Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.5

Афонин Константин Александрович

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕР

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
профессор В.И. Богачев

Москва, 2026

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Богачев Владимир Игоревич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность 01.01.01).

Официальные оппоненты:

Малыхин Юрий Вячеславович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории функций Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (специальность 1.1.1).

Петров Федор Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (специальность 01.01.01).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова» Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 16 июня 2026 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref26/afonin/dis.pdf

Автореферат разослан « » апреля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.01
доктор физ.-матем. наук, профессор  В.А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика диссертационной работы находится на пересечении функционального анализа, теории меры и экстремальных задач. Рассматриваемые вопросы фундаментальны для современного анализа и тесно связаны с оптимальным транспортом, топологиями на пространствах мер и операторами в вероятностных и аналитических моделях.

В последние годы стремительно вырос интерес к топологиям Канторовича и Канторовича – Рубинштейна благодаря развитию теории оптимального транспорта и ее приложениям в статистике, машинном обучении, теории случайных процессов и математической экономике. Указанные топологии дают естественный язык для описания сходимости мер и обладают богатой дуальной структурой. Это позволяет применять методы функционального анализа к задачам о сходимости и компактности.

Пространства мер играют центральную роль во многих разделах математики: от теории вероятностей до уравнений в частных производных. Особенно важно изучать условия сходимости в этих топологиях для таких классов, как выпуклые и устойчивые меры. Они широко используются в вероятностных моделях и математической статистике.

Развитая в диссертации теория барицентров мер и функционалов показывает, как сходимость мер в топологиях Канторовича влияет на поведение их барицентров. Эти аспекты непосредственно связаны с применениями в бесконечномерных пространствах, где традиционные методы анализа оказываются недостаточными. Важное место занимают и гауссовские операторы перехода, которые тесно связаны со стохастическими процессами и операторным анализом.

Работу можно разделить на четыре основные части, соответствующие четырем главам диссертации.

Первая глава посвящена локально выпуклым топологиям на пространствах мер, порожденных полунормами Канторовича и Канторовича – Рубинштейна. Метрики такого типа восходят к классической работе Л. В. Канторовича[1], в которой предложены методы линейного программирования для задач оптимального распределения ресурсов. Дальнейшее развитие теория получила в совместных исследованиях самого Канторовича и Г. Ш. Рубинштейна[2,3], где для метрических компактов введена норма, называемая нормой Канторовича – Рубинштейна. Обширную библиографию по данной области можно найти, например, в[4,5,6,7]. О геометрических аспектах пространств мер с метриками типа Канторовича см. также[6,7,8,9].

В диссертации исследуются топологии типа Канторовича и Канторовича – Рубин-

---

[1]Канторович Л.В. О перемещении масс. Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 7-8. С. 227–229.

[2]Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1058–1061.

[3]Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества. Вестн. ЛГУ. 1958. Т. 7, № 2. С. 52–59.

[4]Богачев В.И. Задача Канторовича оптимальной транспортировки мер: новые направления исследований. УМН. 2022. Т. 77, № 5(467). С. 3–52.

[5]Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы. УМН. 2012. Т. 67, № 5(407). С. 3–110.

[6]Богачев В.И., Колесников А.В., Шапошников С.В. Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований. М.– Ижевск, 2023.

[7]Villani C. Optimal transport. Old and new. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[8]Ambrosio L., Gigli N. A user’s guide to optimal transport. Lect. Notes Math. 2013. V. 2062. P. 1–155.

[9]Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. 2nd ed. Birkhäuser, Basel, 2008.

штейна для общих вполне регулярных пространств. Доказано, что на конусе неотрицательных мер и на слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер топология Канторовича – Рубинштейна эквивалентна слабой топологии. Этот результат обобщает известные факты, ранее установленные для метрических пространств.

Значительное внимание уделено сходимости в топологии Канторовича. Получены достаточные условия, требующие одновременного выполнения слабой сходимости и равномерной интегрируемости семейства мер относительно псевдометрик, порождающих исходную топологию. Эти условия оказываются также необходимыми для вероятностных мер. Результаты применены к анализу сходимости выпуклых и устойчивых мер.

Результаты первой главы вносят вклад в общую теорию топологий на пространствах мер, восходящую к классическим работам[10,11,12,13] и в современном виде изложенную в книге[14]. В книге[15] подробно изучены топологии, соответствующие различным равномерностям на тихоновских пространствах, на пространствах радоновских и равномерных мер. Родственные конструкции из теории мер Янга представлены в монографии Кастена, Рейно де Фитта и Валадье[16]. Недавние исследования[17] демонстрируют эффективность метрики Канторовича – Рубинштейна при изучении параметрических семейств нелокальных уравнений баланса в пространстве знакопеременных мер, что подчеркивает актуальность развития топологий такого типа.

В работах[18,19,20] исследуются вопросы, тематически близкие к рассматриваемым в диссертации. В них введено понятие допустимой метрики, изучены пространства таких метрик, изометрические вложения метрических пространств в банаховы пространства, а также введено понятие линейно жестких метрических пространств, для которых норма Канторовича – Рубинштейна является единственной совместимой нормой. Развитая в последней работе концепция виртуальной непрерывности измеримых функций многих переменных тесно связана с теоремами вложения и допустимыми метриками. Близкие мотивы возникают при применении вероятностных соображений в исследовании других задач теории приближения, в том числе поперечников в нормированных пространствах[21].

Во второй главе диссертации изучаются свойства барицентров мер и функционалов. Установлена векторная версия неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств. Из нее получен более специальный вариант для барицентров мер, заданных на

---

[10]Александров А.Д. Additive set-functions in abstract spaces. Матем. сб. 1940. Т. 8(50). С. 307–348; ibid. 1941. Т. 9(51). С. 563–628; ibid. 1943. Т. 13(55). С. 169–238.

[11]Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1, № 2. С. 177–238.

[12]Ле-Кам Л. Сходимость по распределению случайных процессов. Математика. 1960. Т. 4, № 3. С. 107–142.

[13]Варадарайн В.С. Меры на топологических пространствах. Матем. сб. 1961. Т. 55, № 1. С. 35–100.

[14]Bogachev V.I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2018.

[15]Pachl J. Uniform spaces and measures. Springer, New York, 2013.

[16]Castaing C., Raynaud de Fitte P., Valadier M. Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory. Kluwer, Dordrecht, 2004.

[17]Погодаев Н.И., Старицын М.В. Нелокальные уравнения баланса с параметром в пространстве знакопеременных мер. Матем. сб. 2022. Т. 213, № 1. С. 69–94.

[18]Вершик А.М., Затицкий П.Б., Петров Ф.В. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения. УМН. 2014. Т. 69, №6. С. 81–114.

[19]Melleray J., Petrov F.V., Vershik A.M. Linearly rigid metric spaces and the embedding problem. Fund. Math. 2008. V. 199, № 2. P. 177–194.

[20]Vershik A.M., Petrov F.V., Zatitskiy P.B. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces. Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, № 3. P. 379–400.

[21]Малыхин Ю.В., Рютин К.С. Поперечники и жесткость безусловных множеств и случайных векторов. Изв. РАН. Сер. матем. 2025. Т. 89, № 2. С. 45–59.

пространствах вероятностных мер. Эта версия оказалась ключевым инструментом в третьей главе при исследовании задачи Канторовича с условными мерами. Она позволила строго обосновать переход от нелинейной постановки к линейной.

Кроме того, показано, что полунормы типа Канторовича удобны для описания сходимости барицентров мер. В этой же главе строится теория барицентров функционалов. Она позволяет рассматривать не только меры, но и линейные функционалы, что расширяет методы анализа и связывает экстремальные задачи с геометрией пространств мер. В частности, найдена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра. Полученные результаты применяются в задачах двойственности для оптимального транспорта в главе 3.

Третья глава диссертации посвящена задачам Канторовича оптимальной транспортировки мер в различных постановках, включая задачу с фиксированным барицентром и задачу с условными мерами. Эта тематика восходит к основополагающей работе Л. В. Канторовича[1], в которой рассматривалась линейная постановка, ставшая классической на сегодняшний день. Дальнейшее развитие теория получила в многочисленных исследованиях, отраженных в обзорах и монографиях (см.[4,5,6,7,8,9,22,23]). Обзор современного состояния теории от классической транспортной задачи до ее многочисленных модификаций, включая обсуждение моделей с нелинейными функциями стоимости, зависящими от планов, см. также в[6].

Первый раздел главы связан с двойственностью в задачах Канторовича барицентрического типа. Основное внимание уделено задаче с фиксированным барицентром. Для нее доказана общая теорема двойственности, обобщающая результаты[24,25,26,27] на случай вполне регулярных пространств.

Кроме того, рассмотрены две новые постановки задач: задача с фиксированными барицентрами проекций и задача с фиксированными проекциями барицентра. Для них также доказаны теоремы двойственности. Показано, что все эти барицентрические задачи тесно связаны между собой и с классической задачей Канторовича. Для специальных функций стоимости их значения совпадают. При доказательстве активно использовался аппарат барицентров функционалов, развитый во второй главе.

Большой интерес представляет построение выпуклых оболочек для функций стоимости. Показано, что значение задачи Канторовича не меняется при замене функции стоимости на ее выпуклую оболочку по аргументу-мере. Эти конструкции также тесно связаны с теорией барицентров из главы 2 и играют ключевую роль при исследовании задач с условными мерами.

В следующем разделе рассматривается нелинейная задача Канторовича с условными мерами, где функция стоимости зависит от условных мер транспортного плана. Данная проблематика активно развивается в последние годы[24,25,26,27,28,29]. Основной результат —

---

[22] Ambrosio L., Brué E., Semola D. Lectures on optimal transport. 2nd ed. Springer, Cham, 2024.

[23] Santambrogio F. Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs, and modeling. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[24] Acciaio B., Beiglböck M., Pammer G. Weak transport for non-convex costs and model-independence in a fixed-income market. Math. Finance. 2021. V. 31, № 4. P. 1423–1453.

[25] Alibert J.-J., Bouchitté G., Champion T. A new class of costs for optimal transport planning. Eur. J. Appl. Math. 2019. V. 30, № 6. – P. 1229–1263.

[26] Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Pammer G. Existence, duality, and cyclical monotonicity for weak transport costs. Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2019. V. 58, № 6. Art. 203, 28 pp.

[27] Gozlan N., Roberto C., Samson P.-M., Tetali P. Kantorovich duality for general transport costs and applications. J. Funct. Anal. 2017. V. 273, № 11. P. 3327–3405.

[28] Backhoff-Veraguas J., Pammer G. Applications of weak transport theory. Bernoulli. 2022. V. 28, № 1. P. 370–394.

[29] Backhoff-Veraguas J., Pammer G. Stability of martingale optimal transport and weak optimal transport. Ann.

равенство значений исходной задачи и задачи с выпуклой оболочкой функции стоимости. Доказательство опирается на вариант неравенства Йенсена для мер на пространствах мер, тонкие свойства условных мер и теоремы об измеримом выборе в суслинских пространствах. Полученные результаты обобщают утверждения, известные ранее для полных сепарабельных метрических пространств (см. [24]), и вносят вклад в развитие нелинейных транспортных задач.

Четвертая глава посвящена гауссовским операторам перехода. Речь идет о линейных операторах на пространствах мер, которые сохраняют класс гауссовских мер. Источником проблематики послужили работы[30] и[31], в которых установлен общий результат о структуре таких операторов в конечномерном случае.

В разделе 4.1 рассматривается одномерный случай. На основе упрощенной версии метода Холево установлено, что всякий линейный непрерывный оператор на пространстве борелевских мер, отображающий гауссовские меры в гауссовские, представим в виде свертки с фиксированной гауссовской мерой и образа меры относительно линейного оператора.

Основным результатом главы является теорема об общей структуре гауссовских операторов перехода в произвольных локально выпуклых пространствах. Доказано, что при условии слабой непрерывности всякий такой оператор представим в виде композиции линейного преобразования и свертки с фиксированной гауссовской мерой. Указанный результат существенно обобщает теорему Холево на бесконечномерный случай.

Особое внимание уделено вопросу о непрерывности возникающих линейных операторов. Показано, что слабая непрерывность исходного оператора влечет непрерывность соответствующего линейного отображения. При доказательстве использованы результаты о сходимости барицентров мер из второй главы, что устанавливает связь с предыдущими разделами диссертации.

Полученные результаты могут найти применение в теории случайных процессов, квантовой теории информации и бесконечномерном анализе. Они также показывают эффективность развитой в первой главе теории топологий на пространствах мер для изучения структурных свойств линейных операторов.

Цель работы. Цель диссертации — систематическое исследование топологий типа Канторовича на пространствах мер и их приложений к задачам оптимальной транспортировки, теории барицентров и структуре линейных операторов. Для этого решаются следующие задачи.

• Исследовать топологии типа Канторовича на пространствах мер, определить условия их совпадения со слабой топологией на естественных подклассах мер.

• Изучить условия сходимости в топологии Канторовича, сочетающие слабую сходимость и равномерную интегрируемость псевдометрик. Применить результаты к вопросам сходимости выпуклых и устойчивых мер.

• Развить теорию барицентров мер и функционалов, установить связь между слабой сходимостью мер и сходимостью их барицентров.

• Исследовать задачи Канторовича оптимальной транспортировки мер и их модификации (включая барицентрические формулировки и постановки с условными мерами), исследовать вопросы двойственности, условия совпадения значений задач и структуру оптимальных планов.

Appl. Probab. 2022. V. 32, № 1. P. 721–752.

[30] De Palma G., Mari A., Giovannetti V., Holevo A.S. Normal form decomposition for Gaussian-to-Gaussian superoperators. J. Math. Phys. 2015. V. 56, № 5. Art. 052202, 19 pp.

[31] Холево А.С. О характеризации гауссовских операторов перехода. Теория вероятн. и ее примен. 2016. Т. 61, № 4. С. 830–837.

• Изучить структуру гауссовских операторов перехода на локально выпуклых пространствах и обобщить теорему Холево на более широкие классы операторов.

Решение этих задач направлено на углубление теоретического аппарата для анализа пространств мер и их приложений в бесконечномерном анализе, теории оптимального транспорта и смежных областях математики.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Топологии Канторовича. Развита теория топологий типа Канторовича на пространствах мер. Для общих вполне регулярных пространств установлены условия совпадения топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер. Введены и изучены полунормы Канторовича порядка $q \geqslant 1$, получены необходимые и достаточные условия сходимости в соответствующих топологиях $\tau_{K,q}$, сочетающие слабую сходимость и равномерную интегрируемость степеней псевдометрик, порождающих топологию. Эти критерии применены к исследованию сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Носители мер. Для равномерно плотного семейства радоновских мер на пространстве Фреше с равномерно интегрируемыми полунормами доказано существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя, в котором семейство сохраняет свойства равномерной плотности и равномерной интегрируемости.

3. Барицентры мер и функционалов. Разработана теория барицентров, включающая векторную версию неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств и ее вариант для мер на пространствах вероятностных мер. Введено понятие барицентра функционала и установлена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра.

4. Задачи Канторовича. Доказаны теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича, включая новые постановки — задачи с фиксированными барицентрами проекций и задачи с фиксированными проекциями барицентра. Установлена связь между этими задачами и классической задачей Канторовича. Для задачи Канторовича с условными мерами доказано, что ее значение не изменяется при замене функции стоимости на ее выпуклую по аргументу-мере оболочку, что обобщает известные результаты для полных сепарабельных метрических пространств на случай вполне регулярных суслинских пространств и позволяет сводить нелинейные задачи к выпуклым.

5. Установлена общая структура гауссовских операторов перехода в бесконечномерных пространствах, обобщающая теорему Холево на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Положения, выносимые на защиту.

1. Топологии на пространствах мер. Теоремы о совпадении топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер для общих вполне регулярных пространств. Условия сходимости в топологиях Канторовича порядка $q \geqslant 1$, связывающие сходимость в $\tau_{K,q}$ со слабой сходимостью и равномерной интегрируемостью соответствующих моментов. Применение к анализу сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Носители мер в пространствах Фреше. Теорема о существовании сепарабельного рефлексивного банахова пространства-носителя для равномерно плотных семейств мер на пространствах Фреше, сохраняющего свойства равномерной плотности и интегрируемости.

3. Барицентры. Теория барицентров функционалов, включающая векторные версии неравенства Йенсена, условия сходимости барицентров при слабой сходимости мер и теорему о связи плотности барицентра функционала с плотностью самого функционала.

4. Задачи оптимального транспорта. Теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича. Принцип инвариантности значения Канторовича с условными мерами относительно замены функции стоимости на ее выпуклую оболочку по аргументу-мере.

5. Теорема о структуре гауссовских операторов перехода в бесконечномерных пространствах, обобщающая теорему Холево.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, теории меры и общей топологии. Применяются техники бесконечномерного и выпуклого анализа, включая теорию локально выпуклых пространств и теорию двойственности. Разработана оригинальная конструкция барицентров функционалов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации носят теоретический характер и вносят вклад в развитие функционального анализа, теории меры и теории экстремальных задач. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по оптимальному транспорту, бесконечномерному анализу и теории вероятностей.

Разработанный аппарат топологий Канторовича и теории барицентров функционалов открывает новые возможности для изучения пространств мер и операторов на них. Результаты по задачам Канторовича представляют интерес для математической экономики и теории игр. Теорема о структуре гауссовских операторов перехода может найти применение в теории случайных процессов и квантовой теории информации.

Разработанные методы и полученные результаты представляют научную ценность для исследований, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» и Национальном исследовательском университете «Московский физико-технический университет».

Соответствие паспорту научной специальности. Тематика диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ». В работе изучаются топологии на бесконечномерных пространствах мер, линейные операторы и функционалы на них, а также задачи оптимального транспорта. Это полностью соответствует предметной области функционального анализа. Работа включает теоретические исследования в области функционального анализа, общей топологии и теории меры, что подтверждает соответствие паспорту научной специальности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, С. В. Шапошникова и Н. А. Толмачева (МГУ, многократно, 2021-2025 г.). Результаты работы были также представлены на следующих научных конференциях.

1. Шестая Санкт-Петербургская молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, 2022).

2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025» (Москва, МГУ, 2025).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех перечисленных ниже работах автора [1–4], первые две из которых в соавторстве, в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах двух научных конференций [5], [6].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 62 наименований. Общий объем диссертации составляет 90 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектами РНФ 22-11-00015 и 22-8-10-2-1 фонда «Базис».

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Первая глава диссертации состоит из шести параграфов и посвящена топологиям типа Канторовича.

Параграф 1.1 носит вводный характер. В нем напоминаются основные понятия теории меры на топологических пространствах и приводятся необходимые предварительные сведения. Параграф 1.2 посвящен топологии Канторовича τ_K и топологии Канторовича – Рубинштейна τ_{KR} на пространствах мер. Центральным результатом является теорема о совпадении топологии τ_{KR} со слабой топологии на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах.

Теорема 1.2.1. *Пусть топология тихоновского пространства X порождена направленным по включению топологий семейством псевдометрик $\mathcal{D}$. Тогда семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{KR,d}\}_{d\in\mathcal{D}}$ порождает слабую топологию на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$.*

Кроме того, слабая топология порождается этим семейством полунорм на компактах в слабой топологии и на ограниченных по вариации равномерно плотных множествах в $\mathcal{M}_\tau(X)$.

Важной частью исследования являются условия сходимости в топологии τ_K. В этом направлении получено следующее утверждение.

Предложение 1.2.3. *Пусть направленность мер μ_α из $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ сходится в топологии τ_{KR} к мере $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$. Если для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu_\alpha|(dx) = 0,$$

то $\{\mu_\alpha\}$ сходится в топологии τ_K. Для вероятностных мер данное условие также необходимо.

Из этих результатов получены достаточные условия компактности в топологиях τ_{KR} и τ_K.

Предложение 1.2.5. *Пусть множество $S \subset \mathcal{M}_\tau(X)$ слабо компактно. Тогда S компактно в топологии τ_{KR}.*

Если $S \subset \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ и для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in S} \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu|(dx) = 0$$

для некоторой точки $x_0 \in X$, то S компактно в топологии τ_K.

В параграфе 1.3 изучаются носители мер в пространствах Фреше. Основной результат гарантирует существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя

для равномерно плотных семейств мер с равномерно интегрируемыми полунормами, сохраняющего свойства равномерной плотности и интегрируемости. Для построения такого пространства используется конструкция Гротендика.

Теорема 1.3.1. *Пусть X — пространство Фреше, $\{p_n\}$ — система полунорм, задающая его топологию, и $\mathcal{M}$ — равномерно плотное семейство радоновских мер на X. Предположим, все p_n равномерно интегрируемы относительно $\mathcal{M}$, т. е.*

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\int_{\{x:\,p_n(x)>m\}} p_n(x)\,|\mu|(dx)=0.$$

Тогда существует сепарабельное рефлексивное пространство $(E,\|\cdot\|_E)$ со следующими свойствами:

(i) *E линейно и непрерывно вложено в X, причем замкнутый единичный шар компактен в X*;

(ii) *$\mathcal{M}$ сосредоточено на E и равномерно плотно в $(E,\|\cdot\|_E)$*;

(iii) *Норма $\|\cdot\|_E$ равномерно интегрируема относительно $\mathcal{M}$.*

Чтобы учесть ситуации, когда меры имеют конечные моменты порядка $q>1$ в параграфе 1.4 вводятся полунормы Канторовича порядка q и соответствующая локально выпуклая топология $\tau_{K,q}$ на пространстве радоновских мер с конечным моментом порядка q. Следующее предложение устанавливает условия сходимости в этих топологиях.

Предложение 1.4.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}\subset\mathcal{M}_r^q(X)$ сходится к $\mu\in\mathcal{M}_r^q(X)$ в топологии τ_{KR}. Если каждая псевдометрика $d\in\mathcal{D}$ удовлетворяет условию равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\alpha}\int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)^q\,|\mu_\alpha|(dx)=0,$$

то $\mu_\alpha\to\mu$ в топологии $\tau_{K,q}$.

Данный результат применяется для анализа сходимости специальных классов мер, рассматриваемых в следующих двух параграфах.

Завершают главу исследования выпуклых и устойчивых мер в параграфах 1.5 и 1.6. Следующие результаты связывают слабую сходимость со сходимостью моментов и сходимостью в топологиях Канторовича для s-выпуклых мер.

Теорема 1.5.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Тогда для каждой непрерывной полунормы q верны следующие утверждения*:

(i) *Если $s=0$, то существует такое $\kappa>0$, что*

$$\lim_{\alpha}\int_X \exp(\kappa q)\,d\mu_\alpha=\int_X \exp(\kappa q)\,d\mu.$$

Кроме того, для каждого $r>0$ справедливо равенство

$$\lim_{\alpha}\int_X q^r\,d\mu_\alpha=\int_X q^r\,d\mu.$$

(ii) *Если $s<0$, то при $0<r<-1/s$ справедливо равенство*

$$\lim_{\alpha}\int_X q^r\,d\mu_\alpha=\int_X q^r\,d\mu.$$

Следствие 1.5.2. *При условиях теоремы* 1.5.1 *направленность мер μ_α сходится к μ в топологии $\tau_{K,q}$ при следующих значениях q*:

(i) *если $s=0$, то для всех $q\geqslant 1$*; (ii) *если $s<0$, то для всех $q<-1/s$.*

Наконец, утверждения ниже раскрывают некоторые свойства устойчивых радоновских мер и их сходимости в топологиях Канторовича.

Лемма 1.6.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство и μ — радоновская вероятностная мера на X. Если μ_f устойчивы порядка $p > 1$ для всех $f \in X^*$, то μ устойчива порядка p.*

Предложение 1.6.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских вероятностных мер на локально выпуклом пространстве X, устойчивых порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если $\{\mu_\alpha\}$ сходится слабо к радоновской мере μ, то μ устойчива порядка $p \geqslant p_1$.*

Теорема 1.6.3. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если $\{\mu_\alpha\}$ сходится слабо к радоновской мере μ, то $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,s}$ с любым $s \in [1, p_1)$.*

Вторая глава развивает теории барицентров и ее приложения.

В параграфе 2.1 установлены векторные версии неравенства Йенсена для бесконечномерных пространств.

Лемма 2.1.1. *Пусть борелевская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X сосредоточена на борелевском выпуклом множестве V, а μ-интегрируемая функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ выпукла на V и полунепрерывна снизу на $\overline{V}$. Если μ имеет барицентр m_μ, то*

$$F(m_\mu) \leqslant \int_X F(x)\,\mu(dx).$$

Следствие 2.1.2. *Пусть радоновская вероятностная мера μ с сильным первым моментом сосредоточена на возрастающей последовательности выпуклых компактных множеств K_n, а функция $F \in L^1(\mu)$ выпукла на каждом K_n и полунепрерывна снизу на всех компактах в X. Если μ имеет барицентр m_μ, то верно неравенство выше.*

Эти версии применяются к последующим задачам двойственности и нелинейным постановкам.

В параграфе 2.2 изучаются условия сходимости барицентров при слабой сходимости мер.

Следствие 2.2.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, заданной системой полунорм $\mathcal{Q}$, и $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$ сходится слабо к $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$. Если каждая полунорма $q \in \mathcal{Q}$ равномерно интегрируема относительно $\{\mu_\alpha\}$, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$ при выполнении любого из условий*:

(i) *все меры μ_α неотрицательны*;

(ii) *$\{\mu_\alpha\}$ имеет слабо компактное замыкание в $\mathcal{M}_\tau(X)$ (в частности, это условие автоматически выполнено для последовательностей мер*).

Параграф 2.3 содержит результаты о сходимости барицентров выпуклых и устойчивых мер.

Теорема 2.3.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Если меры μ_α и μ имеют барицентры, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

Теорема 2.3.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если $\{\mu_\alpha\}$ сходится слабо к радоновской мере μ, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

В параграфе 2.4 вводится новое понятие барицентра линейного непрерывного функционала на пространстве равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathcal{P}_r(X)$. Основной результат связывает плотность функционала и плотность его барицентра.

Теорема 2.4.5. *Если вероятностный функционал $L \in U_b^*\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$ имеет плотный барицентр, то $L \in U_b^*\big(\mathcal{P}_r(X)\big)_t$.*

Доказательство основано на применении компактификации Самюэля и использовании критерия представимости функционала радоновской мерой, что демонстрирует единство топологических и функциональных методов в теории меры.

В **третьей главе** рассматриваются различные постановки задачи Канторовича оптимальной транспортировки мер, включая задачу с фиксированным барицентром и задачу с условными мерами.

Основным результатом параграфа 3.1 является теорема двойственности для задачи Канторовича с фиксированным барицентром.

Теорема 3.1.10. *Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, а функция стоимости h полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{P\in\Pi^\beta(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp) = \sup\Biggl\{\int_X f\,d\mu + \int_Y g\,d\beta\colon \\ f\in C_b(X),\ g\in C_b(Y),\ f(x)+\int_Y g\,dp \leqslant h(x,p)\Biggr\}.$$

Для доказательства используются свойства отображения барицентра, полученные во второй главе.

В этом же разделе вводятся и изучаются новые барицентрические постановки задачи Канторовича: с фиксированными барицентрами проекций и с фиксированными проекциями барицентра. Для них также доказаны теоремы двойственности и выявлены связи между различными формулировками.

В параграфе 3.2 исследуются задача Канторовича с условными мерами. Центральный результат — инвариантность значения задачи относительно замены функции стоимости на ее выпуклую по аргументу-мере оболочку.

Теорема 3.2.7. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, мера μ сепарабельна и не имеет атомов, а функция h непрерывна на произведении $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда*

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

Доказательство использует связь между нелинейной задачей с условными мерами и линейной задачей с фиксированным барицентром, теорему об измеримом выборе и свойства суслинских пространств.

Четвертая глава посвящена структурной теории гауссовских операторов перехода. Исследуются операторы T на пространствах мер, отображающие гауссовские меры в гауссовские, и устанавливаются их представления в виде

$$T\mu = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}), \tag{1}$$

где γ_0 — фиксированная гауссовская мера и S — линейный оператор.

В параграфе 4.1 изучается одномерный случай. Доказательство центральной теоремы основано на упрощенном методе Холево с использованием уравнения теплопроводности.

Теорема 4.1.1. *Пусть отображение $T\colon \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ переводит гауссовские меры в гауссовские, причем для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует такая функция $g_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$, что*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda x)\,T\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\,\mu(dx) \qquad \forall \mu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}).$$

Тогда T линейно и существуют такие гауссовская мера γ_0 и линейная функция S на прямой, что (1) *верно для всех $\mu \in \mathcal{G}(X)$.*

В параграфе 4.2 теорема обобщена на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Теорема 4.2.2. *Пусть X — локально выпуклое пространство и линейный оператор*

$$T\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{M}_r(X)$$

отображает все одномерные гауссовские меры в гауссовские. Предположим, что для каждого $f \in X^*$ существует такая ограниченная и непрерывная на аффинных прямых функция $g_f\colon X \to \mathbb{C}$, что

$$\int_X \exp(if)\, d(T\nu) = \int_X g_f\, d\nu \qquad \forall \nu \in \mathcal{G}_1(X),$$

где $\mathcal{G}_1(X)$ — множество одномерных гауссовских мер на X. Тогда существуют такие гауссовская мера γ_0 и линейный оператор $S\colon X \to X$, что (1) *верно для всех дираковских мер.*

Если T продолжен до слабо непрерывного линейного оператора на $\mathcal{M}_r(X)$, то оператор S непрерывен и T имеет вид (1) *для всех мер из $\mathcal{M}_r(X)$.*

В завершение главы приведен пример, показывающий существенность условия непрерывности оператора в слабой топологии.

Заключение

В диссертационной работе проведено систематическое исследование топологий на пространствах мер и их приложений к задачам оптимального транспорта и функционального анализа. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории меры и могут быть применены в различных разделах математики.

Основные научные результаты работы заключаются в следующем.

1. **В первой главе** исследованы топологии типа Канторовича. Установлено, что топология Канторовича — Рубинштейна τ_{KR} совпадает со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах. Получены точные условия сходимости и компактности в топологиях τ_K и τ_{KR}, исследованы свойства носителей мер в пространствах Фреше. Рассмотрены также полунормы Канторовича порядка q и изучена сходимость выпуклых и устойчивых мер в соответствующих топологиях.

2. **Во второй главе** изучаются свойства барицентров мер и функционалов. Установлены обобщенные неравенства Йенсена для выпуклых функций на пространствах мер, получены условия сходимости барицентров при слабой сходимости мер. Исследованы свойства барицентров выпуклых и устойчивых мер, введено понятие барицентра функционала и доказана теорема о связи плотности функционала и плотности его барицентра.

3. **В третьей главе** решены важные задачи теории оптимального транспорта. Доказаны теоремы двойственности для задач Канторовича барицентрического типа. Установлена инвариантность значения задачи с условными мерами относительно замены функции стоимости на ее выпуклую оболочку. Разработан единый подход к изучению различных постановок задач оптимального транспорта.

4. **В четвертой главе** доказаны структурные теоремы, связанные с гауссовскими операторами перехода. Установлено, что операторы, сохраняющие гауссовость мер, представимы в виде свертки с фиксированной гауссовской мерой с образом меры при линейном операторе. Результаты получены как для одномерного случая, так и для общих локально выпуклых пространств.

Укажем несколько перспективных направлений дальнейших исследований.

1. Изучение нелинейных задач оптимального транспорта с дополнительными ограничениями.

2. Исследование топологий на пространствах мер со значениями в банаховых пространствах.

3. Исследование свойств псевдометрик Хаусдорфа на пространстве компактов, порожденных полунормами Канторовича.

4. Развитие теории гауссовских операторов для нелинейных преобразований.

5. Исследование вида операторов на пространствах мер, сохраняющих другие классы мер (выпуклые, устойчивые фиксированного порядка и др.).

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постоянное внимание к работе, неоценимую помощь в постановке задач и обсуждение полученных результатов.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Алексеев А.Г., Афонин К.А., Богачев В.И. О гауссовских операторах перехода // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2021. – Т. 500. – С. 10–15.

Alekseev A.G., Afonin K.A., Bogachev V.I. On Gaussian transition operators // Dokl. Math. – 2021. – Vol. 104, No. 2. – P. 229–233.

[2] Afonin K.A., Bogachev V.I. Kantorovich type topologies on spaces of measures and convergence of barycenters // Commun. Pure Appl. Anal. – 2023. – Vol. 22, No. 2. – P. 597–612.

[3] Афонин К.А. Нелинейная задача Канторовича оптимальной транспортировки мер с невыпуклыми функциями стоимости // Функц. анализ и его прил. – 2023. – Т. 57, № 4. – С. 3–16.

Afonin K.A. The nonlinear Kantorovich transportation problem with nonconvex costs // Funct. Anal. Appl. – 2023. – V. 57, No. 4. – P. 267–278.

[4] Афонин К.А. Двойственность в задаче Канторовича с фиксированным барицентром и барицентры функционалов // Функц. анализ и его прил. – 2024. – Т. 58, № 2. – С. 5–22.

Afonin K.A. Duality for the Kantorovich problem with a fixed barycenter and barycenters of functionals // Funct. Anal. Appl. – 2024. – V. 58, No. 2. – P. 105–119.

В работе [1] диссертанту принадлежат результаты теорем 1, 2 и 3, а также контрпример (замечание 1), демонстрирующий существенность условия непрерывности оператора в слабой топологии. Соавтор Г. А. Алексеев построил контрпример с отображением $x \mapsto x^3$, упомянутый во введении, а также участвовал в обсуждении задачи и проверке доказательств. Соавтору В. И. Богачеву принадлежат постановка задачи, общее руководство работой и доказательство теоремы 4.

В работе [2] диссертанту принадлежат результаты теорем 2.2, 2.7, 4.1, 4.4, предложений 2.5, 2.6, 2.9, следствий 3.1, 4.2, 4.5 и пример 3.2. Соавтору В. И. Богачеву принадлежат постановка задач, общее руководство работой и доказательство предложения 2.4, леммы 3.3 и следствия 4.3.

Тезисы докладов на научных конференциях

[5] Афонин К.А. О гауссовских эндоморфизмах // Сборник тезисов докладов шестой Санкт-Петербургской молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике. СПбГУ. 2022. – с. 4–5.

[6] Афонин К.А. Топологии типа Канторовича на пространстве мер и сходимость барицентров // Сборник тезисов докладов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025». М: МГУ. 2025. – 1 с.

Подписано в печать 26.03.2026 г.
Тираж 64 экз.

Отпечатано типографии (название, адрес)