Отзыв официального оппонента на диссертацию Афонина Константина Александровича "Топология пространств мер" на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Многие задачи теории вероятностей и функционального анализа связаны со сходимостью мер. В терминах слабой сходимости формулируются классические результаты о предельных распределениях: центральная предельная теорема, теорема Колмогорова (критерий согласия) и др. Слабая сходимость задаётся различными метриками, наиболее важными из которых являются метрики Канторовича–Рубинштейна и Леви–Прохорова. Современный общий подход состоит в изучении топологии слабой сходимости на пространстве мер $\mathcal{M}(X)$, заданных на некотором множестве X. В диссертации рассматривается наиболее общий случай, когда X представляет собой (регулярное) топологическое пространство. Некоторые классические результаты удаётся перенести со случая $X = \mathbb{R}^d$ или метрических пространств X на этот общий случай. Такой подход позволяет также упростить некоторые доказательства.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Общий объем — 92 страницы. Во введении дан обзор по теме работы и сформулированы основные результаты.

В главе 1 обсуждаются ряд общих вопросов теории слабых топологий на пространствах мер на вполне регулярных топологических пространствах. В теореме 1.2.1 показано, что если топология X порождена семейством полунорм $q(\cdot)$, то слабая топология на неотрицательных мерах в $\mathcal{M}(X)$ порождена семейством соответствующих полунорм Канторовича–Рубинштейна:

$$\|\mu\|_q := \sup\left\{\int_X f\,d\mu\colon |f(x)| \le 1,\ |f(x)-f(y)| \le q(x-y)\right\}.$$

В случае некомпактных пространств на всём $\mathcal{M}(X)$ слабая топология может отличаться от топологии Канторовича–Рубинштейна τ_{KR}. Далее в главе получены некоторые результаты о топологии τ_{KR} и её модификациях.

В главе 2 изучаются барицентры мер и функционалов. Барицентр меры μ в X определяется как такой элемент $m_\mu \in X$, что $f(m_\mu) = \int_X f\,d\mu$ для любого функционала $f \in X^*$. Автор рассматривает весьма общий, но естественный здесь класс локально выпуклых пространств X. В § 2.2, § 2.3 получены достаточные условия сходимости барицентров $m(\mu_n) \to m(\mu)$ для слабо сходящихся последовательностей (направленностей) мер $\mu_n \to \mu$. Так, в теореме 2.3.1 доказано, что сходимость имеет место для лог-вогнутых мер, а в теореме 2.3.2 — для устойчивых порядка $p > 1 + \varepsilon$. В § 2.4 строится теория барицентров для более сложных объектов — "вероятностных функционалов".

В главе 3 рассматривается классическая транспортная задача Канторовича. В общем случае она состоит в построении оптимального "плана транспортировки"

меры (X, μ) в меру (Y, ν). План транспортировки σ (это мера на $X \times Y$, такая что $\sigma(\cdot, Y) = \mu(\cdot)$, $\sigma(X, \cdot) = \nu(\cdot)$) должен минимизировать стоимость $\int_{X\times Y} h(x, y)\, d\sigma$. В теореме 3.1.8 классическая двойственность для транспортной задачи,

$$\inf_{\sigma} \int_{X\times Y} h\, d\sigma = \sup\{\int_X f\, d\mu + \int_Y g\, d\nu \colon f(x) + g(y) \le h(x, y)\},$$

переносится со случая метрических пространств на более общий случай регулярных (тихоновских) топологических пространств X, Y. Далее рассматриваются модификации транспортной задачи, в которых стоимость начинает зависеть от плана, в том числе новые модификации; для них также установлены теоремы двойственности. Здесь используется понятие барицентра функционала из главы 2. Один из основных результатов третьей главы — теорема 3.2.7 — утверждает, что оптимальная стоимость транспортировки не меняется при замене функции стоимости на её выпуклую по второму аргументу оболочку.

В главе 4 рассмотрены линейные операторы на пространствах мер на локально выпуклых пространствах, сохраняющие класс гауссовских мер. Здесь обобщен и усилен известный результат А.С. Холево об описании таких операторов в конечномерном случае. В частности, показано, что всякий оператор такого вида является сверткой образа меры при некотором линейном преобразовании S с фиксированной гауссовской мерой.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Автореферат верно отражает содержание диссертации.

По теме диссертации опубликованы 4 статьи в рецензируемых научных журналах из списка ВАК.

Основные результаты диссертации докладывались на нескольких научно-исследовательских семинарах и конференциях.

К диссертационной работе имеются следующие замечания.

Доказательства написаны сжато, но недостающие детали можно восстановить. Например, в теореме 4.1.1 стоило бы пояснить, почему $a(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ дифференцируемы (это видно из явной формулы для u_λ).

Автор не всегда четко формулирует, какие результаты обобщает. Перед теоремой 1.3.1 можно было бы сформулировать теорему Булдыгина. К теоремам 3.1.8, 3.1.10, 3.2.7 полезно было бы добавить конкретные ссылки на известные ранее версии результатов для метрических пространств.

По поводу главы 3 отметим, что в исходной постановке Канторовича (1942) речь шла в том числе о конечных множествах $X = \{1, \dots, m\}$ (производителей) и $Y = \{1, \dots, n\}$ (потребителей), мощностях производства $\mu = (a_1, \dots, a_m)$, потребления $\nu = (b_1, \dots, b_n)$ и стоимостях перевозки $h_{i,j}$. Было бы полезно кратко пояснить для этой простейшей ситуации, в чем состоят модификации классической транспортной задачи и есть ли новые следствия для этого случая (или только для более общих пространств). К сожалению, в теореме 3.2.7 требуется отсутствие атомов у

меры, что исключает конечный случай; стоило бы прокомментировать, что происходит в нем. Не написано явно, как определяется H.

Было бы целесообразно сформулировать в виде отдельного следствия обобщение теоремы А.С. Холево: "Если T — линейный оператор на пространстве мер в локально выпуклом пространстве, непрерывный в слабой топологии и переводящий одномерные гауссовы меры в гауссовы, то он имеет вид $T(\mu) = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1})$". Есть опечатки: на страница 16 "фикисированным", на странице 29 "пространствае", на странице 45, вместо "в силу линейной независимости" нужно "в силу линейной зависимости".

Однако эти недостатки не влияют на общую положительную оценку работы.

Подводя итог сказанному, можно заключить, что диссертационная работа К. А. Афонина "Топология пространств мер" удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертационным работам, выдвигаемым на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор К. А. Афонин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук (специальность 1.1.1),
ведущий научный сотрудник отдела теории функций
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
"Математический институт им. В. А. Стеклова РАН"
Ю.В. Малыхин

28.05.2026

Тел.+79163903973, email: malykhin@mi-ras.ru
МИАН; 119333, Москва, ул. Губкина, д. 8

Подпись Ю.В. Малыхина
заверяю

Заведующий
отделом кадров
Усачева О. Г.