УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДСТУ СО РАН
академик РАН
_____ И. В. Бычков
06 мая 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Афонина Константина Александровича
«Топология пространств мер»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук
по специальности 1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа К. А. Афонина посвящена исследованиям в области теории меры и функционального анализа на стыке с теорией экстремальных задач и общей топологией. В ней изучаются различные обобщения метрик и полуметрик Канторовича и порождаемые ими топологии пространств мер на тихоновских пространствах, а также приложения этих конструкций к задачам оптимальной транспортировки, теории барицентров и анализу структуры линейных операторов с некоторыми специальными свойствами.

1. Актуальность темы исследования

Рассматриваемые вопросы важны для развития теории меры и теории оптимального транспорта. Тематика работы сейчас популярна во всем мире в связи с многочисленными приложениями в машинном обучении, компьютерной графике и математической экономике.

2. Оценка содержания диссертации и автореферата

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем рукописи — 90 страниц.

Во введении дан обзор литературы и сформулированы основные результаты работы. Результаты главы 1 относятся к общей теории слабых топологий на пространствах мер на тихоновских топологических пространствах.

Глава 2 посвящена свойствам барицентров мер и функционалов. Здесь получена интересная векторная версия неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств. Из нее выведен более специальный вариант для барицентров вероятностных мер. Эта версия существенно используется в третьей главе при исследовании задачи Канторовича с условными мерами и в обосновании перехода от нелинейной постановки к линейной. В этой же главе строится теория барицентров функционалов. Она позволяет рассматривать не только меры, но и линейные функционалы, что расширяет методы анализа и связывает экстремальные задачи с геометрией пространств мер. Здесь же установлена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра.

В главе 3 речь идет о задачах Канторовича оптимальной транспортировки мер в различных постановках, в том числе с фиксированным барицентром и с условными мерами. Эта проблематика продолжает исследования, начатые в классической работе

Л. В. Канторовича 1942 года. В этой главе рассмотрена двойственность в задачах Канторовича барицентрического типа. Рассмотрены также две новые интересные постановки: задача с фиксированными барицентрами проекций и задача с фиксированными проекциями барицентра, для которых получены теоремы двойственности. Показано, что эти барицентрические задачи тесно связаны между собой и с классической задачей Канторовича. Здесь применяется техника барицентров функционалов, развитая во второй главе. Кроме того, изучается нелинейная задача Канторовича с условными мерами, где функция стоимости зависит от условных мер транспортного плана. Основным результатом является равенство инфимума значений исходной задачи и инфимума значений задачи с овыпукленной функцией стоимости на одном и том же множестве планов.

Наконец, глава 4 посвящена изучению гауссовских операторов перехода, т.е. линейных операторов на пространствах мер, сохраняющих класс гауссовских мер. Эта тематика восходит к работам А. С. Холево, получившего красивый результат о структуре таких операторов в конечномерном случае. Основной результат главы описывает структуру гауссовских операторов перехода в произвольных локально выпуклых пространствах: при условии слабой непрерывности всякий такой оператор представим в виде композиции линейного преобразования и свертки с фиксированной гауссовской мерой. Этот результат обобщает теорему Холево на бесконечномерный случай.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Развита теория топологий типа Канторовича на пространствах мер. Для общих вполне регулярных пространств установлены условия совпадения топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер. Введены и изучены полунормы Канторовича порядка $q \geq 1$, получены необходимые и достаточные условия сходимости в соответствующих топологиях $\tau_{K,q}$. Эти критерии применены к исследованию сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Для равномерно плотного семейства радоновских мер на пространстве Фреше с равномерно интегрируемыми полунормами доказано существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя, в котором семейство сохраняет свойства равномерной плотности и равномерной интегрируемости.

3. Разработана теория барицентров, включающая векторную версию неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств и ее вариант для пространств вероятностных мер.

4. Доказаны теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича, включая новые постановки — задачи с фиксированными барицентрами проекций и задачи с фиксированными проекциями барицентра. Установлена связь между этими задачами и классической задачей Канторовича.

5. Описана общая структура гауссовских операторов перехода в бесконечномерных пространствах, обобщающая известную теорему Холево на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

3. Новизна полученных результатов. Степень обоснованности положений и выводов диссертации

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

4. Публикации и апробация работы

По теме диссертации опубликованы 4 статьи в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Основные результаты диссертации представлены на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (МГУ, 2021 – 2025), на Шестой Санкт-Петербургской молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, 2022) и на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025» и «Ломоносов-2026» (Москва, МГУ, 2025, 2026), а также на научном семинаре Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (Иркутск, 2026).

5. Соответствие паспорту специальности

Результаты работы отвечают специальности «1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ» в рамках следующих направлений:

1. Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях;
2. Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы);
3. Теория векторных пространств, геометрия нормированных пространств, интегрирование и меры в функциональных пространствах, интегральные представления и преобразования.

6. Замечания

К недостаткам работы следует отнести ряд неточностей в формулировках и доказательствах некоторых утверждений.

1. Например, в теореме 1.3.1 утверждается: «E линейно и непрерывно вложено в X, причем замкнутый единичный шар компактен в X». Правильнее писать: «причем *образ* замкнутого единичного шара при этом вложении компактен в X».
2. Следствие 3.2.5 и Теорема 3.2.7 носят незавершенный характер.

   Как правило, переход к овыпуклению функции стоимости в оптимизационных задачах с невыпуклыми интегрантами используется для доказательства существования оптимального решения; при этом оптимальное значение функционала в овыпукленной задаче совпадает с инфимумом в исходной. В указанных утверждениях, однако же, не установлено существование оптимальных планов. Доказано только равенство инфимумов исходной и овыпукленной функций цены на одном и том же множестве планов. Поэтому говорить о равенстве *значений* соответствующих задач некорректно.

3. В доказательстве следствия 3.1.12 пропущен технический шаг. Там возникает выпуклая полунепрерывная снизу функция $G : \mathcal{P}_r(Y) \to \mathbb{R}$ со свойством $G \le h(x, \cdot)$, и к ней применяется следствие 2.4.7. Это требует включения $G \in L^1(Q)$.

   Достаточно взять $G_N = \max\{G, -N\}$, $N > 0$. Тогда G_N остается выпуклой и полунепрерывной снизу; при этом $-N \le G_N \le h(x, \cdot)$, и $G_N \in L^1(Q)$. После применения неравенства Йенсена к G_N можно перейти к пределу по N.

4. Замечен также ряд опечаток. Так, в формулировке леммы 3.2.4 фигурирует обозначение $\Lambda(\mu, \nu)$, ранее не введенное (по смыслу это $\Pi^\nu(\mu)$), а в доказательстве леммы 3.2.3 неверно указано пространство условных мер $\mathcal{P}_r(X)$ (вместо $\mathcal{P}_r(Y)$).

Указанные замечания не снижают общей положительной оценки работы.

7. Заключение

Из сказанного явствует, что работа К. А. Афонина «Топология пространств мер» удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертационным работам, выдвигаемым на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор К. А. Афонин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв на диссертацию подготовлен в отделении Эволюционных уравнений и управляемых динамических систем и заслушан, обсужден и одобрен на заседании Семинара по дифференциальным уравнениям, управлению и системному анализу ИДСТУ СО РАН, протокол № 1 от 05 мая 2026 года.

Заведующий отделением Эволюционных уравнений и управляемых динамических систем Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН), член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор А. А. Толстоногов

06.05.2026

Наименование организации:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)
Адрес: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292
Телефон: (3952) 42-71-00, факс: (3952) 51-16-10, e-mail: idstu@icc.ru

Подпись заверяю
Нач. отдела делопроизводства
и организационного обеспечения
ИДСТУ СО РАН
Г.Б. Кононенко
06.05.2026