $\ell_\circ(\varphi)$ даёт нижние оценки гиперболического и симплициального объёмов многообразия M_φ.

Начнём с оценок для тора отображения T_φ. Нам потребуется численный вариант сравнения

$$\ell_\circ(\varphi) \asymp \operatorname{vol}(C),$$

установленного Д. Футером и С. Шлеймером и анонсированного в разделе 3.3.3.

Лемма 8.14 [135, Theorem 1.5]**.** Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$

выполняются неравенства

$$\frac{2}{9\,|\chi(S)|^2}\,\mathrm{vol}(C) \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4\,\mathrm{vol}(C). \qquad \square$$

Совмещая эти оценки с результатами раздела 6.3, также получаем

$$\ell_\partial(\varphi) \asymp \mathrm{vol}(C) + |\omega_\partial(\varphi)|.$$

Далее установим эффективные сравнения

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{vol}(T_\varphi), \qquad \ell_\circ(\varphi) \lesssim \|T_\varphi\|.$$

Следствие 8.15. Для любого псевдоаносовского класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ имеем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4\,\mathrm{vol}(T_\varphi).$$

Доказательство. Применим лемму 8.14 и неравенство

$$\mathrm{vol}(C) \leqslant \mathrm{vol}(T_\varphi). \qquad \square$$

Напомним, что символом $\|M\|$ обозначается симплициальный объём многообразия M.

Следствие 8.16. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 1800\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|T_\varphi\|,$$

где v_3 — объём правильного идеального тетраэдра в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

Доказательство. Если внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса φ является периодической, то $\ell_\circ(\varphi) = 0$ по лемме 6.25, и утверждение выполнено.

Пусть теперь компонента φ_{ext} является псевдоаносовской. Тогда многообразие $T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является гиперболическим, и по следствию 8.15 имеем

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 900\,|\chi(E')|^4\,\mathrm{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) = 900\,v_3\,|\chi(E')|^4 \cdot \|T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\|.$$

Если класс φ является приводимым, то многообразие $T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является одной из компонент дополнения в T_φ торов, отвечающих орбитам компонент внешней инвариантной мультикривой $\mathrm{C}(\varphi)$. Если класс φ является псевдоаносовским, то $\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi$ и $T_{\varphi_{\mathrm{ext}}} = T_\varphi$. В обоих случаях получаем неравенство

$$\|T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\| \leqslant \|T_\varphi\|.$$

Следовательно,

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 900\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|T_\varphi\|.$$

Применяя предложение 6.29, получаем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi_{\text{ext}}) \leqslant 1800\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|T_\varphi\|. \qquad \square$$

8.3.1 Оценки гиперболического объёма

Далее установим эффективное сравнение

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \operatorname{vol}(M_\varphi) + 1.$$

Начнём с предварительной нижней оценки гиперболического объёма в терминах числа переноса $\ell_\circ$ для классов отображений, являющихся псевдоаносовскими.

Предложение 8.17. Пусть класс $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ является псевдоаносовским. Если многообразие M_φ является гиперболическим, то выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4 \cdot \operatorname{vol}(M_\varphi) + 3537\,|\chi(S)|^4.$$

Доказательство. Положим

$$c_1 = 900\,|\chi(S)|^4, \qquad c_2 = 3537\,|\chi(S)|^4.$$

Если $\ell_\circ(\varphi) \leqslant c_2$, то требуемое неравенство выполняется автоматически. Поэтому далее предполагаем, что $\ell_\circ(\varphi) > c_2$.

По лемме 8.1 имеем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\,z \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\,l(\gamma_{\text{lat}}).$$

Если бы выполнялось неравенство $l(\gamma_{\text{lat}}) \leqslant 2\pi$, то мы получили бы

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\pi\,536\,|\chi(S)|^4 < 3537\,|\chi(S)|^4 = c_2,$$

что противоречит текущему предположению. Следовательно, $l(\gamma_{\text{lat}}) > 2\pi$.

Напомним, что многообразие M_φ получается из многообразия T_φ заполнением Дена, при котором кривая γ_{lat} становится стягиваемой. По лемме 1.19 получаем

$$\operatorname{vol}(M_\varphi) \geqslant \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l(\gamma_{\text{lat}})}\right)^2\right)^{3/2} \operatorname{vol}(T_\varphi).$$

С другой стороны, по следствию 8.15 имеем

$$c_1 \operatorname{vol}(T_\varphi) \geqslant \ell_\circ(\varphi).$$

Следовательно,

$$c_1 \operatorname{vol}(M_\varphi) \geqslant c_1 \operatorname{vol}(T_\varphi) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l(\gamma_{\text{lat}})}\right)^2\right)^{3/2} \geqslant \ell_\circ(\varphi) \left(1 - \left(\frac{2\pi}{l(\gamma_{\text{lat}})}\right)^2\right)^{3/2}.$$

По лемме 8.1 имеем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\, z \leqslant 536\,|\chi(S)|^4\, l(\gamma_{\text{lat}}).$$

Положим

$$u := \frac{\ell_\circ(\varphi)}{2\pi\, 536\,|\chi(S)|^4}.$$

В силу текущего предположения имеем $u > 1$. Кроме того,

$$l(\gamma_{\text{lat}}) \geqslant \frac{\ell_\circ(\varphi)}{536\,|\chi(S)|^4},$$

и поэтому

$$c_1 \operatorname{vol}(M_\varphi) \geqslant \ell_\circ(\varphi) \left(1 - \left(\frac{2\pi\, 536\,|\chi(S)|^4}{\ell_\circ(\varphi)}\right)^2\right)^{3/2} = \ell_\circ(\varphi) \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2}.$$

Эквивалентно,

$$\begin{aligned} \ell_\circ(\varphi) - c_1 \operatorname{vol}(M_\varphi) &\leqslant \ell_\circ(\varphi) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2}\right] \\ &= 2\pi\, 536\,|\chi(S)|^4\, u \left(1 - \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Вычисления показывают, что

$$\sup_{u>1} u \left(1 - \left(1 - u^{-2}\right)^{3/2}\right) < \frac{21}{20}.$$

Отсюда получаем

$$\ell_\circ(\varphi) - c_1 \operatorname{vol}(M_\varphi) \leqslant 2\pi\, 536\,|\chi(S)|^4\, \frac{21}{20} < 3537\,|\chi(S)|^4 = c_2. \qquad \square$$

Теперь воспользуемся результатами раздела 8.2.2, чтобы исключить предположение о псевдоаносовском типе.

Теорема 8.18. Пусть $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$. Если многообразие M_φ является гиперболическим, то выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4 \cdot \operatorname{vol}(M_\varphi) + 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4.$$

Доказательство. Если $\ell_\circ(\varphi) \leqslant 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4$, то требуемая оценка выполняется автоматически. Иначе, если $\ell_\circ(\varphi) > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4$, то класс φ является псевдоаносовским по предложению 8.11. В этом случае применимо предложение 8.17, согласно которому

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4 \cdot \mathrm{vol}(M_\varphi) + 3537\,|\chi(S)|^4.$$

Поскольку $3537 < 2144\pi$, отсюда следует требуемое неравенство. □

Следствие 8.19. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$. Если многообразие M_φ является гиперболическим, то выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 1800\,|\chi(S)|^4 \cdot \mathrm{vol}(M_\varphi) + 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4.$$

Доказательство. Согласно предложению 6.1, имеем $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi)$. Утверждение теперь сводится к теореме 8.18. □

8.3.2 Оценки симплициального объёма

Далее распространим полученные оценки с гиперболических многообразий на произвольные, используя симплициальный объём, и установим эффективное сравнение

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \|M_\varphi\| + 1.$$

Теорема 8.20. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 1800\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|M_\varphi\| + 7074\,|\chi(S)|^4,$$

где v_3 — объём правильного идеального тетраэдра в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$.

Доказательство. Если $\ell_\circ(\varphi) \leqslant 7074\,|\chi(S)|^4$, то требуемое неравенство выполняется автоматически. Поэтому далее предполагаем, что

$$\ell_\circ(\varphi) > 7074\,|\chi(S)|^4.$$

По лемме 3.7 внешняя компонента $\varphi_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$ является псевдоаносовской. Согласно предложению 6.29, имеем

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \geqslant \frac{1}{2}\ell_\circ(\varphi) > 3537\,|\chi(S)|^4.$$

Поскольку $3537 > 1072\pi$ и $|\chi(E')| \leqslant |\chi(S)|$, получаем

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) > 1072\,\pi\,|\chi(E')|^4.$$

Применяя теорему 8.7, получаем, что многообразие $M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является гиперболическим.

Если класс φ является приводимым, то по лемме 8.10 торы, отвечающие орбитам компонент внешней инвариантной мультикривой C, являются существенными в M_φ. Одной из компонент дополнения объединения этих торов является многообразие $M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$. Если класс φ является псевдоаносовским, то

$$\varphi_{\mathrm{ext}} = \varphi, \qquad M_{\varphi_{\mathrm{ext}}} = M_\varphi.$$

В обоих случаях получаем неравенство

$$\|M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\| \leqslant \|M_\varphi\|.$$

Поскольку многообразие $M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является гиперболическим, имеем

$$v_3 \,\|M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\| = \mathrm{vol}(M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}).$$

Применяя предложение 8.17 к псевдоаносовскому классу $\varphi_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$, получаем

$$\begin{aligned}
\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) &\leqslant 900\,|\chi(E')|^4 \cdot \mathrm{vol}(M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) + 3537\,|\chi(E')|^4 \\
&= 900\,v_3\,|\chi(E')|^4 \cdot \|M_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\| + 3537\,|\chi(E')|^4 \\
&\leqslant 900\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|M_\varphi\| + 3537\,|\chi(S)|^4.
\end{aligned}$$

Снова применяя предложение 6.29, получаем

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 1800\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|M_\varphi\| + 7074\,|\chi(S)|^4. \qquad \square$$

Следствие 8.21. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 3600\,v_3\,|\chi(S)|^4 \cdot \|M_\varphi\| + 14148\,|\chi(S)|^4.$$

Доказательство. Согласно предложению 6.1, имеем $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi)$. Утверждение теперь сводится к теореме 8.20. $\square$

8.3.3 Оценки топологической энтропии

Установим эффективное сравнение[4]

$$\ell_\circ(\varphi) \lesssim \mathrm{ent}(\varphi).$$

Теорема 8.22. Для любого класса $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 5400\,\pi\,|\chi(S)|^5 \cdot \mathrm{ent}(\varphi).$$

[4]Сведения о топологической энтропии см. в разделе 1.2.4.

Доказательство. Если внешняя компонента φ_{ext} разложения Нильсена–Тёрстона класса φ является периодической, то $\ell_\circ(\varphi) = 0$ по лемме 6.25, и утверждение очевидно.

Пусть теперь компонента φ_{ext} является псевдоаносовской. По следствию 8.15 и неравенству $|\chi(E')| \leqslant |\chi(S)|$ имеем

$$\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 900\,|\chi(E')|^4 \operatorname{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) \leqslant 900\,|\chi(S)|^4 \operatorname{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}).$$

По лемме 1.20 и неравенству $\operatorname{ent}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant \operatorname{ent}(\varphi)$ получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) &\leqslant 3\pi\,|\chi(E')| \cdot \operatorname{ent}(\varphi_{\mathrm{ext}}) \\ &\leqslant 3\pi\,|\chi(S)| \cdot \operatorname{ent}(\varphi).\end{aligned}$$

Следовательно, согласно предложению 6.29,

$$\begin{aligned}\ell_\circ(\varphi) &\leqslant 2 \cdot \ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \\ &\leqslant 2 \cdot 900\,|\chi(S)|^4 \operatorname{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) \\ &\leqslant 2 \cdot 900\,|\chi(S)|^4\, 3\pi\,|\chi(S)| \cdot \operatorname{ent}(\varphi) \\ &\leqslant 5400\,\pi\,|\chi(S)|^5 \cdot \operatorname{ent}(\varphi).\end{aligned}$$

□

Отметим, что для $S = D^2_n$ оценка

$$\ell_\circ(\varphi) \leqslant 5400\,\pi\,(n-1)^5 \cdot \operatorname{ent}(\varphi)$$

даёт ответ на вопрос [34, Problem 2.43 (c)] в случае групп кос B_n.

Приведём также версию теоремы 8.22 для графа кривых; ср. [138].

Следствие 8.23. Для любого класса $\varphi \in \operatorname{Mod}(S)$ выполняется неравенство

$$\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant 5400\,\pi\,|\chi(S)|^5 \cdot \operatorname{ent}(\varphi).$$

Доказательство. Как и выше, считая класс φ псевдоаносовским, получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_\circ(\varphi) &\leqslant 900\,|\chi(S)|^4 \operatorname{vol}(T_\varphi) \\ &\leqslant 900\,|\chi(S)|^4\, 3\pi\,|\chi(S)| \cdot \operatorname{ent}(\varphi) \\ &= 2700\,\pi\,|\chi(S)|^5 \cdot \operatorname{ent}(\varphi).\end{aligned}$$

□

Тем самым установлена взаимосвязь чисел переноса трёх уровней с динамикой классов отображений и со свойствами и характеристиками пар «трёхмерное многообразие — зацепление». В частности, получены пороговые признаки этих свойств, а также явные оценки их геометрической и топологической сложности, в том числе гиперболического объёма. В главе 9 эти результаты будут детализированы для модельного случая проколотого диска.

ГЛАВА 9 ЧИСЛА ПЕРЕНОСА В ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ЗАМЫКАНИЙ КОС

Настоящая глава посвящена расширению результатов предыдущей главы в модельном случае проколотого диска $S = D^2_n$.[1] В частности, существенно уточняются пороговые признаки качественных свойств дополнения $S^3\backslash L_\varphi$ зацепления L_φ, формулирующиеся в терминах чисел переноса

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant \ell_\partial(\varphi)$$

и стабильных коммутаторных длин

$$\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}_\partial(\varphi).$$

Основное внимание уделяется характеристикам первых двух уровней иерархической системы.

В разделе 9.1 устанавливаются верхние оценки чисел переноса и стабильных коммутаторных длин в терминах сложности слов в образующих Артина и Бирман–Ко–Ли, представляющих соответствующие косы.

В разделе 9.2 эти оценки совмещаются с исчислением Бирман–Менэско. В результате устанавливаются признаки нетривиальности, нерасщепимости и простоты зацепления L_φ, а также признаки минимальности и жёсткости косы φ.

В разделе 9.3 с помощью теории слоений Бирман–Менэско, лежащей в основе одноимённого исчисления, устанавливаются нижние оценки рода существенных поверхностей в дополнении $S^3\backslash L_\varphi$. Это приводит к оценкам рода Зейферта и числа перекрёстков зацепления L_φ.

В разделе 9.4 на основе предыдущего анализа устанавливается связь между существенными торами в дополнении $S^3\backslash L_\varphi$ и существенными мультикривыми, инвариантными при действии косы φ. Отсюда выводится соответствие между динамическим типом косы и геометрическим типом её замыкания. В частности, это даёт признаки гиперболичности узлов, имеющие пороговую константу, близкую к оптимальной.

В этой главе, если не оговорено иное, число нитей удовлетворяет неравенству $n \geqslant 3$.

9.1 Оценки чисел переноса и стабильных коммутаторных длин

Нам потребуются введённые в разделе 2.2 образующие Артина и образующие Бирман–Ко–Ли (ленточные образующие).

[1] См. обозначения, введённые в разделах 2.2 и 2.4.

9.1.1 Слова в образующих Артина

Следующие результаты связывают числа переноса и стабильные коммутаторные длины со сложностью артиновских слов, представляющих косы.

Для $k \in \{1, \dots, n\}$ обозначим символом δ_k неразделяющую дугу на D^2_n, соединяющую отмеченную точку $-i$ на крае ∂D^2_n с проколом z_k и пересекающую диаметр диска только в этом проколе.

Лемма 9.1. Для $\varphi \in B_n$ предположим, что некоторая сопряжённая с φ коса допускает артиновское слово, содержащее ровно m вхождений образующих $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. Тогда[2]

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant m.$$

Доказательство. Левая оценка представляет собой утверждение (4) леммы 3.4; сосредоточимся на правой.

Поскольку числа переноса инвариантны относительно сопряжения, можно считать, что сама коса φ допускает рассматриваемое выражение. Запишем её в виде

$$\varphi = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \zeta_2 \cdots \zeta_m \psi_m,$$

где каждая коса ζ_i равна либо σ_{n-1}, либо σ_{n-1}^{-1}, а каждая коса ψ_i записана словом в образующих $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-2}^{\pm 1}$.

Заметим, что каждая коса ψ_i сохраняет δ_n. Более того, дуги δ_n и $\sigma_{n-1}^{\pm 1}(\delta_n)$ не пересекаются, поэтому они задают смежные вершины графа $\mathcal{A}_\partial$.

Определим косы $g_0, \dots, g_m \in B_n$ формулой

$$g_j = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \cdots \zeta_j \psi_j,$$

где $g_0 = \psi_0$. Получаем $g_0(\delta_n) = \delta_n$ и

$$g_i(\delta_n) = g_{i-1} \zeta_i \psi_i(\delta_n) = g_{i-1} \zeta_i(\delta_n)$$

для $i > 0$. Следовательно, применяя g_{i-1} к ребру в $\mathcal{A}_\partial$, соединяющему δ_n и $\zeta_i(\delta_n)$, мы получаем ребро между $g_{i-1}(\delta_n)$ и $g_i(\delta_n)$. Значит, последовательность

$$\delta_n = g_0(\delta_n), g_1(\delta_n), \dots, g_m(\delta_n) = \varphi(\delta_n)$$

является путём в $\mathcal{A}_\partial$ длины m. Поэтому $d(\delta_n, \varphi(\delta_n)) \leqslant m$. Переходя к минимуму по всем вершинам, получаем требуемое утверждение. □

Лемма 9.2. Для $\varphi \in B_n$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ предположим, что некоторая сопряжённая с φ коса допускает артиновское слово, содержащее ровно s вхождений образующей σ_k

[2] Определения числа переноса τ_X см. в разделе 3.1.

и ровно t вхождений образующей σ_k^{-1}. Тогда

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \max\{s,t\}.$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $\min\{s,t\}$. Сначала рассмотрим случай, при котором $\min\{s,t\} = 0$, то есть $s = 0$ или $t = 0$. Удалим из артиновского слова все вхождения образующих σ_k и σ_k^{-1}. Поскольку при $n \geqslant 3$ коса $\sigma_k^{\pm 1}$ расщепима, из инвариантности относительно сопряжения и квазисубаддитивности функции scl_∂ следует, что для любых кос $\psi_1, \psi_2 \in B_n$ имеем

$$2\mathrm{scl}_\partial(\psi_1\sigma_k^{\pm 1}\psi_2) = 2\mathrm{scl}_\partial(\psi_2\psi_1\sigma_k^{\pm 1}) \leqslant 2\mathrm{scl}_\partial(\psi_2\psi_1) + 2\mathrm{scl}_\partial(\sigma_k^{\pm 1}) + 1 = 2\mathrm{scl}_\partial(\psi_1\psi_2) + 1.$$

Поскольку значение функции scl_∂ на любой расщепимой косе равно нулю, отсюда следует требуемая оценка.

Пусть теперь $\min\{s,t\} \geqslant 1$. Выберем в артиновском слове ближайшую пару взаимно обратных образующих σ_k и σ_k^{-1}. Для любой косы $\psi \in B_n$, допускающей запись в образующих $\{\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}\backslash\{\sigma_k^{\pm 1}\}$, и для любых кос $\psi_1, \psi_2 \in B_n$ имеем

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi_1\sigma_k\psi\sigma_k^{-1}\psi_2) = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi_2\psi_1\sigma_k\psi\sigma_k^{-1}) &\leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi_2\psi_1) + 2\,\mathrm{scl}_\partial(\sigma_k\psi\sigma_k^{-1}) + 1 \\ &= 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi_1\psi_2) + 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) + 1 \\ &= 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi_1\psi_2) + 1. \end{aligned}$$

Если ближайшая пара взаимно обратных образующих имеет вид $\sigma_k^{-1}\psi\sigma_k$, то применяем то же рассуждение к обратной косе. Это доказывает индукционный переход. □

Обозначим символом $\lfloor x \rfloor$ целую часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Следствие 9.3. Для $\varphi \in B_n$ предположим, что некоторая сопряжённая с φ коса допускает артиновское слово длины m. Тогда

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \left\lfloor \frac{m}{n-1} \right\rfloor.$$

Доказательство. Для любого слова длины m существует такое $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, что это слово содержит не более $\lfloor m/(n-1) \rfloor$ вхождений образующих σ_k и σ_k^{-1}. Выберем такое k и применим лемму 9.2. □

9.1.2 Слова в образующих Бирман–Ко–Ли

Лемма 9.4. Для $\varphi \in B_n$ предположим, что некоторая сопряжённая с φ коса допускает слово в ленточных образующих, содержащее ровно m таких образующих. Тогда

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

Доказательство. Два левых неравенства представляют собой теорему 6.21 и утверждение (4) леммы 3.4. Докажем правое неравенство. Поскольку числа переноса инвариантны относительно сопряжения, можно считать, что сама коса φ допускает указанное слово.

Для слова w в ленточных образующих пусть $r_k(w)$ обозначает число таких входящих в это слово образующих $a_{i,j}^{\pm 1}$, что $k \in \{i, j\}$. Сначала докажем оценку $\tau_\partial(\varphi) \leqslant r_k(w)$.

Рассмотрим множество тех ленточных образующих, направляющие дуги которых инцидентны проколу z_k:

$$S(k) := \{a_{i,k}^{\pm 1} \mid i < k\} \cup \{a_{k,j}^{\pm 1} \mid k < j\}.$$

Запишем слово w в виде

$$w = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \zeta_2 \cdots \zeta_r \psi_r,$$

где $r = r_k(w)$, каждая образующая ζ_s принадлежит множеству $S(k)$, а каждое слово ψ_s является словом (возможно пустым) в ленточных образующих, не принадлежащих множеству $S(k)$.

Заметим, что каждая коса ψ_s сохраняет дугу δ_k. С другой стороны, для $\zeta_s \in S(k)$ дуга $\zeta_s(\delta_k)$ не пересекается с дугой δ_k: полускручивание ζ_s перемещает прокол z_k через соответствующую дугу в верхней части диска, и образ $\zeta_s(\delta_k)$ можно расположить вдоль одной из сторон регулярной окрестности объединения дуги δ_k и дуги, направляющей полускручивание ζ_s. Тем самым дуги δ_k и $\zeta_s(\delta_k)$ задают смежные вершины графа $\mathcal{A}_\partial$.

Определим $g_0, \ldots, g_r \in B_n$ формулой

$$g_s = \psi_0 \zeta_1 \psi_1 \cdots \zeta_s \psi_s,$$

где $g_0 = \psi_0$. Получаем $g_0(\delta_k) = \delta_k$ и

$$g_s(\delta_k) = g_{s-1} \zeta_s \psi_s(\delta_k) = g_{s-1} \zeta_s(\delta_k)$$

для $s > 0$. Применяя g_{s-1} к ребру графа $\mathcal{A}_\partial$, соединяющему дуги δ_k и $\zeta_s(\delta_k)$, получаем ребро между дугами $g_{s-1}(\delta_k)$ и $g_s(\delta_k)$. Следовательно, последовательность

$$\delta_k = g_0(\delta_k), g_1(\delta_k), \ldots, g_r(\delta_k) = \varphi(\delta_k)$$

представляет собой путь в графе $\mathcal{A}_\partial$ длины $r = r_k(w)$. Поэтому $d(\delta_k, \varphi(\delta_k)) \leqslant r$. Взятие минимума по всем вершинам даёт соотношение $\tau_\partial(\varphi) \leqslant r_k(w)$. Остаётся лишь выбрать индекс k.

Заметим, что в сумме $r_1(w) + \ldots + r_n(w)$ каждая образующая $a_{i,j}^{\pm 1}$ учитывается ровно дважды: один раз для i и один раз для j. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} r_k(w) = 2m.$$

По принципу Дирихле существует такое k, что

$$r_k(w) \leqslant \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor .$$

Для этого k предыдущая оценка даёт требуемый результат. □

9.2 Пороговые признаки простоты и жёсткости

Совместим результаты предыдущего раздела с исчислением Бирман–Менэско.

Напомним, что в разделе 2.4 была определена допустимость дестабилизации, рокировки и переворота. Следующий результат обобщает оценки А. Малютина [227, 229], возникшие в связи с гипотезами Менэско [202, Problem 1.84]; см. лемму 2.35.

Предложение 9.5. Для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются следующие свойства:

1. если класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию, то

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant 1;$$

2. если класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку, то

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant 2;$$

3. если класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает переворот, то

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 2, \qquad \ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant 3.$$

Доказательство. Поскольку функции scl_∂, ℓ_∂ и τ_∂ инвариантны относительно сопряжения, можно заменить φ косой соответствующего вида. В случае дестабилизации можно выбрать представителя класса сопряжённости, задаваемого словом с ровно одним вхождением образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. В случае рокировки аналогичное слово содержит не более одного вхождения каждого из σ_{n-1} и σ_{n-1}^{-1} и ровно два вхождения $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. В случае переворота аналогичное слово содержит не более двух вхождений каждого из σ_{n-1} и σ_{n-1}^{-1} и ровно три вхождения $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$. Следовательно, результат непосредственно следует из лемм 9.2 и 9.1. □

Замечание 9.6. Утверждение (1) предложения 9.5 имеет обратное на уровне числа переноса τ_∂. А именно, согласно [204, Lemma 1], если существует такая неразделяющая граничная дуга $\alpha \in \mathcal{A}_\partial$, что прокол, в котором оканчивается дуга α, не сохраняется косой φ, и выполняется неравенство $d(\alpha, \varphi(\alpha)) \leqslant 1$, то $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию. Отсюда нетрудно вывести, что если коса φ замыкается в узел, то

$$\widehat{\varphi} \text{ допускает дестабилизацию} \iff \tau_\partial(\varphi) \leqslant 1.$$

Родственные необходимые и достаточные условия дестабилизируемости разложений трёхмерных многообразий в открытую книгу представлены в работах Т. Сайто, Р. Ямамото [277], Дж. Этная и Ю. Ли [114, Theorem 1.5]. ◊

Естественно спросить, имеют ли остальные импликации аналогичные обратные утверждения, возможно, при дополнительных предположениях. Следующий пример показывает, что существуют классы сопряжённости кос, замыкающиеся в узлы, имеющие малое число переноса ($\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2$) и не допускающие рокировок.

Пример 9.7. Пусть $\rho_n = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \in B_n$ — периодическая коса типа $(1, n)$. Тогда коса

$$\varphi = \rho_n^{n+1} = \Delta_n^2 \rho_n$$

является периодической типа $(n+1, n)$. По следствию 6.8 получаем

$$\ell_\partial(\varphi) = \frac{n+1}{n}.$$

По доказательству леммы 9.1 имеем $d(\delta_n, \rho_n(\delta_n)) \leqslant 1$. Более того,

$$\begin{aligned} d(\delta_n, (\Delta_n^2 \rho_n)(\delta_n)) &\leqslant d(\delta_n, \Delta_n^2(\delta_n)) + d(\Delta_n^2(\delta_n), (\Delta_n^2 \rho_n)(\delta_n)) \\ &= d(\delta_n, \Delta_n^2(\delta_n)) + d(\delta_n, \rho_n(\delta_n)) \\ &\leqslant 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2$, и поскольку

$$1 < \frac{n+1}{n} = \ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi),$$

из целочисленности значений числа переноса τ_∂ получаем соотношение $\tau_\partial(\varphi) = 2$. В частности,

$$|\tau_\partial(\varphi) - \ell_\partial(\varphi)| = 1 - \frac{1}{n}.$$

Утверждается, что класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок. Действительно, по следствию 6.18 получаем

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \frac{n+1}{n} > 1,$$

так что искомое утверждение следует из утверждения (2) предложения 9.5. ◊

В частности, пример 9.7 показывает, что щель в оценке $\ell_\partial \leqslant \tau_\partial$ может быть сколь угодно близка к 1.

9.2.1 Признаки простоты

Теорема 9.8. Для косы $\varphi \in B_n$, если $\tau_\partial(\varphi) > 2$ или $2\operatorname{scl}_\partial(\varphi) > 1$, то зацепление L_φ является простым. В частности, если $\ell_\partial(\varphi) > 2$, то L_φ является простым[3].

Доказательство. Предположим, что зацепление L_φ не является простым. По лемме 2.29 класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. Согласно предложению 9.5, выполняются неравенства $\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2$ и $2\operatorname{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 1$, что противоречит предположению. Следовательно, зацепление L_φ является простым. □

Этот результат расширяет соответствующие признаки Малютина–Нецветаева [235, Theorem 6.2] и Малютина [231, Theorem 1]; см. лемму 2.36. В качестве иллюстрации теоремы 9.8 воспользуемся закрученностью ω_n на группе кос B_n и приведём достаточное условие простоты замкнутых положительных кос.

Пример 9.9. Для любой нерасщепимой положительной косы $\varphi \in B_n$ замыкание косы $\Delta_n^2\varphi$ является простым зацеплением. Действительно, это следует из леммы 2.44 применением теоремы 9.8, поскольку[4]

$$2\operatorname{scl}_\partial(\Delta_n^2\varphi) \geqslant \omega_n(\Delta_n^2\varphi) = \omega_n(\varphi) + 1 > 1.$$

Отметим также, что коса $\Delta_n^2\varphi$ является минимальной [127, Corollary 2.4]. Кроме того, замыкание любой положительной нерасщепимой (соответственно несоставной) косы является нерасщепимым (соответственно несоставным) зацеплением [99, 265, 124]. ◊

9.2.2 Признаки минимальности и жёсткости

Приведём обобщение теоремы Малютина–Нецветаева [235, Theorem 5.1] с закрученности на числа переноса; ср. [172, Proposition 2.8(4)] и [121]. Нам потребуется введённое в разделе 2.4 понятие блочно-нитевых диаграмм.

Предложение 9.10. Для любой блочно-нитевой диаграммы $\mathcal{D}$ существует целое число $m = m(\mathcal{D})$ такое, что если $\tau_\partial(\varphi) > m$, то класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ не допускает диаграммы $\mathcal{D}$.

Доказательство. Для диаграммы $\mathcal{D}$, заданной системой кос ψ_i и интервалов $[p_i, q_i]$, где $i \in \{1, \dots, k\}$, положим

$$H_i := \langle \sigma_{p_i}, \dots, \sigma_{q_i} \rangle \subset B_n, \qquad Z := \langle \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \subset B_n.$$

Поскольку $[p_i, q_i] \neq [1, n-1]$, существует такая коса $a_i \in B_n$, зависящая только от интервала $[p_i, q_i]$, что

$$a_i H_i a_i^{-1} \subset Z.$$

[3] См. определение простоты в разделе 2.1.1.
[4] Здесь мы используем следствие 6.16.

Положим $a_{k+1} := a_1$ и

$$\kappa_i := a_i \psi_i a_{i+1}^{-1} \in B_n.$$

Выберем для всех кос κ_i выражения в образующих Артина; пусть m — суммарное число вхождений образующей $\sigma_1^{\pm 1}$ в эти выбранные выражения. Число m зависит только от блочно-нитевой диаграммы $\mathcal{D}$.

Предположим, что класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает диаграмму $\mathcal{D}$. Тогда коса φ сопряжена с косой вида

$$\gamma_1 \psi_1 \gamma_2 \psi_2 \cdots \gamma_k \psi_k, \qquad \gamma_i \in H_i.$$

Сопрягая эту косу косой a_1, получаем

$$a_1 (\gamma_1 \psi_1 \gamma_2 \psi_2 \cdots \gamma_k \psi_k) a_1^{-1} = \zeta_1 \kappa_1 \zeta_2 \kappa_2 \cdots \zeta_k \kappa_k,$$

где

$$\zeta_i := a_i \gamma_i a_i^{-1} \in Z.$$

Образующая $\sigma_1^{\pm 1}$ может входить только в заранее выбранные выражения для кос κ_i, причём таких вхождений ровно m. Применяя версию леммы 9.1, в которой роль образующей $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ играет образующая $\sigma_1^{\pm 1}$, получаем

$$\tau_\partial(\varphi) = \tau_\partial(a_1 \varphi a_1^{-1}) \leqslant m.$$

Тем самым условие $\tau_\partial(\varphi) > m$ исключает допустимость такой диаграммы $\mathcal{D}$. □

Замечание 9.11. Целое число $m = m(\mathcal{D})$ можно выбрать так, чтобы оно совпадало с числом, использованным в работе [172, Proposition 2.7]. ◊

Зафиксируем для каждой диаграммы $\mathcal{D}$ выбор константы $m(\mathcal{D})$, указанный в замечании 9.11. Используя обозначения леммы 2.31, положим

$$\rho(n) := \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{S}_n} m(\mathcal{D}).$$

Теорема 9.12. Если коса $\varphi \in B_n$ удовлетворяет неравенству $\tau_\partial(\varphi) > \rho(n)$, то она является жёсткой. В частности, если $\ell_\partial(\varphi) > \rho(n)$, то φ является жёсткой.

Доказательство. По лемме 2.31, либо коса φ является жёсткой, либо класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает некоторую диаграмму $\mathcal{D} \in \mathcal{S}_n$. Второй вариант невозможен: $m(\mathcal{D}) \leqslant \rho(n)$, а если $\tau_\partial(\varphi) > \rho(n)$ или $\ell_\partial(\varphi) > \rho(n)$, то $\tau_\partial(\varphi) > m(\mathcal{D})$. В таком случае предложение 9.10 исключает допустимость диаграммы $\mathcal{D}$. □

Этот результат аналогичен теореме Дж. Джонсона [191, Theorem 1]; см. пример 3.28.

Покажем, что для торических узлов пороговое значение $\rho(n)$ можно существенно уменьшить.

Предложение 9.13. Пусть замыкание косы $\varphi \in B_n$ является торическим узлом. Если выполняется хотя бы одно из неравенств $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 1$ или $\ell_\partial(\varphi) > 2$, то коса φ является жёсткой.

Доказательство. Предположим, что коса φ не является жёсткой. Тогда, по лемме 2.30, либо она является периодической, либо класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.

Если коса φ является периодической, то она сопряжена с некоторой степенью одной из кос ρ_n или $\sigma_1\rho_n$. Поскольку зацепление L_φ является узлом, а любая степень косы $\sigma_1\rho_n$ сохраняет первый прокол, коса φ сопряжена с косой ρ_n^m для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Поскольку коса φ не является жёсткой, получаем $|m| < n$, откуда

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\rho_n^m) = \ell_\partial(\rho_n^m) = \left|\frac{m}{n}\right| < 1,$$

противоречие.

Если же класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку, то из предложения 9.5 следуют неравенства $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 1$ и $\ell_\partial(\varphi) \leqslant 2$, противоречие. □

В отличие от пороговых значений, которые фигурируют в других признаках, рассматриваемых в настоящей работе, вопрос об эффективной оценке константы $\rho(n)$ остаётся открытым. Следующий пример, предложенный А. Малютиным и Н. Нецветаевым [235], показывает, что $\rho(n) \geqslant n-1$; ср. [213, p. 237].

Пример 9.14. Напомним, что $\rho_n = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \in B_n$ — периодическая коса типа $(1, n)$. Для $m \geqslant 1$ положим

$$\beta_{n,m} := (\rho_n \Delta_n \rho_n \Delta_n^{-1})^{m-1} \rho_n.$$

Согласно [235, Assertion 7.6], имеем $|\omega_n(\beta_{n,m})| > m-1$, и кроме того, замыкания кос $\beta_{n,m}$ и $\beta_{m,n}$ изотопны. В частности, при $2 \leqslant m < n$ коса $\beta_{n,m}$ не является минимальной. Полагая $m = n-1$, по теореме 9.12 и предложению 4.25 получаем

$$n-2 < |\omega_n(\beta_{n,n-1})| \leqslant \ell_\partial(\beta_{n,n-1}) \leqslant \rho(n).$$

Поскольку число $\rho(n)$ является целым, отсюда следует искомая оценка $\rho(n) \geqslant n-1$.

Покажем также, что при $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ коса $\beta_{n,m}$ является псевдоаносовской. Для $n = 3$ это проверяется переходом к фактор-группе $B_3/Z(B_3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ и прямым вычислением абсолютного значения следа (оно равно $2m-1 > 2$); см. [117, Section 13.1].

Пусть теперь $n \geqslant 4$. Непериодичность косы $\beta_{n,m}$ проверяется с помощью экспоненциальной суммы и свойства $|\omega_n(\beta_{n,m})| > m-1$; проверим её неприводимость.

Поскольку коса $\rho_n \Delta_n \rho_n \Delta_n^{-1}$ является крашеной, перестановка множества проколов, индуцированная косой $\beta_{n,m}$, имеет единственную орбиту, и поэтому коса $\beta_{n,m}^n$ также является крашеной. С каждым трёхэлементным множеством $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ связан гомоморфизм $d_I \colon P_n \to P_3$ групп крашеных кос, отвечающий забыванию всех проколов,

индексы которых не принадлежат I. Поскольку $d_I\bigl(\beta^n_{n,m}\bigr) = \beta^3_{3,m}$, имеем

$$d_I\bigl(\beta^{n!}_{n,m}\bigr) = \beta^{3(n-1)!}_{3,m}.$$

Предположим, что коса $\beta_{n,m}$ приводима. Тогда её степень $\beta^{n!}_{n,m}$ сохраняет некоторую существенную кривую C. Выберем два прокола в области, ограниченной кривой C, и один прокол вне этой области. После забывания остальных проколов кривая C остаётся существенной и сохраняется косой $\beta^{3(n-1)!}_{3,m}$. Это противоречит тому, что эта коса, будучи ненулевой степенью псевдоаносовской косы $\beta_{3,m}$, является псевдоаносовской. $\Diamond$

Замечание 9.15. В работе [235] выдвинута гипотеза, что можно взять $\rho(n) = n - 1$. Часть этой гипотезы, касающаяся минимальности, подтверждается результатом П. Фелларе и Д. Хаббард (лемма 2.37). В работе [172] Ито показал, что $\rho(3) \leqslant 2$, и, согласно П. Деорнуа [108, p. 90], Ито также анонсировал, что $\rho(n) \leqslant n + 1$, а Х. Мацуда анонсировал, что $\rho(4) \leqslant 4$. Однако эти утверждения, по-видимому, не были опубликованы. $\Diamond$

Замечание 9.16. В работе [108] упоминается стратегия доказательства Ито следующей гипотезы: если $|\omega_n(\varphi)| > k - 1$ для некоторого $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, то в любом представлении зацепления в виде замыкания косы число нитей составляет не менее k. По-видимому, эта стратегия, если её реализовать, могла бы быть обобщена с ω_n на ℓ_∂. $\Diamond$

9.3 Поверхности в дополнениях и числа переноса

Перейдём к оценкам введённых в разделе 2.1 топологических характеристик замыкания косы, формулируемых в терминах числа переноса ℓ_∂. Для этого обратимся к теории слоений Бирман–Менэско, позволяющей связать с поверхностью F, специальным образом расположенной в дополнении $S^3 \setminus L_\varphi$ замыкания косы φ, однопараметрическое семейство дуг и кривых в проколотом диске.

Ключевое наблюдение состоит в том, что седловые перестройки в этом семействе порождают пути в графе $\mathcal{A}_\partial$ закреплённых граничных дуг. Поэтому малым значениям величины $|\chi(F)|$ отвечают малые смещения под действием косы φ; эквивалентно, большая величина $\ell_\partial(\varphi)$ обеспечивает большую сложность поверхности F. Отсюда будут получены оценки эйлеровой характеристики поверхностей Зейферта и, посредством алгоритма Зейферта, числа перекрёстков:

$$\ell_\partial(\varphi) \lesssim |\chi_3(L_\varphi)| + 1, \qquad \ell_\partial(\varphi) \lesssim \operatorname{cr}(L_\varphi) + 1.$$

Аналогичный метод применим к замкнутым существенным поверхностям и в разделе 9.4 позволит связать существенные торы с приводимостью косы.

9.3.1 Седловые перестройки и число переноса

Напомним необходимую для дальнейшего изложения часть теории слоений Бирман–Менэско; подробное изложение см. в монографии Д. Лафонтена и У. Менэско [213, Chapter 10] и работе Э. Финкельштейн и Дж. Бирман [54].

Рассмотрим стандартное разложение трёхмерной сферы S^3 в открытую книгу с переплётом $A \subset S^3$:

$$S^3 = \bigcup_{\theta \in S^1} H_\theta, \qquad A = \bigcap_{\theta \in S^1} H_\theta,$$

где каждая поверхность H_θ представляет собой диск с краем A.

Зафиксируем косу $\varphi \in B_n$. Тогда

$$V_\varphi = S^3 \backslash A.$$

Каждая страница H_θ пересекает зацепление $L_\varphi \subset V_\varphi$ ровно в n точках, а каждая разность $H_\theta \backslash L_\varphi$ является диском с n проколами. Следуя [54], будем предполагать, что зацепление L_φ нерасщепимо.

Замечание 9.17. Нам потребуются два эквивалентных способа рассматривать расслоение $V_\varphi \to S^1$. В первом способе ключевую роль играет семейство наборов из n точек на страницах H_θ, параметризованное точкой $\theta \in S^1$. Для оценок числа переноса удобнее разрезать пространство V_φ по фиксированной странице H_0 и тривиализовать полученное расслоение над $[0,1]$. В этой модели для V_φ страница H_1 отождествляется со страницей H_0 гомеоморфизмом, представляющим класс отображений φ. $\Diamond$

Зафиксируем компактную поверхность $F \subset S^3$, край которой, если он непуст, совпадает с L_φ, а внутренность не пересекает L_φ. Мы предполагаем, что поверхность F несжимаема в $S^3 \backslash L_\varphi$. Следуя [54], приведём F изотопией в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско[5]. Для каждого неособого значения θ каждая компонента пересечения $F \cap H_\theta$ является либо существенной дугой, либо замкнутой кривой, называемой *c-окружностью*.

Компонента, являющаяся дугой, называется *a-дугой*, если один из её концов лежит на пересечении $A \cap F$, а другой лежит в проколе; она называется *b-дугой*, если оба конца лежат на пересечении $A \cap F$. Назовём c-окружность *существенной в смысле Бирман–Менэско*, если ограниченный ею диск в H_θ содержит хотя бы одну точку из $L_\varphi \cap H_\theta$.

Следуя замечанию 9.17, перейдём к модели разрезанного пространства. В результате получим однопараметрическое семейство одномерных срезов поверхности F с параметром $\theta \in [0,1]$ в фиксированном проколотом диске H_0. В этом семействе компоненты пересечения $F \cap H_\theta$ меняются только в конечном числе моментов, отвечающих седловым

[5] В частности, F трансверсально пересекает ось A по конечному множеству точек; вблизи каждой такой точки поверхность представляет собой радиально расслоенный диск; все страницы, кроме конечного числа, трансверсальны поверхности F; каждая особая страница содержит ровно одну точку касания, представляющую собой седло на F.

точкам поверхности F. Если α — компонента пересечения $F \cap H_0$, то соответствующая компонента пересечения $F \cap H_1$ есть $\varphi(\alpha)$; см. [179, Section 2.1.5].

Зафиксируем точку $v \in F \cap A$; далее считаем её отмеченной точкой на границе проколотого диска H_0 и отслеживаем только дуги, инцидентные v. Поскольку при выборе различных отмеченных точек на крае мы получаем эквивариантно изоморфные графы $\mathcal{A}_\partial$, соответствующие числа переноса не меняются.

Для неособого значения параметра θ пусть $\gamma = \gamma_v(\theta)$ — единственная компонента пересечения $F \cap H_\theta$, являющаяся дугой с концом в отмеченной точке v. Если $\gamma_v(\theta)$ является a-дугой, то она непосредственно задаёт вершину графа $\mathcal{A}_\partial$. Если $\gamma_v(\theta)$ является b-дугой с концами v и w на крае диска, то зафиксируем малый воротник края, не пересекающий проколов, и сдвинем конец w вдоль этого воротника в направлении, заданном ориентацией края, к отмеченной точке v. Полученную граничную дугу обозначим символом $\widehat{\gamma}$; для a-дуг полагаем $\widehat{\gamma} := \gamma$.

При каждом особом значении θ компоненты пересечения $F \cap H_\theta$ подвергаются одной вложенной перестройке вдоль так называемой *направляющей дуги*; см. [213, p. 33] и [54, Theorem 1.1]. Мы говорим, что эта перестройка *инцидентна* точке $v \in F \cap A$, если локальная компонента $\gamma_v(\theta - \epsilon)$ изменяется этой перестройкой, что эквивалентно тому, что v является концом одной из локальных ветвей седловой особенности. *Валентностью* вершины v называется число особых значений параметра θ, при которых перестройка инцидентна точке v.

Лемма 9.18. Предположим, что перестройка при θ инцидентна точке v. Тогда вершины графа $\mathcal{A}_\partial$, соответствующие $\gamma_v(\theta - \epsilon)$ и $\gamma_v(\theta + \epsilon)$, равны или смежны.

Доказательство. Выберем на странице $H_{\theta-\epsilon}$ малый прямоугольник R, отвечающий направляющей дуге и не содержащий проколов; локально вложенная перестройка заменяет две противоположные стороны этого прямоугольника на две другие противоположные стороны. Следовательно, в регулярной окрестности объединения соответствующих компонент с R дуги $\alpha := \gamma_v(\theta - \epsilon)$ и $\beta := \gamma_v(\theta + \epsilon)$ можно считать непересекающимися за исключением, возможно, общего начального отрезка у точки v; этот общий отрезок можно убрать сколь угодно малой изотопией, сохраняющей конец v. Если одна из дуг является b-дугой, описанная выше процедура сдвига в воротнике может быть выполнена на разных уровнях фиксированного воротника края, так что она не создаёт новых внутренних пересечений. Следовательно, граничные дуги $\widehat{\alpha}$ и $\widehat{\beta}$ можно выбрать непересекающимися, а соответствующие вершины графа $\mathcal{A}_\partial$ либо совпадают, либо соединены ребром. □

Лемма 9.19. Если на поверхности F имеется точка $v \in F \cap A$ валентности s, то

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant s.$$

Доказательство. Поскольку $\ell_\partial \leqslant \tau_\partial$ по утверждению (4) леммы 3.4, достаточно доказать правое неравенство. При изменении параметра θ от 0 до 1 происходит ровно s

седловых перестроек, инцидентных точке v. Таким образом, согласно лемме 9.18, однопараметрическое семейство даёт путь в графе $\mathcal{A}_\partial$, длина которого не превышает s, от некоторой вершины α до $\varphi(\alpha)$. Следовательно, $\tau_\partial(\varphi) \leqslant s$. □

Таким образом, лемма 9.19 сводит задачу верхней оценки числа переноса к поиску точки достаточно малой валентности.

9.3.2 Поверхности Зейферта, род и число перекрёстков

Теорема 9.20. Для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant \frac{-4\chi_3(L_\varphi)}{n+2} + 4.$$

В частности, если L_φ — узел, то

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant \frac{8g_3(L_\varphi) - 4}{n+2} + 4.$$

Доказательство. Поскольку $\ell_\partial \leqslant \tau_\partial$, достаточно доказать пару правых неравенств.

Пусть F — поверхность Зейферта зацепления L_φ, для которой выполняется соотношение $\chi(F) = \chi_3(L_\varphi)$. Сначала предположим, что зацепление L_φ расщепимо. Тогда по теореме 9.8 имеем $\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2$. Поскольку поверхность F связна, а её край имеет не менее двух компонент, выполняется неравенство $\chi(F) \leqslant 0$. Следовательно,

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2 \leqslant \frac{-4\chi_3(L_\varphi)}{n+2} + 4,$$

и требуемая оценка доказана.

Пусть теперь зацепление L_φ нерасщепимо. Если $\chi(F) > 0$, то F является диском, а L_φ — тривиальным узлом. Снова применяя теорему 9.8 и используя неравенство $n \geqslant 3$, получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2 \leqslant 4 - \frac{4}{n+2} = \frac{-4\chi_3(L_\varphi)}{n+2} + 4.$$

Далее будем считать, что $\chi(F) \leqslant 0$ и зацепление L_φ нерасщепимо.

Поскольку $\chi(F) = \chi_3(L_\varphi)$, поверхность F несжимаема. Далее, как и выше, рассматриваем разложение трёхмерной сферы S^3 в открытую книгу с переплётом A, представляющим собой ось замыкания L_φ косы φ, и предполагаем, что F приведена в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско. Дальнейшее рассуждение следует схеме доказательства Ито [171, Theorem 1.2] и состоит из рассмотрения трёх случаев; см. также [213, Theorem 10.18].

В первом случае на поверхности F имеется точка, валентность которой не превышает 3. Тогда, по лемме 9.19,

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 3 \leqslant \frac{-4\chi(F)}{n+2} + 4,$$

поскольку $\chi(F) \leqslant 0$.

Во втором случае Ито показывает, что коса φ сопряжена с косой, допускающей представление в виде произведения $n - \chi(F)$ ленточных образующих. По лемме 9.4,

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant \left\lfloor \frac{2(n-\chi(F))}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-2\chi(F)}{n} + 2 \right\rfloor \leqslant \frac{-4\chi(F)}{2n} + 2 \leqslant \frac{-4\chi(F)}{n+2} + 4.$$

В третьем случае, согласно комбинаторному анализу слоения на F, в $F \cap A$ найдётся точка, валентность которой складывается из p перестроек, локально вовлекающих a-дуги, и q перестроек, вовлекающих b-дуги (общая валентность равна $p+q$), такая, что выполняется оценка

$$p + \frac{q}{2} \leqslant -\frac{2\chi(F)}{n+2} + 2.$$

Поскольку

$$p + q \leqslant 2p + q = 2\left(p + \frac{q}{2}\right),$$

по лемме 9.19 получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant -\frac{4\chi(F)}{n+2} + 4.$$

Это доказывает основную оценку. Если L_φ — узел, то $-\chi(F) = 2g(F) - 1$, и потому

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant \frac{8g(F)-4}{n+2} + 4. \qquad \square$$

Этот результат расширяет теорему Т. Ито с коэффициента дробного скручивания Дена на числа переноса; см. лемму 2.40.

На основе теоремы 9.20 получаем следующую нижнюю оценку числа перекрёстков.

Теорема 9.21. Для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant \frac{4\,(\mathrm{cr}(L_\varphi) - 1)}{n+2} + 4.$$

Доказательство. Поскольку $\ell_\partial \leqslant \tau_\partial$, достаточно доказать правое неравенство.

Сначала предположим, что зацепление L_φ расщепимо. Тогда по теореме 9.8 имеем $\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2$. Используя неравенство $n \geqslant 3$, получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2 \leqslant 4 - \frac{4}{n+2} \leqslant 4 + \frac{4\,(\mathrm{cr}(L_\varphi) - 1)}{n+2}.$$

Пусть теперь зацепление L_φ нерасщепимо. Выберем его диаграмму D с минимальным числом перекрёстков; в этом случае $\mathrm{cr}(D) = \mathrm{cr}(L_\varphi)$. Поскольку зацепление L_φ нерасщепимо, диаграмма D связна. Применяя алгоритм Зейферта к D, получаем поверхность Зейферта F_D, для которой

$$\chi(F_D) = s(D) - \mathrm{cr}(D),$$

где $s(D)$ — число окружностей Зейферта диаграммы D. Используя оценку $s(D) \geqslant 1$, получаем

$$\chi_3(L_\varphi) \geqslant \chi(F_D) = s(D) - \operatorname{cr}(L_\varphi) \geqslant 1 - \operatorname{cr}(L_\varphi).$$

Из теоремы 9.20 получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant \frac{-4\chi_3(L_\varphi)}{n+2} + 4 \leqslant \frac{4\,(\operatorname{cr}(L_\varphi) - 1)}{n+2} + 4. \qquad \square$$

Пример 9.22. Следуя [100, Section 10.5], приведём ряд свойств торических зацеплений $T_{p,q}$. Зацепление $T_{p,q}$ является простым при $|p|, q \geqslant 2$. Для торических узлов, для которых $|p| > q \geqslant 2$, имеем

$$g_3(T_{p,q}) = \frac{(|p|-1)(q-1)}{2}, \qquad \operatorname{cr}(T_{p,q}) = |p|(q-1).$$

Коса ρ_q^p, представляющая зацепление $T_{p,q}$, минимальна тогда и только тогда, когда $q \leqslant |p|$. Если $q \leqslant |p|$ и $T_{p,q}$ — узел, то она является жёсткой.

С другой стороны,

$$2\operatorname{scl}_\partial(\rho_q^p) = \ell_\partial(\rho_q^p) = \left|\frac{p}{q}\right|, \qquad 2\operatorname{scl}_\circ(\rho_q^p) = \ell_\circ(\rho_q^p) = 0.$$

Пусть $q \geqslant 3$. Из теоремы 9.8 следует, что зацепление $T_{p,q}$ является простым при $|p| > q$. Из теоремы 9.12 следует, что коса ρ_q^p является минимальной и жёсткой при $|p|/q > \rho(q)$ (предположительно $\rho(q) = q - 1$). Из теорем 9.20 и 9.21 следуют неравенства

$$g_3(T_{p,q}) \geqslant \frac{(|p|-4q)(q+1)+|p|}{8q}, \qquad \operatorname{cr}(T_{p,q}) \geqslant \frac{(q+2)(|p|-4q)}{4q} + 1. \qquad \lozenge$$

9.3.3 Замкнутые существенные поверхности

Далее рассмотрим замкнутые существенные поверхности в дополнении зацепления L_φ и установим условия, при которых точки пересечения таких поверхностей с осью A могут быть устранены.

Зафиксируем замкнутую существенную поверхность $F \subset S^3 \backslash L_\varphi$ в дополнении замыкания косы $\varphi \in B_n$, отличную от сферы S^2. Будем считать, что F находится в положении, стандартном для теории Бирман–Менэско. В этом случае, согласно [54, Theorem 1.1], можно считать, что для любого неособого значения θ каждая компонента пересечения $F \cap H_\theta$ является существенной b-дугой или c-окружностью, существенной в смысле Бирман–Менэско.

Обозначим через $g > 0$ род поверхности F. Следующий результат основан на доказательстве [172, Theorem 1.2].

Предложение 9.23. Если поверхность F пересекает ось замыкания косы, то

$$\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant 4g.$$

Доказательство. Поскольку $\ell_\partial \leqslant \tau_\partial$, достаточно доказать правое неравенство.

Если зацепление L_φ расщепимо, то по теореме 9.8 имеем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2 \leqslant 4g.$$

Поэтому далее считаем, что зацепление L_φ нерасщепимо.

Доказательство Ито состоит из двух частей: в первой части анализируются так называемые мозаичные поверхности [172, p. 490], а во второй — смешанные [172, p. 493].

Для смешанных поверхностей доказательство разбивается на три случая. В первом случае, согласно комбинаторному анализу слоения на F, имеется точка, валентность которой не превышает $g+3$, поэтому, по лемме 9.19 получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant g+3 \leqslant 4g.$$

Во втором случае на поверхности F имеется точка, валентность которой не превышает 3, откуда получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 3 \leqslant 4g.$$

В третьем случае имеется точка, валентность которой не превышает $4g$, откуда

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 4g.$$

Для мозаичных поверхностей Ито показывает, что на F имеется точка, валентность которой не превышает $2g+2$, если только на F уже нет точки, валентность которой не превышает 4. В этих случаях соответственно получаем

$$\tau_\partial(\varphi) \leqslant 2g+2 \leqslant 4g, \qquad \tau_\partial(\varphi) \leqslant 4 \leqslant 4g. \qquad \square$$

Следствие 9.24. При $\tau_\partial(\varphi) > 4g$ (в частности, при $\ell_\partial(\varphi) > 4g$) поверхность F не пересекает ось замыкания косы. В этом случае для любого неособого значения θ каждая компонента пересечения $F \cap H_\theta$ является c-окружностью, существенной в смысле Бирман–Менэско.

Доказательство. Если бы поверхность F пересекала ось замыкания косы, то предложение 9.23 дало бы $\ell_\partial(\varphi) \leqslant \tau_\partial(\varphi) \leqslant 4g$. $\square$

Замечание 9.25. Родственные оценки в терминах чисел переноса в графе кривых $\mathcal{C}$ и графе дуг и кривых $\mathcal{AC}$ установлены в [14, Theorem 3.1] и [291, Theorem 1.3]; также ср. пример 3.26. $\lozenge$

Случай рода $g = 1$, имеющий особое значение для распознавания геометрического типа дополнения замыкания, будет рассмотрен в следующем разделе.

9.4 Динамический тип кос и геометрический тип замыканий

Установим двустороннюю связь между приводимостью косы и наличием существенных торов в дополнении её замыкания. Сначала при помощи результатов предыдущего раздела с каждым таким тором свяжем инвариантную существенную мультикривую, а затем установим существенность тора, отвечающего орбите при действии косы на компонентах произвольной инвариантной мультикривой; ср. лемму 8.10.

9.4.1 От неприводимости к аторичности

Предложение 9.26. Пусть дополнение $S^3\backslash L_\varphi$ замыкания косы $\varphi \in B_n$ содержит существенный тор. Тогда при $\tau_\partial(\varphi) > 4$ (в частности, при $\ell_\partial(\varphi) > 4$) коса φ является приводимой.

Доказательство. Пусть F — существенный тор в дополнении зацепления L_φ; приведём его в положение, стандартное для теории Бирман–Менэско. Согласно следствию 9.24, тор F не пересекает ось замыкания косы и для каждого неособого значения θ пересечение $F \cap H_\theta$ является набором c-окружностей, существенных в смысле Бирман–Менэско.

Согласно формуле Пуанкаре–Хопфа, общее число особых параметров θ совпадает с числом $|\chi(F)|$; ср. [291, Lemma 3.2]. Поскольку F является тором, $\chi(F) = 0$, и потому каждый параметр является неособым. Следовательно, сужение стандартного расслоения пространства V_φ на тор $F \subset V_\varphi$ задаёт расслоение $F \to S^1$, а класс отображений φ переставляет c-окружности из набора F_0.

Покажем, что по крайней мере одна такая c-окружность является существенной кривой в H_0. Выберем одну из этих c-окружностей; по существенности в смысле Бирман–Менэско диск $D \subseteq H_0$, ограниченный этой c-окружностью, содержит хотя бы один прокол.

Если диск D содержит ровно один прокол, то тор F, отвечающий орбите c-окружности, параллелен границе трубчатой окрестности соответствующей компоненты зацепления L_φ. В этом случае тор F параллелен краю, вопреки его существенности.

Если диск D содержит все n проколов, то c-окружность параллельна краю страницы. В этом случае тор F параллелен границе трубчатой окрестности оси A и сжимаем в $S^3\backslash L_\varphi$ со стороны этой оси, что также противоречит его существенности.

Таким образом, выбранная c-окружность является существенной кривой в H_0. Отсюда следует, что мультикривая, отвечающая полному набору c-окружностей, является существенной[6]. Поскольку коса φ сохраняет эту мультикривую, φ является приводи-

[6] Действительно, компоненты этой мультикривой ограничивают в H_0 непересекающиеся проколотые диски и, следовательно, никакие две различные из них не параллельны.

мой. □

9.4.2 От аторичности к неприводимости

Покажем, что при $\tau_\partial(\varphi) > 2$ (в частности, при $\ell_\partial(\varphi) > 2$) из приводимости косы φ следует наличие существенного тора в дополнении $S^3\backslash L_\varphi$ её замыкания.

В следующей лемме мы рассматриваем D^2_n как диск с отмеченными точками, а не с проколами. Для косы $\varphi \in B_n$ выберем произвольную инвариантную существенную мультикривую $C = C_1 \cup \ldots \cup C_m$ на D^2_n, образующую одну орбиту при действии косы φ. Согласно замечанию 2.7, кривые, составляющие такую мультикривую, ограничивают непересекающиеся диски $D_i \subset D^2_n$. Отождествим диск D^2_n с меридиональным диском стандартного полнотория $V \subset S^3$, содержащего зацепление L_φ. Под действием косы φ диски D_i заметают полноторий $W \subset V$. Его край $T = \partial W$ является тором, вложенным в дополнение $S^3\backslash L_\varphi$ замыкания косы φ.

Лемма 9.27. Если тор T сжимаем в $S^3\backslash L_\varphi$, то $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.

Доказательство. При необходимости сопрягая косу φ, можно считать, что каждая кривая C_i стандартна, а именно, пересекает диаметр диска ровно в двух точках. Поскольку мультикривая C образует единую орбиту при действии косы φ, все диски D_i содержат одно и то же число отмеченных точек; обозначим его через k. В результате стягивания каждого диска D_i в отдельную отмеченную точку получается диск D^2_r с $r = n - m(k-1)$ отмеченными точками и индуцированная коса $\psi \in B_r$. Заметим, что коса φ получается из косы $\psi \in B_r$ процедурой раздутия m выделенных проколов в малые диски с последующим умножением на внутреннюю косу; см. раздел 2.3.2.

Замыкание косы ψ включает сердцевину полнотория W в качестве одной из компонент зацепления. Если тор $T = \partial W$ сжимаем в $S^3\backslash L_\varphi$, то, применяя стандартное рассуждение о самом внутреннем диске, получаем, что эта компонента ограничивает диск в дополнении остальных компонент зацепления. В частности, замыкание косы ψ является расщепимым зацеплением, если $m < r$, или тривиальным узлом, если $m = r$.

Сначала рассмотрим случай, когда $r \geqslant 3$. Тогда по лемме 2.29 коса ψ сопряжена с косой вида

$$\psi' := \gamma_1 \sigma_{r-1} \gamma_2 \sigma_{r-1}^{-1} \in B_r$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{r-1}$. Рассмотрим косу

$$\varphi' := \gamma_1' \zeta \gamma_2' \zeta^{-1} \in B_n,$$

полученную из косы ψ' той же процедурой раздутия проколов в малые диски, посредством которой коса φ получается из косы ψ. Поскольку такая процедура коммутирует с сопряжением, полученная коса φ' сопряжена с косой φ. Более того, имеем $\gamma_1', \gamma_2' \in B_{n-1}$,

а коса ζ, полученная из σ_{r-1} описанной выше процедурой, имеет представление вида

$$\zeta = \zeta_* \sigma_{n-1} \zeta_{**},$$

для некоторых $\zeta_*, \zeta_{**} \in B_{n-1}$. Получаем косу

$$\varphi' = (\gamma_1' \zeta_*) \sigma_{n-1} (\zeta_{**} \gamma_2' \zeta_{**}^{-1}) \sigma_{n-1}^{-1} \zeta_*^{-1},$$

которая, в свою очередь, сопряжена с косой

$$(\zeta_*^{-1} \gamma_1' \zeta_*) \sigma_{n-1} (\zeta_{**} \gamma_2' \zeta_{**}^{-1}) \sigma_{n-1}^{-1} \in B_{n-1} \sigma_{n-1} B_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1}.$$

Следовательно, класс сопряжённости косы φ', то есть $\widehat{\varphi}$, допускает рокировку.

Остаётся рассмотреть случай $r = 2$. Поскольку замыкание косы $\psi \in B_2$ расщепимо или является тривиальным узлом, имеем $\psi = \sigma_1^s$ для некоторого $s \in \{-1, 0, 1\}$. Если коса ψ тривиальна, то коса φ расщепима, а значит, согласно замечанию 2.28, класс $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. Если $s = \pm 1$, то, как и выше, для некоторых $\zeta_*, \zeta_{**} \in B_{n-1}$ коса φ сопряжена с косой

$$\varphi' = \zeta_* \sigma_{n-1}^{\pm 1} \zeta_{**},$$

полученной из $\sigma_1^{\pm 1}$ раздутием двух проколов с последующим умножением на внутреннюю косу. Циклически переставляя два сомножителя, получаем, что класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает дестабилизацию. В этом случае по замечанию 2.28 он также допускает рокировку. □

Предложение 9.28. Пусть коса $\varphi \in B_n$ приводима. Если класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок, то дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор. В частности, для каждой орбиты компонент инвариантной существенной мультикривой соответствующий ей тор является существенным.

Доказательство. Как и выше, пусть $C_1, \ldots, C_m$ — выбранная φ-орбита существенных кривых, и пусть $D_i \subset D_n^2$ — диск, ограниченный кривой C_i. Под действием косы φ диски D_i заметают полноторий $W \subset S^3$; его край $T = \partial W$ не пересекает зацепления L_φ.

По лемме 9.27, если бы тор T был сжимаем в $S^3 \backslash L_\varphi$, то класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускал бы рокировку. Поскольку это исключено по предположению, тор T несжимаем. Остаётся показать, что T не параллелен краю.

Пусть $\mu \subset T$ — меридиан, представленный одной из кривых $C_i = \partial D_i$. Поскольку кривая C_i существенна в D_n^2, диск D_i содержит по меньшей мере две отмеченные точки. Для каждой компоненты L_j зацепления $L_\varphi = L_1 \cup \ldots \cup L_s$ коэффициент зацепления $\mathrm{lk}(\mu, L_j)$ равен, с точностью до знака, определяемого ориентацией кривой μ, числу отмеченных точек компоненты $L_j \cap D_n^2$, лежащих внутри D_i. Действительно, кривая $\mu = \partial D_i$ ограничивает диск $D_i \subset D_n^2$, и все компоненты замыкания косы пересекают

диск D^2_n с одной и той же стороны. Таким образом, сумма

$$|\mathrm{lk}(\mu, L_1)| + \ldots + |\mathrm{lk}(\mu, L_s)|$$

совпадает с числом отмеченных точек в диске D_i, и это число составляет по меньшей мере 2.

С другой стороны, если бы тор T был параллелен краю, он был бы изотопен в $S^3 \backslash L_\varphi$ границе трубчатой окрестности одной из компонент L_j. Вектор коэффициентов зацепления меридиана такого тора имеет ровно одну ненулевую компоненту, равную ± 1, причём все остальные компоненты равны нулю. Для приведённого выше вектора это невозможно: либо кривая C_i «охватывает» отмеченные точки, принадлежащие более чем одной компоненте зацепления L_φ, либо она «охватывает» более одной отмеченной точки, принадлежащей одной и той же компоненте. Следовательно, тор T не параллелен краю. Таким образом, он является существенным. □

Следствие 9.29. Пусть замыкание L_φ непериодической косы $\varphi \in B_n$ является гиперболическим зацеплением. Тогда либо коса φ является псевдоаносовской, либо она приводима и класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку.

Доказательство. Предположим, что коса φ не является псевдоаносовской. Тогда она приводима. Если бы класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ не допускал рокировки, то из предложения 9.28 следовало бы, что дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор; это противоречило бы его гиперболичности. Следовательно, класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ допускает рокировку. □

Следствие 9.30. Предположим, что для косы $\varphi \in B_n$ выполняется хотя бы одно из неравенств $\tau_\partial(\varphi) > 2$ или $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 1$. Если коса φ приводима, то дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор. В частности, для каждой орбиты компонент инвариантной существенной мультикривой соответствующий ей тор является существенным.

Доказательство. По утверждению (2) предложения 9.5 класс сопряжённости $\widehat{\varphi}$ не допускает рокировок. Следовательно, применимо предложение 9.28. □

9.4.3 Соответствие между динамическим и геометрическим типами

Установим соответствие между геометрическим типом узла и динамическим типом представляющей его косы.

Лемма 9.31. Предположим, что замыкание L_φ косы $\varphi \in B_n$ является узлом и выполняется хотя бы одно из неравенств $\tau_\partial(\varphi) > 2$ или $2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 1$. Тогда узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической.

Доказательство. Одна из импликаций следует из того, что замыкание любой периодической косы является торическим зацеплением. Обратная импликация следует из леммы 2.30 и предложения 9.5. □

Следующий результат расширяет и уточняет теорему 8.12 в случае проколотого диска.

Теорема 9.32. Предположим, что замыкание L_φ косы $\varphi \in B_n$ является узлом. Тогда при $\tau_\partial(\varphi) > 4$ (в частности, при $\ell_\partial(\varphi) > 4$) выполняются следующие свойства:

1. узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической;

2. узел L_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если коса φ является псевдоаносовской;

3. узел L_φ является сателлитным в том и только в том случае, если коса φ является приводимой.

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 9.31.

Предположим теперь, что коса φ приводима. Согласно следствию 9.30, дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор, поэтому узел L_φ является сателлитным. Обратная импликация следует из предложения 9.26.

Пусть теперь коса φ является псевдоаносовской. По теореме 9.8 узел L_φ прост. Он не может быть сателлитным: иначе его дополнение содержало бы существенный тор, и из предложения 9.26 следовало бы, что коса φ является приводимой. Он также не может быть торическим: иначе из леммы 9.31 следовало бы, что коса φ является периодической. Согласно теореме Тёрстона, узел L_φ гиперболичен.

Обратно, предположим, что узел L_φ гиперболичен. Тогда он не является торическим, а его дополнение не содержит существенных торов. Согласно уже доказанным эквивалентностям (1) и (3), коса φ не может быть ни периодической, ни приводимой; ср. следствие 9.29. Следовательно, коса φ является псевдоаносовской. □

Таким образом, при $\tau_\partial(\varphi) > 4$ динамический тип косы полностью определяет геометрический тип узла L_φ. Это обобщает теорему Т. Ито [172] с закрученности на числа переноса; см. лемму 2.39.

Замечание 9.33. Предположение о величине числа переноса в теореме 9.32 нельзя исключить полностью: существуют, например, приводимые и псевдоаносовские косы, замыкания которых являются торическими узлами; см. [172, p. 475]. ◊

Из теоремы 9.32 получаются следующие признаки гиперболичности.

Следствие 9.34. Пусть коса $\varphi \in B_n$ является псевдоаносовской и её замыкание L_φ является узлом. Тогда при $\tau_\partial(\varphi) > 4$ (в частности, при $\ell_\partial(\varphi) > 4$) этот узел является гиперболическим. □

Пример 9.35. Предположим, что число нитей n является простым и замыкание L_φ косы $\varphi \in B_n$ является узлом. Если $\ell_\circ(\varphi) > 4$, то этот узел является гиперболическим.

Действительно, по замечанию 2.23 коса φ неприводима. Поскольку $\ell_\circ(\varphi) > 0$, она не может быть периодической; следовательно, она является псевдоаносовской. Остаётся применить неравенство $\ell_\circ \leqslant \ell_\partial$ и следствие 9.34. ◊

В качестве иллюстрации вычислим динамический тип альтернированных кос. Напомним, что любая расщепимая коса является приводимой.

Следствие 9.36. Любая нерасщепимая альтернированная коса $\varphi \in B_n$ является псевдоаносовской[7].

Доказательство. Поскольку коэффициент дробного скручивания Дена периодической косы с параметром p/q равен p/q, по следствию 2.47 коса φ не может быть периодической[8]. Остаётся показать, что φ неприводима.

Предположим, что коса φ приводима. Поскольку она нерасщепима, по теореме 7.1 имеем $\ell_\partial(\varphi) > 0$. Возьмём достаточно большую степень $m \geqslant 1$, для которой

$$\ell_\partial(\varphi^m) = |m|\, \ell_\partial(\varphi) > 2.$$

По теореме 9.8 зацепление L_{φ^m} является простым. Поскольку коса φ^m является приводимой, согласно следствию 9.30, многообразие $S^3 \backslash L_{\varphi^m}$ содержит существенный тор. С другой стороны, поскольку коса φ^m является альтернированной, зацепление L_{φ^m} является альтернированным. Это противоречит тому, что дополнение любого простого альтернированного зацепления не содержит существенных торов; см. раздел 2.1.1. □

Таким образом, в модельном случае $S = D_n^2$ результаты главы 8, обосновывающие пороговый принцип для пар «трёхмерное многообразие — зацепление», расширяются признаками простоты и жёсткости, а также оценками рода существенных поверхностей и числа перекрёстков; кроме того, существенно уточняются сами пороговые значения. В главе 11 эти результаты будут совмещены с теоремами сравнения относительных стабильных коммутаторных длин и асимптотических чисел переноса, что приведёт к эффективно проверяемым признакам качественных свойств и явным оценкам численных характеристик зацеплений, основанным на квазиморфизмах групп кос. Конкретные эффективно вычислимые липшицевы квазиморфизмы будут рассмотрены в главе 10.

[7] Напомним, что в этой главе предполагается, что выполнено неравенство $n \geqslant 3$.

[8] Действительно, иначе она была бы тривиальной и, следовательно, расщепимой.

ГЛАВА 10 ИЕРАРХИЯ КВАЗИМОРФИЗМОВ ГРУППЫ КОС

Настоящая глава посвящена исследованию пространств липшицевых квазиморфизмов трёх уровней иерархии

$$V_{\mathcal{C}} \subseteq V_{\circ} \subseteq V_{\partial} \subseteq Q(\mathrm{Mod}(S))$$

в модельном случае проколотого диска $S = D^2_n$.

В разделе 10.1 описания этих пространств уточняются. В частности, доказывается, что пространство V_{∂} совпадает с пространством ядерных квазиморфизмов, введённым А. Малютиным. Устанавливается, что значения липшицевых квазиморфизмов первых двух уровней на косе и её трубчатой части совпадают. Показывается, что для любой косы с ненулевой закрученностью, внешне ахиральной после стягивания края, закрученность является единственным с точностью до пропорциональности V_{∂}-экстремальным квазиморфизмом.

В разделе 10.2 рассматриваются операторы на пространствах $Q(\mathrm{Mod}(S))$ и описываются проекторы

$$Q(\mathrm{Mod}(S)) \to V_{\partial} \to V_{\circ}$$

на первые два уровня иерархии. Приводится разложение пространства однородных квазиморфизмов группы кос, предложенное А. Малютиным, и устанавливается аналогичное разложение пространства вторых ограниченных когомологий, которое даёт структурную связь между ограниченными коциклами, динамикой кос и геометрией зацеплений.

В разделе 10.3 рассматриваемые проекторы применяются к предложенному И. Дынниковым и В. Шастиным пространству T_n квазиморфизмов типа закрученности; к числу таких квазиморфизмов относятся полная закрученность после заклеивания края $\mathcal{P}^n$ и внутренняя закрученность $\mathcal{E}^n$. Исследуется структура этого пространства и его проекций T^{∂}_n и T°_n на первые два уровня иерархии, а также устанавливаются результаты о линейной независимости полученных квазиморфизмов; см. предложения 10.58 и 10.61.

В разделе 10.4 рассматривается пространство Σ_n квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама, предложенное Ж.-М. Гамбаду и Э. Жисом. Исследуется структура этого пространства и его проекций Σ^{∂}_n и Σ°_n на первые два уровня иерархии. Кроме того, описываются линейные комбинации квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама, липшицевы относительно числа переноса ℓ_{∂}, и устанавливается нетривиальность их проекций на второй уровень иерархии; см. предложения 10.80 и 10.87.

10.1 Квазиморфизмы трёх уровней

Используя результаты глав 2 и 7, дадим необходимые и достаточные условия, при которых для заданной косы существуют липшицевы квазиморфизмы трёх уровней иерархии, принимающие на ней ненулевое значение; ср. [41, Theorem 4.2].

Предложение 10.1. Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$;
2. существует квазиморфизм $f \in V_\partial$, для которого $f(\varphi) \neq 0$;
3. φ является внешне хиральной;
4. в группе $B(n_1, \ldots, n_r)$ внешняя коса φ_{ext} не сопряжена со своей обратной.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из определения стабильной коммутаторной длины первого уровня. Эквивалентность условий (1) и (3) составляет содержание теоремы 7.16. Эквивалентность условий (3) и (4) составляет содержание предложения 2.15. □

Предложение 10.2. Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$;
2. существует квазиморфизм $f \in V_\circ$, для которого $f(\varphi) \neq 0$;
3. φ является внешне хиральной после стягивания края;
4. либо группа

$$\Gamma_\varphi := \left\{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; \varphi_{\mathrm{ext}}^k \Delta_r^{2m} \in [B(n_1, \ldots, n_r), B(n_1, \ldots, n_r)]\right\}$$

тривиальна, либо она нетривиальна и в подгруппе $B(n_1, \ldots, n_r)$ коса $\varphi_{\mathrm{ext}}^{k_0} \Delta_r^{2m_0}$ не сопряжена со своей обратной, где через (k_0, m_0) обозначена единственная образующая группы Γ_φ, для которой $k_0 > 0$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из определения стабильной коммутаторной длины второго уровня. Эквивалентность условий (1) и (3) составляет содержание теоремы 7.10. Эквивалентность условий (3) и (4) составляет содержание предложения 2.20. □

Предложение 10.3. Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\mathrm{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) > 0$;
2. существует квазиморфизм $f \in V_{\mathcal{C}}$, для которого $f(\varphi) \neq 0$;
3. φ является псевдоаносовской и хиральной после стягивания края;
4. φ является псевдоаносовской и коса $\varphi^{k_0} \Delta_n^{2m_0}$ не сопряжена со своей обратной, где

$$e := \exp(\varphi), \qquad d := \gcd\{|e|, n(n-1)\}, \qquad k_0 := \frac{n(n-1)}{d}, \qquad m_0 := -\frac{e}{d}.$$

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из определения стабильной коммутаторной длины третьего уровня. Эквивалентность условий (1) и (3) состав-

ляет содержание теоремы 7.20. Эквивалентность условий (3) и (4) следует из предложения 2.17. □

Далее для $n \geqslant 1$ положим

$$Q_n := Q(B_n).$$

Отметим, что $Q_1 = \{0\}$ и $Q_2 = \langle \exp \rangle_{\mathbb{R}}$.

10.1.1 Первый уровень: ядерные квазиморфизмы

Введём пространство

$$Q_n^{\partial} := \{f \in Q_n \mid f(B_{n-1}) = 0\}$$

однородных квазиморфизмов группы B_n, обращающихся в нуль на подгруппе B_{n-1}. В частности, $Q_2^{\partial} = Q_2$. В работах [230, 231, 232] пространство Q_n^{∂} называется пространством *ядерных* квазиморфизмов.

Следующий результат даёт характеризацию ядерных квазиморфизмов в классе всех однородных квазиморфизмов группы кос.

Лемма 10.4. Для $n \geqslant 2$ и любого однородного квазиморфизма $f \in Q_n$ следующие условия эквивалентны:

1. f является ядерным, то есть обращается в нуль на подгруппе B_{n-1};
2. f обращается в нуль на всех экстремально расщепимых косах[1];
3. f обращается в нуль на всех расщепимых косах;
4. f обращается в нуль на всех косах, сохраняющих некоторую вершину графа $\mathcal{A}_{\partial}$.

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение выполнено; в дальнейшем будем считать, что $n \geqslant 3$.

Эквивалентность условий (1) и (2) следует из инвариантности однородных квазиморфизмов относительно сопряжения. Эквивалентность условий (3) и (4) следует из леммы 2.9. Покажем, что условия (2) и (3) также эквивалентны.

Поскольку любая экстремально расщепимая коса расщепима, из условия (3) следует условие (2). Остаётся показать, что из условия (2) следует условие (3). Предположим, что квазиморфизм f обращается в нуль на всех экстремально расщепимых косах, и пусть φ — расщепимая коса. Как и в доказательстве леммы 2.9, существует такая коса $\psi \in B_n$, что сопряжённая коса $\psi\varphi\psi^{-1}$ сохраняет стандартную разделяющую дугу α_k для некоторого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Стабилизатор дуги α_k имеет вид

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1} \rangle \times \langle \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle,$$

и значит, сопряжённая коса раскладывается в произведение $\psi\varphi\psi^{-1} = \varphi_L\varphi_R$ двух коммутирующих кос $\varphi_L, \varphi_R \in B_n$, каждая из которых экстремально расщепима. По предположению, $f(\varphi_L) = f(\varphi_R) = 0$. Следовательно, согласно утверждению (3) леммы 4.5,

[1] См. определение в разделе 2.2.

получаем

$$f(\varphi) = f(\psi\varphi\psi^{-1}) = f(\varphi_L\varphi_R) = f(\varphi_L) + f(\varphi_R) = 0.$$

Таким образом, квазиморфизм f обращается в нуль на всех расщепимых косах. □

Следующий результат показывает, что пространство ядерных квазиморфизмов совпадает с пространством квазиморфизмов, липшицевых на первом уровне иерархии.

Следствие 10.5. Для $n \geqslant 2$ выполняется соотношение

$$Q_n^\partial = V_{\mathcal{A}_\partial(D_n^2)}.$$

Доказательство. При $n = 2$ утверждение выполнено. При $n \geqslant 3$ совместим леммы 6.13 и 10.4. □

Установим, что значения ядерных квазиморфизмов на косе и её трубчатой части совпадают[2].

Предложение 10.6. Для $n \geqslant 3$ пусть $\varphi \in B_n$ и $f \in Q_n^\partial$. Тогда выполняется соотношение

$$f(\varphi) = f(\varphi_{\text{tub}}).$$

Доказательство. Если коса φ является периодической или псевдоаносовской, то утверждение очевидно. Далее предположим, что коса φ является приводимой и непериодической. Поскольку однородные квазиморфизмы инвариантны относительно сопряжения, можно считать, что коса φ записана во внешней нормальной форме Нильсена–Тёрстона:

$$\varphi = \varphi_{\text{tub}}\kappa, \qquad \kappa \in K(n_1, \ldots, n_r).$$

Положим

$$N := K(n_1, \ldots, n_r), \qquad H := \langle \varphi_{\text{tub}}, N \rangle.$$

Поскольку сопряжение элементом φ_{tub} переставляет соответствующие множители подгруппы

$$N \cong B_{n_1} \times \cdots \times B_{n_r},$$

эта подгруппа нормальна в H.

Поскольку каждая коса из N расщепима, квазиморфизм f обращается в нуль на N. Таким образом, применима лемма 5.27, из которой следует соотношение

$$f(\varphi) = f(\varphi_{\text{tub}}\kappa) = f(\varphi_{\text{tub}}).$$ □

Отсюда получаем, что стабильные коммутаторные длины первого уровня косы и её трубчатой части совпадают.

[2] См. определения в разделе 2.3.2.

Следствие 10.7. Для любых $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \mathrm{scl}_\partial(\varphi_{\mathrm{tub}}). \qquad \square$$

Закрученность и её экстремальность

Нам потребуется следующий результат П. Феллера.

Лемма 10.8 [119, Theorem 1]**.** Для $n \geqslant 3$ пусть однородный квазиморфизм $f \in Q(B_n)$ удовлетворяет соотношению $f(B_{n-1}) = \{0\}$. Если $D(f) \leqslant 1$ и $f(\Delta_n^2) = 1$, то $f = \omega_n$. $\square$

Иными словами, закрученность является единственным ядерным квазиморфизмом дефекта не более 1, который принимает значение 1 на полном обороте Δ_n^2. Эквивалентно, в аффинном пространстве

$$\{f \in Q_n^\partial \mid f(\Delta_n^2) = 1\}$$

коэффициент дробного скручивания Дена является единственным элементом минимального дефекта.

Теорема 10.9. Для любого $n \geqslant 3$ закрученность ω_n является единственным, с точностью до пропорциональности, экстремальным ядерным квазиморфизмом для полного оборота Δ_n^2.

Доказательство. Пусть $f \in Q_n^\partial$ экстремален для Δ_n^2. Тогда по следствию 6.18 имеем

$$|f(\Delta_n^2)| = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\Delta_n^2) \cdot D(f) = D(f).$$

Если $D(f) = 0$, то $f = \lambda \cdot \exp$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Получаем

$$0 = |f(\Delta_n^2)| = |\lambda|\, n(n-1),$$

откуда следует, что $\lambda = 0$, и значит, $f = 0$. Далее считаем, что $D(f) > 0$.

Заменяя f на $-f$ при необходимости, будем считать, что $f(\Delta_n^2) = D(f)$. Определим

$$g := \frac{1}{D(f)}\, f.$$

Тогда $g \in Q_n^\partial$, дефект квазиморфизма g равен 1, и $g(\Delta_n^2) = 1$. Следовательно, согласно лемме 10.8, имеем $g = \omega_n$. Таким образом, $f = f(\Delta_n^2)\,\omega_n$. $\square$

Следующий результат позволяет расширить теорему 10.9 со случая полного оборота на случай произвольной косы, являющейся внешне ахиральной после стягивания края и имеющей ненулевую закрученность.

Следствие 10.10. Для $n \geqslant 3$ пусть коса $\varphi \in B_n$ является внешне ахиральной после стягивания края, причём $\omega_n(\varphi) \neq 0$. Тогда закрученность ω_n является единственным с точностью до пропорциональности ядерным экстремальным квазиморфизмом для φ.

Доказательство. Пусть ядерный квазиморфизм $f \in Q_n^\partial$ экстремален для косы φ, внешне ахиральной после стягивания края. Тогда, по лемме 7.11 и следствию 7.12 получаем

$$|f(\Delta_n^2)| \cdot |\omega_n(\varphi)| = |f(\varphi)| = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \cdot D(f) = |\omega_n(\varphi)| \cdot D(f),$$

откуда $|f(\Delta_n^2)| = D(f)$. Иными словами, квазиморфизм f экстремален для полного оборота Δ_n^2, и по теореме 10.9 он пропорционален закрученности. □

Замечание 10.11. Если коса $\varphi \in B_n$ является внешне ахиральной после стягивания края и $\omega_n(\varphi) = 0$, то любой ядерный квазиморфизм является экстремальным для φ. ◊

10.1.2 Второй и третий уровни

Для $n \geqslant 2$ введём пространство

$$Q_n^\circ := \{f \in Q_n^\partial \mid f(\Delta_n^2) = 0\}$$

ядерных квазиморфизмов группы B_n, обращающихся в нуль на полном обороте. В частности, $Q_2^\circ = \{0\}$. Согласно лемме 6.33, при $n \geqslant 3$ это пространство совпадает с пространством квазиморфизмов, липшицевых на втором уровне:

$$Q_n^\circ = V_\circ;$$

при $n = 2$ равенство также выполняется.

Отметим, что значения квазиморфизмов из Q_n° на косе и её трубчатой части совпадают.

Следствие 10.12. Для $n \geqslant 3$ пусть $\varphi \in B_n$ и $f \in Q_n^\circ$. Тогда выполняется соотношение

$$f(\varphi) = f(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$

Доказательство. Применим предложение 10.6 и включение $Q_n^\circ \subseteq Q_n^\partial$. □

Отсюда следует, что стабильные коммутаторные длины второго уровня косы и её трубчатой части совпадают.

Следствие 10.13. Для любых $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$ выполняется соотношение

$$\mathrm{scl}_\circ(\varphi) = \mathrm{scl}_\circ(\varphi_{\mathrm{tub}}).$$ □

Далее перейдём к квазиморфизмам, липшицевым на третьем уровне. Введём обозначение $Q_2^\mathcal{C} := \{0\}$ и для $n \geqslant 3$ положим

$$Q_n^\mathcal{C} := V_\mathcal{C}.$$

Напомним, что по лемме 6.42 пространство $Q_n^{\mathcal{C}}$ состоит из однородных квазиморфизмов, принимающих нулевое значение на всех непсевдоаносовских косах, и что $Q_n^{\mathcal{C}} \subseteq Q_n^{\circ}$ по предложению 6.1.

Пример 10.14. При $n = 3$ выполняется соотношение

$$Q_3^{\mathcal{C}} = Q_3^{\circ}.$$

Действительно, для любой приводимой косы $\varphi \in B_3$ внешняя коса φ_{ext} является периодической, поэтому любой квазиморфизм из Q_3° принимает нулевое значение на такой косе по лемме 6.33. В частности, для каждого $\varphi \in B_3$ выполняется соотношение

$$\operatorname{scl}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \operatorname{scl}_{\circ}(\varphi). \qquad \Diamond$$

Приведём эквивалентное описание пространства $Q_n^{\mathcal{C}}$ в терминах ядерных квазиморфизмов. Обозначим через $B_n^1 \subset B_n$ стабилизатор первого прокола. Пусть отображение

$$c_1 \colon B_{n-1}^1 \to B_n$$

раздувает первый прокол до малого диска, содержащего ровно два прокола. Иными словами, в геометрической модели кос отображение c_1 отвечает «каблированию» (удвоению) первой нити «с нулевым оснащением». Тогда c_1 является гомоморфизмом.

Пусть δ — дуга диаметра диска, соединяющая первые два прокола z_1 и z_2 и ориентированная от первого прокола ко второму.

Замечание 10.15. По построению каждая коса из образа $\operatorname{im}(c_1)$ сохраняет дугу δ вместе с её ориентацией. Обратно, всякая коса, сохраняющая неориентированную дугу δ, может быть представлена в виде $\psi\sigma_1^m$ для некоторых $\psi \in \operatorname{im}(c_1)$ и $m \in \mathbb{Z}$. $\Diamond$

Лемма 10.16. Пусть $n \geqslant 3$ и $f \in Q_n^{\partial}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. f является липшицевым на третьем уровне, то есть $f \in Q_n^{\mathcal{C}}$;
2. f обращается в нуль на любой косе, которая в неориентированном смысле сохраняет существенную мультидугу с концами в проколах;
3. f обращается в нуль на любой косе, которая в неориентированном смысле сохраняет существенную дугу, оба конца которой лежат в проколах;
4. f обращается в нуль на любой косе, которая в неориентированном смысле сохраняет дугу δ;
5. f обращается в нуль на образе $\operatorname{im}(c_1)$ гомоморфизма удвоения первого прокола.

Доказательство. Предположим, что $f \in Q_n^{\mathcal{C}}$, и пусть коса φ сохраняет существенную мультидугу с концами в проколах. Тогда некоторая положительная степень косы φ сохраняет некоторую компоненту этой мультидуги. Следовательно, по лемме 1.6 выбранная степень косы φ связно приводима. Пользуясь однородностью квазиморфизма f, получаем $f(\varphi) = 0$. Значит, из условия (1) следует условие (2).

Очевидно, каждое из условий (2) и (3) влечёт непосредственно следующее за ним. Согласно замечанию 10.15, из условия (4) следует условие (5). Остаётся доказать, что из условия (5) следует условие (1).

Пусть коса φ является периодической. Тогда $\varphi^q = \Delta_n^{2p}$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Z}$, где $q \neq 0$. Заметим, что Δ_n^{2p} сохраняет дугу δ, и мы можем записать $\Delta_n^{2p} = \eta\sigma_1^{2p}$ для $\eta \in \operatorname{im}(c_1)$. Поскольку коса σ_1^2 представляет собой скручивание Дена вдоль границы регулярной окрестности дуги δ, она принадлежит центру стабилизатора ориентированной дуги δ. Следовательно, косы η и σ_1^{2p} коммутируют. Кроме того, коса σ_1^{2p} расщепима, и значит,

$$f(\Delta_n^{2p}) = f(\eta\sigma_1^{2p}) = f(\eta) + f(\sigma_1^{2p}) = 0,$$

откуда $f(\varphi) = 0$.

Наконец, предположим, что коса φ является приводимой и непериодической. Так как квазиморфизм f однороден, достаточно доказать, что $f(\varphi^m) = 0$ для некоторого положительного целого m. Поэтому, заменив косу φ положительной степенью, можно считать, что коса φ является крашеной.

Сопрягая косу φ, можно считать, что она записана в своей нормальной форме Нильсена–Тёрстона, так что каждая компонента внешней инвариантной мультикривой пересекает диаметр диска D_n^2 ровно в двух точках. Поскольку коса φ сохраняет каждый прокол, она сохраняет каждую такую кривую по отдельности; следовательно, внешняя коса φ_{ext} является крашеной. Сопрягая косу φ_{ext}, а затем поднимая это сопряжение к косе φ, можно считать, что $n_1 \geqslant 2$.

Покажем, что трубчатая коса φ_{tub} лежит в образе $\operatorname{im}(c_1)$. Действительно, коса φ_{tub} получается из косы φ_{ext} раздутием малых дисков. Поскольку первый прокол внешнего диска неподвижен, малый диск, получающийся его раздутием, содержит хотя бы два прокола, и один из них можно удалить. Получающаяся коса из $(n-1)$ нитей сохраняет первый прокол, а значит, эта коса лежит в B_{n-1}^1. Применение отображения c_1 к этой косе восстанавливает удалённый прокол и тем самым даёт косу φ_{tub}. Значит, $\varphi_{\text{tub}} \in \operatorname{im}(c_1)$.

По предположению, квазиморфизм f обращается в нуль на $\operatorname{im}(c_1)$. Поэтому, используя предложение 10.6, получаем

$$f(\varphi) = f(\varphi_{\text{tub}}) = 0. \qquad \square$$

Таким образом, получаем иерархию

$$Q_n^{\mathcal{C}} \subseteq Q_n^{\circ} \subseteq Q_n^{\partial} \subseteq Q_n.$$

10.2 Проекторы и разложения пространств квазиморфизмов

Следуя работам А. Малютина [231], И. Дынникова и В. Шастина [112], рассмотрим операторы на пространствах однородных квазиморфизмов групп кос, связанные с ними

проекторы

$$Q_n \to Q_n^{\partial} \to Q_n^{\circ}$$

и разложения в прямую сумму.

Напомним, что символ $i\colon B_{n-1} \to B_n$ обозначает стандартное вложение, отвечающее добавлению n-го прокола справа, а $d_k\colon B_n \to B_{n-1}$ обозначает отображение, отвечающее забыванию k-го прокола, где $k \in \{1, \ldots, n\}$. Также напомним, что в отличие от i, при $n \geqslant 3$ отображение d_k не является гомоморфизмом; вместе с тем его сужение на стабилизатор k-го прокола является гомоморфизмом.

Нам потребуется следующее утверждение; ср. [79, Proposition 2.80].

Лемма 10.17 [232, Lemmas 4.1 & 4.2]**.** Пусть $N \trianglelefteqslant G$ — нормальная подгруппа конечного индекса в группе G. Однородный квазиморфизм $f\colon N \to \mathbb{R}$ продолжается до однородного квазиморфизма группы G тогда и только тогда, когда для любых $x \in N$ и $y \in G$ имеем $f(yxy^{-1}) = f(x)$. В этом случае такое продолжение единственно. □

Замечание 10.18. Из [79, Remark 2.82] следует, что дефект такого продолжения не превосходит дефекта исходного квазиморфизма f. ◊

Для $n \geqslant 2$ определим линейные отображения на групповых алгебрах

$$I_n^*\colon \mathbb{R}[B_{n-1}] \to \mathbb{R}[B_n], \qquad R_n^*\colon \mathbb{R}[B_n] \to \mathbb{R}[B_{n-1}]$$

формулами

$$I_n^*(\varphi) := i(\varphi), \qquad R_n^*(\varphi) := d_1(\varphi) + \ldots + d_n(\varphi).$$

Лемма 10.19 [112, Theorem 3]**.** На пространстве $\mathbb{R}[B_n]$ выполнено *соотношение Гейзенберга*:

$$R_{n+1}^* \circ I_{n+1}^* - I_n^* \circ R_n^* = \mathrm{id}.$$

Доказательство. Поскольку $d_k \circ i = i \circ d_k$ при $k \leqslant n$ и $d_{n+1} \circ i = \mathrm{id}$, получаем

$$\begin{aligned} R_{n+1}^* \circ I_{n+1}^* - I_n^* \circ R_n^* &= (d_1 + \ldots + d_{n+1}) \circ i - i \circ (d_1 + \ldots + d_n) \\ &= (d_1 + \ldots + d_n) \circ i + d_{n+1} \circ i - i \circ (d_1 + \ldots + d_n) \\ &= i \circ (d_1 + \ldots + d_n) + \mathrm{id} - i \circ (d_1 + \ldots + d_n) \\ &= \mathrm{id}. \end{aligned}$$

□

Теперь перейдём от отображений групповых алгебр групп кос к отображениям пространств однородных квазиморфизмов.

Для $f \in Q_n$ положим

$$I_n(f) := f \circ i.$$

Поскольку i является гомоморфизмом, $I_n(f)$ является однородным квазиморфизмом

на B_{n-1}, что даёт при $n \geqslant 2$ линейное отображение

$$I_n \colon Q_n \to Q_{n-1}.$$

Для $f \in Q_{n-1}$ сначала рассмотрим функцию

$$r_n(f) := \sum_{k=1}^{n} f \circ d_k.$$

Поскольку сужение каждого отображения d_k на подгруппу крашеных кос P_n является гомоморфизмом, сужение функции $r_n(f)$ на P_n является однородным квазиморфизмом. Указанная сумма инвариантна относительно сопряжения элементами группы B_n, поэтому, согласно лемме 10.17, этот квазиморфизм группы P_n продолжается до однородного квазиморфизма $R_n(f)$ на B_n единственным образом. А именно, для $\varphi \in B_n$ имеем

$$R_n(f)(\varphi) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} f\bigl(d_k(\varphi^{n!})\bigr).$$

Эквивалентно, поскольку функция $r_n(f)$ находится на ограниченном расстоянии от однородного квазиморфизма $R_n(f)$, она сама является квазиморфизмом на B_n, причём $R_n(f) = \widetilde{r_n(f)}$ — её усреднение. Тем самым для $n \geqslant 2$ получаем линейное отображение

$$R_n \colon Q_{n-1} \to Q_n.$$

Обозначим символом $\exp_n := \exp$ экспоненциальную сумму на группе B_n.

Пример 10.20. Согласно [112, Eq. (6)], при $n \geqslant 3$ выполняются соотношения

$$R_n(\exp_{n-1}) = (n-2) \cdot \exp_n, \qquad I_n(\exp_n) = \exp_{n-1}. \qquad \Diamond$$

Построенные отображения удовлетворяют следующему соотношению Гейзенберга:

$$I_{n+1} \circ R_{n+1} - R_n \circ I_n = \mathrm{id}.$$

Замечание 10.21. По замечаниям 4.6 и 10.18 выполняются неравенства

$$D(I_n(f)) \leqslant D(f), \qquad D(R_n(f)) \leqslant nD(f). \qquad \Diamond$$

10.2.1 Проекция на первый уровень

Опишем проектор из Q_n на подпространство Q_n^{∂} ядерных квазиморфизмов.

Замечание 10.22. Согласно лемме 10.4, пространство ядерных квазиморфизмов сов-

падает с ядром отображения добавления прокола:

$$Q_n^{\partial} = \ker(I_n). \qquad \Diamond$$

Для $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ определим линейные отображения

$$I_n^{\langle k \rangle} \colon Q_n \to Q_{n-k}, \qquad R_n^{\langle k \rangle} \colon Q_{n-k} \to Q_n$$

формулами

$$I_n^{\langle k \rangle} = I_{n-k+1} \circ \ldots \circ I_n, \qquad R_n^{\langle k \rangle} = R_n \circ \ldots \circ R_{n-k+1},$$

где $I_n^{\langle 0 \rangle} = R_n^{\langle 0 \rangle} = \mathrm{id}$.

Лемма 10.23 [112, Corollary 2]**.** Для любого $n \geqslant 2$ имеется разложение

$$Q_n = Q_n^{\partial} \oplus R_n(Q_{n-1}).$$

Более того, любой однородный квазиморфизм $f \in Q_n$ единственным образом представляется в виде

$$f = f_{\partial} + g$$

для некоторых $f_{\partial} \in Q_n^{\partial}$ и $g \in R_n(Q_{n-1})$, где

$$f_{\partial} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} \left(R_n^{\langle k \rangle} \circ I_n^{\langle k \rangle} \right)(f). \qquad \square$$

Замечание 10.24. Схема доказательства леммы 10.23, представленного в работе [112], состоит в следующем. Отображения I_n и R_n индуцируют линейные операторы I и R на прямой сумме

$$Q := \bigoplus_{n=2}^{\infty} Q_n,$$

удовлетворяющие соотношению Гейзенберга $I \circ R - R \circ I = \mathrm{id}$. Тем самым они снабжают пространство Q структурой модуля над первой алгеброй Вейля

$$A_1 := \mathbb{R}\langle x, y \rangle / (xy - yx - 1),$$

которая является бесконечномерной некоммутативной алгеброй, имеющей точное представление на кольце многочленов $\mathbb{R}[t]$, где x действует дифференцированием d/dt, а y действует умножением на t. Разложение и выражение для проекции затем следуют из точности указанного представления и соответствующих фактов для многочленов и алгебры Вейля. $\Diamond$

Замечание 10.25. Каждое отображение R_n инъективно, а каждое I_n — сюръективно.

В частности, по лемме 10.23 получаем изоморфизм

$$Q_n \cong Q_n^{\partial} \oplus Q_{n-1}. \qquad \Diamond$$

Оценим сверху норму линейного оператора $f \mapsto f_\partial$ пространства Q_n.[3] Для $n \geqslant 3$ введём обозначение

$$C_n := \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} = 2^n - \frac{n(n-1)}{2} - n - 1.$$

Замечание 10.26. При $n \geqslant 3$ выполняется неравенство

$$D(f_\partial) \leqslant C_n \cdot D(f).$$

Действительно, по замечанию 10.21 получаем

$$D\left(\frac{1}{k!}\left(R_n^{\langle k\rangle} \circ I_n^{\langle k\rangle}\right)(f)\right) \leqslant \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} D(f) = \binom{n}{k} D(f).$$

При $k = n-2$ имеем $I_n^{\langle n-2\rangle} f \in Q_2$, поэтому, согласно примеру 10.20, дефект соответствующего слагаемого в выражении для f_∂ равен нулю. $\Diamond$

При $n \geqslant 3$ лемма 10.23 даёт явный проектор из Q_n на Q_n^{∂}, называемый *проектором на первый уровень*. Мы называем квазиморфизм f_∂ *ядерной компонентой* или *проекцией на первый уровень* квазиморфизма f.

Для крашеных кос $\varphi \in P_n$ приведённую выше формулу проекции можно переписать следующим образом[4]:

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#J=k}} f(i^k(d_J(\varphi))),$$

где $i^k\colon B_{n-k} \to B_n$ — стандартное вложение, а $d_J(\varphi) \in B_{n-k}$ обозначает косу, полученную из $\varphi \in B_n$ забыванием проколов, индексы которых лежат в J. Для произвольных кос $\varphi \in B_n$ формула приобретает вид

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi) + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\ldots,n\}\\ \#J=k}} f(i^k(d_J(\varphi^{n!}))).$$

Эквивалентно, каждой косе $\varphi \in B_n$ и целому $k \in \{1,\ldots,n-2\}$ сопоставим мультимножество $[\varphi]_k^{\partial}$ кос в B_n, полученных из косы φ следующей *процедурой высвобождения нитей*. Выберем k-элементное подмножество множества индексов $\{1,\ldots,n\}$, забудем соответствующие проколы, а затем добавим k проколов справа. В этих обозначениях

[3] Нижняя оценка нормы этого оператора будет установлена в примере 10.88 ниже.

[4] Здесь множитель $1/k!$ отсутствует, поскольку сумма индексируется неупорядоченными подмножествами, а не упорядоченными наборами.

для $f \in Q_n$ и $\varphi \in P_n$ ядерная компонента задаётся формулой

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\psi \in [\varphi]_k^\partial} f(\psi).$$

Или, для произвольных $\varphi \in B_n$, имеем

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\psi \in [\varphi^{n!}]_k^\partial} f(\psi).$$

Замечание 10.27. Отображение $c_1 \colon B_{n-1}^1 \to B_n$ индуцирует линейное отображение

$$c_1^* \colon Q_n^\partial \to Q(B_{n-1}^1),$$

заданное правилом $c_1^*(f) := f \circ c_1$. По лемме 10.16 выполняется соотношение

$$Q_n^{\mathcal{C}} = \ker(c_1^*).$$

При этом, в отличие от первых двух уровней, в настоящей работе не строится проектор на третий уровень иерархии. $\Diamond$

В качестве иллюстрации покажем, что стабильная коммутаторная длина виртуально брунновых кос[5] сравнима, с точностью до мультипликативной константы, со стабильной коммутаторной длиной первого уровня:

$$\mathrm{scl} \asymp \mathrm{scl}_\partial.$$

В частности, это показывает, что на множестве виртуально брунновых кос классическая стабильная коммутаторная длина даёт нижнюю оценку числа переноса ℓ_∂.

Лемма 10.28. При $n \geqslant 3$ для любой виртуально брунновой косы $\varphi \in B_n$ и любого квазиморфизма $f \in Q_n$ выполняется соотношение

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi).$$

Доказательство. В силу однородности квазиморфизмов f и f_∂ можно считать, что коса φ является брунновой. Используя лемму 10.23, запишем $f = f_\partial + g$ для некоторых $f_\partial \in Q_n^\partial$ и $g = R_n(h)$, где $h \in Q_{n-1}$. Поскольку коса φ является брунновой, каждая коса $d_k(\varphi)$ тривиальна. Значит,

$$g(\varphi) = h(d_1(\varphi)) + \ldots + h(d_n(\varphi)) = 0,$$

[5]Напомним, что коса называется виртуально брунновой, если некоторая её ненулевая степень является брунновой; см. раздел 2.2.2.

откуда $f(\varphi) = f_\partial(\varphi)$. □

Следствие 10.29. Для любого $n \geqslant 3$ и любой виртуально брунновой косы $\varphi \in B_n$ имеем

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant \mathrm{scl}(\varphi) \leqslant C_n \,\mathrm{scl}_\partial(\varphi).$$

Доказательство. Левая оценка непосредственно следует из двойственности Бавара. По лемме 10.28 и замечанию 10.26 имеем

$$|f(\varphi)| = |f_\partial(\varphi)| \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(f_\partial) \leqslant 2C_n\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(f).$$

Переходя к супремуму, получаем

$$\mathrm{scl}(\varphi) \leqslant C_n\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi).$$ □

Отсюда получаются следующие необходимые и достаточные условия положительности стабильных коммутаторных длин виртуально брунновых кос; ср. [41, Theorem 4.2].

Следствие 10.30. Для любого $n \geqslant 3$ и любой виртуально брунновой косы $\varphi \in B_n$ следующие условия эквивалентны:

1. выполняется неравенство $\mathrm{scl}(\varphi) > 0$;
2. выполняется неравенство $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$;
3. выполняется неравенство $\mathrm{scl}_\circ(\varphi) > 0$;
4. выполняется неравенство $\mathrm{scl}_\mathcal{C}(\varphi) > 0$;
5. коса φ не сопряжена со своей обратной.

Доказательство. Для тривиальной косы утверждение выполняется; далее считаем косу φ нетривиальной. Эквивалентность условий (1) и (2) сводится к следствию 10.29, а остальные эквивалентности — к предложениям 10.1, 10.2 и 10.3, поскольку любая нетривиальная виртуально бруннова коса является псевдоаносовской и имеет нулевую экспоненциальную сумму. □

10.2.2 Разложение по ядерным компонентам

Итерируя разложение из леммы 10.23, получаем следующий результат А. Малютина.

Следствие 10.31 [232, Proposition 8.5]**.** Для любого $n \geqslant 2$ имеется изоморфизм

$$Q_n \cong Q_n^\partial \oplus Q_{n-1}^\partial \oplus \ldots \oplus Q_3^\partial \oplus Q_2^\partial,$$

где $Q_2^\partial = Q_2 = \langle \exp_2 \rangle_\mathbb{R}$. □

Приведём иллюстрацию следствия 10.31 при $n = 3$. Мы имеем

$$Q_3 \cong Q_3^\partial \oplus \langle \exp_3 \rangle_\mathbb{R}.$$

Покажем, что в этом случае на подгруппе $[B_3, B_3]$ стабильная коммутаторная длина первого уровня совпадает со стабильной коммутаторной длиной:

$$\mathrm{scl}_\partial = \mathrm{scl}.$$

В частности, это показывает, что для группы B_3 классическая стабильная коммутаторная длина даёт нижнюю оценку числа переноса ℓ_∂, а через результаты предыдущих глав — позволяет применять её при изучении геометрии и топологии зацеплений индекса косы 3 [60, 304, 13].

Предложение 10.32. Для любой косы $\varphi \in [B_3, B_3]$ имеем

$$\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = \mathrm{scl}(\varphi).$$

Доказательство. Для $f \in Q_3$ по лемме 10.23 запишем

$$f = f_\partial + g$$

для некоторых $f_\partial \in Q_3^\partial$ и $g = R_3(h)$, где $h \in Q_2$. Поскольку $Q_2 = \langle \exp_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем $h = \lambda \exp_2$. Отсюда, согласно примеру 10.20, имеем $g = \lambda \exp_3$. Значит, $g(\varphi) = 0$, и поэтому

$$f(\varphi) = f_\partial(\varphi).$$

Поскольку функция g является гомоморфизмом, имеем

$$D(f_\partial) = D(f - g) = D(f).$$

Получаем:

$$\mathrm{scl}(\varphi) = \sup_{\substack{f \in Q_3 \\ D(f) > 0}} \frac{|f(\varphi)|}{2D(f)} = \sup_{\substack{f \in Q_3 \\ D(f) > 0}} \frac{|f_\partial(\varphi)|}{2D(f_\partial)} = \sup_{\substack{f \in Q_3^\partial \\ D(f) > 0}} \frac{|f(\varphi)|}{2D(f)} = \mathrm{scl}_\partial(\varphi). \qquad \square$$

Следующий результат распространяет это соотношение на всю группу B_3.

Предложение 10.33. Для $\varphi \in B_3$ положим $e := \exp_3(\varphi)$ и $\psi := \sigma_1^{-e}\varphi$. Тогда $\psi \in [B_3, B_3]$ и

$$2\,\mathrm{scl}(\psi) - 1 \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}(\psi) + 1.$$

Доказательство. Поскольку гомоморфизм экспоненциальной суммы индуцирует изоморфизм абелизации группы B_3 с бесконечной циклической группой $\mathbb{Z}$ и

$$\exp_3(\psi) = \exp_3(\sigma_1^{-e}\varphi) = -e + \exp_3(\varphi) = 0,$$

имеем $\psi \in [B_3, B_3]$.

Запишем $\varphi = \sigma_1^e \psi$. Трёхнитевая коса σ_1^e расщепима, следовательно, $\mathrm{scl}_\partial(\sigma_1^e) = 0$.

По квазисубаддитивности функции scl_∂ получаем

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\sigma_1^e\psi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\sigma_1^e) + 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) + 1 = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) + 1.$$

Согласно предложению 10.32, имеем $\mathrm{scl}_\partial(\psi) = \mathrm{scl}(\psi)$, и поэтому

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}(\psi) + 1.$$

Для доказательства обратного неравенства запишем $\psi = \sigma_1^{-e}\varphi$. Коса σ_1^{-e} расщепима, поэтому то же рассуждение даёт

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\sigma_1^{-e}) + 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) + 1 = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) + 1.$$

Ещё раз используя предложение 10.32, получаем

$$2\,\mathrm{scl}(\psi) = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) + 1,$$

что эквивалентно неравенству

$$2\,\mathrm{scl}(\psi) - 1 \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi).$$

Объединяя два неравенства, получаем искомое утверждение. □

10.2.3 Проекция на второй уровень

В случае проколотого диска предложение 6.37 приобретает следующий вид.

Предложение 10.34. При $n \geqslant 3$ имеется разложение

$$Q_n^\partial = Q_n^\circ \oplus \langle\omega_n\rangle_\mathbb{R}.$$

А именно, каждый квазиморфизм $f \in Q_n^\partial$ можно представить в виде

$$f = f_\circ + f(\Delta_n^2)\,\omega_n,$$

где

$$f_\circ(\varphi) := f(\varphi) - f(\Delta_n^2)\,\omega_n(\varphi),$$

причём выполняются неравенства

$$D(f_\circ) \leqslant D(f) + |f(\Delta_n^2)| \leqslant 2D(f).$$ □

Проектор $f \mapsto f_\circ$ из Q_n^∂ на Q_n° называется *проектором на второй уровень*; его норма не превосходит 2. Композиция $Q_n \to Q_n^\circ$ этого проектора с проектором на первый уровень называется тем же термином. Мы называем квазиморфизм $f_\circ := (f_\partial)_\circ$ *проекцией*

на второй уровень квазиморфизма $f \in Q_n$.

Замечание 10.35. Квазиморфизм $f \in Q_n^\partial$ линейно независим от закрученности ω_n в том и только в том случае, если квазиморфизм $f_\circ \in Q_n^\circ$ нетривиален. ◊

Для подпространства $V \subseteq Q_n$ обозначим через

$$V^\partial \subseteq Q_n^\partial, \qquad V^\circ \subseteq Q_n^\circ$$

его образы относительно проекций на первый и второй уровень соответственно. Отметим, что выполняются включения

$$V \cap Q_n^\partial \subseteq V^\partial, \qquad V \cap Q_n^\circ \subseteq V^\circ, \qquad V^\circ \subseteq V^\partial + \langle \omega_n \rangle_\mathcal{R}.$$

Установим достаточные условия, при которых заданное подпространство пространства Q_n линейно независимо от закрученности ω_n; это позволит распознавать нетривиальность проекций на второй уровень.

Лемма 10.36. При $n \geqslant 3$ для подпространства $W \subseteq Q_n$ предположим, что существует виртуально бруннова коса $\varphi \in B_n$ ненулевой закрученности, на которой каждый квазиморфизм из W принимает нулевое значение. Тогда выполняются соотношения

$$\langle \omega_n \rangle_\mathbb{R} \cap W = \{0\}, \qquad \langle \omega_n \rangle_\mathbb{R} \cap W^\partial = \{0\}.$$

В частности, если для $f \in W$ квазиморфизм $f_\partial \in W^\partial$ нетривиален, то квазиморфизм $f_\circ \in W^\circ$ также нетривиален, и проектор на второй уровень устанавливает изоморфизм

$$W^\partial \cong W^\circ.$$

Доказательство. По лемме 10.28 для любого $f \in W$ имеем

$$f_\partial(\varphi) = f(\varphi) = 0.$$

Отсюда следуют искомые соотношения. Из второго соотношения следует, что отображение $W^\partial \to W^\circ$ инъективно. Наконец, сюръективность выполняется по определению. □

Нам потребуется следующий результат, полученный Т. Ито.

Лемма 10.37 [175, Theorem 3]**.** Для любого $n \geqslant 3$ каждая нетривиальная нормальная подгруппа группы B_n содержит косу ненулевой закрученности. Если такая подгруппа не является центральной, то косу можно выбрать псевдоаносовской. □

Следствие 10.38. При $n \geqslant 3$ для подпространства $W \subseteq Q_n$ предположим, что существует нецентральная нормальная подгруппа группы B_n, на которой каждый квази-

морфизм из W принимает нулевое значение[6]. Тогда выполняются соотношения

$$\langle\omega_n\rangle_{\mathbb{R}} \cap W = \{0\}, \qquad \langle\omega_n\rangle_{\mathbb{R}} \cap W^{\partial} = \{0\}.$$

В частности, если для $f \in W$ квазиморфизм $f_\partial \in W^\partial$ нетривиален, то квазиморфизм $f_\circ \in W^\circ$ также нетривиален, и проектор на второй уровень устанавливает изоморфизм $W^\partial \cong W^\circ$.

Доказательство. Обозначим такую подгруппу через $N \trianglelefteqslant B_n$. По лемме 2.5 подгруппа Brunn_n является нецентральной и нормальной. Значит, по лемме 2.3 нормальная подгруппа $N \cap \mathrm{Brunn}_n$ нетривиальна. Следовательно, по лемме 10.37 она содержит косу ненулевой закрученности. Остаётся применить лемму 10.36. □

Согласно следствию 10.31, для любого однородного квазиморфизма, не являющегося гомоморфизмом, хотя бы одна ядерная компонента является ненулевой. Если эта компонента не пропорциональна коэффициенту дробного скручивания Дена, то её проекция на второй уровень иерархии является ненулевой. Ненулевое значение полученного квазиморфизма на данной косе даёт признак положительности значения функции $\mathrm{scl}_\circ$, а значит, и положительности числа переноса $\ell_\circ$.

Следствие 10.39. Для каждого $n \geqslant 3$ имеется изоморфизм

$$Q_n \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^\circ \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle\omega_k\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\exp_n\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Совместим следствие 10.31 и предложение 10.34. □

Используя пример 10.14, в качестве иллюстрации отметим, что при $n = 3$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} Q_3 &\cong Q_3^\circ \oplus \langle\omega_3\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\exp_3\rangle_{\mathbb{R}} \\ &\cong Q_3^{\mathcal{C}} \oplus \langle\omega_3\rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle\exp_3\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Также покажем, что стабильная коммутаторная длина виртуально брунновых кос сравнима, с точностью до мультипликативной константы, с суммой закрученности и стабильной коммутаторной длины второго уровня иерархии:

$$\mathrm{scl} \asymp \mathrm{scl}_\circ + |\omega_n|.$$

Следствие 10.40. Для любого $n \geqslant 3$ и любой виртуально брунновой косы $\varphi \in B_n$

[6] Иными словами, множество общих нулей $\mathbb{A}(W)$ содержит некоторую нецентральную нормальную подгруппу.

выполняются неравенства

$$\frac{1}{2C_n}\operatorname{scl}(\varphi) \leqslant \operatorname{scl}_\circ(\varphi) + \frac{|\omega_n(\varphi)|}{4} \leqslant \frac{3}{2}\operatorname{scl}(\varphi).$$

Доказательство. Правое неравенство сводится к включению $Q_n^\circ \subseteq Q_n$, а также неравенству $|\omega_n(\varphi)| \leqslant 2\operatorname{scl}(\varphi)$, основанному на теореме двойственности Бавара. Докажем левое неравенство. Согласно следствию 10.29,

$$\frac{1}{C_n}\operatorname{scl}(\varphi) \leqslant \operatorname{scl}_\partial(\varphi).$$

Применяя следствие 6.39, получаем

$$\frac{1}{C_n}\operatorname{scl}(\varphi) - \frac{|\omega_n(\varphi)|}{2} \leqslant \operatorname{scl}_\partial(\varphi) - \frac{|\omega_n(\varphi)|}{2} \leqslant 2\operatorname{scl}_\circ(\varphi),$$

откуда следует искомый результат. □

В частности, стабильная коммутаторная длина виртуально брунновых кос нулевой закрученности сравнима, с точностью до мультипликативной константы, со стабильной коммутаторной длиной второго уровня иерархии:

$$\operatorname{scl} \asymp \operatorname{scl}_\circ.$$

Отдельно выделим следующий класс таких кос.

Следствие 10.41. Для любого $n \geqslant 3$ и любой виртуально брунновой однородной косы $\varphi \in B_n$ имеем

$$\frac{1}{2C_n}\operatorname{scl}(\varphi) \leqslant \operatorname{scl}_\circ(\varphi) \leqslant \operatorname{scl}(\varphi).$$

Доказательство. Напомним, что экспоненциальная сумма любой виртуально брунновой косы равна нулю. Если коса φ тривиальна, утверждение очевидно. Если коса φ нетривиальна, то любая её однородная запись содержит как положительные, так и отрицательные образующие Артина: экспоненциальная сумма любого непустого положительного или отрицательного артиновского слова не равна нулю. Значит, коса φ является однородной смешанного знака, по лемме 2.46 получаем $\omega_n(\varphi) = 0$. Осталось применить следствие 10.40. □

10.2.4 Разложение пространства ограниченных когомологий

Нам потребуются понятия, введённые в разделе 4.1.2.

Лемма 10.42. Для каждого $n \geqslant 2$ выполняется соотношение $H^2(B_n; \mathbb{R}) = 0$.

Доказательство. Группа $H_2(B_n; \mathbb{Z})$ тривиальна при $n \in \{2, 3\}$ и изоморфна группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для каждого $n \geqslant 4$; см. [94, Theorem 1]. По теореме об универсальных ко-

эффициентах для когомологий имеем короткую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_1(B_n;\mathbb{Z}),\mathbb{R}) \to H^2(B_n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(H_2(B_n;\mathbb{Z}),\mathbb{R}) \to 0.$$

Поскольку $H_1(B_n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, имеем

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{R}) = 0.$$

Кроме того, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{R}) = 0$. Отсюда следует искомое утверждение. □

Следствие 10.43. Для каждого $n \geqslant 2$ имеется изоморфизм вещественных векторных пространств

$$H^2_b(B_n;\mathbb{R}) \cong Q_n/\langle \exp_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Применим лемму 4.7 к группе $G = B_n$. По лемме 10.42, последний член $H^2(B_n;\mathbb{R})$ обращается в нуль. Следовательно, отображение

$$Q(B_n) \to H^2_b(B_n;\mathbb{R})$$

сюръективно. Его ядро совпадает с $H^1(B_n;\mathbb{R})$.

Поскольку гомоморфизм экспоненциальной суммы индуцирует изоморфизм абелизации группы B_n с бесконечной циклической группой $\mathbb{Z}$, имеем

$$H^1(B_n;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(B_n,\mathbb{R}) = \langle \exp_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Поскольку $Q_n = Q(B_n)$, получаем

$$H^2_b(B_n;\mathbb{R}) \cong Q_n/H^1(B_n;\mathbb{R}) = Q_n/\langle \exp_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$ □

Теорема 10.44. Для каждого $n \geqslant 2$ имеется естественный[7] изоморфизм

$$H^2_b(B_n;\mathbb{R}) \cong Q^\partial_n \oplus Q^\partial_{n-1} \oplus \ldots \oplus Q^\partial_3.$$

Доказательство. При $n = 2$ утверждение выполнено. При $n \geqslant 3$ по следствию 10.31 имеем изоморфизм

$$Q_n \cong Q^\partial_n \oplus Q^\partial_{n-1} \oplus \ldots \oplus Q^\partial_3 \oplus Q^\partial_2,$$

где $Q^\partial_2 = Q_2 = \langle \exp_2 \rangle_{\mathbb{R}}$. Отсюда, согласно примеру 10.20, получаем

$$Q_n/\langle \exp_n \rangle_{\mathbb{R}} \cong Q^\partial_n \oplus Q^\partial_{n-1} \oplus \cdots \oplus Q^\partial_3.$$

Построение требуемого изоморфизма теперь сводится к следствию 10.43. □

[7] Здесь естественность означает то, что отображение когомологических классов, индуцированное стандартным вложением $B_{n-1} \to B_n$, отвечает забыванию слагаемого Q^∂_n.

Следствие 10.45. Для каждого $n \geqslant 2$ имеется естественный изоморфизм

$$H_b^2(B_n;\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{k=3}^{n} Q_k^{\circ} \oplus \bigoplus_{k=3}^{n} \langle \omega_k \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 10.44 и предложения 10.34. □

В качестве иллюстрации отметим, что при $n = 3$ выполняется соотношение

$$H_b^2(B_3;\mathbb{R}) \cong Q_3^{\mathcal{C}} \oplus \langle \omega_3 \rangle_{\mathbb{R}}.$$

В совокупности с результатами предыдущих глав следствие 10.45 устанавливает структурную связь между ограниченными когомологиями, косами и зацеплениями: каждому ограниченному 2-коциклу, не когомологичному нулю, отвечает некоторая ненулевая ядерная компонента, которая отражает динамику кос и может быть использована для получения сведений о топологии и геометрии их замыканий.

10.3 Квазиморфизмы типа закрученности

Опишем для $n \geqslant 2$ эффективно вычислимые квазиморфизмы $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{E}^n$ группы кос B_n и рассмотрим их проекции на первые два уровня иерархии.

Отправной точкой для обоих квазиморфизмов является закрученность

$$\omega_n \colon B_n \to \mathbb{R}.$$

Этот квазиморфизм совпадает с усреднением так называемого *антье Деорнуа* [235, 229, 213]: целого числа $m \in \mathbb{Z}$, для которого в так называемом порядке Деорнуа [107, 109] на группе B_n коса лежит между последовательными степенями Δ_n^{2m} и Δ_n^{2m+2} полного оборота. Для каждого фиксированного n антье Деорнуа может быть вычислено по артиновскому слову за линейное время, а коэффициент дробного скручивания Дена — за квадратичное время; см. [111, 228, 229, 112] и [182, Theorem 4.18]. Поэтому квазиморфизм ω_n служит действительно эффективной отправной точкой; см. замечание 4.3.

10.3.1 Операторы смены края

Нам потребуется гомоморфизм $J_n \colon P_n \to P_{n-1}$ групп крашеных кос, определение которого представлено в работе [112, Section 1.3]. Его можно представить в виде

$$J_n = d_n \circ w_n,$$

где через $w_n \colon P_n \to P_n$ обозначается автоморфизм группы крашеных кос, описанный в работе [7, p. 159].[8] Отметим, что выполняется соотношение $J_n \circ i = \mathrm{id}$.

[8] Автоморфизм w_n отвечает замене местами компоненты края диска D_n^2 с проколом z_n.

Напомним обозначение $\rho_n := \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$. Следуя работе [112, Eq. (8)], для $n \geqslant 2$ зададим линейное отображение

$$S_n \colon Q_{n-1} \to Q_n$$

следующим образом: для кос $\varphi \in P_n$ положим

$$S_n(f)(\varphi) := \sum_{k=0}^{n-1} f(J_n(\rho_n^k \varphi \rho_n^{-k}))$$

и продолжим полученный квазиморфизм группы P_n до квазиморфизма группы B_n, используя лемму 10.17. Мы называем отображение S_n *оператором смены края с заклеиванием*.[9]

Установим ряд свойств отображения S_n. Нам потребуется подгруппа Z_n группы B_n, определение которой представлено в [7, p. 158]. Отметим, что согласно [7, Lemma 4.9] и [7, Eq. (3)], при $n \geqslant 3$ подгруппа Z_n нормальна и не является центральной.

Лемма 10.46. Пусть $n \geqslant 3$.

1. Для любого $f \in Q_{n-1}$ выполняется соотношение

$$\big(S_n(f)\big)(\Delta_n^2) = -nf(\Delta_{n-1}^2).$$

2. Каждый квазиморфизм из образа $\operatorname{im} S_n$ принимает на подгруппе Z_n нулевое значение.

Доказательство. Согласно [7, p. 161], имеем $w_n(\Delta_n^2) = \Delta_n^{-2}$, откуда по $d_n(\Delta_n^2) = \Delta_{n-1}^2$ получаем

$$J_n(\Delta_n^2) = \Delta_{n-1}^{-2}.$$

Используя центральность элемента Δ_n^2, получаем утверждение (1).

Докажем утверждение (2). Из [7, Eq. (2) & Lemma 4.3] получаем соотношение

$$\ker J_n = \langle A_{0,1}, \dots, A_{0,n-1} \rangle,$$

где символами $A_{0,k}$ обозначаются косы, определение которых представлено в [7, p. 158]; ср. [7, Lemma 4.5]. Отсюда следует включение $Z_n \subseteq \ker J_n$. Поскольку подгруппа Z_n нормальна в B_n, для любых $\varphi \in Z_n$ и $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\rho_n^k \varphi \rho_n^{-k} \in Z_n \subseteq \ker J_n.$$

[9] Отображение S_n отвечает замене местами компоненты края ∂D_n^2 с каждым из n проколов, заклеиванию старой компоненты края диском и последующему применению исходного квазиморфизма.

Следовательно, для каждого $f \in Q_{n-1}$ получаем

$$\begin{aligned} S_n(f)(\varphi) &= f(J_n(\varphi)) + f(J_n(\rho_n \varphi \rho_n^{-1})) + \ldots + f(J_n(\rho_n^{n-1} \varphi \rho_n^{-n+1})) \\ &= 0 + \ldots + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Следствие 10.47. Пусть $n \geqslant 3$.

1. Если для $f \in Q_{n-1}$ выполняется условие $f(\Delta^2_{n-1}) \neq 0$, то квазиморфизм $S_n(f)$ нетривиален.

2. Выполняются соотношения

$$\langle \omega_n \rangle_{\mathbb{R}} \cap \operatorname{im} S_n = \{0\}, \qquad \langle \omega_n \rangle_{\mathbb{R}} \cap (\operatorname{im} S_n)^{\partial} = \{0\}.$$

В частности, каждый нетривиальный квазиморфизм из $\operatorname{im} S_n$ линейно независим от закрученности ω_n; если для $g \in \operatorname{im} S_n$ квазиморфизм g_∂ нетривиален, то он линейно независим от закрученности ω_n и квазиморфизм $g_\circ$ также нетривиален.

Доказательство. Утверждение (1) следует из утверждения (1) леммы 10.46. Утверждение (2) сводится к утверждению (2) той же леммы и следствию 10.38. □

Назовём *полной закрученностью после заклеивания края* квазиморфизм

$$\mathcal{P}^n := S_n(\omega_{n-1}) \in Q_n.$$

Следствие 10.48. При $n \geqslant 3$ выполняется соотношение

$$\mathcal{P}^n(\Delta^2_n) = -n.$$

В частности, квазиморфизм $\mathcal{P}^n$ нетривиален и линейно независим от закрученности ω_n.

Доказательство. Применим утверждение (1) леммы 10.46 и утверждение (2) следствия 10.47. □

Для $n \geqslant 2$ назовём *оператором смены края* композицию

$$I_{n+1} \circ S_{n+1} \colon Q_n \to Q_n.$$

Для $\varphi \in P_n$, используя тождество $J_{n+1} \circ i = \mathrm{id}$, получаем[10]

$$\begin{aligned} (I_{n+1} \circ S_{n+1})(f)(\varphi) &= \sum_{k=0}^{n} f\big(J_{n+1}\big(\rho_{n+1}^k i(\varphi) \rho_{n+1}^{-k}\big)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f\big(J_{n+1}\big(\rho_{n+1}^k i(\varphi) \rho_{n+1}^{-k}\big)\big) + f(\varphi). \end{aligned}$$

[10] Геометрически композиция $I_{n+1} \circ S_{n+1}$ устроена следующим образом: k-й прокол рассматривается как выделенная компонента края, затем к полученной косе применяется исходный квазиморфизм, после чего значения суммируются по всем проколам и к ним прибавляется значение на исходной косе.

Лемма 10.49. Пусть $n \geqslant 3$ и $f \in Q_n$. Выполняется соотношение

$$\big((I_{n+1} \circ S_{n+1})(f) - f\big)(\Delta_n^2) = -nf(\Delta_n^2).$$

Доказательство. Согласно свойствам, описанным в [7, p. 161], при $k \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$J_{n+1}(\rho_{n+1}^k i(\Delta_n^2)\rho_{n+1}^{-k}) = \Delta_n^{-2}.$$

Отсюда следует утверждение. □

Следствие 10.50. Пусть $n \geqslant 3$ и $f \in Q_n$. Если $f(\Delta_n^2) \neq 0$, то квазиморфизм

$$(I_{n+1} \circ S_{n+1})(f) - f$$

нетривиален.

Доказательство. По лемме 10.49 значение этого квазиморфизма на косе Δ_n^2 не равно нулю. □

Следуя [112], для $n \geqslant 2$ назовём *внутренней закрученностью* квазиморфизм[11]

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^n &:= (I_{n+1} \circ S_{n+1})(\omega_n) - \omega_n \\ &= I_{n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) - \omega_n \in Q_n.\end{aligned}$$

Следствие 10.51. При $n \geqslant 3$ выполняется соотношение

$$\mathcal{E}^n(\Delta_n^2) = -n.$$

В частности, квазиморфизм $\mathcal{E}^n$ нетривиален.

Доказательство. Применим лемму 10.49. □

Замечание 10.52. Выполняются неравенства

$$D\big(S_n(f)\big) \leqslant nD(f), \qquad D\big((I_{n+1} \circ S_{n+1})(f) - f\big) \leqslant nD(f).$$

В частности,

$$D(\mathcal{P}^n) \leqslant n, \qquad D(\mathcal{E}^n) \leqslant n. \qquad \lozenge$$

Нам потребуется следующий результат И. Дынникова и В. Шастина.

Лемма 10.53 [112, Proposition 4]**.** Для любых $n, m \geqslant 2$ выполняется соотношение

$$I_{n+m}^{\langle m \rangle}(\mathcal{P}^{n+m}) = \mathcal{E}^n. \qquad \square$$

[11] Квазиморфизм $\mathcal{E}^n$ описывает «среднее число оборотов» проколов относительно друг друга под действием косы; его интерпретацию в терминах дуг в проколотом диске см. в [112, p. 872].

Приведём описание квазиморфизмов $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{E}^n$ при $n \leqslant 3$.

Пример 10.54. При $n = 2$ выполняются соотношения

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\exp_2, \qquad \mathcal{P}^2 = 0, \qquad \mathcal{E}^2 = -\exp_2.$$

При $n = 3$, согласно примеру 10.20, получаем

$$\mathcal{P}^3 = -\frac{1}{2}\exp_3. \qquad \Diamond$$

Лемма 10.55. Выполняется соотношение

$$\mathcal{E}^3 = 3\omega_3 - \exp_3.$$

Доказательство. Покажем, что квазиморфизм

$$f := \frac{1}{3}\left(\mathcal{E}^3 + \exp_3\right)$$

совпадает с ω_3. Для этого проверим условия леммы 10.8.

Применяя лемму 10.53 при $n = 2$ и $m = 2$, получаем

$$I_3(\mathcal{E}^3) = I_3(I_4(\mathcal{P}^4) - \omega_3) = I_4^{\langle 2\rangle}(\mathcal{P}^4) - I_3(\omega_3) = \mathcal{E}^2 - 0 = -\exp_2,$$

откуда по примеру 10.20 следует соотношение

$$I_3(f) = \frac{1}{3}\left(I_3(\mathcal{E}^3) + I_3(\exp_3)\right) = 0.$$

Значит, $f \in Q^\partial_3$. По лемме 10.49 и тождеству $\exp_n(\Delta^2_n) = n(n-1)$ получаем

$$f(\Delta^2_3) = \frac{1}{3}(-3 + 6) = 1.$$

Наконец, по замечанию 10.52 получаем

$$D(f) \leqslant \frac{1}{3}D(\mathcal{E}^3) + \frac{1}{3}D(\exp_3) \leqslant 1.$$

Следовательно, по лемме 10.8 получаем $f = \omega_3$, откуда следует требуемое соотношение. $\square$

10.3.2 Проекции на первые два уровня

Далее рассмотрим вопрос о нетривиальности проекций квазиморфизмов $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{E}^n$. Начнём с квазиморфизма $\mathcal{P}^n$. Согласно примеру 10.54, имеем $\mathcal{P}^3_\partial = \mathcal{P}^3_\circ = 0$.

Лемма 10.56. При $n \geqslant 3$ выполняется соотношение

$$\mathcal{P}^n_\partial(\Delta^2_n) = -n(1 + (-1)^n).$$

Доказательство. Согласно следствию 10.51, имеем

$$\big(I_n(\mathcal{P}^n)\big)(\Delta^2_{n-1}) = E_{n-1}(\Delta^2_{n-1}) + \omega_{n-1}(\Delta^2_{n-1}) = -(n-1) + 1 = -(n-2).$$

Также заметим, что $n(n-2) = -n + n(n-1)$ и что для $J \subset \{1, \dots, n\}$ имеем

$$d_J(\Delta^2_n) = \Delta^2_{n-|J|}.$$

Отсюда по лемме 10.53 и следствиям 10.51 и 10.48 получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^n_\partial(\Delta^2_n) &= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#J=k}} \mathcal{P}^n(i^k(d_J(\Delta^2_n))) = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k} \big(I_n^{\langle k\rangle}(\mathcal{P}^n)\big)(\Delta^2_{n-k}) \\
&= \sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k} \mathcal{E}^{n-k}(\Delta^2_{n-k}) - \binom{n}{1}\big(I_n(\mathcal{P}^n)\big)(\Delta^2_{n-1}) + \binom{n}{0}\mathcal{P}^n(\Delta^2_n) \\
&= -\sum_{k=2}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k) + n(n-2) + (-n) = -\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k) - n \\
&= -n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n-1}{k} - n = -n(-1)^n - n = -n(1 + (-1)^n).
\end{aligned}$$

□

Тем самым по лемме 10.56, если $n \geqslant 3$ нечётно, то $\mathcal{P}^n_\circ = \mathcal{P}^n_\partial$, и если чётно, то

$$\mathcal{P}^n_\circ = \mathcal{P}^n_\partial + 2n \cdot \omega_n.$$

Пример 10.57. Пусть φ — следующая бруннова коса на пяти нитях:

$$\sigma_3^2(\sigma_2\sigma_1^{-1})^2\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_2^{-1}(\sigma_4\sigma_3^{-1})^3\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2\sigma_1\sigma_3^{-2}\sigma_2\sigma_3(\sigma_3\sigma_4^{-1})^3\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}.$$

Используя результаты вычислений, представленные в работе [112, p. 875], получаем

$$\omega_5(\varphi) = 0, \qquad \mathcal{P}^5_\partial(\varphi) = \mathcal{P}^5_\circ(\varphi) = 3.$$ ◊

Предложение 10.58. Пусть $n \geqslant 4$. Если n чётно или $n = 5$, то квазиморфизмы $\mathcal{P}^n_\partial$ и $\mathcal{P}^n_\circ$ нетривиальны; в частности, квазиморфизм $\mathcal{P}^n_\partial$ линейно независим от закрученности ω_n.

Доказательство. При $n = 5$ см. пример 10.57. При чётном n, согласно лемме 10.56, квазиморфизм $\mathcal{P}^n_\partial$ нетривиален. Отсюда нетривиальность квазиморфизма $\mathcal{P}^n_\circ$ сводится к утверждению (2) следствия 10.47. □

Далее перейдём к проекциям квазиморфизма $\mathcal{E}^n$.

Лемма 10.59. При $n \geqslant 3$ выполняется соотношение

$$\mathcal{E}^n_\partial(\Delta^2_n) = (-1)^{n-1}n.$$

Доказательство. По лемме 10.53 для $k \geqslant 1$ имеем

$$I^{\langle k\rangle}_n(\mathcal{E}^n) = I^{\langle k+1\rangle}_{n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) - I^{\langle k\rangle}_n(\omega_n) = I^{\langle k+1\rangle}_{n+1}(\mathcal{P}^{n+1}) = \mathcal{E}^{n-k}.$$

Отсюда по следствию 10.51 получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^n_\partial(\Delta^2_n) &= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#J=k}} \mathcal{E}^n(i^k(d_J(\Delta^2_n))) = \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k} \big(I^{\langle k\rangle}_n(\mathcal{E}^n)\big)(\Delta^2_{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k} \mathcal{E}^{n-k}(\Delta^2_{n-k}) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k) = -n\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \binom{n-1}{k} = (-1)^{n-1}n. \qquad \square
\end{aligned}$$

По лемме 10.59 получаем

$$\mathcal{E}^n_\circ = \mathcal{E}^n_\partial + n(-1)^n \cdot \omega_n.$$

Пример 10.60. Используя результаты вычислений, представленные в работе [112, p. 875], получаем, что для косы φ из примера 10.57 выполняются соотношения

$$\mathcal{E}^5_\partial(\varphi) = \mathcal{E}^5_\circ(\varphi) = 2. \qquad \lozenge$$

Предложение 10.61. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда квазиморфизм $\mathcal{E}^n_\partial$ нетривиален. Кроме того, при $n = 5$ он линейно независим от ω_5 и квазиморфизм $\mathcal{E}^5_\circ$ также нетривиален.

Доказательство. По лемме 10.59 значение этого квазиморфизма на косе Δ^2_n не равно нулю. Вторая часть утверждения сводится к примеру 10.60. $\square$

10.3.3 Структура пространств квазиморфизмов типа закрученности

Следуя работе [112, Definition 6], для $n \geqslant 2$ определим *пространства квазиморфизмов типа закрученности* $T_n \subseteq Q_n$ как линейные оболочки всех квазиморфизмов, полученных применением произвольных конечных композиций операторов I_k, R_k и S_k к семейству коэффициентов дробного скручивания Дена ω_k. Символами T^∂_n и T°_n обозначим проекции пространства T_n на первые два уровня иерархии. Отметим, что вы-

полняются соотношения[12]

$$T_n \cap Q_n^\partial = T_n^\partial, \qquad T_n \cap Q_n^\circ = T_n^\circ, \qquad T_n^\partial = T_n^\circ \oplus \langle \omega_n \rangle_\mathbb{R}.$$

Воспользуемся следующим результатом работы И. Дынникова и В. Шастина.

Лемма 10.62 [112, Theorem 4]**.** При $n \geqslant 3$ пространство T_n порождается квазиморфизмами

$$\omega_n, \qquad \mathcal{P}^n, \qquad \mathcal{E}^n$$

и квазиморфизмами из $R_n(T_{n-1})$.

Следствие 10.63. При $n \geqslant 3$ выполняются соотношения

$$T_n^\partial = \langle \omega_n, \mathcal{P}_\partial^n, \mathcal{E}_\partial^n \rangle_\mathbb{R}, \qquad T_n^\circ = \langle \mathcal{P}_\circ^n, \mathcal{E}_\circ^n \rangle_\mathbb{R}.$$

Доказательство. Согласно лемме 10.23, проектор на первый уровень обращается в нуль на $R_n(Q_{n-1})$, а значит, и на $R_n(T_{n-1})$. Для доказательства первого тождества остаётся применить лемму 10.62 и заметить, что $\omega_n \in Q_n^\partial$. Для доказательства второго тождества воспользуемся тем, что квазиморфизм ω_n принадлежит ядру проектора на второй уровень. □

Таким образом, $\dim T_n^\partial \leqslant 3$ и $\dim T_n^\circ \leqslant 2$.

Замечание 10.64. Используя пример 10.54 и лемму 10.55, при $n \in \{2, 3\}$ получаем

$$T_2^\partial = \langle \omega_2 \rangle_\mathbb{R}, \qquad T_2^\circ = \{0\}.$$
$$T_3^\partial = \langle \omega_3 \rangle_\mathbb{R}, \qquad T_3^\circ = \{0\}.$$

По предложению 10.58 для каждого чётного $n \geqslant 4$ получаем

$$2 \leqslant \dim T_n^\partial \leqslant 3, \qquad 1 \leqslant \dim T_n^\circ \leqslant 2.$$

Кроме того, используя результаты вычислений, представленные в работе [112, p. 875], получаем, что квазиморфизмы $\mathcal{P}_\circ^5$ и $\mathcal{E}_\circ^5$ линейно независимы, откуда

$$\dim T_5^\partial = 3, \qquad \dim T_5^\circ = 2. \qquad \lozenge$$

Для фиксированного n и фиксированного квазиморфизма из пространств T_n^∂ и T_n° его значения могут быть вычислены за время, полиномиальное по длине артиновского слова. Приведём явные оценки дефектов образующих этих пространств. Напомним, что при $n \geqslant 3$ имеем $D(\omega_n) = 1$.

[12] Поскольку ядерные компоненты квазиморфизма выражаются в терминах операторов I_k и R_k, пространство T_n замкнуто относительно применения проектора на первый уровень иерархии. Оно также замкнуто относительно применения проектора на второй уровень, поскольку $\omega_n \in T_n$.

Замечание 10.65. Согласно лемме 6.15, замечаниям 10.26 и 10.52 и предложению 10.34, выполняются неравенства

$$n(1+(-1)^n) \leqslant D(\mathcal{P}^n_\partial) \leqslant nC_n, \qquad n \leqslant D(\mathcal{E}^n_\partial) \leqslant nC_n,$$
$$D(\mathcal{P}^n_\circ) \leqslant 2nC_n, \qquad D(\mathcal{E}^n_\circ) \leqslant 2nC_n. \qquad \Diamond$$

Отсюда получаем эффективно вычислимые нижние оценки асимптотических чисел переноса первых двух уровней.

Следствие 10.66. При $n \geqslant 3$ для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$\ell_\partial(\varphi) \geqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) \geqslant \max\left\{\frac{|\mathcal{P}^n_\partial(\varphi)|}{nC_n},\ \frac{|\mathcal{E}^n_\partial(\varphi)|}{nC_n},\ |\omega_n(\varphi)|\right\},$$
$$\ell_\circ(\varphi) \geqslant 2\,\mathrm{scl}_\circ(\varphi) \geqslant \max\left\{\frac{|\mathcal{P}^n_\circ(\varphi)|}{2nC_n},\ \frac{|\mathcal{E}^n_\circ(\varphi)|}{2nC_n}\right\}.$$

Доказательство. Совместим замечание 10.65 с теоремами 6.21 и 6.35. □

10.4 Квазиморфизмы типа сигнатуры Левина–Тристрама

Рассмотрим квазиморфизмы, отвечающие введённым в разделе 2.1 сигнатурам Левина–Тристрама [139, 143, 168, 68, 112, 144]. Согласно теореме Ж.-М. Гамбаду и Э. Жиса [140, Theorem A],[13] при $n \geqslant 3$ для каждого $\zeta \in S^1$ функция

$$\sigma_\zeta \colon B_n \to \mathbb{R},$$

заданная правилом $\sigma_\zeta(\varphi) := \sigma_\zeta(L_\varphi)$, является квазиморфизмом на группе кос, называющимся *квазиморфизмом сигнатуры Левина–Тристрама*. Кроме того, выполняются неравенства[14]

$$D(\sigma_\zeta) \leqslant n-1, \qquad D(\widetilde{\sigma}_\zeta) \leqslant 2(n-1).$$

Функция σ_{-1} называется *квазиморфизмом сигнатуры Тротттера–Мурасуги*.

Для фиксированных n и ζ квазиморфизм σ_ζ может быть вычислен за время, квадратичное по длине артиновского слова [93], а его усреднение $\widetilde{\sigma}_\zeta$ — за полиномиальное время [112].

В отличие от закрученности, усреднения $\widetilde{\sigma}_\zeta$ квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама в общем случае не являются липшицевыми относительно числа переноса ℓ_∂. Далее для использования этих эффективно вычислимых квазиморфизмов в основной

[13] В работе [140] результат сформулирован для случая, при котором $\zeta \in S^1$ является корнем из единицы. Общий случай получается рассуждением, описанным в доказательстве леммы 10.72 ниже.

[14] Рассуждение, приведённое в работе [140], даёт верхнюю оценку $n-1$, но авторы фиксируют лишь более грубую оценку $2n$; ср. [139, Proposition 5.1]. Также отметим, что из вычисления значений на косах ρ_n и ρ_n^2 следует, что в отличие от дефекта закрученности, дефекты квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама не допускают равномерной верхней оценки, не зависящей от n; ср. пример 10.88 ниже.

схеме диссертационной работы будут реализованы два подхода. Первый подразумевает подбор подходящих линейных комбинаций этих квазиморфизмов, которые принимают нулевое значение на подгруппе B_{n-1}; см. предложение 10.77. Второй подразумевает проекцию этих квазиморфизмов на первые два уровня иерархии; см. предложение 10.87.

В дальнейшем нам потребуется следующая когомологическая интерпретация квазиморфизмов сигнатуры Левина–Тристрама σ_ζ. Для $\zeta \in S^1$ специализация

$$\mathfrak{B}_\zeta \colon B_n \to \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{C})$$

редуцированного представления Бурау сохраняет некоторую псевдоэрмитову форму, называющуюся *формой Сквайра* [288, 140, 2]. При невырожденности этой формы[15] образ гомоморфизма $\mathfrak{B}_\zeta$ тем самым содержится в соответствующей унитарной группе. В этом случае для каждой пары (A, B) унитарных преобразований формы Сквайра определён целочисленный коцикл Мейера $\mathrm{Meyer}(A, B)$; см. [251, 93]. Ж.-М. Гамбаду и Э. Жис [140, Theorem A] показали, что значение этого коцикла на паре, состоящей из образов двух кос при гомоморфизме $\mathfrak{B}_\zeta$, совпадает со значением коцикла, соответствующего квазиморфизму сигнатуры Левина–Тристрама σ_ζ:

$$\delta(\sigma_\zeta) = -\mathfrak{B}_\zeta^*(\mathrm{Meyer}).$$

Лемма 10.67 [93, Theorem 2.18]**.** При $n \geqslant 3$ для любых кос $\varphi, \psi \in B_n$ и любого $\zeta \in S^1$, если форма Сквайра невырождена, то выполняется соотношение[16]

$$\sigma_\zeta(\varphi\psi) - \sigma_\zeta(\varphi) - \sigma_\zeta(\psi) = -\mathrm{Meyer}\big(\mathfrak{B}_\zeta(\varphi), \mathfrak{B}_\zeta(\psi)\big). \qquad \square$$

10.4.1 Структура пространств квазиморфизмов типа сигнатуры

Для $n \geqslant 2$ введём *пространство квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама*:

$$\Sigma_n := \mathrm{span}\,\{\widetilde{\sigma}_\zeta \mid \zeta \in S^1\} \subseteq Q_n.$$

Символами Σ_n^∂ и Σ_n° обозначим проекции пространства Σ_n на первые два уровня иерархии. Отметим, что выполняются включения

$$\Sigma_n \cap Q_n^\partial \subseteq \Sigma_n^\partial, \qquad \Sigma_n \cap Q_n^\circ \subseteq \Sigma_n^\circ, \qquad \Sigma_n^\circ \subseteq \Sigma_n^\partial + \langle \omega_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Для фиксированного n и фиксированного квазиморфизма из пространств Σ_n^∂ и Σ_n° его значения могут быть вычислены за время, полиномиальное по длине артиновского слова. Приведём явные верхние оценки дефектов основных представителей этих про-

[15] Если форма Сквайра вырождена, то ζ является корнем из единицы степени n. В частности, если порядок корня из единицы $\zeta \neq 1$ взаимно прост с n, то форма Сквайра невырождена.

[16] Отметим, что согласно [93, Example 2.25], без предположения о невырожденности формы Сквайра это соотношение не всегда выполняется.

странств.

Замечание 10.68. По замечанию 10.26 при $n \geqslant 3$ для $\zeta \in S^1$ выполняются неравенства

$$D((\widetilde{\sigma}_\zeta)_\partial) \leqslant 2(n-1)C_n, \qquad D((\widetilde{\sigma}_\zeta)_\circ) \leqslant 4(n-1)C_n. \qquad \lozenge$$

Рассматривая конкретные $\zeta \in S^1$, отсюда получаем эффективно вычислимые нижние оценки асимптотических чисел переноса первых двух уровней.

Следствие 10.69. При $n \geqslant 3$ для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$\ell_\partial(\varphi) \geqslant \sup_{\zeta \in S^1} \frac{|(\widetilde{\sigma}_\zeta)_\partial(\varphi)|}{2(n-1)C_n}, \qquad \ell_\circ(\varphi) \geqslant \sup_{\zeta \in S^1} \frac{|(\widetilde{\sigma}_\zeta)_\circ(\varphi)|}{4(n-1)C_n}.$$

Доказательство. Совместим замечание 10.68 с теоремами 6.21 и 6.35. □

И. Дынников и В. Шастин [112, Theorem 8] показали, что для каждого $n \geqslant 5$ усреднение $\widetilde{\sigma}_{-1}$ квазиморфизма сигнатуры Троттера–Мурасуги линейно независимо от всех квазиморфизмов типа закрученности:

$$\langle \widetilde{\sigma}_{-1} \rangle_{\mathbb{R}} \cap T_n = \{0\}.$$

Далее покажем, что при $n \geqslant 5$ закрученность ω_n линейно независима от всех квазиморфизмов из Σ_n и Σ_n^∂; см. следствие 10.74. Затем построим нетривиальные квазиморфизмы из Σ_n^∂ и Σ_n°.

Нам потребуется наблюдение о том, что квазиморфизмы сигнатуры Левина–Тристрама согласованы со стандартным вложением $i\colon B_n \to B_{n+1}$.

Лемма 10.70 [112, p. 875] и [93, Remark 2.19]**.** При $n \geqslant 2$ для любых $\zeta \in S^1$ и $\varphi \in B_n$ выполняются соотношения

$$\sigma_\zeta(i(\varphi)) = \sigma_\zeta(\varphi), \qquad \widetilde{\sigma}_\zeta(i(\varphi)) = \widetilde{\sigma}_\zeta(\varphi). \qquad \square$$

Замечание 10.71. Из леммы 10.70 следует, что при $n \geqslant 3$ выполняется равенство

$$I_n(\Sigma_n) = \Sigma_{n-1}.$$

Таким образом, отображения I_n индуцируют последовательность сюръективных отображений

$$\ldots \to \Sigma_{n+1} \to \Sigma_n \to \Sigma_{n-1} \to \ldots \to \Sigma_3 \to \Sigma_2.$$

Ядра этих отображений совпадают с $\Sigma_n \cap Q_n^\partial$: имеем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \Sigma_n \cap Q_n^\partial \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_{n-1} \longrightarrow 0. \qquad \lozenge$$

Нам также потребуется ряд результатов, связанных с ядром представления Бурау.

Лемма 10.72. При $n \geqslant 3$ для любых кос $\varphi \in \mathrm{Bur}_n$ и $\psi \in B_n$ и для любого $\zeta \in S^1$ выполняется соотношение

$$\sigma_\zeta(\varphi\psi) = \sigma_\zeta(\varphi) + \sigma_\zeta(\psi).$$

В частности, сужение квазиморфизма σ_ζ на ядро Bur_n является гомоморфизмом; если $\varphi \in [\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$, то

$$\sigma_\zeta(\varphi) = 0, \qquad \sigma_\zeta(\varphi\psi) = \sigma_\zeta(\psi).$$

Доказательство. При $\zeta = 1$ соотношение выполняется по определению. Пусть $\zeta \neq 1$.

Если ζ не является корнем из единицы или если порядок корня из единицы ζ взаимно прост с n, то форма Сквайра невырождена, и по лемме 10.67 получаем[17]

$$\begin{aligned}\sigma_\zeta(\varphi\psi) - \sigma_\zeta(\varphi) - \sigma_\zeta(\psi) &= -\mathrm{Meyer}\big(\mathfrak{B}_\zeta(\varphi), \mathfrak{B}_\zeta(\psi)\big) \\ &= -\mathrm{Meyer}\big(\mathrm{E}_{n-1}, \mathfrak{B}_\zeta(\psi)\big) = 0.\end{aligned}$$

Иначе выберем целое число $m > n$, взаимно простое с порядком корня из единицы ζ, перейдём от кос φ и ψ к их образам при стандартном вложении $i^{m-n}\colon B_n \to B_m$, воспользуемся леммой 10.70, включением $i^{m-n}(\mathrm{Bur}_n) \subseteq \mathrm{Bur}_m$ и применим предыдущее рассуждение. □

Следствие 10.73. При $n \geqslant 3$ каждый квазиморфизм $f \in \Sigma_n$ принимает на коммутанте ядра представления Бурау нулевое значение:

$$f([\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]) = \{0\}.$$

Доказательство. По лемме 10.72 для каждого $\zeta \in S^1$ квазиморфизм сигнатуры Левина–Тристрама σ_ζ обращается в нуль на коммутанте $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$. Следовательно, также обращается в нуль его усреднение $\widetilde{\sigma}_\zeta$. Поскольку пространство Σ_n порождается квазиморфизмами $\widetilde{\sigma}_\zeta$, отсюда следует искомое утверждение. □

Следствие 10.74. При $n \geqslant 5$ закрученность ω_n линейно независима от всех квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама и от всех их проекций на первый уровень:

$$\langle\omega_n\rangle_{\mathbb{R}} \cap \Sigma_n = \{0\}, \qquad \langle\omega_n\rangle_{\mathbb{R}} \cap \Sigma_n^\partial = \{0\}.$$

В частности, если квазиморфизм $f \in \Sigma_n^\partial$ нетривиален, то квазиморфизм $f_\circ \in \Sigma_n^\circ$ также нетривиален, и проектор на второй уровень устанавливает изоморфизм

$$\Sigma_n^\partial \cong \Sigma_n^\circ.$$

Доказательство. Поскольку по лемме 2.2 коммутант $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ является нецентральной нормальной подгруппой группы B_n, достаточно совместить следствие 10.73 со следствием 10.38. □

[17] Символ E_{n-1} обозначает единичную матрицу.

Структура пространств Σ_n, Σ_n^∂ и Σ_n° изучена значительно меньше, чем структура пространств T_n, T_n^∂ и T_n°. Естественно ожидать, что при $n \geqslant 3$ каждое пространство Σ_n бесконечномерно. Из [140, Lemma 5.4] следует неравенство

$$\dim \Sigma_n \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Далее эта нижняя оценка будет улучшена до $n-1$; см. следствие 10.81.

10.4.2 Липшицевы квазиморфизмы типа сигнатуры

Опишем метод построения элементов из пересечения $\Sigma_n \cap Q_n^\partial \subseteq \Sigma_n^\partial$ и установим нетривиальность ряда таких элементов.

Для $n \geqslant 2$ и $\theta \in \mathbb{R}$ положим

$$\zeta = e^{2\pi \mathrm{i}\theta} = \cos(2\pi\theta) + \mathrm{i}\sin(2\pi\theta) \in S^1$$

и будем обозначать символом σ_θ^n соответствующую функцию $\sigma_\zeta \colon B_n \to \mathbb{R}$.

Нам потребуются следующие два результата вычислений, представленных в работе Ж.-М. Гамбаду и Э. Жиса. Первый даёт явное описание квазиморфизмов $\widetilde{\sigma}_\theta^n$ для малых параметров θ. Второй показывает, что функция $\widetilde{\sigma}_\theta^n(\Delta_n^2)$ является кусочно-линейной от переменной $\theta \in \mathbb{R}$.

Лемма 10.75 [140, Theorem 4.3]**.** Пусть $n \geqslant 2$. Если $0 < \theta < n^{-1}$, то выполняется соотношение

$$\widetilde{\sigma}_\theta^n = -2\theta \cdot \exp_n.$$

В частности, $D(\widetilde{\sigma}_\theta^n) = 0$. □

Лемма 10.75 также показывает, что $\exp_n \in \Sigma_n$. Положим

$$\begin{aligned} \Theta_n &:= \{\theta \in \mathbb{R} \mid n^{-1} < \theta < (n-1)^{-1}\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mid n-1 < \theta^{-1} < n\}. \end{aligned}$$

Лемма 10.76 [140, Proposition 5.2]**.** Пусть $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$. Если

$$\frac{k-1}{n} < \theta < \frac{k}{n},$$

то выполняется соотношение

$$\widetilde{\sigma}_\theta^n(\Delta_n^2) = -2n(n-2k+1)\theta - 2k(k-1).$$

В частности, для $\theta \in \Theta_n$ имеем

$$\widetilde{\sigma}^n_\theta(\Delta^2_n) = -2n(n-3)\theta - 4. \qquad \square$$

Для $n \geqslant 2$ рассмотрим произвольный элемент пространства Σ_n:

$$F = \sum_{i=1}^m c_i \widetilde{\sigma}^n_{\theta_i} = c_1 \widetilde{\sigma}^n_{\theta_1} + \ldots + c_m \widetilde{\sigma}^n_{\theta_m},$$

где $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ и $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$.

Предложение 10.77. Для $n \geqslant 3$ пусть $0 < \theta_1, \ldots, \theta_m < (n-1)^{-1}$. Тогда условие $F \in Q^\partial_n$ эквивалентно соотношению

$$\sum_{i=1}^m c_i \theta_i = 0.$$

Доказательство. Из лемм 10.70 и 10.75 получаем

$$I_n(F) = \sum_{i=1}^m c_i \widetilde{\sigma}^{n-1}_{\theta_i} = -2 \left(\sum_{i=1}^m c_i \theta_i \right) \cdot \exp_{n-1}.$$

Остаётся применить замечание 10.22. $\square$

Предложение 10.77 даёт источник эффективно вычислимых квазиморфизмов, липшицевых на первом уровне. Рассмотрим конкретное семейство таких квазиморфизмов.

Для $n \geqslant 2$ и $\theta \in \mathbb{R}$ положим

$$q^n_\theta := \widetilde{\sigma}^n_\theta + 2\theta \cdot \exp_n.$$

Следствие 10.78. Пусть $n \geqslant 2$. Если $0 < \theta < (n-1)^{-1}$, то квазиморфизм q^n_θ является липшицевым на первом уровне, причём $q^n_\theta \in \Sigma_n \cap Q^\partial_n$.

Доказательство. При $n = 2$ утверждение выполнено. При $n \geqslant 3$ совместим лемму 10.75 и предложение 10.77. $\square$

Следствие 10.79. Пусть $n \geqslant 2$. Если $\theta \in \Theta_n$, то выполняется соотношение

$$q^n_\theta(\Delta^2_n) = 4(n\theta - 1).$$

Кроме того, при $n \geqslant 3$ имеем

$$(q^n_\theta)_\circ = \widetilde{\sigma}^n_\theta + 2\theta \cdot \exp_n - 4(n\theta - 1) \cdot \omega_n.$$

Доказательство. Применим лемму 10.76 и равенство $\exp_n(\Delta^2_n) = n(n-1)$. Второе соотношение следует из предложения 10.34. $\square$

Предложение 10.80. Пусть $n \geqslant 2$ и $\theta \in \Theta_n$. Тогда квазиморфизм $q_\theta^n \in Q_n^\partial$ нетривиален. Если, кроме того, $n \geqslant 5$, то он линейно независим от ω_n и тем самым квазиморфизм $(q_\theta^n)_\circ$ также нетривиален.

Доказательство. Применим следствия 10.79 и 10.74. □

Предложение 10.80 показывает, что при $n \geqslant 2$ имеем

$$\dim \Sigma_n^\partial \geqslant 1$$

и при $n \geqslant 5$ имеем[18]

$$\dim \Sigma_n^\circ \geqslant 1.$$

Также отметим следующий результат.

Следствие 10.81. Для каждого $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\dim \Sigma_n \geqslant n - 1.$$

Более того, при $n \geqslant 3$ для любых чисел $\theta_3, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$, для которых $k - 1 < \theta_k^{-1} < k$ при $k \in \{3, \dots, n\}$, следующий набор квазиморфизмов из Σ_n линейно независим:

$$\exp_n,\ q_{\theta_3}^n,\ q_{\theta_4}^n,\ \dots,\ q_{\theta_n}^n.$$

Вместе с тем $q_{\theta_n}^n \in \Sigma_n \cap Q_n^\partial$.

Доказательство. Утверждение следует индукцией по n из предложения 10.80 и замечания 10.71. □

Замечание 10.82. По лемме 6.15 при $n \geqslant 3$ для $\theta \in \Theta_n$ выполняются неравенства

$$4(n\theta - 1) \leqslant D(q_\theta^n) \leqslant 2(n - 1).$$

Кроме того, по предложению 10.34 получаем

$$D((q_\theta^n)_\circ) \leqslant 2(n-1) + 4(n\theta - 1) \leqslant 2(n-1) + \frac{4}{n-1}. \qquad \lozenge$$

Рассматривая конкретные $\theta \in \Theta_n$, отсюда получаем эффективно вычислимые нижние оценки асимптотических чисел переноса первых двух уровней.

Следствие 10.83. При $n \geqslant 3$ для любой косы $\varphi \in B_n$ выполняются неравенства

$$\ell_\partial(\varphi) \geqslant \sup_{\theta \in \Theta_n} \frac{|q_\theta^n(\varphi)|}{2(n-1)} \geqslant \sup_{\theta \in \Theta_n} \frac{|\sigma_{e^{2\pi i\theta}}(\varphi) + 2\theta \exp_n(\varphi)|}{2(n-1)} - \frac{1}{2},$$

$$\ell_\circ(\varphi) \geqslant \sup_{\theta \in \Theta_n} \frac{|(q_\theta^n)_\circ(\varphi)|}{2(n-1) + 4(n\theta - 1)} \geqslant \sup_{\theta \in \Theta_n} \frac{|\sigma_{e^{2\pi i\theta}}(\varphi) + 2\theta \exp_n(\varphi) - 4(n\theta - 1)\,\omega_n(\varphi)|}{2(n-1) + 4(n\theta - 1)} - \frac{1}{2}.$$

[18] Согласно предложению 10.87 ниже, при $n = 4$ также имеем $\dim \Sigma_4^\circ \geqslant 1$.

Доказательство. Совместим замечание 10.82 с теоремами 6.21 и 6.35, а также применим замечание 4.3. □

Таким образом, при подходящем выборе параметра сигнатура Левина–Тристрама замыкания косы даёт нижнюю оценку асимптотического числа переноса ℓ_∂. Подчеркнём, что для каждых фиксированных $n \geqslant 3$ и $\theta \in \Theta_n$ квазиморфизм $\sigma_{e^{2\pi i\theta}}$ может быть вычислен за время, квадратичное по длине артиновского слова.

10.4.3 Проекции на первые два уровня

При $n \geqslant 3$ для $\zeta \in S^1$ и крашеной косы $\varphi \in P_n$ по лемме 10.70 получаем

$$(\widetilde{\sigma}_\zeta)_\partial(\varphi) = \widetilde{\sigma}_\zeta(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#J=k}} \widetilde{\sigma}_\zeta(d_J(\varphi)).$$

Таким образом, проекция на первый уровень квазиморфизма $\widetilde{\sigma}_\zeta$ отвечает подсчёту значений усреднения квазиморфизма сигнатуры Левина–Тристрама на косах, полученных из исходной косы забыванием соответствующих проколов. Для произвольной косы $\varphi \in B_n$ формула приобретает вид

$$(\widetilde{\sigma}_\zeta)_\partial(\varphi) = \widetilde{\sigma}_\zeta(\varphi) + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2}(-1)^k \sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ \#J=k}} \widetilde{\sigma}_\zeta(d_J(\varphi^{n!})).$$

Покажем, что при $n \geqslant 4$ проекции

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial \in \Sigma_n^\partial, \qquad (\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ \in \Sigma_n^\circ$$

усреднения $\widetilde{\sigma}_{-1}$ квазиморфизма сигнатуры Троттера–Мурасуги нетривиальны. Нам потребуется следующий результат вычислений, представленных в работе И. Дынникова и В. Шастина.

Лемма 10.84 [112, p. 875]**.** При $n \geqslant 3$ выполняется соотношение

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial(\Delta_n^2) = -(-2)^{n-2}.$$ □

По лемме 10.84 получаем

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ = (\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial + (-2)^{n-2}\cdot\omega_n.$$

Пример 10.85. Согласно [112, Theorem 6], при $n = 3$ имеем

$$\widetilde{\sigma}_{-1} = 2\,\omega_3 - \exp_3,$$

откуда

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial = 2\,\omega_3, \qquad (\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ = 0.$$

Отсюда для $\varphi \in B_4$ также получаем

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial(\varphi) = (\widetilde{\sigma}_{-1})(\varphi) - \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} \omega_3(d_i(\varphi^{24})) + \exp_4(\varphi),$$
$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ(\varphi) = (\widetilde{\sigma}_{-1})(\varphi) - \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4} \omega_3(d_i(\varphi^{24})) + \exp_4(\varphi) + 4\,\omega_4(\varphi).$$

При $\varphi \in P_4$ эти формулы приобретают вид

$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial(\varphi) = (\widetilde{\sigma}_{-1})(\varphi) - 2\sum_{i=1}^{4} \omega_3(d_i(\varphi)) + \exp_4(\varphi),$$
$$(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ(\varphi) = (\widetilde{\sigma}_{-1})(\varphi) - 2\sum_{i=1}^{4} \omega_3(d_i(\varphi)) + \exp_4(\varphi) + 4\,\omega_4(\varphi). \qquad \lozenge$$

Пример 10.86. Рассмотрим следующую бруннову косу из B_4:

$$\varphi := \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-2}\sigma_3\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-2}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^2\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1.$$

Из [2, стр. 103] следует, что оба квазиморфизма $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial$ и $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ$ принимают на косе φ значение -2. $\lozenge$

Предложение 10.87. Если $n \geqslant 3$, то квазиморфизм $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial$ нетривиален. Если, кроме того, $n \geqslant 4$, то он линейно независим от закрученности ω_n и тем самым квазиморфизм $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ$ также нетривиален.

Доказательство. Нетривиальность квазиморфизма $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial$ следует из леммы 10.84. Согласно следствию 10.74, отсюда получаем нетривиальность квазиморфизма $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\circ$ при каждом $n \geqslant 5$. При $n = 4$ его нетривиальность следует из примера 10.86.[19] $\square$

А. Малютин предположил [231, Remark 3.5], что при $n > 3$ верхнюю оценку C_n дефекта проекции на первый уровень, приведённую в замечании 10.26, можно существенно улучшить. Приведём пример, показывающий, что экспоненциальный порядок роста этой оценки является оптимальным.

Пример 10.88. Согласно леммам 6.15 и 10.84, при $n \geqslant 3$ имеем

$$D((\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial) \geqslant |(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial(\Delta_n^2)| = 2^{n-2}.$$

[19] Отметим, что при $n \geqslant 4$ линейная независимость квазиморфизмов $(\widetilde{\sigma}_{-1})_\partial$ и ω_n также следует из нетривиальности ядра специализации представления Бурау, отвечающей параметру $t = -1$.

С другой стороны, $D(\widetilde{\sigma}_{-1}) \leqslant 2(n-1)$, откуда

$$2^n \geqslant C_n \geqslant \sup_{\substack{f \in Q_n \\ D(f)>0}} \frac{D(f_\partial)}{D(f)} \geqslant \frac{2^{n-2}}{2(n-1)} = \frac{2^{n-3}}{n-1}. \qquad \Diamond$$

В заключение отметим, что оба семейства рассмотренных выше квазиморфизмов типа закрученности и квазиморфизмов типа сигнатуры Левина–Тристрама тесно связаны с четырёхмерной топологией. В случае закрученности характерными примерами такой связи являются теоремы П. Феллера [119], М. Хеддена и Т. Марка [164], представленные в разделе 2.5.2. В частности, лемма 2.41 является аналогом так называемого срезанного неравенства Беннекина. Для сигнатуры Левина–Тристрама подобным аналогом является так называемое неравенство Мурасуги–Тристрама.[20] Вместе с тем сигнатуры Левина–Тристрама допускают ряд непосредственных четырёхмерных интерпретаций; см. [97].

Согласно работе М. Бранденбурского и Е. Кендры [69], любой квазиморфизм группы классов конкордантности узлов, липшицевый относительно срезанного рода, задаёт квазиморфизм группы кос; ср. [140, 12, 68, 120, 119]. С помощью этой конструкции можно получить как квазиморфизмы сигнатуры Левина–Тристрама, так и закрученность: последняя совпадает с определённым угловым коэффициентом так называемого усреднённого Υ-инварианта, возникающего из гомологий Хегора–Флоера замыкания косы [123, 120, 102, 304, 119]. Тем самым результаты настоящей диссертации позволяют связать конструкции, чаще ассоциируемые с четырёхмерной топологией, с динамикой гомеоморфизмов поверхностей и трёхмерной гиперболической геометрией.

Таким образом, в модельном случае $S = D^2_n$ имеются вычислимые проекторы пространства $Q(\mathrm{Mod}(S))$ на подпространства V_∂ и $V_\circ$, дающие результаты структурного характера. Применяя эти проекторы к произвольным однородным квазиморфизмам групп кос и вычисляя значения полученных функционалов, можно получать нижние оценки расстояний и асимптотических чисел переноса, а через них — оценки динамических, геометрических и топологических характеристик. Предложения 10.58, 10.61, 10.80 и 10.87 показывают, что такой подход действительно может приводить к нетривиальным эффективно вычислимым липшицевым квазиморфизмам первых двух уровней иерархии.

В главе 11 будут, в частности, описаны пороговые признаки и нижние оценки в терминах однородных квазиморфизмов, применимые в том числе к проекциям квазиморфизмов типа закрученности и типа сигнатуры Левина–Тристрама.

[20] Для каждого корня из единицы ζ, порядок которого является степенью простого числа, функция σ_ζ представляет собой инвариант конкордантности узлов и зацеплений [97, Theorem 2] и обладает свойством липшицевости относительно срезанного рода [97, Theorem 3].

ГЛАВА 11 ПРИЛОЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ ПАР «МНОГООБРАЗИЕ — ЗАЦЕПЛЕНИЕ»

Настоящая глава посвящена приложениям разработанного аппарата к конкретным задачам трёхмерной геометрии и топологии.

В разделе 11.1 исследуются гипотезы С. Бигелоу, возникшие в программе построения узлов, неотличимых заданными инвариантами. Расширяется подход Т. Ито, использованный им для доказательства гипотезы (E), и с помощью результатов о квазиморфизмах доказывается гипотеза (C) для внешне хиральных кос. Показывается, что на общий случай этот подход не распространяется, и строятся ахиральные контрпримеры к гипотезе (C). Затем с помощью полученных результатов о числах переноса доказывается гипотеза (C′).

В разделе 11.2 строятся узлы, неотличимые заданными инвариантами и имеющие неограниченные геометрические и топологические характеристики. Для этого применяются результаты предыдущего раздела, результаты о нормальных подгруппах группы кос и свойства сигнатуры Левина–Тристрама кос из ядра представления Бурау. Полученная конструкция обобщает результаты С. Лин, Э. Калфагианни, А. Стоимёнова, Д. Силвера и У. Уиттена.

В разделе 11.3 результаты предыдущих глав совмещаются для получения эффективных нижних оценок динамической сложности классов отображений поверхностей и геометрических и топологических характеристик ассоциированных с ними трёхмерных объектов.

11.1 Гипотезы Бигелоу

В настоящем разделе для заданных кос $\varphi, \psi \in B_n$ и целого числа $m \in \mathbb{Z}$ исследуется вопрос о нетривиальности зацепления, являющегося замыканием косы $\varphi^m\psi$.

Замечание 11.1. Предположим, что замыкание косы ψ является узлом. Если коса φ^m является крашеной, то замыкание косы $\varphi^m\psi$ также является узлом. В частности, для этого достаточно, чтобы число m делилось на порядок перестановки множества проколов, индуцированной косой φ. ◊

Напомним обозначение

$$\rho_n = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1} \in B_n,$$

где под ρ_1 понимается тривиальная коса из B_1. Также напомним формулировки гипотез С. Бигелоу [45].

Гипотеза (C). Для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует такое целое число $m \in \mathbb{Z}$, что замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является нетривиальным узлом.

Гипотеза (C′). Для любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существуют число $m \in \mathbb{Z}$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание

косы $\varphi^m\psi$ является нетривиальным узлом.

Гипотеза (E). Для любой нетривиальной нормальной подгруппы $N \trianglelefteqslant B_n$ существуют коса $\varphi \in N$ и коса $\psi \in B_n$, замыкание которой является тривиальным узлом, такие, что замыкание косы $\varphi\psi$ является нетривиальным узлом.

Отметим, что гипотеза (C) влечёт гипотезу (C′), а гипотеза (C′) влечёт гипотезу (E).

11.1.1 Квазиморфизмы и внешняя хиральность

Гипотеза (E) была доказана Т. Ито [173] для $\psi = \rho_n$ с помощью закрученности ω_n. В доказательстве Ито показал, что каждая нетривиальная нормальная подгруппа $N \trianglelefteqslant B_n$ содержит косу φ ненулевой закрученности (см. лемму 10.37), и, пользуясь оценкой

$$|\omega_n(\varphi^m\psi)| \geqslant |m| \cdot |\omega_n(\varphi)| - |\omega_n(\psi)| - 1,$$

применил лемму 2.36 к косе $\varphi^m\psi$ для

$$|m| > \frac{2 + |\omega_n(\psi)|}{|\omega_n(\varphi)|}.$$

По замечанию 11.1 аналогичный подход может быть использован для доказательства гипотезы (C) для произвольных кос φ ненулевой закрученности.

Результаты настоящей работы позволяют расширить этот подход и установить истинность гипотезы (C) для произвольных внешне хиральных кос[1] и дать явную оценку для искомой степени m.

Предложение 11.2. Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если существует квазиморфизм $f \in V_\partial$, для которого $f(\varphi) \neq 0$, то для каждого целого числа m, удовлетворяющего неравенству

$$|m| > \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{D(f)}{|f(\varphi)|},$$

замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является простым зацеплением. В частности, если такое число m делится на порядок перестановки, соответствующей косе φ, то замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является простым узлом.

Доказательство. Поскольку $\rho_n^n = \Delta_n^2$, используя лемму 6.15, получаем

$$|f(\rho_n)| = \frac{1}{n}|f(\Delta_n^2)| \leqslant \frac{1}{n}D(f).$$

[1] См. определение в разделе 2.3.3.

Значит,

$$\begin{aligned} |f(\varphi^m\rho_n)| &\geqslant |m||f(\varphi)| - |f(\rho_n)| - D(f) \\ &\geqslant |m||f(\varphi)| - \left(1+\frac{1}{n}\right) D(f) > D(f). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi^m\rho_n) \geqslant \frac{|f(\varphi^m\rho_n)|}{D(f)} > 1,$$

и искомое утверждение теперь следует по теореме 9.8. Последнее утверждение следует из замечания 11.1. □

Следствие 11.3. Пусть $n \geqslant 3$ и $\varphi \in B_n$. Если коса φ является внешне хиральной, то $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$ и для каждого целого числа m, удовлетворяющего неравенству

$$|m| > \frac{2n+1}{2n\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi)},$$

замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является простым зацеплением. В частности, если такое число m делится на порядок перестановки, соответствующей косе φ, то замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является простым узлом.

Доказательство. По теореме 7.16 имеем $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) > 0$. Выберем нетривиальный квазиморфизм $f \in V_\partial$, экстремальный для косы φ. Тогда

$$|f(\varphi)| = 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(f).$$

Следовательно, условие

$$|m| > \frac{2n+1}{2n\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi)}$$

эквивалентно неравенству

$$|m| > \left(2+\frac{1}{n}\right)\frac{D(f)}{|f(\varphi)|}.$$

По предложению 11.2 замыкание косы $\varphi^m\rho_n$ является простым зацеплением. Последнее утверждение следует из замечания 11.1. □

Это доказывает истинность гипотезы (C) и, следовательно, гипотезы (C′) для произвольных внешне хиральных кос.

Однако для ахиральных кос φ при исследовании гипотез (C) и (C′) возможности квазиморфизмов существенно ограничены; см. лемму 5.11. В частности, отметим следующее ограничение ядерных квазиморфизмов, связанное с внешней ахиральностью.

Предложение 11.4. Для $n \geqslant 3$ предположим, что коса $\varphi \in B_n$ является внешне ахиральной. Тогда для любой косы ψ, замыкание которой не является простым зацеплением, для любого целого $m \in \mathbb{Z}$ и любого ненулевого квазиморфизма $f \in V_\partial$ выполняются

неравенства

$$\frac{|f(\varphi^m\psi)|}{D(f)} \leqslant 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi^m\psi) \leqslant 2.$$

Доказательство. Левое неравенство выполняется по определению стабильной коммутаторной длины первого уровня; докажем правое неравенство.

Поскольку коса $\varphi \in B_n$ является внешне ахиральной, по предложению 10.1 имеем $\mathrm{scl}_\partial(\varphi) = 0$. По теореме 9.8 имеем $2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) \leqslant 1$. Отсюда по лемме 5.11 получаем

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi^m\psi) &\leqslant 2\,|m|\,\mathrm{scl}_\partial(\varphi) + 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) + 1 \\ &= 2\,\mathrm{scl}_\partial(\psi) + 1 \leqslant 2. \end{aligned}$$

□

В разделе 11.1.3 истинность гипотезы (C′) будет установлена в полной общности с помощью чисел переноса; см. теорему 11.11. Прежде чем переходить к её доказательству, рассмотрим препятствие, связанное со свойством ахиральности. В частности, построим контрпримеры к гипотезе (C) для каждого $n \geqslant 4$.

11.1.2 Ахиральность и контрпримеры к гипотезе (C)

Опишем общий метод построения кос φ и кос ψ, для которых замыкания всех кос $\varphi^m\psi$ имеют один и тот же топологический тип.

Следуя обозначениям из раздела 2.3.3, для группы G и элемента $\varphi \in G$ положим

$$R(\varphi) := \{\psi \in G \mid \psi^{-1}\varphi\psi = \varphi^{-1}\}.$$

Символом $C(\varphi)$ обозначим централизатор элемента φ.

По предложению 2.14 для косы $\varphi \in B_n$ множество $R(\varphi)$ непусто в том и только в том случае, если коса φ является ахиральной.

Лемма 11.5. Для косы $\varphi \in B_n$ пусть $\psi \in R(\varphi)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}$ коса $\varphi^m\psi$ сопряжена с косой ψ. В частности, их замыкания изотопны.

Доказательство. Из соотношения $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi^{-1}$ получаем $\varphi\psi = \psi\varphi^{-1}$. Следовательно,

$$(\varphi\psi)^2 = \varphi\psi\varphi\psi = \varphi\varphi^{-1}\psi^2 = \psi^2.$$

По лемме 2.13 косы $\varphi\psi$ и ψ сопряжены. С другой стороны, для любого $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\varphi^{m+2}\psi = \varphi(\varphi^m\psi)\varphi^{-1}.$$

Таким образом, косы $\varphi^{m+2}\psi$ и $\varphi^m\psi$ сопряжены. Следовательно, при чётных m коса $\varphi^m\psi$ сопряжена с косой ψ, а при нечётных m — с косой $\varphi\psi$. Поскольку косы $\varphi\psi$ и ψ также сопряжены, получаем искомое утверждение. □

Таким образом, для построения контрпримера к гипотезе (C) достаточно найти нетривиальную косу $\varphi \in B_n$, для которой $\rho_n \in R(\varphi)$. Согласно предложению 2.14, выполняется равенство

$$\{\varphi \in B_n \mid \rho_n \in R(\varphi)\} = \{[\zeta, \rho_n] \mid \zeta \in C(\rho_n^2)\}.$$

Тем самым задача поиска контрпримеров сводится к задаче поиска кос ζ, лежащих в централизаторе косы ρ_n^2 и не лежащих в централизаторе косы ρ_n:

$$C(\rho_n^2) \backslash C(\rho_n).$$

Приведём пример такой косы ζ, используя описание централизаторов периодических кос из работы Х. Гонсалеса-Менесеса и Б. Виста [146, Proposition 3.3]; для полноты изложения приведём полную проверку необходимых свойств.

Пример 11.6. При $n = 4$ возьмём

$$\zeta = \sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1.$$

Покажем, что коса ζ коммутирует с ρ_4^2. Достаточно проверить, что сопряжение посредством косы ρ_4^2 меняет местами σ_1 и σ_3. Заметим, что

$$\rho_4^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \Delta_4\sigma_1^{-1}\sigma_3,$$

где $\Delta_4 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ — фундаментальная коса Гарсайда. Получаем

$$\begin{aligned}
\rho_4^2\sigma_1\rho_4^{-2} &= \Delta_4\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_1\Delta_4^{-1} = \Delta_4\sigma_1^{-1}\sigma_3\underline{\sigma_3^{-1}\sigma_1}\sigma_1\Delta_4^{-1} = \Delta_4\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_1\Delta_4^{-1} = \sigma_3,\\
\rho_4^2\sigma_3\rho_4^{-2} &= \Delta_4\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_1\Delta_4^{-1} = \Delta_4\underline{\sigma_3\sigma_1^{-1}}\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_1\Delta_4^{-1} = \Delta_4\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_1\Delta_4^{-1} = \sigma_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующий контрпример к гипотезе (C) для $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\varphi_4 := [\zeta, \rho_4] &= \sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\\
&= \sigma_1\underline{\sigma_1\sigma_3}\sigma_2\underline{\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\\
&= \sigma_1\sigma_1\underline{\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\\
&= \sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\underline{\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1}\sigma_1^{-1}\\
&= \sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Коса φ_4 действительно нетривиальна, поскольку индуцированная ею перестановка проколов нетривиальна: (13)(24). ◊

Покажем, что та же коса φ_4 даёт контрпример к гипотезе (C) для каждого $n \geqslant 4$.

Пример 11.7. Для $n \geqslant 4$ рассмотрим стандартное вложение $i^{n-4}\colon B_4 \to B_n$ и обозначим образ косы φ_4 тем же символом. Тогда для любого целого $m \in \mathbb{Z}$ коса $\varphi_4^m\rho_n \in B_n$

получается из косы $\varphi_4^m\rho_4 \in B_4$ последовательным применением стабилизаций. Следовательно, их замыкания изотопны. Поскольку замыкание косы $\varphi_4^m\rho_4$ является тривиальным узлом, замыкание косы $\varphi_4^m\rho_n$ также является тривиальным узлом для каждого $m \in \mathbb{Z}$. ◊

Таким образом, гипотеза (C) опровергнута для каждого $n \geqslant 4$.

Замечание 11.8. При $n = 2$ гипотеза (C) верна и проверяется непосредственно. Случай $n = 3$ в настоящей диссертации не рассматривается; ожидается, что в этом случае гипотеза также верна. ◊

11.1.3 Динамические типы и доказательство гипотезы (C′)

Теперь докажем гипотезу (C′), в которой косу ψ разрешается выбирать в зависимости от исходной косы φ. Более того, установим, что в качестве косы ψ можно взять косу, сопряжённую с косой ρ_n.

Доказательство разбивается на случаи в зависимости от динамического типа внешней косы φ_{ext}.[2] В случае псевдоаносовского типа ключевую роль играют результаты о действиях группы B_n на графах $\mathcal{A}^\circ_\partial$ и $\mathcal{C}$. В случае периодического типа применяется закрученность ω_n. В случае расщепимости косы φ рассуждение по индукции сводится к компонентам её разложения Нильсена–Тёрстона; полученные для этих компонент построения затем объединяются с помощью связных сумм.

Нам потребуются следующие результаты.

Лемма 11.9. Для неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и $X \in \{\mathcal{A}^\circ_\partial, \mathcal{C}\}$. Если $X = \mathcal{A}^\circ_\partial$, мы предполагаем, что внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской, а если $X = \mathcal{C}$, что сам класс φ — псевдоаносовский. Тогда для любого класса $\eta \in \mathrm{Mod}(S)$ существует класс $\psi \in \mathrm{Mod}(S)$, сопряжённый с классом η, для которого выполняется соотношение

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ell_X(\varphi^m\psi)}{m} = \ell_X(\varphi).$$

В частности, асимптотические числа переноса $\ell_X(\varphi^m\psi)$, а значит, и $\ell_\partial(\varphi^m\psi)$, стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно по m.

Доказательство. По теореме 7.1 класс φ действует на гиперболическом пространстве X локсодромически. По лемме 6.2 действие группы $\mathrm{Mod}(S)$ на X имеет общий тип. Следовательно, искомое утверждение сводится к следствию 3.40. Утверждение о последовательности $\ell_\partial(\varphi^m\psi)$ следует из неравенств

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}} \leqslant \ell_\circ \leqslant \ell_\partial.$$ □

[2] См. определение в разделе 2.3.2.

Лемма 11.10. Для неисключительной поверхности S с единственной компонентой края ∂ пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{Mod}(S)$. Если внешняя компонента φ_{ext} является периодической с параметром p/q, то для любого $m \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$\ell_\partial(\varphi^m\psi) \geqslant |m| \left|\frac{p}{q}\right| - |\omega_\partial(\psi)| - 1.$$

В частности, если внешняя компонента φ_{ext} является нетривиальной, то асимптотические числа переноса $\ell_\partial(\varphi^m\psi)$ стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно по m.

Доказательство. По следствию 1.17 имеем $\omega_\partial(\varphi) = p/q$. По предложению 4.25 получаем

$$\ell_\partial(\varphi^m\psi) \geqslant |\omega_\partial(\varphi^m\psi)| \geqslant |\omega_\partial(\varphi^m)| - |\omega_\partial(\psi)| - 1 = |m| \left|\frac{p}{q}\right| - |\omega_\partial(\psi)| - 1.$$

Остаётся заметить, что если внешняя компонента φ_{ext} нетривиальна, то $p/q \neq 0$. □

Отметим, что при $n \geqslant 3$ поверхность D^2_n является неисключительной, и к ней применимы леммы 11.9 и 11.10.

Теорема 11.11. Для любого $n \geqslant 2$ и любой нетривиальной косы $\varphi \in B_n$ существует коса $\psi \in B_n$, сопряжённая с косой ρ_n, для которой замыкание косы $\varphi^m\psi$ является нетривиальным зацеплением при всех достаточно больших целых $m \geqslant 0$. Если, кроме того, число m делится на порядок перестановки, соответствующей косе φ, то это замыкание является нетривиальным узлом.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n.

При $n = 2$ любая нетривиальная коса имеет вид $\varphi = \sigma_1^s$, где $s \neq 0$. Положим $\psi := \sigma_1$. Тогда

$$\varphi^m\psi = \sigma_1^{sm+1}$$

и замыкание косы $\varphi^m\psi$ является торическим зацеплением $T_{2,sm+1}$; при $m \geqslant 3$ имеем $|sm + 1| \geqslant 2$, и это зацепление нетривиально.

Пусть теперь $n \geqslant 3$, и утверждение доказано для всех чисел нитей, меньших числа n.

Если внешняя коса $\varphi_{\mathrm{ext}} \in B_r$ является псевдоаносовской, то по лемме 11.9 существует коса ψ, сопряжённая с $\eta := \rho_n$, для которой последовательность $\ell_\partial(\varphi^m\psi)$ стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по m. Если внешняя коса φ_{ext} является нетривиальной и периодической, то для $\psi := \rho_n$ то же свойство выполняется по лемме 11.10. В обоих случаях при всех достаточно больших m выполняется неравенство

$$\ell_\partial(\varphi^m\psi) > 2,$$

откуда, согласно теореме 9.8, замыкание косы $\varphi^m\psi$ является простым и, в частности, нетривиальным зацеплением.

Остаётся рассмотреть случай, при котором внешняя коса φ_{ext} тривиальна. Заметим, что утверждение теоремы инвариантно относительно сопряжения исходной косы[3]. Следовательно, можно считать, что коса φ записана во внешней нормальной форме Нильсена–Тёрстона: существуют параметры $n_1, \ldots, n_r$, сумма которых равна n, и коса

$$\kappa \in K(n_1, \ldots, n_r) \subseteq B_n,$$

для которых

$$\varphi = \varphi_{\text{tub}}\kappa,$$

где $\varphi_{\text{tub}} = \varphi_{\text{ext}}(n_1, \ldots, n_r)$. Поскольку коса φ_{ext} тривиальна, трубчатая коса φ_{tub} также тривиальна, откуда $\varphi = \kappa$. Зададим числа $s_1, \ldots, s_{r-1}$ правилом $s_j = n_1 + \ldots + n_j$ и запишем[4]

$$\varphi = \kappa = \varphi_1 \cdot \text{sh}_{s_1}(\varphi_2) \cdot \ldots \cdot \text{sh}_{s_{r-1}}(\varphi_r)$$

для некоторых кос $\varphi_i \in B_{n_i}$. Поскольку коса φ нетривиальна, хотя бы один из множителей φ_i нетривиален.

Для каждого индекса i, для которого $\varphi_i \neq 1$, по предположению индукции существуют константа $C_i > 0$ и коса вида

$$\psi_i = \theta_i^{-1}\rho_{n_i}\theta_i,$$

где $\theta_i \in B_{n_i}$, для которых замыкание косы $\varphi_i^m\psi_i$ является нетривиальным при всех $m > C_i$. Для индексов i, для которых $\varphi_i = 1$, положим $\theta_i := 1$ и $\psi_i := \rho_{n_i}$.

Введём следующие косы:

$$\theta := \theta_1 \cdot \text{sh}_{s_1}(\theta_2) \cdot \ldots \cdot \text{sh}_{s_{r-1}}(\theta_r),$$
$$\Psi := \rho_{n_1} \cdot \text{sh}_{s_1}(\rho_{n_2}) \cdot \ldots \cdot \text{sh}_{s_{r-1}}(\rho_{n_r}) \cdot \sigma_{s_1} \cdot \sigma_{s_2} \cdot \ldots \cdot \sigma_{s_{r-1}}.$$

Поскольку коса Ψ представляется положительным артиновским словом, в котором каждая образующая $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ встречается ровно один раз, по лемме 2.4 она сопряжена с косой ρ_n. Положим

$$\psi := \theta^{-1}\Psi\theta.$$

Тогда коса ψ также сопряжена с косой ρ_n.

Для каждого $m \geqslant 0$ имеем

$$\theta(\varphi^m\psi)\theta^{-1} = (\theta\varphi^m\theta^{-1})(\theta\psi\theta^{-1}) = \theta\varphi^m\theta^{-1}\Psi.$$

[3] Действительно, из истинности утверждения для $\varphi_* = \kappa^{-1}\varphi\kappa$ и ψ_* следует истинность утверждения для φ и $\psi := \kappa\psi_*\kappa^{-1}$.

[4] См. определение гомоморфизма сдвига индексов в разделе 2.2.

Перегруппировывая множители, получаем косу вида

$$\big((\theta_1\varphi_1\theta_1^{-1})^m\rho_{n_1}\big)\cdot \mathrm{sh}_{s_1}\big((\theta_2\varphi_2\theta_2^{-1})^m\rho_{n_2}\big)\cdot\ldots\cdot \mathrm{sh}_{s_{r-1}}\big((\theta_r\varphi_r\theta_r^{-1})^m\rho_{n_r}\big)\cdot\sigma_{s_1}\cdot\sigma_{s_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_{s_{r-1}}.$$

По лемме 2.26 замыкание этой косы представляет связную сумму замыканий кос

$$(\theta_i\varphi_i\theta_i^{-1})^m\rho_{n_i}.$$

Каждая из этих кос сопряжена с косой

$$\theta_i^{-1}\big((\theta_i\varphi_i\theta_i^{-1})^m\rho_{n_i}\big)\theta_i=\varphi_i^m\,\theta_i^{-1}\rho_{n_i}\theta_i=\varphi_i^m\psi_i.$$

Следовательно, если

$$m>\max\{C_i\mid\varphi_i\neq 1\},$$

то по крайней мере один сомножитель связной суммы нетривиален. Значит, замыкание косы $\theta(\varphi^m\psi)\theta^{-1}$ нетривиально, откуда нетривиально и замыкание косы $\varphi^m\psi$. □

Таким образом, гипотеза (C′) верна для каждого $n\geqslant 2$, причём в усиленной форме: косу ψ можно выбрать сопряжённой с косой ρ_n, а в качестве m подходят все достаточно большие степени, кратные порядку перестановки косы φ.

11.2 Сложность узлов при фиксированных значениях инвариантов

Построим семейства узлов, неотличимых инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше заданного, модулем Александера и функцией сигнатуры Левина–Тристрама, основные геометрические и топологические характеристики которых не ограничены. В основе этого построения лежит подход Т. Стэнфорда [289]; при этом, в отличие от конструкции Стэнфорда, косы, дающие искомые узлы, выбираются неальтернированными, что позволяет применять к ним результаты о закрученности; ср. следствие 2.47.

11.2.1 Нормальные подгруппы и неразличимость инвариантами

Напомним, что через Bur_n обозначается ядро представления Бурау группы кос B_n, через P_n обозначается группа крашеных кос, а через $\gamma_m(P_n)$ обозначаются члены её нижнего центрального ряда. Также напомним, что символом L_φ обозначается замыкание косы φ.

Предложение 11.12. При $n\geqslant 3$ для любых кос $\varphi,\psi\in B_n$, если $\varphi\in[\mathrm{Bur}_n,\mathrm{Bur}_n]$, то функции сигнатуры Левина–Тристрама замыканий кос $\varphi\psi$ и ψ совпадают.

Доказательство. Для $\zeta \in S^1$ по лемме 10.72 получаем

$$\sigma_\zeta(L_{\varphi\psi}) = \sigma_\zeta(\varphi\psi) = \sigma_\zeta(\psi) = \sigma_\zeta(L_\psi).$$ □

Для $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ положим

$$\mathcal{H}_{n,m} := [\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n] \cap \gamma_m(P_n).$$

Следствие 11.13. Для $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ пусть $\varphi \in H_{n,m}$ и $\psi \in B_n$, причём зацепление L_ψ является узлом. Тогда замыкание косы $\varphi\psi$ также является узлом, причём:

1. узлы $L_{\varphi\psi}$ и L_ψ неразличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше $m-1$;
2. узлы $L_{\varphi\psi}$ и L_ψ имеют изоморфные модули Александера;
3. функции сигнатуры Левина–Тристрама узлов $L_{\varphi\psi}$ и L_ψ совпадают.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{H}_{n,m} \subseteq \gamma_m(P_n) \subseteq P_n$, коса φ является крашеной. Следовательно, косы $\varphi\psi$ и ψ индуцируют одну и ту же перестановку множества проколов. Поскольку замыкание косы ψ является узлом, замыкание косы $\varphi\psi$ также является узлом. Из включения $\varphi \in \gamma_m(P_n)$ и леммы 2.24 следует, что эти узлы неразличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше $m-1$. Из включения $\varphi \in \mathrm{Bur}_n$ и леммы 2.25 следует изоморфность их модулей Александера. Последнее утверждение следует из предложения 11.12. □

Предложение 11.14. Пусть $n \geqslant 5$ и $m \geqslant 2$. Тогда множество $\mathcal{H}_{n,m}$ является нецентральной нормальной подгруппой группы B_n. Кроме того, оно содержит псевдоаносовскую косу φ, для которой выполняется неравенство $\omega_n(\varphi) > 0$.

Доказательство. По лемме 2.2 коммутант $[\mathrm{Bur}_n, \mathrm{Bur}_n]$ ядра представления Бурау является нецентральной нормальной подгруппой группы B_n.

Подгруппа $\gamma_m(P_n)$ также нормальна в B_n и нетривиальна [289]. Поскольку $m \geqslant 2$, имеем

$$\gamma_m(P_n) \subseteq [B_n, B_n].$$

Поскольку $Z(B_n) \cap [B_n, B_n] = 1$, подгруппа $\gamma_m(P_n)$ нецентральна.

Из леммы 2.3 следует соотношение $\mathcal{H}_{n,m} \neq \{1\}$. Поскольку

$$\mathcal{H}_{n,m} \subseteq [B_n, B_n],$$

подгруппа $\mathcal{H}_{n,m}$ также нецентральна. Её нормальность следует из нормальности обеих подгрупп, образующих пересечение.

По лемме 10.37 подгруппа $\mathcal{H}_{n,m}$ содержит псевдоаносовскую косу φ ненулевой закрученности. При необходимости заменяя её на обратную, получаем $\omega_n(\varphi) > 0$. □

11.2.2 Неразличимые узлы неограниченной сложности

Перейдём к построению последовательностей гиперболических узлов, которые неотличимы заданными инвариантами и для которых, среди прочего, гиперболический объём, срезанный род, род Зейферта, число перекрёстков и число развязывания стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно. Нам потребуются понятия, введённые в разделах 2.1 и 2.4.

Теорема 11.15. Для любого узла $K \subset S^3$, целого числа $n \geqslant 5$, не меньшего индекса косы узла K, и целого числа $d \geqslant 0$ существует последовательность узлов $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, для которой выполняются следующие свойства.

1. Узлы K_i и K неотличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше d, имеют изоморфные модули Александера[5], а их функции сигнатуры Левина–Тристрама совпадают.

2. Каждый узел K_i является гиперболическим, жёстким, хиральным и нерасслоённым, причём следующие численные характеристики стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно по i:

$$\operatorname{vol}(S^3 \setminus K_i), \qquad g_4(K_i), \qquad g_3(K_i), \qquad \operatorname{cr}(K_i), \qquad u(K_i).$$

3. Если n нечётно, то размерности над полем $\mathbb{F}_2$ пространств

$$\widetilde{\operatorname{Kh}}(K_i^*), \qquad \widehat{\operatorname{HF}}(\Sigma_2(K_i))$$

гомологий Хованова зеркального образа узла K_i и гомологий Хегора–Флоера двулистного разветвлённого накрытия узла K_i стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно по i.

4. Индекс косы каждого узла K_i равен n.

Доказательство. Положим $m := \max\{2, d+1\}$. Выберем косу $\eta \in B_n$, замыкание которой является узлом K; для этого возьмём произвольную минимальную косу, представляющую узел K, и применим к ней конечную последовательность стабилизаций. По предложению 11.14 существует псевдоаносовская коса $\varphi \in \mathcal{H}_{n,m}$, для которой $\omega_n(\varphi) > 0$.

По лемме 11.9 существует коса $\psi \in B_n$, сопряжённая с η, для которой последовательность $\ell_{\mathcal{C}}(\varphi^p \psi)$ стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по p. Поскольку коса ψ сопряжена с косой η, её замыкание также является узлом K.

Для целого числа $p \geqslant 1$ положим

$$\beta_p := \varphi^p \psi, \qquad Q_p := L_{\beta_p}.$$

Поскольку $\varphi^p \in \mathcal{H}_{n,m}$, согласно следствию 11.13, каждое зацепление Q_p является узлом,

[5] В частности, узлы K_i и K имеют одинаковые многочлены Александера и одинаковые элементарные идеалы.

узлы Q_p и K неразличимы инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше $m-1 \geqslant d$, их модули Александера изоморфны, а функции сигнатуры Левина–Тристрама совпадают. Это обеспечивает свойство (1).

Поскольку по предложению 6.1 имеем

$$\ell_\partial(\beta_p) \geqslant \frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\beta_p),$$

последовательность $\ell_\partial(\beta_p)$ стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по p. Кроме того, при всех достаточно больших p имеем $\ell_{\mathcal{C}}(\beta_p) > 0$, поэтому по теореме 7.1 коса β_p является псевдоаносовской. При ещё больших p выполняется неравенство $\ell_\partial(\beta_p) > 4$, и тогда по теореме 9.32 узел Q_p является гиперболическим.

По предложению 6.1 и теореме 8.18 имеем

$$\frac{1}{2}\ell_{\mathcal{C}}(\beta_p) \leqslant \ell_\circ(\beta_p) \leqslant 900(n-1)^4 \operatorname{vol}(S^3 \backslash Q_p) + 2144\pi(n-1)^4.$$

Поскольку левая часть стремится к бесконечности, гиперболические объёмы стремятся к бесконечности по меньшей мере линейно по p.

Для всех достаточно больших p выполняется неравенство $\ell_\partial(\beta_p) > \rho(n)$. В этом случае по теореме 9.12 коса β_p является жёсткой, а значит, узел Q_p также является жёстким.

Поскольку закрученность является однородным квазиморфизмом и $D(\omega_n) \leqslant 1$, имеем

$$\omega_n(\beta_p) = \omega_n(\varphi^p\psi) \geqslant p\,\omega_n(\varphi) + \omega_n(\psi) - 1.$$

Поскольку $\omega_n(\varphi) > 0$, последовательность $\omega_n(\beta_p)$ стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по p. В частности, по лемме 2.38 при всех достаточно больших p узлы Q_p являются хиральными.

По лемме 2.41 и соотношению $-\chi_4(Q_p) = 2g_4(Q_p) - 1$ имеем

$$|\omega_n(\beta_p)| \leqslant -\chi_4(Q_p) + n = 2g_4(Q_p) + n - 1.$$

Таким образом, срезанный род узлов Q_p стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по p. Из неравенств

$$g_4(Q_p) \leqslant g_3(Q_p), \qquad g_4(Q_p) \leqslant u(Q_p)$$

и неравенств

$$|\omega_n(\beta_p)| \leqslant \ell_\partial(\beta_p) \leqslant \frac{4\,(\operatorname{cr}(Q_p) - 1)}{n+2} + 4,$$

а также из предложения 4.25 и теоремы 9.21 получаем, что род Зейферта, число развязывания и число перекрёстков узлов Q_p также стремятся к бесконечности по меньшей

мере линейно по p.

Все узлы Q_p имеют тот же многочлен Александера, что и узел K. Для любого расслоенного узла ширина многочлена Александера равна удвоенному роду Зейферта. Следовательно, при всех достаточно больших p узлы Q_p не являются расслоёнными. Это обеспечивает свойство (2).

Если число n нечётно, по лемме 2.42 имеем

$$|\omega_n(\beta_p)| \leqslant \dim_{\mathbb{F}_2} \widehat{\mathrm{HF}}(\Sigma_2(Q_p)) + 2 \leqslant \dim_{\mathbb{F}_2} \widetilde{\mathrm{Kh}}(Q_p^*) + 2.$$

Поскольку левая часть стремится к бесконечности, обе последовательности размерностей также стремятся к бесконечности. Это обеспечивает свойство (3).

Свойство (4) обеспечивается тем, что каждая жёсткая коса является минимальной.

Остаётся выбрать достаточно большое p_0 и положить $K_i := Q_{p_0+i}$. □

Следствие 11.16. Для всех целых чисел $n \geqslant 5$ и $d \geqslant 0$ существует последовательность гиперболических жёстких хиральных нерасслоённых узлов $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих свойствам (2) и (3) теоремы 11.15 и имеющих индекс косы ровно n, для которых каждый узел K_i неотличим от тривиального узла инвариантами Васильева–Гусарова порядка не выше d, имеет тривиальный модуль Александера и тождественно нулевую функцию сигнатуры Левина–Тристрама.

Доказательство. Применим теорему 11.15 к тривиальному узлу K. Его модуль Александера тривиален, многочлен Александера равен 1, а функция сигнатуры Левина–Тристрама тождественно равна нулю. □

Следствие 11.17. Для любого узла $K \subset S^3$ и целого числа $d \geqslant 0$ существует последовательность узлов $(K_i)_{i=1}^{\infty}$, для которой выполняются свойства (1), (2) и (3) из теоремы 11.15 и, кроме того, последовательность индексов косы узлов K_i стремится к бесконечности по меньшей мере линейно по i.

Доказательство. Выберем строго возрастающую последовательность нечётных чисел $n_i \geqslant 5$, не меньших индекса косы узла K. Для каждого n_i применим теорему 11.15 и выберем из полученной последовательности первый узел K_i, для которого значения всех рассматриваемых численных характеристик не меньше i. □

Отсюда следует, что набор из всех инвариантов Васильева–Гусарова порядка не выше фиксированного d, модуля Александера и функции сигнатуры Левина–Тристрама не даёт верхней оценки гиперболического объёма, срезанного рода, рода Зейферта, числа развязывания, числа перекрёстков, индекса косы и размерностей пространств гомологий Хегора–Флоера и Хованова.

Теорема 11.15 обобщает ряд конструкций и результатов, ранее описанных в литературе. К ним относится результат А. Стоимёнова [292, Theorem 1.2] о существовании,

для любого узла K, гиперболических узлов со сколь угодно большими числами развязывания, неотличимых от K инвариантами конечного типа до заданного порядка. Она также включает результат Д. Силвера и У. Уиттена [286, Corollary 2.3], утверждающий, что любой многочлен Александера реализуется гиперболическими узлами со сколь угодно большим объёмом и сколь угодно большим срезанным родом. Кроме того, она содержит в качестве частных случаев результаты А. Стоимёнова [293, Theorem 2] о простых узлах, неотличимых от данного узла конечным набором инвариантов конечного типа и многочленом Александера, результат С. Лин и Э. Калфагианни [193, Theorem 1.2] о нерасслоенных узлах с тем же модулем Александера, что и у заданного расслоенного узла, но со сколь угодно большим родом Зейферта, а также результат А. Стоимёнова [294, Theorem 1.1] о гиперболических узлах сколь угодно большого объёма, неотличимых от данного узла инвариантами конечного типа, модулем Александера и сигнатурами Левина–Тристрама.

11.3 Признаки и нижние оценки сложности в терминах квазиморфизмов

Свяжем геометрические и топологические характеристики пар «многообразие — зацепление» и динамические характеристики классов отображений со значениями однородных квазиморфизмов. Нам потребуются обозначения, введённые в главе 6.

Из определения стабильной коммутаторной длины первого уровня для любого квазиморфизма $f \in V_\partial$ имеем

$$|f(\varphi)| \leqslant 2\ \mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(f).$$

Если $S \neq \Sigma_{1,1}$, то по теореме 6.21 получаем

$$|f(\varphi)| \leqslant 2\ \mathrm{scl}_\partial(\varphi) D(f) \leqslant \ell_\partial(\varphi) D(f).$$

Аналогично, при $S \neq \Sigma_{1,1}$ для любого $f \in V_\circ$ из определения стабильной коммутаторной длины второго уровня и теоремы 6.35 получаем

$$|f(\varphi)| \leqslant \ell_\circ(\varphi) D(f).$$

Далее совместим эти неравенства с результатами глав 8 и 9.

Также отметим, что все признаки и оценки, формулирующиеся в терминах квазиморфизмов второго уровня, можно переформулировать в терминах квазиморфизмов первого уровня. Так, для $f \in V_\partial$ пусть $f_\circ := f - f(T_\partial)\omega_\partial$. По предложению 6.37 имеем $f_\circ \in V_\circ$ и $D(f_\circ) \leqslant 2D(f)$, откуда, если проекция $f_\circ$ нетривиальна и $S \neq \Sigma_{1,1}$, получаем

$$\frac{|f(\varphi) - f(T_\partial) \cdot \omega_\partial(\varphi)|}{2D(f)} = \frac{|f_\circ(\varphi)|}{2D(f)} \leqslant \frac{|f_\circ(\varphi)|}{D(f_\circ)} \leqslant \ell_\circ(\varphi).$$

11.3.1 Пары «трёхмерное многообразие — зацепление»

Пусть $S \neq \Sigma_{1,1}$ — неисключительная поверхность с единственной компонентой края ∂. Начнём с пороговых признаков качественных свойств дополнения $M_\varphi = Y_\varphi \backslash L_\varphi$. Нам потребуются понятия, введённые в разделе 1.3.

Следствие 11.18. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$.

1. Если для некоторого квазиморфизма $f \in V_\partial$ выполняется неравенство

$$|f(\varphi)| > \big(4288\,\pi\,|\chi(S)|^4 + 1\big)\,D(f),$$

то многообразие M_φ является зейфертовым в том и только в том случае, если класс φ является периодическим, гиперболическим в том и только в том случае, если φ является псевдоаносовским, и содержит существенный тор в том и только в том случае, если φ является приводимым.

2. Если для некоторого квазиморфизма $f \in V_\circ$ выполняется неравенство

$$|f(\varphi)| > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4\,D(f),$$

то многообразие M_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если φ является псевдоаносовским, и содержит существенный тор в том и только в том случае, если φ является приводимым.

3. Предположим, что класс φ является псевдоаносовским. Если для некоторого квазиморфизма $f \in V_\circ$ выполняется неравенство

$$|f(\varphi)| > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4\,D(f),$$

то многообразие M_φ является гиперболическим.

4. Если для некоторого квазиморфизма $f \in V_\mathcal{C}$ выполняется неравенство

$$|f(\varphi)| > 1072\,\pi\,|\chi(S)|^4\,D(f),$$

то многообразие M_φ является гиперболическим.

Доказательство. В условиях утверждений (1) и (2) имеем

$$\ell_\partial(\varphi) > 4288\,\pi\,|\chi(S)|^4 + 1, \qquad \ell_\circ(\varphi) > 2144\,\pi\,|\chi(S)|^4.$$

Эквивалентности следуют из теоремы 8.12 и предложения 8.11.

Утверждение (3) сводится к теореме 8.7.

Наконец, в условиях утверждения (4) получаем, что класс φ является псевдоаносовским, и поскольку $V_\mathcal{C} \subseteq V_\circ$, искомый результат сводится к утверждению (3). □

Перейдём к оценкам геометрической и динамической сложности.

Следствие 11.19. Пусть $\varphi \in \mathrm{Mod}(S)$ и пусть квазиморфизм $f \in V_\circ$ нетривиален. Тогда выполняются неравенства[6]

$$\mathrm{ent}(\varphi) \geqslant \frac{|f(\varphi)|}{5400\,\pi\,|\chi(S)|^5\,D(f)}$$

и

$$\|M_\varphi\| \geqslant \frac{1}{1800\,v_3}\left(\frac{|f(\varphi)|}{|\chi(S)|^4\,D(f)} - 7074\right).$$

Если многообразие M_φ является гиперболическим, то

$$\mathrm{vol}(M_\varphi) \geqslant \frac{1}{900}\left(\frac{|f(\varphi)|}{|\chi(S)|^4\,D(f)} - 2144\,\pi\right).$$

Если внешняя компонента φ_{ext} является псевдоаносовской, то для максимальной орисферической окрестности $C \subset T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ каспа, отвечающего компоненте края ∂, имеем

$$\mathrm{height}(\partial C) \geqslant \frac{|f(\varphi)|}{1072\,|\chi(S)|^4 D(f)}$$

и

$$v_3\,\|T_\varphi\| \geqslant \mathrm{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) \geqslant \mathrm{vol}(C) \geqslant \frac{|f(\varphi)|}{1800\,|\chi(S)|^4 D(f)}.$$

Доказательство. Поскольку квазиморфизм $f \in V_\circ$ нетривиален, имеем $D(f) > 0$.

Первое неравенство следует из теоремы 8.22, второе — из теоремы 8.20, а оценка гиперболического объёма — из теоремы 8.18.

Если внешняя компонента $\varphi_{\mathrm{ext}} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{C}}(E')$ является псевдоаносовской, то по предложению 6.29 и лемме 8.1 имеем

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 1072\,|\chi(E')|^4\ \mathrm{height}(\partial C) \leqslant 1072\,|\chi(S)|^4\ \mathrm{height}(\partial C).$$

Аналогично, по предложению 6.29 и лемме 8.14 получаем

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \leqslant \ell_\circ(\varphi) \leqslant 2\,\ell_\circ(\varphi_{\mathrm{ext}}) \leqslant 1800\,|\chi(E')|^4\ \mathrm{vol}(C) \leqslant 1800\,|\chi(S)|^4\ \mathrm{vol}(C).$$

Поскольку многообразие $T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ является гиперболическим, имеем $\mathrm{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) = v_3\|T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\|$. Как и в доказательстве следствия 8.16, имеем $\|T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}\| \leqslant \|T_\varphi\|$. Наконец, применим неравенство $\mathrm{vol}(C) \leqslant \mathrm{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}})$. □

[6] Напомним, что символ v_3 обозначает объём правильного идеального тетраэдра в пространстве $\mathbb{H}^3$.

11.3.2 Зацепления в трёхмерной сфере

Теперь приведём пороговые признаки и нижние оценки, относящиеся к модельному случаю $S = D^2_n$, где $n \geqslant 3$. Здесь константы существенно уменьшаются, а результаты уточняются. Кроме того, с помощью проекторов, описанных в главе 10, они распространяются на произвольные квазиморфизмы группы $B_n = \mathrm{Mod}(D^2_n)$.

Для однородного квазиморфизма $f \in Q_n$ пусть $f_\partial \in Q^\partial_n$ обозначает его проекцию на первый уровень. По замечанию 10.26 выполняется неравенство

$$D(f_\partial) \leqslant C_n\, D(f) \leqslant 2^n\, D(f),$$

причём если $f \in Q^\partial_n$, то $f_\partial = f$. Далее положим $f_\circ := f_\partial - f_\partial(\Delta^2_n)\,\omega_n$. Тогда $f_\circ \in Q^\circ_n$ и

$$D(f_\circ) \leqslant 2\, D(f_\partial) \leqslant 2C_n\, D(f) \leqslant 2^{n+1}\, D(f),$$

причём если $f \in Q^\circ_n$, то $f_\circ = f_\partial = f$.

Следствие 11.20. Пусть $f \in Q_n$ и $\varphi \in B_n$.

1. Если
$$|f_\partial(\varphi)| > D(f_\partial),$$
то зацепление L_φ является простым.

2. Если
$$|f_\partial(\varphi)| > \rho(n)\, D(f_\partial),$$
то коса φ является жёсткой и, в частности, минимальной, а зацепление L_φ не является отрицательно амфихиральным.

3. Если коса φ является приводимой и
$$|f_\partial(\varphi)| > D(f_\partial),$$
то дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор.

4. Если
$$|f_\partial(\varphi)| > 4\, D(f_\partial),$$
то дополнение $S^3 \backslash L_\varphi$ содержит существенный тор в том и только в том случае, если коса φ является приводимой.

5. Предположим, что зацепление L_φ является узлом. Если
$$|f_\partial(\varphi)| > D(f_\partial),$$
то узел L_φ является торическим в том и только в том случае, если коса φ является периодической. Если, кроме того,
$$|f_\partial(\varphi)| > 4\, D(f_\partial),$$

то узел L_φ является гиперболическим в том и только в том случае, если коса φ является псевдоаносовской, и сателлитным в том и только в том случае, если коса φ является приводимой. Наконец, если число n является простым и

$$|f_\circ(\varphi)| > 4\,D(f_\circ),$$

то узел L_φ является гиперболическим.

Доказательство. Утверждение (1) сводится к теореме 9.8.

В условиях утверждения (2) по теореме 9.12 коса φ является жёсткой и, в частности, минимальной. Если бы зацепление L_φ было отрицательно амфихиральным, то по утверждению (1) предложения 2.27 коса φ была бы ахиральной, откуда $f_\partial(\varphi) = 0$, что противоречит предположению.

Утверждение (3) сводится к следствию 9.30. Утверждение (4) сводится к предложению 9.26 и следствию 9.30. Утверждение (5) сводится к лемме 9.31, теореме 9.32 и примеру 9.35. □

Таким образом, для ряда ключевых качественных свойств зацеплений в трёхмерной сфере существует такая шкала порогов, пропорциональных дефекту квазиморфизма, что превышение подходящего порогового значения гарантирует наличие соответствующего свойства.

Далее перейдём к нижним оценкам геометрических и топологических мер сложности зацеплений в трёхмерной сфере, а также динамических характеристик кос.

Следствие 11.21. Пусть $f \in Q_n$ и $\varphi \in B_n$.

1. Предположим, что проекция f_∂ нетривиальна. Тогда выполняются неравенства

$$-\chi_3(L_\varphi) \geqslant \frac{n+2}{4}\left(\frac{|f_\partial(\varphi)|}{D(f_\partial)} - 4\right)$$

и

$$\mathrm{cr}(L_\varphi) \geqslant \frac{n+2}{4}\left(\frac{|f_\partial(\varphi)|}{D(f_\partial)} - 4\right) + 1.$$

Если зацепление L_φ является узлом, то

$$g_3(L_\varphi) \geqslant \frac{n+2}{8}\left(\frac{|f_\partial(\varphi)|}{D(f_\partial)} - 4\right) + \frac{1}{2}.$$

2. Предположим, что проекция $f_\circ$ нетривиальна. Тогда выполняются неравенства

$$\mathrm{ent}(\varphi) \geqslant \frac{|f_\circ(\varphi)|}{5400\,\pi\,(n-1)^5\,D(f_\circ)}$$

и

$$\|S^3\backslash L_\varphi\| \geqslant \frac{1}{1800\, v_3}\left(\frac{|f_\circ(\varphi)|}{(n-1)^4\, D(f_\circ)} - 7074\right).$$

Если зацепление L_φ является гиперболическим, то

$$\mathrm{vol}(S^3\backslash L_\varphi) \geqslant \frac{1}{900}\left(\frac{|f_\circ(\varphi)|}{(n-1)^4\, D(f_\circ)} - 2144\,\pi\right).$$

Кроме того, если внешняя коса φ_{ext} является псевдоаносовской, то для максимальной орисферической окрестности $C \subset T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}$ каспа, отвечающего компоненте края ∂, имеем

$$\mathrm{height}(\partial C) \geqslant \frac{|f_\circ(\varphi)|}{1072\,(n-1)^4 D(f_\circ)}$$

и

$$v_3\,\|T_\varphi\| \geqslant \mathrm{vol}(T_{\varphi_{\mathrm{ext}}}) \geqslant \mathrm{vol}(C) \geqslant \frac{|f_\circ(\varphi)|}{1800\,(n-1)^4 D(f_\circ)}.$$

Доказательство. Если проекция f_∂ нетривиальна, то $D(f_\partial) > 0$. Утверждение (1) сводится к теоремам 9.20 и 9.21.

Если проекция $f_\circ$ нетривиальна, то $D(f_\circ) > 0$. Утверждение (2) сводится к следствию 11.19. □

Таким образом, разработанный в диссертации аппарат позволяет эффективно распознавать качественные свойства зацеплений в трёхмерных многообразиях, что приводит к разрешению гипотез С. Бигелоу. Кроме того, он позволяет оценивать численные характеристики динамики, геометрии и топологии, что приводит к конструкциям, обобщающим результаты С. Лин, Э. Калфагианни, А. Стоимёнова, Д. Силвера и У. Уиттена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработан аппарат, связывающий асимптотические числа переноса изометрических действий с однородными квазиморфизмами посредством относительной стабильной коммутаторной длины, и исследованы его приложения к динамике классов отображений поверхностей, геометрии и топологии трёхмерных многообразий.

Развито понятие стабильной коммутаторной длины scl_X, отвечающей изометрическому действию $G \curvearrowright X$. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых выполняется сравнение

$$\mathrm{scl}_X \lesssim \ell_X.$$

Исследована трёхуровневая система действий группы классов отображений

$$\mathcal{A}_\partial \twoheadrightarrow \mathcal{A}_\partial^\circ \hookrightarrow \mathcal{AC} \simeq \mathcal{C}.$$

Установлены взаимосвязи соответствующих чисел переноса, пространств квазиморфизмов и стабильных коммутаторных длин. Получены эффективные константы сравнения на различных уровнях этой системы.

Установлены пороговые признаки качественных свойств и нижние оценки мер сложности, формулирующиеся в терминах асимптотических чисел переноса. В частности, для классов отображений поверхностей получены критерии, касающиеся их разложения Нильсена–Тёрстона, а также явные оценки топологической энтропии. Для пар «трёхмерное многообразие — зацепление» получены признаки гиперболичности и явные оценки гиперболического объёма.

В модельном случае проколотого диска эти результаты расширены и уточнены. В частности, получены признаки простоты зацеплений в трёхмерной сфере, а также явные оценки эйлеровой характеристики поверхностей Зейферта и числа перекрёстков. Вместе с тем описаны эффективно вычислимые квазиморфизмы групп кос, липшицевы относительно чисел переноса первых двух уровней.

Разработанный аппарат применён к задачам теории узлов: разрешены оставшиеся гипотезы Бигелоу (C) и (C′) и описаны конструкции, обобщающие результаты С. Лин, Э. Калфагианни, А. Стоимёнова, Д. Силвера и У. Уиттена.

Таким образом, построена единая схема, позволяющая использовать однородные квазиморфизмы для получения признаков качественных свойств и нижних оценок численных характеристик $\Psi(\varphi)$ классов отображений φ и ассоциированных с ними трёхмерных объектов:

$$\frac{|f(\varphi)|}{D(f)} \leqslant 2\,\mathrm{scl}_X(\varphi) \lesssim \ell_X(\varphi) \lesssim \Psi(\varphi).$$

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[A1] I. Alekseev, V. Ionin, and M. Mikhailov. “Action of automorphisms of pure braid groups on homotopy groups of two-sphere”. In: *Homology, Homotopy and Applications* 28.2 (2026), pp. 155–174.

[A2] A. Y. Miller, A. V. Malyutin, and I. S. Alekseev. “Infinite midway cliques in the Gordian graph”. In: *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 549 (2025), pp. 146–160.

[A3] И. С. Алексеев. «Число перекрёстков (замкнутых) однородных кос». В: *Алгебра и анализ* 36.5 (2024), с. 86—100.

[A4] И. С. Алексеев. «Числа переноса и геометрия замкнутых кос». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 551 (2026), с. 27—47.

[A5] И. С. Алексеев. «Числа переноса и квазиморфизмы групп кос». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 551 (2026), с. 5—26.

[A6] И. С. Алексеев и А. А. Малова. «Сертификация зацепленности кривыми на ручках». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 549 (2025), с. 26—40.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Малютин. «Классификационные проблемы в теории групп автоморфизмов многообразий малой размерности». дис. ... докт. физ.-мат. наук. 2009. 455 с.

[2] В. А. Шастин. «Геометрические свойства модулярных групп». дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 2016. 111 с.

[3] C. Abbott, M. Hagen, H. Petyt, and A. Zalloum. "Uniform undistortion from barycentres, and applications to hierarchically hyperbolic groups". In: *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 13.1 (Nov. 2025), p. 20250027.

[4] C. Abbott, D. Hume, and D. Osin. "Extending group actions on metric spaces". In: *Journal of Topology and Analysis* 12.3 (Sept. 2020), pp. 625–665.

[5] C. Adams. "Hyperbolic knots". In: *Handbook of Knot Theory*. Elsevier, 2005, pp. 1–18.

[6] I. Agol. "Bounds on exceptional Dehn filling". In: *Geometry & Topology* 4.1 (Nov. 2000), pp. 431–449.

[7] I. Alekseev, V. Ionin, and M. Mikhailov. "Action of automorphisms of pure braid groups on homotopy groups of two-sphere". In: *Homology, Homotopy and Applications* 28.2 (2026), pp. 155–174.

[8] T. Aougab. *Pseudo-Anosovs from the perspective of their mapping tori*. 2025. arXiv: 2510.12907.

[9] T. Aougab, D. Futer, and S. J. Taylor. *On fixed points of pseudo-Anosov maps*. 2025. arXiv: 2509.07818.

[10] J. Aramayona, A. Fossas, and H. Parlier. "Arc and curve graphs for infinite-type surfaces". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 145.11 (Aug. 2017), pp. 4995–5006.

[11] C. I. Avery and L. Chen. "Stable torsion length". In: *International Mathematics Research Notices* 2023.16 (Aug. 2023), pp. 13817–13866.

[12] S. Baader. "Asymptotic Rasmussen invariant". In: *Comptes Rendus. Mathématique* 345.4 (July 2007), pp. 225–228.

[13] S. Baader, L. Lewark, F. Misev, and P. Truöl. "3-braid knots with maximal 4-genus". In: *Transactions of the American Mathematical Society, Series B* 11.18 (Feb. 2024), pp. 600–621.

[14] D. Bachman and S. Schleimer. "Surface bundles versus Heegaard splittings". In: *Communications in Analysis and Geometry* 13.5 (2005), pp. 903–928.

[15] S. Bai and J. Ma. "Satellite constructions and geometric classification of Brunnian links". In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 30.10 (Sept. 2021), p. 2140005.

[16] H. Baik, I. Choi, and D. M. Kim. "Linear growth of translation lengths of random isometries on Gromov hyperbolic spaces and Teichmüller spaces". In: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 23.4 (July 2024), pp. 1751–1795.

[17] H. Baik and C. Kim. "On translation lengths of pseudo-Anosov maps on curve graph". In: *Bulletin of the Korean Mathematical Society* 61.3 (2024), pp. 585–595.

[18] H. Baik, D. M. Kim, and C. Wu. "Minimal asymptotic translation lengths on curve complexes and homology of mapping tori". In: *Michigan Mathematical Journal* 75.5 (Nov. 2025).

[19] H. Baik, E. Kin, H. Shin, and C. Wu. "Asymptotic translation lengths and normal generation for pseudo-Anosov monodromies of fibered 3–manifolds". In: *Algebraic & Geometric Topology* 23.3 (June 2023), pp. 1363–1398.

[20] H. Baik, H. Shin, and C. Wu. "An upper bound on the asymptotic translation lengths on the curve graph and fibered faces". In: *Indiana University Mathematics Journal* 70.4 (2021), pp. 1625–1637.

[21] G. Band and P. Boyland. "The Burau estimate for the entropy of a braid". In: *Algebraic & Geometric Topology* 7.3 (Sept. 2007), pp. 1345–1378.

[22] J. Banks and M. Rathbun. "Monodromy action on unknotting tunnels in fiber surfaces". In: *Canadian Journal of Mathematics* 68.6 (Dec. 2016), pp. 1201–1226.

[23] A. Banyaga. *The Structure of Classical Diffeomorphism Groups*. Boston, MA: Springer US, 1997.

[24] V. G. Bardakov, V. V. Vershinin, and J. Wu. "On Cohen braids". In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 286.1 (Oct. 2014), pp. 16–32.

[25] V. G. Bardakov, R. Mikhailov, V. V. Vershinin, and J. Wu. "Brunnian braids on surfaces". In: *Algebraic & Geometric Topology* 12.3 (July 2012), pp. 1607–1648.

[26] G. Bargagnati, F. Bertolotti, P. Capovilla, and F. Milizia. "The action of mapping class groups on de Rham quasimorphisms". In: *Geometriae Dedicata* 218.6 (Dec. 2024), p. 106.

[27] J. Barge and É. Ghys. "Surfaces et cohomologie bornée". In: *Inventiones Mathematicae* 92.3 (Oct. 1988), pp. 509–526.

[28] F. Baroni. "Uniformly polynomial-time classification of surface homeomorphisms". In: *Mathematische Annalen* 392.3 (July 2025), pp. 3247–3298.

[29] L. Battista, S. Francaviglia, M. Moraschini, F. Sarti, and A. Savini. "Bounded cohomology classes of exact forms". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 152.1 (2024), pp. 71–80.

[30] C. Bavard. “Longueur stable des commutateurs”. In: *L’Enseignement Mathématique* 37.1-2 (1991), pp. 109–150.

[31] J. Bavard. “Hyperbolicité du graphe des rayons et quasi-morphismes sur un gros groupe modulaire”. In: *Geometry & Topology* 20.1 (Feb. 2016), pp. 491–535.

[32] J. Bavard and A. Walker. “The Gromov boundary of the ray graph”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 370.11 (Apr. 2018), pp. 7647–7678.

[33] J. Bavard and A. Walker. “Two simultaneous actions of big mapping class groups”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* (Aug. 2023).

[34] R. İ. Baykur, R. C. Kirby, and D. Ruberman. *K3: A New Problem List in Low-Dimensional Topology*. Vol. 295. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2026.

[35] M. Bell. *The monodromies of homogeneous links*. 2012. arXiv: 1207.0161.

[36] M. C. Bell and R. C. H. Webb. *Polynomial-time algorithms for the curve graph*. 2016. arXiv: 1609.09392.

[37] G. Ben-Simon and T. Hartnick. “Quasi-total actions and translation numbers”. In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 9.2 (June 2015), pp. 479–530.

[38] A. J. Berrick, F. R. Cohen, Y. L. Wong, and J. Wu. “Configurations, braids, and homotopy groups”. In: *Journal of the American Mathematical Society* 19.2 (Nov. 2005), pp. 265–326.

[39] M. Bestvina and M. Handel. “Train-tracks for surface homeomorphisms”. In: *Topology* 34.1 (Jan. 1995), pp. 109–140.

[40] M. Bestvina. “Non-positively curved aspects of Artin groups of finite type”. In: *Geometry & Topology* 3.1 (Sept. 1999), pp. 269–302.

[41] M. Bestvina, K. Bromberg, and K. Fujiwara. “Stable commutator length on mapping class groups”. In: *Annales de l’Institut Fourier* 66.3 (Dec. 2016), pp. 871–898.

[42] M. Bestvina and K. Fujiwara. “Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups”. In: *Geometry & Topology* 6.1 (Mar. 2002), pp. 69–89.

[43] M. Bestvina and K. Fujiwara. “Quasi-homomorphisms on mapping class groups”. In: *Glasnik Matematicki* 42.1 (June 2007), pp. 213–236.

[44] S. Bigelow. “The Burau representation is not faithful for $n = 5$”. In: *Geometry & Topology* 3.1 (Nov. 1999), pp. 397–404.

[45] S. Bigelow. “Does the Jones polynomial detect the unknot?” In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 11.4 (June 2002), pp. 493–505.

[46] I. Biringer and J. Souto. “Ranks of mapping tori via the curve complex”. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2019.748 (Mar. 2019), pp. 153–172.

[47] J. Birman and I. Kofman. “A new twist on Lorenz links”. In: *Journal of Topology* 2.2 (2009), pp. 227–248.

[48] J. Birman, D. Margalit, and W. Menasco. “Efficient geodesics and an effective algorithm for distance in the complex of curves”. In: *Mathematische Annalen* 366.3-4 (Dec. 2016), pp. 1253–1279.

[49] J. Birman and W. Menasco. “Studying links via closed braids I: A finiteness theorem”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 154.1 (May 1992), pp. 17–36.

[50] J. Birman and W. Menasco. “Studying links via closed braids VI: A nonfiniteness theorem”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 156.2 (Dec. 1992), pp. 265–285.

[51] J. Birman and W. Menasco. “Studying links via closed braids III: Classifying links which are closed 3-braids”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 161.1 (Nov. 1993), pp. 25–113.

[52] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Stabilization in the braid groups I: MTWS”. In: *Geometry & Topology* 10.1 (Apr. 2006), pp. 413–540.

[53] J. S. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Annals of Mathematics Studies 82. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1975.

[54] J. S. Birman and E. Finkelstein. “Studying surfaces via closed braids”. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 07.3 (May 1998), pp. 267–334.

[55] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Studying links via closed braids IV: Composite links and split links”. In: *Inventiones Mathematicae* 102.1 (Dec. 1990), pp. 115–139.

[56] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Studying links via closed braids II: On a theorem of Bennequin”. In: *Topology and its Applications* 40.1 (June 1991), pp. 71–82.

[57] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Studying links via closed braids V: The unlink”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 329.2 (Feb. 1992), pp. 585–606.

[58] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Special positions for essential tori in link complements”. In: *Topology* 33.3 (July 1994), pp. 525–556.

[59] J. S. Birman and W. W. Menasco. “Erratum: Studying links via closed braids IV: composite links and split links”. In: *Inventiones mathematicae* 160.2 (May 2005), pp. 447–452.

[60] J. S. Birman and W. W. Menasco. “A note on closed 3-braids”. In: *Communications in Contemporary Mathematics* 10.supp01 (Nov. 2008), pp. 1033–1047.

[61] S. A. Bleiler and C. D. Hodgson. “Spherical space forms and Dehn filling”. In: *Topology* 35.3 (July 1996), pp. 809–833.

[62] O. Bogopolski. *Introduction to Group Theory*. 1st ed. Vol. 5. EMS Textbooks in Mathematics. EMS Press, Feb. 2008.

[63] M. Boileau and H. Zieschang. “Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds”. In: *Inventiones Mathematicae* 76.3 (Oct. 1984), pp. 455–468.

[64] C. Bonatti and L. Paris. “Roots in the mapping class groups”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 98.2 (Mar. 2009), pp. 471–503.

[65] B. H. Bowditch. “Relatively hyperbolic groups”. In: *International Journal of Algebra and Computation* 22.3 (May 2012), p. 1250016.

[66] B. H. Bowditch. “Tight geodesics in the curve complex”. In: *Inventiones mathematicae* 171.2 (Feb. 2008), pp. 281–300.

[67] P. Boyland. “Topological methods in surface dynamics”. In: *Topology and its Applications* 58.3 (Aug. 1994), pp. 223–298.

[68] M. Brandenbursky. “On quasi-morphisms from knot and braid invariants”. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 20.10 (Oct. 2011), pp. 1397–1417.

[69] M. Brandenbursky and J. Kędra. “Concordance group and stable commutator length in braid groups”. In: *Algebraic & Geometric Topology* 15.5 (Nov. 2015), pp. 2861–2886.

[70] M. Brandenbursky and J. Kędra. “Fragmentation norm and relative quasimorphisms”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 150.10 (June 2022), pp. 4519–4531.

[71] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Vol. 319. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[72] J. Brock. “The Weil-Petersson metric and volumes of 3-dimensional hyperbolic convex cores”. In: *Journal of the American Mathematical Society* 16.3 (Mar. 2003), pp. 495–535.

[73] J. F. Brock. “Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori”. In: *Communications in Analysis and Geometry* 11.5 (2003), pp. 987–999.

[74] J. F. Brock and K. W. Bromberg. “Inflexibility, Weil–Petersson distance, and volumes of fibered 3-manifolds”. In: *Mathematical Research Letters* 23.3 (2016), pp. 649–674.

[75] R. Brooks. “Some remarks on bounded cohomology”. In: *Riemann Surfaces and Related Topics (AM-97)*. Ed. by I. Kra and B. Maskit. Princeton University Press, Dec. 1981, pp. 53–64.

[76] D. Burago, S. Ivanov, and L. Polterovich. “Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin”. In: *International Symposium on Groups of Diffeomorphisms 2006*. University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2008, pp. 221–250.

[77] D. Calegari. *Big mapping class groups and dynamics*. Blog post. 2009. URL: `https://lamington.wordpress.com/2009/06/22/big-mapping-class-groups-and-dynamics`.

[78] D. Calegari. "Faces of the scl norm ball". In: *Geometry & Topology* 13.3 (Feb. 2009), pp. 1313–1336.

[79] D. Calegari. *scl*. Mathematical Society of Japan Memoirs Volume 20. Tokyo, Japan: The Mathematical Society of Japan, 2009.

[80] D. Calegari. *Big mapping class groups and complex dynamics*. Unpublished monograph. 2019. URL: https://math.uchicago.edu/~dannyc/books/big_mcg/big_mcg.html.

[81] D. Calegari and M. H. Freedman. "Distortion in transformation groups". In: *Geometry & Topology* 10.1 (Mar. 2006), pp. 267–293.

[82] D. Calegari and K. Fujiwara. "Stable commutator length in word-hyperbolic groups". In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 4.1 (Dec. 2009), pp. 59–90.

[83] D. Calegari and D. Zhuang. "Large scale geometry of commutator subgroups". In: *Algebraic & Geometric Topology* 8.4 (Nov. 2008), pp. 2131–2146.

[84] C. Campagnolo, F. Fournier-Facio, N. Heuer, and M. Moraschini. *Bounded Cohomology and Simplicial Volume*. 1st ed. Cambridge University Press, Nov. 2022.

[85] S. Caruso. "On the genericity of pseudo-Anosov braids I: rigid braids". In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 11.2 (June 2017), pp. 533–547.

[86] A. J. Casson and C. M. Gordon. "Reducing Heegaard splittings". In: *Topology and its Applications* 27.3 (Dec. 1987), pp. 275–283.

[87] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*. 1st ed. Cambridge University Press, Aug. 1988.

[88] M. Cengiz. "Heegaard genus and complexity of fibered knots". In: *Journal of Topology* 15.4 (Dec. 2022), pp. 2389–2425.

[89] L. Chen. "Scl in graphs of groups". In: *Inventiones mathematicae* 221.2 (Aug. 2020), pp. 329–396.

[90] L. Chen and N. Heuer. *Spectral gap of scl in graphs of groups and 3-manifolds*. 2019. arXiv: 1910.14146.

[91] M. Chesser. *When loxodromics are pseudo-Anosovs on witnesses*. 2026. arXiv: 2602.24179.

[92] S. Chmutov, S. V. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

[93] D. Cimasoni and A. Conway. "Coloured tangles and signatures". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 164.3 (May 2018), pp. 493–530.

[94] M. Clancy and G. Ellis. "Homology of some Artin and twisted Artin groups". In: *Journal of K-Theory* 6.1 (Aug. 2010), pp. 171–196.

[95] A. Clay and T. Ghaswala. "Cofinal elements and fractional Dehn twist coefficients". In: *International Mathematics Research Notices* 2024.9 (May 2024), pp. 7401–7420.

[96] M. Clay, M. Forester, and J. Louwsma. "Stable commutator length in Baumslag–Solitar groups and quasimorphisms for tree actions". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 368.7 (Sept. 2015), pp. 4751–4785.

[97] A. Conway. "The Levine-Tristram signature: a survey". In: *2019-20 MATRIX Annals*. Ed. by J. De Gier, C. E. Praeger, and T. Tao. Vol. 4. Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 31–56.

[98] P. R. Cromwell. "Homogeneous links". In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-39.3 (June 1989), pp. 535–552.

[99] P. R. Cromwell. "Positive braids are visually prime". In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s3-67.2 (Sept. 1993), pp. 384–424.

[100] P. R. Cromwell. *Knots and Links*. 1st ed. Cambridge University Press, Oct. 2004.

[101] M. Culler. "Using surfaces to solve equations in free groups". In: *Topology* 20.2 (1981), pp. 133–145.

[102] I. Dai, J. Hom, M. Stoffregen, and L. Truong. "More concordance homomorphisms from knot Floer homology". In: *Geometry & Topology* 25.1 (Mar. 2021), pp. 275–338.

[103] C. Damiolini. "The braid group and the arc complex". MA thesis. Università degli Studi di Milano and Universiteit Leiden, 2013.

[104] J. Darné, M. Palmer, and A. Soulié. *When the Lower Central Series Stops: A Comprehensive Study for Braid Groups and Their Relatives*. Vol. 309. 1563. Apr. 2025.

[105] T. Das, D. Simmons, and M. Urbański. *Geometry and Dynamics in Gromov Hyperbolic Metric Spaces*. Vol. 218. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, Apr. 2017.

[106] H. Debrunner. "Links of Brunnian type". In: *Duke Mathematical Journal* 28.1 (Mar. 1961), pp. 17–23.

[107] P. Dehornoy. "Braid groups and left distributive operations". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 345.1 (1994), pp. 115–150.

[108] P. Dehornoy. "Braid order, sets, and knots". In: *Series on Knots and Everything*. Vol. 46. World Scientific, Sept. 2011, pp. 77–96.

[109] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, and B. Wiest. *Ordering Braids*. Mathematical surveys and monographs 148. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2008.

[110] A. J. Duncan and J. Howie. "The genus problem for one-relator products of locally indicable groups". In: *Mathematische Zeitschrift* 208.1 (Dec. 1991), pp. 225–237.

[111] I. A. Dynnikov. “On a Yang-Baxter map and the Dehornoy ordering”. In: *Russian Mathematical Surveys* 57.3 (June 2002), pp. 592–594.

[112] I. A. Dynnikov and V. A. Shastin. “On independence of some pseudocharacters on braid groups”. In: *St. Petersburg Mathematical Journal* 24.6 (Sept. 2013), pp. 863–876.

[113] D. B. Epstein and K. Fujiwara. “The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups”. In: *Topology* 36.6 (Nov. 1997), pp. 1275–1289.

[114] J. Etnyre and Y. Li. “The arc complex and contact geometry: non-destabilizable planar open book decompositions of the tight contact 3-sphere”. In: *International Mathematics Research Notices* 2015.5 (2015), pp. 1401–1420.

[115] J. B. Etnyre and J. Van Horn-Morris. “Monoids in the mapping class group”. In: *Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups*. Dec. 2015, pp. 319–365.

[116] J. B. Etnyre. “Lectures on open book decompositions and contact structures”. In: *Floer Homology, Gauge Theory, and Low-Dimensional Topology*. Vol. 5. Clay Mathematics Proceedings. Providence, RI: American Mathematical Society, 2006, pp. 103–141.

[117] B. Farb and D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. Princeton mathematical series. Princeton, N.J: Princeton University Press, 2012.

[118] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay*. Astérisque 66–67. Paris: Société mathématique de France, 1979.

[119] P. Feller. “The slice-Bennequin inequality for the fractional Dehn twist coefficient”. In: *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 24.1 (2025), pp. 273–289.

[120] P. Feller and D. Hubbard. “Braids with as many full twists as strands realize the braid index”. In: *Journal of Topology* 12.4 (Dec. 2019), pp. 1069–1092.

[121] P. Feller and D. Hubbard. “Examples of non-minimal open books with high fractional Dehn twist coefficient”. In: *New York Journal of Mathematics* 28 (2022), pp. 917–926.

[122] P. Feller, D. Hubbard, and H. Turner. “The Dehn twist coefficient for big and small mapping class groups”. In: *Journal of the London Mathematical Society* 112.2 (Aug. 2025), e70251.

[123] P. Feller and D. Krcatovich. “On cobordisms between knots, braid index, and the Upsilon-invariant”. In: *Mathematische Annalen* 369.1-2 (Oct. 2017), pp. 301–329.

[124] P. Feller, L. Lewark, and M. Orbegozo Rodriguez. “Homogeneous braids are visually prime”. In: *Journal of Topology* 18.3 (Sept. 2025), e70040.

[125] E. Field, A. Kent, C. Leininger, and M. Loving. “A lower bound on volumes of end-periodic mapping tori”. In: *Journal of Topology* 18.3 (Sept. 2025), e70037.

[126] F. Franceschini, R. Frigerio, M. B. Pozzetti, and A. Sisto. "The zero norm subspace of bounded cohomology of acylindrically hyperbolic groups". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 94.1 (Mar. 2019), pp. 89–139.

[127] J. Franks and R. F. Williams. "Braids and the Jones polynomial". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 303.1 (1987), pp. 97–108.

[128] R. Frigerio. *Bounded Cohomology of Discrete Groups*. Mathematical Surveys and Monographs v. 227. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2017.

[129] K. Fujiwara. "The second bounded cohomology of a group acting on a Gromov-hyperbolic space". In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 76.1 (Jan. 1998), pp. 70–94.

[130] K. Fujiwara. "The second bounded cohomology of an amalgamated free product of groups". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 352.3 (2000), pp. 1113–1129.

[131] K. Fujiwara. "Quasi-homomorphisms on mapping class groups". In: *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. Ed. by A. Papadopoulos. 1st ed. Vol. 13. EMS Press, Mar. 2009, pp. 242–269.

[132] D. Futer, E. Kalfagianni, and J. S. Purcell. "Dehn filling, volume, and the Jones polynomial". In: *Journal of Differential Geometry* 78.3 (Mar. 2008), pp. 429–464.

[133] D. Futer, E. Kalfagianni, and J. S. Purcell. "A survey of hyperbolic knot theory". In: *Knots, Low-Dimensional Topology and Applications*. Ed. by C. C. Adams, C. M. Gordon, V. F. Jones, L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, K. C. Millett, J. H. Przytycki, R. Ricca, and R. Sazdanovic. Vol. 284. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 1–30.

[134] D. Futer, J. S. Purcell, and S. Schleimer. "Effective bilipschitz bounds on drilling and filling". In: *Geometry & Topology* 26.3 (Aug. 2022), pp. 1077–1188.

[135] D. Futer and S. Schleimer. "Cusp geometry of fibered 3-manifolds". In: *American Journal of Mathematics* 136.2 (Apr. 2014), pp. 309–356.

[136] D. Gabai. "Foliations and the topology of 3-manifolds". In: *Journal of Differential Geometry* 18.3 (Sept. 1983), pp. 445–503.

[137] D. Gabai and U. Oertel. "Essential Laminations in 3-Manifolds". In: *The Annals of Mathematics* 130.1 (July 1989), pp. 41–73.

[138] V. Gadre, E. Hironaka, R. P. Kent, and C. J. Leininger. "Lipschitz constants to curve complexes". In: *Mathematical Research Letters* 20.4 (2013), pp. 647–656.

[139] J.-M. Gambaudo and É. Ghys. "Commutators and diffeomorphisms of surfaces". In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 24.5 (Oct. 2004), pp. 1591–1617.

[140] J.-M. Gambaudo and É. Ghys. "Braids and signatures". In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 133.4 (2005), pp. 541–579.

[141] V. Gebhardt and J. González-Meneses. "Solving the conjugacy problem in Garside groups by cyclic sliding". In: *Journal of Symbolic Computation* 45.6 (June 2010), pp. 629–656.

[142] É. Ghys. "Groups acting on the circle". In: *L'Enseignement Mathématique* 47.3-4 (2001), pp. 329–407.

[143] É. Ghys. "Knots and dynamics". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM, Madrid 2006)*. Vol. 1. Zürich: European Mathematical Society (EMS), May 2007, pp. 247–277.

[144] É. Ghys and A. Ranicki. "Signatures in algebra, topology and dynamics". In: *Ensaios Matemáticos*. Six papers on signatures, braids and Seifert surfaces 30 (2016), pp. 1–173.

[145] P. Gilmer and C. Livingston. "Signature jumps and Alexander polynomials for links". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 144.12 (May 2016), pp. 5407–5417.

[146] J. González-Meneses and B. Wiest. "On the structure of the centralizer of a braid". In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 37.5 (Sept. 2004), pp. 729–757.

[147] J. González-Meneses. "The nth root of a braid is unique up to conjugacy". In: *Algebraic & Geometric Topology* 3.2 (Nov. 2003), pp. 1103–1118.

[148] J. González-Meneses. "Basic results on braid groups". In: *Annales mathématiques Blaise Pascal* 18.1 (2011), pp. 15–59.

[149] R. I. Grigorchuk. "Some results on bounded cohomology". In: *Combinatorial and Geometric Group Theory, Edinburgh 1993*. Ed. by A. J. Duncan, N. D. Gilbert, and J. Howie. 1st ed. Cambridge University Press, Nov. 1994, pp. 111–163.

[150] M. Gromov. *Geometric Group Theory: Asymptotic Invariants of Infinite Groups*. Ed. by G. A. Niblo, M. A. Roller, and J. W. S. Cassels. 1st ed. Cambridge University Press, Aug. 1993.

[151] M. Gromov and W. Thurston. "Pinching constants for hyperbolic manifolds". In: *Inventiones Mathematicae* 89.1 (Feb. 1987), pp. 1–12.

[152] M. Gromov. "Volume and bounded cohomology". In: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 56 (1982), pp. 5–99.

[153] U. Hamenstädt. "Train tracks and the Gromov boundary of the complex of curves". In: *Spaces of Kleinian Groups*. Ed. by Y. N. Minsky, M. Sakuma, and C. Series. 1st ed. Cambridge University Press, June 2006, pp. 187–208.

[154] U. Hamenstädt. "Geometry of the complex of curves and of Teichmüller space". In: *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. Ed. by A. Papadopoulos. 1st ed. Vol. 11. EMS Press, May 2007, pp. 447–467.

[155] U. Hamenstädt and F. Jäckel. *Stability of Einstein metrics and effective hyperbolization in large Hempel distance*. 2022. arXiv: 2206.10438.

[156] M. Handel and L. Mosher. "Second bounded cohomology and WWPD". In: *Kyoto Journal of Mathematics* 61.4 (Dec. 2021), pp. 873–904.

[157] J. L. Harer. "Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces". In: *The Annals of Mathematics* 121.2 (Mar. 1985), pp. 215–249.

[158] J. L. Harer. "The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface". In: *Inventiones Mathematicae* 84.1 (Feb. 1986), pp. 157–176.

[159] K. Hartshorn. "Heegaard splittings of Haken manifolds have bounded distance". In: *Pacific Journal of Mathematics* 204.1 (May 2002), pp. 61–75.

[160] W. J. Harvey. "Boundary structure of the modular group". In: *Riemann Surfaces and Related Topics (AM-97)*. Ed. by I. Kra and B. Maskit. Princeton University Press, Dec. 1981, pp. 245–252.

[161] A. Hatcher and W. Thurston. "A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface". In: *Topology* 19.3 (1980), pp. 221–237.

[162] A. Hatcher. "On triangulations of surfaces". In: *Topology and its Applications* 40.2 (July 1991), pp. 189–194.

[163] A. Hatcher and N. Wahl. "Stabilization for mapping class groups of 3-manifolds". In: *Duke Mathematical Journal* 155.2 (Nov. 2010), pp. 205–269.

[164] M. Hedden and T. E. Mark. "Floer homology and fractional Dehn twists". In: *Advances in Mathematics* 324 (Jan. 2018), pp. 1–39.

[165] J. Hempel. "3-Manifolds as viewed from the curve complex". In: *Topology* 40.3 (May 2001), pp. 631–657.

[166] S. Hensel, P. Przytycki, and R. C. Webb. "1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs". In: *Journal of the European Mathematical Society* 17.4 (Apr. 2015), pp. 755–762.

[167] C. Hodgson and S. Kerckhoff. "The shape of hyperbolic Dehn surgery space". In: *Geometry & Topology* 12.2 (May 2008), pp. 1033–1090.

[168] K. Honda, W. H. Kazez, and G. Matić. "Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary II". In: *Geometry & Topology* 12.4 (July 2008), pp. 2057–2094.

[169] K. Honda, W. H. Kazez, and G. Matić. "Right-veering diffeomorphisms of compact surfaces with boundary". In: *Inventiones mathematicae* 169.2 (June 2007), pp. 427–449.

[170] H. Huang. "On the dynamical power of the center of braids". PhD thesis. State University of New York at Buffalo, 1996.

[171] T. Ito. “Braid ordering and knot genus”. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 20.9 (Sept. 2011), pp. 1311–1323.

[172] T. Ito. “Braid ordering and the geometry of closed braid”. In: *Geometry & Topology* 15.1 (Mar. 2011), pp. 473–498.

[173] T. Ito. “A kernel of a braid group representation yields a knot with trivial knot polynomials”. In: *Mathematische Zeitschrift* 280.1-2 (June 2015), pp. 347–353.

[174] T. Ito. “On a structure of random open books and closed braids”. In: *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 91.10 (Dec. 2015), pp. 160–162.

[175] T. Ito. “Ordering of groups as a tool to understand random 3-manifolds and knots”. In: *Research Institute for Mathematical Sciences*. Intelligence of Low-dimensional Topology 1960 (Aug. 2015), pp. 93–100. HDL: 2433/224110.

[176] T. Ito. *On a characterization of strongly quasipositive links*. Slides. 2018. URL: https://www.cirm-math.fr/ProgWeebly/Renc1891/Ito.pdf.

[177] T. Ito. “A non-degenerate exchange move always produces infinitely many non-conjugate braids”. In: *Nagoya Mathematical Journal* 243 (Sept. 2021), pp. 205–208.

[178] T. Ito. “Satellite fully positive braid links are braided satellites of fully positive braid links”. In: *Journal of Topology and Analysis* (Dec. 2025), pp. 1–19.

[179] T. Ito and K. Kawamuro. “Open book foliation”. In: *Geometry & Topology* 18.3 (July 2014), pp. 1581–1634.

[180] T. Ito and K. Kawamuro. “Operations on open book foliations”. In: *Algebraic & Geometric Topology* 14.5 (Nov. 2014), pp. 2983–3020.

[181] T. Ito and K. Kawamuro. “Visualizing overtwisted discs in open books”. In: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 50.1 (Feb. 2014), pp. 169–180.

[182] T. Ito and K. Kawamuro. “Essential open book foliations and fractional Dehn twist coefficient”. In: *Geometriae Dedicata* 187.1 (Apr. 2017), pp. 17–67.

[183] T. Ito and K. Kawamuro. *On the fractional Dehn twist coefficients of branched coverings*. July 2018. arXiv: 1807.04398.

[184] T. Ito and K. Kawamuro. “The defect of Bennequin-Eliashberg inequality and Bennequin surfaces”. In: *Indiana University Mathematics Journal* 68.3 (2019), pp. 799–833.

[185] N. V. Ivanov. “Complexes of curves and the Teichmüller modular group”. In: *Russian Mathematical Surveys* 42.3 (June 1987), pp. 55–107.

[186] N. V. Ivanov. “Automorphisms of Teichmüller modular groups”. In: *Topology and Geometry — Rohlin Seminar*. Ed. by O. Y. Viro and A. M. Vershik. Vol. 1346. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1988, pp. 199–270.

[187] N. V. Ivanov. “Second bounded cohomology group”. In: *Journal of Soviet Mathematics* 52.1 (Oct. 1990), pp. 2822–2824.

[188] N. Ivanov. “Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces”. In: *International Mathematics Research Notices* 1997.14 (1997), pp. 651–666.

[189] S. V. Ivanov and A. A. Klyachko. “Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups”. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 50.5 (Oct. 2018), pp. 832–844.

[190] B. E. Johnson. *Cohomology in Banach algebras*. Online-Ausg. American Mathematical Society 127. Providence: American Mathematical Society, 1972.

[191] J. Johnson. *Heegaard splittings and open books*. 2011. arXiv: 1110.2142.

[192] E. Kalfagianni. “Alexander polynomial, finite type invariants and volume of hyperbolic knots”. In: *Algebraic & Geometric Topology* 4.2 (Nov. 2004), pp. 1111–1123.

[193] E. Kalfagianni and X.-S. Lin. “Knot adjacency and fibering”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 360.6 (Jan. 2008), pp. 3249–3261.

[194] R. M. Kashaev. “The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm”. In: *Letters in Mathematical Physics* 39.3 (Feb. 1997), pp. 269–275.

[195] C. Kassel and V. G. Turaev. *Braid Groups*. Graduate texts in mathematics 247. New York, NY: Springer, 2008.

[196] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. 1st ed. Cambridge University Press, Apr. 1995.

[197] W. H. Kazez and R. Roberts. “Fractional Dehn twists in knot theory and contact topology”. In: *Algebraic & Geometric Topology* 13.6 (Oct. 2013), pp. 3603–3637.

[198] J. Kędra. “On Lipschitz functions on groups equipped with conjugation-invariant norms”. In: *Colloquium Mathematicum* 174.1 (2023), pp. 89–99.

[199] M. Khovanov. “A categorification of the Jones polynomial”. In: *Duke Mathematical Journal* 101.3 (Feb. 2000), pp. 359–426.

[200] E. Kin, S. Kojima, and M. Takasawa. “Entropy versus volume for pseudo-Anosovs”. In: *Experimental Mathematics* 18.4 (Jan. 2009), pp. 397–407.

[201] E. Kin and H. Shin. “Small asymptotic translation lengths of pseudo-Anosov maps on the curve complex”. In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 13.3 (May 2019), pp. 883–907.

[202] R. Kirby. “Problems in low-dimensional topology”. In: *Geometric topology: 1993 Georgia international topology conference, August 2-13, 1993, University of Georgia, Athens, Georgia*. AMS/IP studies in advanced mathematics 2. Providence, R. I: American mathematical society International press, 1997, pp. 35–473.

[203] E. Klarreich. “The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space”. In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 16.2 (Aug. 2022), pp. 705–723.

[204] R. D. Kleinberg and W. W. Menasco. “Train tracks and zipping sequences for pseudo-Anosov braids”. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 9.4-5 (Apr. 1998), pp. 793–809.

[205] S. Kojima and G. McShane. “Normalized entropy versus volume for pseudo-Anosovs”. In: *Geometry & Topology* 22.4 (Apr. 2018), pp. 2403–2426.

[206] M. C. Kopreski. “Prescribed arc graphs”. In: *Geometriae Dedicata* 219.4 (Aug. 2025), p. 60.

[207] M. Korkmaz and A. Papadopoulos. “On the arc and curve complex of a surface”. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 148.3 (May 2010), pp. 473–483.

[208] D. Kotschick. “Quasi-homomorphisms and stable lengths in mapping class groups”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 132.11 (May 2004), pp. 3167–3175.

[209] T. Kuessner. “A survey on simplicial volume and invariants of foliations and laminations”. In: *Foliations 2005*. Lódz, Poland: World Scientific, Sept. 2006, pp. 293–314.

[210] M. Lackenby. “Word hyperbolic Dehn surgery”. In: *Inventiones Mathematicae* 140.2 (May 2000), pp. 243–282.

[211] M. Lackenby. “The volume of hyperbolic alternating link complements”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 88.1 (Jan. 2004), pp. 204–224.

[212] M. Lackenby and J. S. Purcell. “The triangulation complexity of fibred 3–manifolds”. In: *Geometry & Topology* 28.4 (July 2024), pp. 1727–1828.

[213] D. LaFountain and W. W. Menasco. *Braid Foliations in Low-Dimensional Topology*. Vol. 185. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, Oct. 2017.

[214] J. P. Leasure. “Geodesics in the complex of curves of a surface”. PhD thesis. 2002. HDL: 2152/1700.

[215] S. J. Lee and W. T. Song. “The kernel of $Burau(4) \otimes Z_p$ is all pseudo-Anosov”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 219.2 (Apr. 2005), pp. 303–310.

[216] J. Levine. “Knot cobordism groups in codimension two”. In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 44.1 (Dec. 1969), pp. 229–244.

[217] H. Levinson. “Decomposable braids and linkages”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 178 (1973), pp. 111–126.

[218] H. Levinson. “Decomposable braids as subgroups of braid groups”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 202 (1975), pp. 51–55.

[219] P. Liu, Y. Diao, and G. Hetyei. "The HOMFLY polynomial of links in closed braid form". In: *Discrete Mathematics* 342.1 (Jan. 2019), pp. 190–200.

[220] C. Löh. *Geometric Group Theory.* Universitext. Cham: Springer International Publishing, 2017.

[221] D. D. Long. "A note on the normal subgroups of mapping class groups". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 99.1 (Jan. 1986), pp. 79–87.

[222] J. E. Los. "Knots, braid index and dynamical type". In: *Topology* 33.2 (Apr. 1994), pp. 257–270.

[223] J. Ma. "The closure of a random braid is a hyperbolic link". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 142.2 (Oct. 2013), pp. 695–701.

[224] A. Maes and C. Cerf. "A family of Brunnian links based on Edwards' construction of Venn diagrams". In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 10.1 (Feb. 2001), pp. 97–107.

[225] J. Maher. "Linear progress in the complex of curves". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 362.6 (Jan. 2010), pp. 2963–2991.

[226] J. Maher and G. Tiozzo. *Random walks on weakly hyperbolic groups.* 2014. arXiv: 1410.4173.

[227] A. V. Malyutin. "Orderings on braid groups, operations on closed braids, and confirmation of Menasco's conjectures". In: *Journal of Mathematical Sciences* 113.6 (Mar. 2003), pp. 822–826.

[228] A. V. Malyutin. "Fast algorithms for identification and comparison of braids". In: *Journal of Mathematical Sciences* 119.1 (Jan. 2004), pp. 101–111.

[229] A. V. Malyutin. "Twist number of (closed) braids". In: *St. Petersburg Mathematical Journal* 16.5 (Sept. 2005), pp. 791–813.

[230] A. V. Malyutin. "Criteria of prime links in terms of pseudo-characters". In: *Journal of Mathematical Sciences* 161.3 (Sept. 2009), pp. 437–442.

[231] A. V. Malyutin. "Operators in the spaces of pseudocharacters of braid groups". In: *St. Petersburg Mathematical Journal* 21.2 (Jan. 2010), pp. 261–280.

[232] A. V. Malyutin. "Pseudocharacters of braid groups and prime links". In: *St. Petersburg Mathematical Journal* 21.2 (Jan. 2010), pp. 245–259.

[233] A. V. Malyutin. "Quasimorphisms, random walks, and transient subsets in countable groups". In: *Journal of Mathematical Sciences* 181.6 (Mar. 2012), pp. 871–885.

[234] A. V. Malyutin. "The rotation number integer quantization effect in braid groups". In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 305.1 (May 2019), pp. 182–194.

[235] A. V. Malyutin and N. Y. Netsvetaev. "Dehornoy's ordering on the braid group and braid moves". In: *St. Petersburg Mathematical Journal* 15.3 (Mar. 2004), pp. 437–448.

[236] K. Mann. *Rigidity and flexibility of group actions on the circle*. Oct. 2015. arXiv: 1510.00728.

[237] K. Mann and M. Wolff. "A characterization of Fuchsian actions by topological rigidity". In: *Pacific Journal of Mathematics* 302.1 (Nov. 2019), pp. 181–200.

[238] A. Marchand. "Bavard duality for the relative Gromov seminorm". In: *L'Enseignement Mathématique* 72.1-2 (2026), pp. 1–46.

[239] B. Martelli. *An Introduction to Geometric Topology*. 2022. arXiv: 1610.02592.

[240] H. Masur and Y. Minsky. "Geometry of the complex of curves II: Hierarchical structure". In: *Geometric and Functional Analysis* 10.4 (Nov. 2000), pp. 902–974.

[241] H. Masur and S. Schleimer. "The geometry of the disk complex". In: *Journal of the American Mathematical Society* 26.1 (2013), pp. 1–62.

[242] H. A. Masur and Y. N. Minsky. "Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity". In: *Inventiones mathematicae* 138.1 (Oct. 1999), pp. 103–149.

[243] S. Matsumoto. "Some remarks on foliated S^1 bundles". In: *Inventiones Mathematicae* 90.2 (June 1987), pp. 343–358.

[244] S. Matsumoto and S. Morita. "Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 94.3 (1985), pp. 539–544.

[245] J. D. McCarthy. *Normalizers and centralizers of pseudo-Anosov mapping classes*. Preprint. 1994. URL: https://users.math.msu.edu/users/mccarthy/publications/normcent.pdf.

[246] J. D. McCarthy and A. Papadopoulos. "Simplicial actions of mapping class groups". In: *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*. Ed. by A. Papadopoulos. 1st ed. Vol. 17. EMS Press, June 2012, pp. 297–423.

[247] W. Menasco. "Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements". In: *Topology* 23.1 (1984), pp. 37–44.

[248] W. W. Menasco. "On iterated torus knots and transversal knots". In: *Geometry & Topology* 5.2 (Aug. 2001), pp. 651–682.

[249] W. W. Menasco. *An addendum on iterated torus knots*. 2006. arXiv: math/0610566.

[250] W. W. Menasco. "Alternating knots". In: *Encyclopedia of Knot Theory*. Ed. by C. Adams, E. Flapan, A. Henrich, L. H. Kauffman, L. D. Ludwig, and S. Nelson. 1st ed. Chapman and Hall/CRC, Feb. 2021.

[251] W. Meyer. *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*. Vol. 53. Bonner Mathematische Schriften. Bonn: Mathematisches Institut der Universitat Bonn, 1972.

[252] R. Meyerhoff. "A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds". In: *Canadian Journal of Mathematics* 39.5 (Oct. 1987), pp. 1038–1056.

[253] A. Y. Miller, A. V. Malyutin, and I. S. Alekseev. "Infinite midway cliques in the Gordian graph". In: *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 549 (2025), pp. 146–160.

[254] J. Milnor. "Link groups". In: *The Annals of Mathematics* 59.2 (Mar. 1954), pp. 177–195.

[255] J. Milnor. "On the existence of a connection with curvature zero". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 32.1 (Dec. 1958), pp. 215–223.

[256] N. Monod and S. Nariman. "Bounded and unbounded cohomology of homeomorphism and diffeomorphism groups". In: *Inventiones mathematicae* 232.3 (June 2023), pp. 1439–1475.

[257] H. R. Morton and R. J. Hadji. "Conjugacy for positive permutation braids". In: *Fundamenta Mathematicae* 188 (2005), pp. 155–166.

[258] H. Murakami. "A quantum introduction to knot theory". In: *Contemporary Mathematics*. Ed. by T. Kohno and M. Morishita. Vol. 416. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2006, pp. 137–165.

[259] H. Murakami and J. Murakami. "The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot". In: *Acta Mathematica* 186.1 (2001), pp. 85–104.

[260] K. Murasugi. "On a certain numerical invariant of link types". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 117 (1965), pp. 387–422.

[261] K. Murasugi. "On the braid index of alternating links". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 326.1 (1991), pp. 237–260.

[262] T. Ohtsuki. "Problems on Low-dimensional Topology, 2015". In: *Intelligence of Low-dimensional Topology*. Vol. 1960. RIMS Kôkyûroku. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2015.

[263] S. Y. Orevkov. "Automorphism group of the commutator subgroup of the braid group". In: *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques* 26.5 (Dec. 2017), pp. 1137–1161.

[264] D. Osin. "Acylindrically hyperbolic groups". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 368.2 (May 2015), pp. 851–888.

[265] M. Ozawa. "Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 77.2 (June 2002), pp. 235–243.

[266] P. Ozsváth and Z. Szabó. "Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds". In: *The Annals of Mathematics* 159.3 (May 2004), pp. 1027–1158.

[267] C. Pagliantini and P. Rolli. “Relative second bounded cohomology of free groups”. In: *Geometriae Dedicata* 175.1 (Apr. 2015), pp. 267–280.

[268] R. C. Penner and J. L. Harer. *Combinatorics of Train Tracks*. Annals of Mathematics Studies 125. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1992.

[269] W. Pho-On. “Infinite unicorn paths and Gromov boundaries”. In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 11.1 (Apr. 2017), pp. 353–370.

[270] J. S. Purcell. *Hyperbolic Knot Theory*. Vol. 209. Graduate Studies in Mathematics. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2020.

[271] A. J. Rasmussen. “WWPD elements of big mapping class groups”. In: *Groups, Geometry, and Dynamics* 15.3 (July 2021), pp. 825–848.

[272] D. D. Repovš and A. Y. Vesnin. “On a family of hyperbolic Brunnian links and their volumes”. In: *Essays on Topology*. Ed. by L. Funar and A. Papadopoulos. Cham: Springer Nature Switzerland, 2025, pp. 495–503.

[273] I. Rivin. *Statistics of random 3-manifolds occasionally fibering over the circle*. 2014. arXiv: `1401.5736`.

[274] R. Roberts. “Taut foliations in punctured surface bundles, I”. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 82.3 (May 2001), pp. 747–768.

[275] D. Rolfsen. *Knots and links*. Providence, R.I: AMS Chelsea Pub, 2003.

[276] L. Rudolph. “Constructions of quasipositive knots and links. I”. In: *Knots, Braids and Singularities (Plans-sur-Bex, 1982)*. Ed. by C. Weber. Monographies de l’Enseignement Mathématique 31. Geneva: L’Enseignement Mathématique, 1983, pp. 233–245.

[277] T. Saito and R. Yamamoto. “Complexity of open book decompositions via arc complex”. In: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 19.1 (Jan. 2010), pp. 55–69.

[278] N. Salter. “Monodromy of stratified braid groups, II”. In: *Research in the Mathematical Sciences* 11.4 (Dec. 2024), p. 63.

[279] A. Schaffer-Cohen. “Automorphisms of the loop and arc graph of an infinite-type surface”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society, Series B* 9.22 (Apr. 2022), pp. 230–240.

[280] M. Scharlemann and M. Tomova. “Alternate Heegaard genus bounds distance”. In: *Geometry & Topology* 10.1 (May 2006), pp. 593–617.

[281] S. Schleimer. “Notes on the complex of curves”. Unpublished notes. 2006. URL: `https://sschleimer.warwick.ac.uk/Maths/notes2.pdf`.

[282] M. Schmalian. “Cusp shape and fractional Dehn twists of fibred hyperbolic 3-manifolds”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 379.6 (Feb. 2026), pp. 4479–4507.

[283] J.-P. Serre. *Trees*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980.

[284] K. J. Shackleton. "Tightness and computing distances in the curve complex". In: *Geometriae Dedicata* 160.1 (Oct. 2012), pp. 243–259.

[285] H. Short and B. Wiest. "Orderings of mapping class groups after Thurston". In: *L'Enseignement Mathématique* 46.3-4 (2000), pp. 279–312.

[286] D. S. Silver and W. Whitten. "Hyperbolic covering knots". In: *Algebraic & Geometric Topology* 5.4 (Oct. 2005), pp. 1451–1469.

[287] R. K. Skora. "Closed braids in 3-manifolds". In: *Mathematische Zeitschrift* 211.1 (Dec. 1992), pp. 173–187.

[288] C. C. Squier. "The Burau representation is unitary". In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 90.2 (Feb. 1984), pp. 199–202.

[289] T. Stanford. "Braid commutators and Vassiliev invariants". In: *Pacific Journal of Mathematics* 174.1 (May 1996), pp. 269–276.

[290] T. Stanford. *Brunnian braids and some of their generalizations*. 1999. arXiv: `math/9907072`.

[291] A. Stas. *Translation distance bounds for fibered 3-manifolds with boundary*. 2019. arXiv: `1902.06388`.

[292] A. Stoimenow. "Vassiliev invariants and rational knots of unknotting number one". In: *Topology* 42.1 (Jan. 2003), pp. 227–241.

[293] A. Stoimenow. "Some applications of Tristram–Levine signatures and relation to Vassiliev invariants". In: *Advances in Mathematics* 194.2 (July 2005), pp. 463–484.

[294] A. Stoimenow. "Vassiliev invariants, Seifert matrix, and hyperbolic volume of knots". In: *International Mathematics Research Notices* 2008 (2008), rnn119.

[295] B. Strenner. "Fibrations of 3–manifolds and asymptotic translation length in the arc complex". In: *Algebraic & Geometric Topology* 23.9 (Nov. 2023), pp. 4087–4142.

[296] P. A. Sundheim. "The Alexander and Markov theorems via diagrams for links in 3-manifolds". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 337.2 (June 1993), pp. 591–607. JSTOR: `2154233`.

[297] J.-L. Thiffeault. *Braids and Dynamics*. Vol. 9. Frontiers in Applied Dynamical Systems: Reviews and Tutorials. Cham: Springer International Publishing, 2022.

[298] A. Thompson. *Dehn surgery on complicated fibered knots in the 3-sphere*. 2016. arXiv: `1604.04902`.

[299] W. P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Princeton lecture notes, 1980.

[300] W. P. Thurston. "A norm for the homology of 3-manifolds". In: *Memoirs of the American Mathematical Society* 59.339 (1986).

[301] W. P. Thurston. *Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*. 1998. arXiv: `math/9801045`.

[302] A. G. Tristram. "Some cobordism invariants for links". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 66.2 (Sept. 1969), pp. 251–264.

[303] H. F. Trotter. "Homology of group systems with applications to knot theory". In: *The Annals of Mathematics* 76.3 (Nov. 1962), pp. 464–498.

[304] P. Truöl. "The upsilon invariant at 1 of 3–braid knots". In: *Algebraic & Geometric Topology* 23.8 (Nov. 2023), pp. 3763–3804.

[305] J. Väisälä. "Gromov hyperbolic spaces". In: *Expositiones Mathematicae* 23.3 (Sept. 2005), pp. 187–231.

[306] R. Wan and Y. Zou. *Genericity of hyperbolic 3-manifolds via Dehn surgery*. July 2026. arXiv: `2607.11057`.

[307] Y. Watanabe. "Intersection numbers in the curve graph with a uniform constant". In: *Topology and its Applications* 204 (May 2016), pp. 157–167.

[308] R. Webb. "Combinatorics of tight geodesics and stable lengths". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 367.10 (Apr. 2015), pp. 7323–7342.

[309] K. Whittlesey. "Normal all pseudo-Anosov subgroups of mapping class groups". In: *Geometry & Topology* 4.1 (Oct. 2000), pp. 293–307.

[310] J. W. Wood. "Bundles with totally disconnected structure group". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 46.1 (Dec. 1971), pp. 257–273.

[311] И. С. Алексеев. «Число перекрёстков (замкнутых) однородных кос». В: *Алгебра и анализ* 36.5 (2024), с. 86—100.

[312] И. С. Алексеев. «Числа переноса и геометрия замкнутых кос». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 551 (2026), с. 27—47.

[313] И. С. Алексеев. «Числа переноса и квазиморфизмы групп кос». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 551 (2026), с. 5—26.

[314] И. С. Алексеев и А. А. Малова. «Сертификация зацепленности кривыми на ручках». В: *Записки научных семинаров ПОМИ* 549 (2025), с. 26—40.