Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.5

Афонин Константин Александрович

ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕР

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

член-корреспондент РАН,

профессор В.И. Богачев

Москва, 2026

Оглавление

Введение **3**

Глава 1. Топологии типа Канторовича **18**

1.1. Определения, обозначения и предварительные сведения 18

1.2. Топологии τ_K и τ_{KR} 22

1.3. Носители мер в пространствах Фреше 27

1.4. Полунормы Канторовича порядка q 31

1.5. Выпуклые меры 33

1.6. Устойчивые меры 36

Глава 2. Барицентры мер и функционалов **41**

2.1. Неравенства Йенсена 41

2.2. Сходимость барицентров 43

2.3. Барицентры выпуклых и устойчивых мер 44

2.4. Барицентры функционалов 45

Глава 3. Задачи Канторовича **53**

3.1. Двойственность в задачах Канторовича 53

3.2. Задача Канторовича с условными мерами 65

Глава 4. Гауссовские операторы перехода **74**

4.1. Одномерный случай 74

4.2. Общий случай 77

Заключение **83**

Список литературы **85**

Введение

Актуальность темы. Тематика диссертационной работы находится на пересечении функционального анализа, теории меры и экстремальных задач. Рассматриваемые вопросы фундаментальны для современного анализа и тесно связаны с оптимальным транспортом, топологиями на пространствах мер и операторами в вероятностных и аналитических моделях.

В последние годы стремительно вырос интерес к топологиям Канторовича и Канторовича – Рубинштейна благодаря развитию теории оптимального транспорта и ее приложениям в статистике, машинном обучении, теории случайных процессов и математической экономике. Указанные топологии дают естественный язык для описания сходимости мер и обладают богатой дуальной структурой. Это позволяет применять методы функционального анализа к задачам о сходимости и компактности.

Пространства мер играют центральную роль во многих разделах математики: от теории вероятностей до уравнений в частных производных. Особенно важно изучать условия сходимости в этих топологиях для таких классов, как выпуклые и устойчивые меры. Они широко используются в вероятностных моделях и математической статистике.

Развитая в диссертации теория барицентров мер и функционалов показывает, как сходимость мер в топологиях Канторовича влияет на поведение их барицентров. Эти аспекты непосредственно связаны с применениями в бесконечномерных пространствах, где традиционные методы анализа оказываются недостаточными. Важное место занимают и гауссовские операторы перехода, которые тесно связаны со стохастическими процессами и операторным анализом.

Работу можно разделить на четыре основные части, соответствующие четырем главам диссертации.

Первая глава посвящена локально выпуклым топологиям на пространствах мер, порожденных полунормами Канторовича и Канторовича – Рубинштейна. Метрики такого типа восходят к классической работе Л. В. Канторовича [10], в которой предложены методы линейного программирования для задач оптимального распределения ресурсов. Дальнейшее развитие теория получила в совместных исследованиях самого Канторовича и Г. Ш. Рубинштейна [11], [12], где для метри-

ческих компактов введена норма, называемая нормой Канторовича – Рубинштейна. Обширную библиографию по данной области можно найти, например, в [2], [4], [5], [55]. О геометрических аспектах пространств мер с метриками типа Канторовича см. также Ambrosio, Gigli [23], Ambrosio, Gigli, Savaré [24], [25], Villani [55].

В диссертации исследуются топологии Канторовича и Канторовича – Рубинштейна для общих вполне регулярных пространств. Доказано, что на конусе неотрицательных мер и на слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер топология Канторовича – Рубинштейна эквивалентна слабой топологии. Этот результат обобщает известные факты, ранее установленные для метрических пространств.

Значительное внимание уделено сходимости в топологии Канторовича. Получены достаточные условия, требующие одновременного выполнения слабой сходимости и равномерной интегрируемости семейства мер относительно псевдометрик, порождающих исходную топологию. Эти условия оказываются также необходимыми для вероятностных мер. Результаты применены к анализу сходимости выпуклых и устойчивых мер.

Результаты первой главы вносят вклад в общую теорию топологий на пространствах мер, восходящую к классическим работам [1], [8], [13], [16] и в современном виде изложенную в книге [33]. В книге [50] подробно изучены топологии, соответствующие различным равномерностям на тихоновских пространствах, на пространствах радоновских и равномерных мер. Родственные конструкции из теории мер Янга представлены в монографии Кастена, Рейно де Фитта и Валадье [38]. Недавние исследования [15] демонстрируют эффективность метрики Канторовича – Рубинштейна при изучении параметрических семейств нелокальных уравнений баланса в пространстве знакопеременных мер, что подчеркивает актуальность развития топологий такого типа.

В работах [9], [49], [54] исследуются вопросы, тематически близкие к рассматриваемым в диссертации. В них введено понятие допустимой метрики, изучены пространства таких метрик, изометрические вложения метрических пространств в банаховы пространства, а также введено понятие линейно жестких метрических пространств, для которых норма Канторовича – Рубинштейна является единственной совместимой нормой. Развитая в последней работе концепция виртуальной непрерывности измеримых функций многих переменных тесно связа-

на с теоремами вложения и допустимыми метриками. Близкие мотивы возникают при применении вероятностных соображений в исследовании других задач теории приближения, в том числе поперечников в нормированных пространствах [14].

Во второй главе диссертации изучаются свойства барицентров мер и функционалов. Установлена векторная версия неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств. Из нее получен более специальный вариант для барицентров мер, заданных на пространствах вероятностных мер. Эта версия оказалась ключевым инструментом в третьей главе при исследовании задачи Канторовича с условными мерами. Она позволила строго обосновать переход от нелинейной постановки к линейной.

Кроме того, показано, что полунормы типа Канторовича удобны для описания сходимости барицентров мер. В этой же главе строится теория барицентров мер и функционалов. Она позволяет рассматривать не только меры, но и линейные функционалы, что расширяет методы анализа и связывает экстремальные задачи с геометрией пространств мер. В частности, найдена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра. Полученные результаты применяются в задачах двойственности для оптимального транспорта в главе 3.

Третья глава диссертации посвящена задачам Канторовича оптимальной транспортировки мер в различных постановках, включая задачу с фиксированным барицентром и задачу с условными мерами. Эта тематика восходит к основополагающей работе Л. В. Канторовича [10], в которой рассматривалась линейная постановка, ставшая классической на сегодняшний день. Дальнейшее развитие теория получила в многочисленных исследованиях, отраженных в обзорах и монографиях (см. [22], [23], [24], [2], [4], [52], [55]). Обзор современного состояния теории от классической транспортной задачи до ее многочисленных модификаций, включая обсуждение моделей с нелинейными функциями стоимости, зависящими от планов, см. также в [5].

Первый раздел главы связан с двойственностью в задачах Канторовича барицентрического типа. Основное внимание уделено задаче с фиксированным барицентром. Для нее доказана общая теорема двойственности, обобщающая результаты [18], [20], [26], [46] на случай вполне регулярных пространств.

Кроме того, рассмотрены две новые постановки задач: задача с фиксированными барицентрами проекций и задача с фиксированными проекциями ба-

рицентра. Для них также доказаны теоремы двойственности. Показано, что все эти барицентрические задачи тесно связаны между собой и с классической задачей Канторовича. Для специальных функций стоимости их значения совпадают. При доказательстве активно использовался аппарат барицентров функционалов, развитый во второй главе.

Большой интерес представляет построение выпуклых оболочек для функций стоимости. Показано, что значение задачи Канторовича не меняется при замене функции стоимости на ее выпуклую оболочку по аргументу-мере. Эти конструкции также тесно связаны с теорией барицентров из главы 2 и играют ключевую роль при исследовании задач с условными мерами.

В следующем разделе рассматривается нелинейная задача Канторовича с условными мерами, где функция стоимости зависит от условных мер транспортного плана. Данная проблематика активно развивается в последние годы [46], [20], [26], [18], [27], [28]. Основной результат — равенство значений исходной задачи и задачи с выпуклой оболочкой функции стоимости. Доказательство опирается на вариант неравенства Йенсена для мер на пространствах мер, тонкие свойства условных мер и теоремы об измеримом выборе в суслинских пространствах. Полученные результаты обобщают утверждения, известные ранее для полных сепарабельных метрических пространств (см. [18]), и вносят вклад в развитие нелинейных транспортных задач.

Четвертая глава посвящена гауссовским операторам перехода. Речь идет о линейных операторах на пространствах мер, которые сохраняют класс гауссовских мер. Источником проблематики послужили работы [39] и [17], в которых установлен общий результат о структуре таких операторов в конечномерном случае.

В разделе 4.1 рассматривается одномерный случай. На основе упрощенной версии метода Холево установлено, что всякий линейный непрерывный оператор на пространстве борелевских мер, отображающий гауссовские меры в гауссовские, представим в виде свертки с фиксированной гауссовской мерой и образа меры относительно линейного оператора. Ключевой момент доказательства — сведение задачи к уравнению теплопроводности и анализ дифференциальных уравнений для параметров гауссовских мер.

Основным результатом главы является теорема об общей структуре гауссовских операторов перехода в произвольных локально выпуклых пространствах.

Доказано, что при условии слабой непрерывности всякий такой оператор представим в виде композиции линейного преобразования и свертки с фиксированной гауссовской мерой. Указанный результат существенно обобщает теорему Холево на бесконечномерный случай.

Особое внимание уделено вопросу о непрерывности возникающих линейных операторов. Показано, что слабая непрерывность исходного оператора влечет непрерывность соответствующего линейного отображения. При доказательстве использованы результаты о сходимости барицентров мер из второй главы, что устанавливает связь с предыдущими разделами диссертации.

Полученные результаты могут найти применение в теории случайных процессов, квантовой теории информации и бесконечномерном анализе. Они также показывают эффективность развитой в первой главе теории топологий на пространствах мер для изучения структурных свойств линейных операторов.

Цель работы. Цель диссертации — систематическое исследование топологий типа Канторовича на пространствах мер и их приложений к задачам оптимальной транспортировки, теории барицентров и структуре линейных операторов. Для этого решаются следующие задачи.

● Исследовать топологии типа Канторовича на пространствах мер, определить условия их совпадения со слабой топологией на естественных подклассах мер.

● Изучить условия сходимости в топологии Канторовича, сочетающие слабую сходимость и равномерную интегрируемость псевдометрик. Применить результаты к вопросам сходимости выпуклых и устойчивых мер.

● Развить теорию барицентров мер и функционалов, установить связь между слабой сходимостью мер и сходимостью их барицентров.

● Исследовать задачи Канторовича оптимальной транспортировки мер и их модификации (включая барицентрические формулировки и постановки с условными мерами), исследовать вопросы двойственности, условия совпадения значений задач и структуру оптимальных планов.

● Изучить структуру гауссовских операторов перехода на локально выпуклых пространствах и обобщить теорему Холево на более широкие классы операторов.

Решение этих задач направлено на углубление теоретического аппарата

для анализа пространств мер и их приложений в бесконечномерном анализе, теории оптимального транспорта и смежных областях математики.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Топологии Канторовича. Развита теория топологий типа Канторовича на пространствах мер. Для общих вполне регулярных пространств установлены условия совпадения топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер. Введены и изучены полунормы Канторовича порядка $q \geqslant 1$, получены необходимые и достаточные условия сходимости в соответствующих топологиях $\tau_{K,q}$, сочетающие слабую сходимость и равномерную интегрируемость степеней псевдометрик, порождающих топологию. Эти критерии применены к исследованию сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Носители мер. Для равномерно плотного семейства радоновских мер на пространстве Фреше с равномерно интегрируемыми полунормами доказано существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя, в котором семейство сохраняет свойства равномерной плотности и равномерной интегрируемости.

3. Барицентры мер и функционалов. Разработана теория барицентров, включающая векторную версию неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств и ее вариант для мер на пространствах вероятностных мер. Введено понятие барицентра функционала и установлена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра.

4. Задачи Канторовича. Доказаны теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича, включая новые постановки — задачи с фиксированными барицентрами проекций и задачи с фиксированными проекциями барицентра. Установлена связь между этими задачами и классической задачей Канторовича. Для задачи Канторовича с условными мерами доказано, что ее значение не изменяется при замене функции стоимости на ее выпуклую по аргументу-мере оболочку, что обобщает известные результаты для полных сепарабельных метрических пространств на случай вполне регулярных суслинских пространств и позволяет сводить нелинейные задачи к выпуклым.

5. Установлена общая структура гауссовских операторов перехода в бесконеч-

номерных пространствах, обобщающая теорему Холево на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Положения, выносимые на защиту.

1. Топологии на пространствах мер. Теоремы о совпадении топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер для общих вполне регулярных пространств. Условия сходимости в топологиях Канторовича порядка $q \geqslant 1$, связывающие сходимость в $\tau_{K,q}$ со слабой сходимостью и равномерной интегрируемостью соответствующих моментов. Применение к анализу сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Носители мер в пространствах Фреше. Теорема о существовании сепарабельного рефлексивного банахова пространства-носителя для равномерно плотных семейств мер на пространствах Фреше, сохраняющего свойства равномерной плотности и интегрируемости.

3. Барицентры. Теория барицентров функционалов, включающая векторные версии неравенства Йенсена, условия сходимости барицентров при слабой сходимости мер и теорему о связи плотности барицентра функционала с плотностью самого функционала.

4. Задачи оптимального транспорта. Теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича. Принцип инвариантности значения Канторовича с условными мерами относительно замены функции стоимости на ее выпуклую оболочку по аргументу-мере.

5. Теорема о структуре гауссовских операторов перехода в бесконечномерных пространствах, обобщающая теорему Холево.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, теории меры и общей топологии. Применяются техники бесконечномерного и выпуклого анализа, включая теорию локально выпуклых пространств и теорию двойственности. Разработана оригинальная конструкция барицентров функционалов.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации носят теоретический характер и вносят вклад в развитие функционального анализа, теории меры и теории экстремальных задач. Они могут быть использованы

в дальнейших исследованиях по оптимальному транспорту, бесконечномерному анализу и теории вероятностей.

Разработанный аппарат топологий Канторовича и теории барицентров функционалов открывает новые возможности для изучения пространств мер и операторов на них. Результаты по задачам Канторовича представляют интерес для математической экономики и теории игр. Теорема о структуре гауссовских операторов перехода может найти применение в теории случайных процессов и квантовой теории информации.

Разработанные методы и полученные результаты представляют научную ценность для исследований, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» и Национальном исследовательском университете «Московский физико-технический университет».

Соответствие паспорту научной специальности. Тематика диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ». В работе изучаются топологии на бесконечномерных пространствах мер, линейные операторы и функционалы на них, а также задачи оптимального транспорта. Это полностью соответствует предметной области функционального анализа. Работа включает теоретические исследования в области функционального анализа, общей топологии и теории меры, что подтверждает соответствие паспорту научной специальности.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, С. В. Шапошникова и Н. А. Толмачева (МГУ, многократно, 2021-2025 г.). Результаты работы были также представлены на следующих научных конференциях.

1. Шестая Санкт-Петербургская молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, 2022).

2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых

ученых «Ломоносов-2025» (Москва, МГУ, 2025).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора (см. [57], [58], [59] и [60], первые две из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах двух научных конференций (см. [61] и [62]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 62 наименований. Общий объем диссертации составляет 90 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектами РНФ 22-11-00015 и 22-8-10-2-1 фонда «Базис».

Краткое содержание диссертации. Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Первая глава диссертации состоит из шести параграфов и посвящена топологиям типа Канторовича.

Параграф 1.1 носит вводный характер. В нем напоминаются основные понятия теории меры на топологических пространствах и приводятся необходимые предварительные сведения.

Параграф 1.2 посвящен топологиям Канторовича τ_K и Канторовича – Рубинштейна τ_{KR} на пространствах мер. Центральным результатом является теорема о совпадении топологии τ_{KR} со слабой топологии на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах.

Теорема 1.2.1. *Пусть топология тихоновского пространства X порождена направленным по включению топологий семейством псевдометрик $\mathcal{D}$. Тогда семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{KR,d}\}_{d\in\mathcal{D}}$ порождает слабую топологию на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$.*

Кроме того, слабая топология порождается этим семейством полунорм на компактах в слабой топологии и на ограниченных по вариации равномерно плотных множествах в $\mathcal{M}_\tau(X)$.

Доказательство теоремы основано на методе факторизации и использует свойства слабой сходимости мер.

Важной частью исследования являются условия сходимости в топологии τ_K. В этом направлении получено следующее утверждение.

Предложение 1.2.3. *Пусть направленность мер $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ сходится в топологии τ_{KR} к мере $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$. Если для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{\{d\geqslant R\}} d(x, x_0)\, |\mu_\alpha|(dx) = 0,$$

то $\{\mu_\alpha\}$ сходится в топологии τ_K. Для вероятностных мер данное условие также необходимо.

Из этих результатов получены достаточные условия компактности в топологиях τ_{KR} и τ_K.

Предложение 1.2.5. *Пусть множество $S \subset \mathcal{M}_\tau(X)$ слабо компактно. Тогда S компактно в топологии τ_{KR}.*

Если $S \subset \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ и для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in S} \int_{\{d\geqslant R\}} d(x, x_0)\, |\mu|(dx) = 0$$

для некоторой точки $x_0 \in X$, то S компактно в топологии τ_K.

В параграфе 1.3 изучаются носители мер в пространствах Фреше. Основной результат параграфа гарантирует существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя для равномерно плотных семейств мер с равномерно интегрируемыми полунормами, сохраняющего свойства равномерной плотности и интегрируемости. Для построения такого пространства используется конструкция Гротендика.

Теорема 1.3.1. *Пусть X — пространство Фреше, $\{p_n\}$ — система полунорм, задающая его топологию, и $\mathcal{M}$ — равномерно плотное семейство радоновских мер на X. Предположим, все p_n равномерно интегрируемы относительно $\mathcal{M}$, т. е.*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x:\, p_n(x)>m\}} p_n(x)\, |\mu|(dx) = 0.$$

Тогда существует сепарабельное рефлексивное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ со следующими свойствами:

(i) *E линейно и непрерывно вложено в X, причем замкнутый единичный шар компактен в X*;

(ii) *$\mathcal{M}$ сосредоточено на E и равномерно плотно в $(E, \|\cdot\|_E)$*;

(iii) *Норма $\|\cdot\|_E$ равномерно интегрируема относительно $\mathcal{M}$.*

Чтобы учесть ситуации, когда меры имеют конечные моменты порядка $q > 1$ в параграфе 1.4 вводятся полунормы Канторовича порядка q и соответствующая локально выпуклая топология $\tau_{K,q}$ на пространстве радоновских мер с конечным моментом порядка q. Следующее предложение устанавливает условия сходимости в этих топологиях.

Предложение 1.4.1. *Пусть направленность мер $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_r^q(X)$ сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}_r^q(X)$ в топологии τ_{KR}. Если каждая псевдометрика $d \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условию равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_\alpha \int_{\{d\geqslant R\}} d(x, x_0)^q \, |\mu_\alpha|(dx) = 0,$$

то $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,q}$.

Данный результат применяется для анализа сходимости специальных классов мер, рассматриваемых в следующих двух параграфах.

Завершают главу исследования выпуклых и устойчивых мер в параграфах 1.5 и 1.6. Следующие результаты связывают слабую сходимость со сходимостью моментов и сходимостью в топологиях Канторовича для s-выпуклых мер.

Теорема 1.5.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Тогда для каждой непрерывной полунормы q верны следующие утверждения*:

(i) *Если $s = 0$, то существует такое $\kappa > 0$, что*

$$\lim_\alpha \int_X \exp(\kappa q)\, d\mu_\alpha = \int_X \exp(\kappa q)\, d\mu.$$

Кроме того, для каждого $r > 0$ справедливо равенство

$$\lim_\alpha \int_X q^r \, d\mu_\alpha = \int_X q^r \, d\mu.$$

(ii) *Если $s < 0$, то при $0 < r < -1/s$*

$$\lim_\alpha \int_X q^r \, d\mu_\alpha = \int_X q^r \, d\mu.$$

Следствие 1.5.2. *При условиях теоремы* 1.5.1 *направленность мер μ_α схо-*

дится к μ в топологии $\tau_{K,q}$ при следующих значениях q:

(i) *если $s = 0$, то для всех $q \geqslant 1$*; (ii) *если $s < 0$, то для всех $q < -1/s$.*

Наконец, утверждения ниже раскрывают некоторые свойства устойчивых радоновских мер и их сходимости в топологиях Канторовича.

Лемма 1.6.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство и μ — радоновская вероятностная мера на X. Если μ_f устойчивы порядка $p > 1$ для всех $f \in X^*$, то μ устойчива порядка p.*

Предложение 1.6.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских вероятностных мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то μ устойчива порядка $p \geqslant p_1$.*

Теорема 1.6.3. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,s}$ с любым $s \in [1, p_1)$.*

Вторая глава развивает теории барицентров и ее приложения.

В параграфе 2.1 установлены векторные версии неравенства Йенсена для бесконечномерных пространств.

Лемма 2.1.1. *Пусть борелевская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X сосредоточена на борелевском выпуклом множестве V, а μ-интегрируемая функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ выпукла на V и полунепрерывна снизу на $\overline{V}$. Если μ имеет барицентр m_μ, то*

$$F(m_\mu) \leqslant \int_X F(x)\,\mu(dx).$$

Следствие 2.1.2. *Пусть радоновская вероятностная мера μ с сильным первым моментом сосредоточена на возрастающей последовательности выпуклых компактов K_n, а функция $F \in L^1(\mu)$ выпукла на каждом K_n и полунепрерывна снизу на всех компактах в X. Если μ имеет барицентр m_μ, то верно неравенство выше.*

Эти версии применяются к последующим задачам двойственности и нелинейным постановкам.

В параграфе 2.2 изучаются условия сходимости барицентров при слабой

сходимости мер.

Следствие 2.2.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, заданной системой полунорм $\mathcal{Q}$, и направленность $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$ сходится слабо к $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$. Если каждая полунорма $q \in \mathcal{Q}$ равномерно интегрируема относительно $\{\mu_\alpha\}$, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$ при выполнении любого из условий*:

(i) *все меры μ_α неотрицательны*;

(ii) $\{\mu_\alpha\}$ *имеет слабо компактное замыкание в $\mathcal{M}_\tau(X)$* (*в частности, это условие автоматически выполнено для последовательностей мер*).

Параграф 2.3 содержит результаты о сходимости барицентров выпуклых и устойчивых мер.

Теорема 2.3.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Если меры μ_α и μ имеют барицентры, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

Теорема 2.3.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

В параграфе 2.4 вводится новое понятие барицентра линейного непрерывного функционала на пространстве равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathcal{P}_r(X)$. Основной результат связывает плотность функционала и плотность его барицентра.

Теорема 2.4.5. *Если вероятностный функционал $L \in U_b^*\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$ имеет плотный барицентр, то $L \in U_b^*\big(\mathcal{P}_r(X)\big)_t$.*

Доказательство основано на применении компактификации Самюэля и использовании критерия представимости функционала радоновской мерой, что демонстрирует единство топологических и функциональных методов в теории меры.

В **третьей главе** рассматриваются различные постановки задачи Канторовича оптимальной транспортировки мер, включая задачу с фиксированным барицентром и задачу с условными мерами.

Основным результатом параграфа 3.1 является теорема двойственности для задачи Канторовича с фиксированным барицентром.

Теорема 3.1.10. *Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, а функция*

стоимости h полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда имеет место равенство

$$\inf_{P\in\Pi^\beta(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp) = \sup\Bigg\{\int_X f\,d\mu + \int_Y g\,d\beta : \\ f\in C_b(X),\ g\in C_b(Y),\ f(x)+\int_Y g\,dp \leqslant h(x,p)\Bigg\}.$$

Для доказательства используются свойства отображения барицентра, полученные во второй главе, и техники выпуклого анализа.

В этом же разделе вводятся и изучаются новые барицентрические постановки задачи Канторовича: с фиксированными барицентрами проекций и с фиксированными проекциями барицентра. Для них также доказаны теоремы двойственности и выявлены связи между различными формулировками.

В параграфе 3.2 исследуются задача Канторовича с условными мерами. Центральный результат — инвариантность значения задачи относительно замены функции стоимости на ее выпуклую по аргументу-мере оболочку.

Теорема 3.2.7. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, мера μ сепарабельна и не имеет атомов, а функция h непрерывна на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда*

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

Доказательство использует связь между нелинейной задачей с условными мерами и линейной задачей с фиксированным барицентром, теорему об измеримом выборе и свойства суслинских пространств.

Четвертая глава посвящена структурной теории гауссовских операторов перехода. Исследуются операторы T на пространствах мер, отображающие гауссовские меры в гауссовские, и устанавливаются их представления в виде

$$T\mu = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}), \tag{1}$$

где γ_0 — фиксированная гауссовская мера и S — линейный оператор.

В параграфе 4.1 изучается одномерный случай. Доказательство центральной теоремы основано на упрощенном методе Холево с использованием уравнения теплопроводности.

Теорема 4.1.1. *Пусть отображение* $T\colon \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ *переводит гауссовские меры в гауссовские, причем для каждого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *есть такая функция* $g_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$, *что*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda x)\, T\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, \mu(dx) \qquad \forall \mu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}).$$

Тогда T *линейно и существуют такие гауссовская мера* γ_0 *и линейная функция* $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что* (1) *верно для всех* $\mu \in \mathcal{G}(X)$.

В параграфе 4.2 теорема обобщена на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Теорема 4.2.2. *Пусть* X *— локально выпуклое пространство и линейный оператор* $T\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{M}_r(X)$ *отображает все одномерные гауссовские меры в гауссовские. Предположим, что для каждого* $f \in X^*$ *существует такая ограниченная и непрерывная на аффинных прямых функция* $g_f\colon X \to \mathbb{C}$, *что*

$$\int_X \exp(if)\, d(T\nu) = \int_X g_f\, d\nu \qquad \forall \nu \in \mathcal{G}_1(X),$$

где $\mathcal{G}_1(X)$ *— множество одномерных гауссовских мер на* X. *Тогда существуют такие гауссовская мера* γ_0 *и линейный оператор* $S\colon X \to X$, *что* (1) *верно для всех дираковских мер.*

Если T *продолжен до слабо непрерывного линейного оператора на* $\mathcal{M}_r(X)$, *то оператор* S *непрерывен и* T *имеет вид* (1) *для всех мер из* $\mathcal{M}_r(X)$.

В завершение главы приведен пример, показывающий существенность условия непрерывности оператора в слабой топологии.

Глава 1
Топологии типа Канторовича

1.1 Определения, обозначения и предварительные сведения

Множество A в топологическом пространстве X называется суслинским, если оно является образом полного сепарабельного метрического пространства при непрерывном отображении. Класс всех суслинских множеств обозначим через $\mathcal{S}_X$. Пространство X называется суслинским, если $X \in \mathcal{S}_X$.

Для заданного класса $\mathcal{E}$ подмножеств пространства X, содержащего $\varnothing$, обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ класс множеств, полученных с помощью операции Суслина (A-операции; подробное изложение см. в [31, гл. 1] или [44, гл. 42]), а через $\sigma\big(\mathcal{S}(\mathcal{E})\big)$ порожденную этим классом σ-алгебру. Как известно (см. [31, теорема 1.10.5] или [44, §431A]), если $\mathcal{E}$ — σ-алгебра и μ — конечная неотрицательная мера на $\mathcal{E}$, то класс $\mathcal{E}_\mu$ всех μ-измеримых множеств замкнут относительно операции Суслина. В частности, получаем включение $\sigma\big(\mathcal{S}(\mathcal{E})\big) \subset \mathcal{E}_\mu$.

Согласно [44, §421J], если X — топологическое пространство и $\mathcal{E}$ — класс всех замкнутых подмножеств X, то множества из $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ характеризуются как проекции замкнутых подмножеств в $\mathbb{N}^\infty \times X$. Отсюда вытекает, что каждое суслинское множество в X принадлежит классу $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ (см. также [31, теорема 6.6.8]). Для суслинского пространства X верно обратное включение ([31, теорема 6.7.2], [44, §423E]): $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}_X$. Таким образом, в суслинском пространстве классы $\mathcal{S}_X$ и $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ совпадают.

Если $(X, \mathcal{E})$ — измеримое пространство и Y — суслинское пространство, то для всякого множества $M \in \mathcal{S}\big(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(Y)\big)$ его проекция $\pi_X(M)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ (см. [31, следствие 6.10.10]). В случае топологического пространства X с $\mathcal{E} = \mathcal{B}(X)$ выполняется равенство

$$\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y).$$

Более того, это равенство остается верным для всякого топологического пространства Y со счетной базой, состоящей из борелевских множеств. Этот факт установлен в [45] (см. также [31, лемма 6.4.2], [44, §4A3G] для Y со счетной базой

открытых множеств или [44, п. 4A3X] для вполне регулярного Y со счетной базой). Если Y является суслинским пространством, то оно обладает счетной борелевской базой, что следует из его борелевской изоморфности некоторому суслинскому подмножеству $S \subset [0,1]$ (см. [31, теорема 6.7.4]).

Топологическое пространство X называется вполне регулярным (или тихоновским), если оно хаусдорфово и для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и всякой точки $x \in X \setminus F$ существует такая непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, что $f(x) = 1$ и $f = 0$ на F. Вполне регулярное суслинское пространство совершенно нормально [31, теорема 6.7.7]: всякое его замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

Как известно (см. [42], [47], [50], [51]), топология вполне регулярного пространства X порождается некоторой равномерностью $\mathcal{U}$, что эквивалентно заданию семейства псевдометрик $\mathcal{D}$ (псевдометрика d удовлетворяет всем аксиомам метрики, кроме условия $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$). Будем предполагать, что $\mathcal{D}$ направлено относительно включения топологий (этого всегда можно добиться, пополнив $\mathcal{D}$ максимумами конечных подсемейств). Пару $(X, \mathcal{D})$ будем называть равномерным пространством.

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ на равномерном пространстве $(X, \mathcal{D})$ называется равномерно непрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такое $\delta > 0$ и такие $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D}$, что для всех $x, y \in X$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i(x,y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $C_b(X)$ и $U_b(X)$ множества всех ограниченных непрерывных и ограниченных равномерно непрерывных функций на X соответственно.

Наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые множества топологического пространства X, будем называть борелевской и обозначать через $\mathcal{B}(X)$. Ограниченная счетно-аддитивная мера $\mu \geqslant 0$ на $\mathcal{B}(X)$ называется:

(i) τ-аддитивной, если $\mu\bigl(\bigcup_\alpha U_\alpha\bigr) = \lim_\alpha \mu(U_\alpha)$ для всякой возрастающей направленности $\{U_\alpha\}$ открытых множеств;

(ii) регулярной, если для всякого $B \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F)\colon F \text{ — замкнутое множество, } F \subset B\};$$

(iii) плотной, если $\mu(X) = \sup\{\mu(K)\colon K \text{ — компакт},\ K \subset X\}$;

(iv) радоновской, если для всех $B \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K)\colon K \text{ — компакт},\ K \subset B\}.$$

Для знакопеременной меры μ эти свойства определяются через ее полную вариацию $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, где μ^+ и μ^- — положительная и отрицательная компоненты из разложения Жордана – Хана. Норма полной вариации задается формулой $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Ясно, что регулярная и плотная мера является радоновской. Кроме того, всякая радоновская мера τ-аддитивна [31, предложение 7.2.2]. Для суслинских пространств все борелевские меры радоновы (см. [31, теорема 7.4.3]), причем супремум в определении радоновости (свойство (iv)) можно брать по метризуемым компактам.

Символами $\mathcal{M}_\tau(X)$ и $\mathcal{M}_r(X)$ будем обозначать пространства всех τ-аддитивных и радоновских мер соответственно. Итак, $\mathcal{M}_r(X) \subset \mathcal{M}_\tau(X)$. Если X — полное метрическое пространство, то $\mathcal{M}_r(X) = \mathcal{M}_\tau(X)$.

Множество $M \subset \mathcal{M}_r(X)$ называется равномерно плотным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset X$, что

$$|\mu|(X \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \forall \mu \in M.$$

Согласно теореме Прохорова [33, теорема 4.5.3] ограниченность по вариации и равномерная плотность семейства радоновских мер влекут предкомпактность в слабой топологии. Для полного метрического пространства X верно и обратное (см. [33, теорема 3.1.9]): слабо компактное семейство радоновских мер автоматически равномерно плотно. Однако для суслинских пространств слабо компактные множества могут не быть равномерно плотными (см. пример Прайса для множества рациональных чисел в [33, теорема 4.8.6]).

Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Образом борелевской меры μ на X при $\big(\mathcal{B}(X), \mathcal{A}\big)$-измеримом отображении $T\colon X \to \Omega$ называется мера $\mu \circ T^{-1}$ на $(\Omega, \mathcal{A})$, задаваемая равенством

$$\mu \circ T^{-1}(A) := \mu\big(T^{-1}(A)\big), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Например, образ τ-аддитивной (радоновской) меры при непрерывном отображении является τ-аддитивной (радоновской).

Пусть $(X, \mathcal{D})$ — равномерное пространство. Через $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ обозначим подмножество $\mathcal{M}_\tau(X)$, состоящее из мер μ, для которых функции

$$x \mapsto d(x, x_0), \qquad d \in \mathcal{D}$$

интегрируемы относительно μ при некотором $x_0 \in X$. Отметим, что этот класс зависит от выбора $\mathcal{D}$. Например, для $X = (0, 1)$ с евклидовой метрикой d_0 и $\mathcal{D} = \{d_0\}$ все меры входят в $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$. Если же взять в качестве $\mathcal{D}$ все непрерывные метрики на X, то $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ будет строго меньше. Для локально выпуклого пространства X с топологией, заданной семейством полунорм $\{p_\alpha\}$, полагаем $\mathcal{D} = \{d_\alpha\}$, где $d_\alpha(x, y) := p_\alpha(x - y)$. В этом случае $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ обозначаем через $\mathcal{M}_\tau^1(X)$ и говорим о мерах с конечным первым моментом.

Пространство $\mathcal{M}_\tau(X)$ наделяется $U_b(X)$-слабой топологией — топологией двойственности $\sigma\big(\mathcal{M}_\tau(X), U_b(X)\big)$, задаваемой полунормами

$$\mu \mapsto \left| \int_X f \, d\mu \right|, \qquad f \in U_b(X).$$

Эту топологию можно рассматривать как *-слабую топологию на $U_b^*(X)$, суженную на подпространство $\mathcal{M}_\tau(X)$, где каждая мера $\mu \in \mathcal{M}_\tau(X)$ отождествляется с функционалом

$$f \mapsto \int_X f \, d\mu, \qquad f \in U_b(X).$$

В частности, если на X взять равномерность $\mathcal{U}(C_b)$, порожденную псевдометриками вида $|f(x) - f(y)|$, $f \in C_b(X)$, то получим слабую топологию (см. [31], [33]), так как все функции $f \in C_b(X)$ равномерно непрерывны относительно $\mathcal{U}(C_b)$. При этом, если X — суслинское пространство, то $\mathcal{M}_\tau(X)$ также суслинское (см. [33, теорема 5.1.8]).

На конусе $\mathcal{M}_\tau^+(X)$ неотрицательных τ-аддитивных мер $U_b(X)$-слабая топология совпадает со слабой (см. [53, теорема 8.1] для общего случая или [50, следствие 5.17] для радоновских мер).

На подмножестве $\mathcal{P}_\tau(X) \subset \mathcal{M}_\tau(X)$ вероятностных τ-аддитивных мер топо-

логия $\sigma\big(\mathcal{M}_\tau(X), U_b(X)\big)$ индуцирует равномерность, заданную псевдометриками

$$(\mu,\nu)\mapsto\left|\int_X f\,d\mu-\int_X f\,d\nu\right|,\qquad f\in U_b(X).$$

Такую равномерность будем называть $U_b(X)$-равномерностью, а соответствующую пару обозначать через $\big(\mathcal{P}_\tau(X), U_b(X)\big)$.

1.2 Топологии τ_K и τ_{KR}

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Тогда на пространстве $\mathcal{M}(X)$ всех борелевских мер определена норма Канторовича – Рубинштейна

$$\|\mu\|_{KR,d}=\sup\left\{\int_X f\,d\mu\colon\ f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ |f|\leqslant 1\right\},$$

где $\mathrm{Lip}_1(d)$ — множество 1-липшцевых функций. Также на $\mathcal{M}(X)$ есть эквивалентная норма Форте – Мурье

$$\|\mu\|_{FM,d}=\sup\left\{\int_X f\,d\mu\colon\ f\in \mathrm{BL_d(X)},\ \|f\|_{\mathrm{BL_d}}\leqslant 1\right\},$$

где $\mathrm{BL}_d(X)$ — класс ограниченных липшицевых функций на X с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{BL_d}}:=\sup_{x\in X}|f(x)|+\mathrm{Lip}_d(f),\quad \mathrm{Lip}_d(f)=\sup_{d(x,y)>0}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}.$$

На подпространстве $\mathcal{M}^1(X)$ тех мер, для которых при некотором $x_0\in X$ (тогда и при всех x_0) интегрируема функция $x\mapsto d(x,x_0)$ задана норма Канторовича

$$\|\mu\|_{K,d}=\sup\left\{\int_X f\,d\mu\colon\ f\in \mathrm{Lip}_1(d),\ f(x_0)=0\right\}+|\mu(X)|.$$

Норма $\|\cdot\|_{KR,d}$ порождает слабую топологию на $\mathcal{M}^+_\tau(X)$ ([31, теорема 8.3.2]). Также известно (см. [31, замечание 8.3.1]), что слабая топология на $\mathcal{M}^+_\tau(X)$ порождается системой полунорм

$$\mu\mapsto\left|\int_X f\,d\mu\right|,\qquad f\in \mathrm{BL}_d(X).$$

Для равномерного пространства $(X,\mathcal{D})$ каждая $d\in\mathcal{D}$ определяет полунор-

мы $\|\cdot\|_{KR,d}$ на $\mathcal{M}_\tau(X)$ и $\|\cdot\|_{K,d}$ на $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$. Локально выпуклые топологии, порожденные этими системами полунорм, обозначаем через τ_{KR} и τ_K.

Как установлено в работе [58] (см. также [50, следствие 6.13]), если семейство $\mathcal{D}$ замкнуто относительно взятия максимумов конечных подсемейств, то система полунорм $\{\|\cdot\|_{KR,d}\}_{d\in\mathcal{D}}$ порождают слабую топологию на подмножестве $\mathcal{M}_r^+(X)$ неотрицательных мер в $\mathcal{M}_r(X)$. Используя лемму 1.3.3 из [38], обобщим этот результат на направленные семейства псевдометрик и на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть топология тихоновского пространства X порождена направленным по включению топологий семейством псевдометрик $\mathcal{D}$. Тогда семейство полунорм $\{\|\cdot\|_{KR,d}\}_{d\in\mathcal{D}}$ порождает слабую топологию на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$.*

Кроме того, слабая топология порождается этим семейством полунорм на компактах в слабой топологии и на ограниченных по вариации равномерно плотных множествах в $\mathcal{M}_\tau(X)$.

Доказательство. Для доказательства применим метод факторизации. Рассмотрим для каждой псевдометрики $d\in\mathcal{D}$ фактор-пространство X/d с метрикой

$$\widehat{d}([x]_d,[y]_d)=d(x,y),\quad [x]_d=\{y\in X\colon d(x,y)=0\}.$$

Естественная проекция $\pi_d\colon x\mapsto[x]_d$ непрерывна. В доказательстве теоремы 2.2 из [58] установлено равенство

$$\|\mu\circ\pi_d^{-1}\|_{KR,\widehat{d}}=\|\mu\|_{KR,d},\qquad \mu\in\mathcal{M}_r(X). \tag{1.2.1}$$

Это же соотношение справедливо для всякой борелевской меры μ. Действительно, для каждой функции $g\in\operatorname{Lip}_1(\widehat{d})$ на X/d композиция $g\circ\pi_d\in\operatorname{Lip}_1(d)$, откуда $\|\mu\circ\pi_d^{-1}\|_{KR,\widehat{d}}\leqslant\|\mu\|_{KR,d}$. Обратно, если $f\in\operatorname{Lip}_1(d)$, то функция $\widehat{f}([x]):=f(x)$ корректно определена на X/d, причем $\widehat{f}\in\operatorname{Lip}_1(\widehat{d})$ и

$$\int_X f\,d\mu=\int_{X/d}\widehat{f}\,d(\mu\circ\pi_d^{-1}), \tag{1.2.2}$$

что доказывает (1.2.1).

Так как слабая топология на $\mathcal{M}_\tau^+(X/d)$ порождается нормой $\|\cdot\|_{KR,\widehat{d}}$, из равенства (1.2.1) следует, что слабая сходимость образов при π_d равносильна сходимости по $\|\cdot\|_{KR,d}$. С другой стороны, согласно [38, лемма 1.3.3] слабая топология

на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$ порождена отображениями

$$\Pi_d\colon \mu \mapsto \mu \circ \pi_d^{-1}, \qquad \mathcal{M}_\tau^+(X) \to \mathcal{M}_\tau^+(X/d), \qquad d \in \mathcal{D}$$

в том смысле, что слабая сходимость эквивалента сходимости действий при этих операторах.

Докажем второе утверждение. Пусть S — компакт в слабой топологии на $\mathcal{M}_\tau(X)$. Для совпадения топологий на S достаточно показать, что τ_{KR} не сильнее слабой. Рассмотрим направленность $\{\mu_\alpha\} \subset S$, сходящуюся слабо к мере $\mu \in S$. Зафиксируем псевдометрику $d \in \mathcal{D}$ и покажем сходимость $\|\mu_\alpha - \mu\|_{KR,d} \to 0$.

Пусть $(Z_d, d^\bullet)$ — пополнение пространства $(X/d, \widehat{d})$, а $I_d\colon X/d \to Z_d$ — каноническое изометрическое вложение. Определим $\varphi_d := I_d \circ \pi_d$. Образ множества S при отображении $\Phi_d\colon \mu \mapsto \mu \circ \varphi_d^{-1}$ является слабо компактным подмножеством в $\mathcal{M}_r(Z_d)$. В силу [33, замечание 3.2.5] слабая топология на $\Phi_d(S)$ порождается нормой $\|\cdot\|_{KR,d^\bullet}$, поэтому

$$\|\mu_\alpha \circ \varphi_d^{-1} - \mu \circ \varphi_d^{-1}\|_{KR,d^\bullet} \to 0.$$

Остается заметить, что для всякой меры $\nu \in \mathcal{M}_\tau(X)$ выполняется равенство

$$\|\nu \circ \varphi_d^{-1}\|_{KR,d^\bullet} = \|\nu\|_{KR,d}.$$

Таким образом, $\|\mu_\alpha - \mu\|_{KR,d} \to 0$.

Пусть теперь множество $S \subset \mathcal{M}_\tau(X)$ ограничено по вариации и равномерно плотно. Заметим, что можно считать S слабо замкнутым (и, следовательно, слабо компактным по теореме Прохорова), поскольку его слабое замыкание $\overline{S}$ сохраняет равномерную плотность и ограниченность по вариации. Действительно, для $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset X$, что $|\mu|(X \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ для всех $\mu \in S$. Рассмотрим множество

$$Z = \{\mu \in \mathcal{M}_\tau(X)\colon |\mu|(X \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} \cap \{\mu \in \mathcal{M}_\tau(X)\colon \|\mu\| \leqslant 1\}.$$

Тогда $S \subset Z$. Кроме того, Z слабо замкнуто в силу полунепрерывности снизу функции $\mu \mapsto |\mu|(U)$ для открытых множеств U ([33, предложение 5.8.6]). Следовательно, $\overline{S} \subset Z$.

Таким образом, предполагаем, что S слабо компактно в $\mathcal{M}_\tau(X)$. По доказанному топология τ_{KR} совпадает со слабой на S. $\square$

Замечание 1.2.2. Отметим, что в доказательстве леммы 1.3.3 из [38] по сути установлено, что слабая топология на $\mathcal{M}_\tau^+(X)$ порождается полунормами

$$\mu \mapsto \left| \int_X f \, d\mu \right|, \qquad f \in \mathrm{BL}(X), \tag{1.2.3}$$

где $\mathrm{BL}(X) := \bigcup_{d\in\mathcal{D}} \mathrm{BL}_d(X)$. Данный факт также следует из соотношения (1.2.2) между липшицевыми функциями на X и X/d и эквивалентности слабой сходимости мер из $\mathcal{M}_\tau^+(X/d)$ сходимости интегралов от всех ограниченных $\widehat{d}$-липшицевых функций.

Приведем достаточное условие сходимости в топологии τ_K.

Предложение 1.2.3. *Пусть направленность мер $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$ сходится в топологии τ_{KR} к мере $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$. Если для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_\alpha \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu_\alpha|(dx) = 0,$$

то $\{\mu_\alpha\}$ сходится в топологии τ_K. Для вероятностных мер данное условие также необходимо.

Доказательство. Пусть $d \in \mathcal{D}$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $R > 1$ так, чтобы

$$\int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu_\alpha|(dx) + \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu|(dx) < \varepsilon \qquad \forall\alpha.$$

Выберем такой индекс α_0, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$

$$\|\mu_\alpha - \mu\|_{KR,d} < \varepsilon R^{-1}, \quad |\mu(X) - \mu_\alpha(X)| < \varepsilon.$$

Пусть $f \in \mathrm{Lip}_1(d)$ и $f(x_0) = 0$. Положим $f_R = \max(-R, \min(f, R))$. Тогда $f_R = f$ на $\{d < R\}$, $f_R \in \mathrm{Lip}_1(d)$ и $|f_R| \leqslant R$. Кроме того, для функции f_R справедливы оценки

$$\left| \int_X f_R \, d(\mu_\alpha - \mu) \right| \leqslant R\|\mu_\alpha - \mu\|_{KR,d},$$

$$\left| \int_{\{d\geqslant R\}} f_R \, d(\mu_\alpha - \mu) \right| \leqslant \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu_\alpha|(dx) + \int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu|(dx).$$

Тогда при $\alpha \geqslant \alpha_0$ получаем

$$\left|\int_X f\,d(\mu_\alpha-\mu)\right| = \left|\int_{\{d<R\}} f_R\,d(\mu_\alpha-\mu)+\int_{\{d\geqslant R\}} f\,d(\mu_\alpha-\mu)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_X f_R\,d(\mu_\alpha-\mu)\right| + \left|\int_{\{d\geqslant R\}} f_R\,d(\mu_\alpha-\mu)\right| + \left|\int_{\{d\geqslant R\}} f\,d(\mu_\alpha-\mu)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + 2\int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu_\alpha|(dx) + 2\int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu|(dx) < 3\varepsilon,$$

откуда следует, что $\|\mu-\mu_\alpha\|_{K,d} < 4\varepsilon$, что доказывает сходимость в τ_K.

Сходимость в топологии τ_K влечет сходимость в топологии τ_{KR} в силу неравенств $\|\mu\|_{KR,d} \leqslant \|\mu\|_{K,d}$, $d \in \mathcal{D}$, а также сходимость интегралов от функции $x \mapsto d(x,x_0)$. Следовательно, по теореме 1.2.1 для вероятностных мер будем иметь слабую сходимость, что дает условие равномерной интегрируемости (см. [33, замечание 2.7.2]). □

Следующий результат вытекает из теоремы 1.2.1 и предложения 1.2.3.

Следствие 1.2.4. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_\tau(X)$ сходится слабо к $\mu \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_\tau(X)$ и каждая $d \in \mathcal{D}$ равномерно интегрируема относительно $\{\mu_\alpha\}$. Тогда $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии τ_K при выполнении любого из условий*:

(i) *все меры μ_α неотрицательны*;

(ii) *$\{\mu_\alpha\}$ имеет слабо компактное замыкание в $\mathcal{M}_\tau(X)$ (в частности, это условие автоматически выполнено для последовательностей мер*).

Пример 2.2.2 ниже демонстрирует, что для произвольных направленностей знакопеременных мер их слабая сходимость и равномерная интегрируемость псевдометрик не гарантируют сходимость в топологии τ_K без дополнительных условий (i) или (ii).

Теперь установим достаточные условия компактности в топологиях Канторовича – Рубинштейна и Канторовича.

Предложение 1.2.5. *Пусть множество $S \subset \mathcal{M}_\tau(X)$ слабо компактно. Тогда S компактно в топологии τ_{KR}.*

Если $S \subset \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_\tau(X)$ и для каждой псевдометрики $d \in \mathcal{D}$ выполняется условие равномерной интегрируемости

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\mu\in S}\int_{\{d\geqslant R\}} d(x,x_0)\,|\mu|(dx) = 0 \tag{1.2.4}$$

для некоторой точки $x_0 \in X$, то S компактно в топологии τ_K.

Доказательство. По теореме 1.2.1 на S слабая топология совпадает с топологией τ_{KR}. Поскольку S слабо компактно, оно компактно и в τ_{KR}.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим направленность $\{\mu_\alpha\} \subset S$. В силу слабой компактности S существует поднаправленность, сходящаяся слабо к некоторой мере $\mu \in \mathcal{M}_\tau(X)$. Можно считать, что такова вся направленность. Проверим, что μ принадлежит $\mathcal{M}_\tau^{\mathcal{D}}(X)$.

Зафиксируем $d \in \mathcal{D}$. Из (1.2.4) следует, что

$$M := \sup_{\mu\in S} \int_X d(x, x_0)\, |\mu|(dx) \leqslant R \sup_{\mu\in S} \|\mu\| + 1 < \infty.$$

Для $N \in \mathbb{N}$ положим $f_N(x) := \min(d(x, x_0), N)$. Тогда меры $f_N \cdot \mu_\alpha$ сходятся слабо к мере $f_N \cdot \mu$. По полунепрерывности снизу нормы полной вариации имеем

$$\int_X f_N \, d\mu = \|f_N \cdot \mu\| \leqslant \sup_\alpha \|f_N \cdot \mu_\alpha\| \leqslant M,$$

что дает $|\mu|$-интегрируемость функции $x \mapsto d(x, x_0)$.

Из следствия 1.2.4 следует сходимость $\mu_\alpha \to \mu$ в τ_K. Таким образом, всякая направленность в S имеет τ_K-сходящуюся поднаправленность, что доказывает компактность в τ_K. □

1.3 Носители мер в пространствах Фреше

Теперь докажем, что для равномерно плотного семейства радоновских мер на пространстве Фреше с равномерно интегрируемыми полунормами, порождающими топологию, существует усиленная норма, относительно которой семейство сохраняет равномерную плотность и равномерную интегрируемость. Более точно, такое семейство оказывается равномерно плотным в компактно вложенном сепарабельном рефлексивном пространстве с равномерно интегрируемой нормой.

Данный результат усиливает теорему Булдыгина [7] (где отсутствует условие равномерной интегрируемости) на случай семейств мер с равномерно интегрируемыми полунормами. Для одиночной борелевской вероятностной меры в сепарабельном банаховом пространстве аналогичное утверждение с условием интегрируемости нормы приведено в [30].

В основе доказательства лежит известная конструкция Гротендика (см. [36, §2.5]). Пусть B — ограниченное абсолютно выпуклое множество в локально выпуклом пространстве X. Обозначим через E_B линейную оболочку множества B, наделенную нормой

$$p_B(x) = \inf\{t > 0 \colon t^{-1}x \in B\},$$

которая является функционалом Минковского множества B. При секвенциальной полноте X пространство (E_B, p_B) банахово. В нашей конструкции B будет выбрано так, чтобы обеспечить рефлексивность E_B и компактность вложения $E_B \hookrightarrow X$.

Теорема 1.3.1. *Пусть X — пространство Фреше, $\{p_n\}$ — система полунорм, задающая его топологию, и $\mathcal{M}$ — равномерно плотное семейство радоновских мер на X. Предположим, все p_n равномерно интегрируемы относительно $\mathcal{M}$, т. е.*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x\colon\, p_n(x)>m\}} p_n(x)\, |\mu|(dx) = 0.$$

Тогда существует сепарабельное рефлексивное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ со следующими свойствами:

(i) *E линейно и непрерывно вложено в X, причем замкнутый единичный шар компактен в X*;

(ii) *$\mathcal{M}$ сосредоточено на E и равномерно плотно в $(E, \|\cdot\|_E)$*;

(iii) *Норма $\|\cdot\|_E$ равномерно интегрируема относительно $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Можно считать, что все меры $\mu \in \mathcal{M}$ неотрицательны. Доказательство разбиваем на этапы.

1) Пусть $p_n \leqslant p_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют такая последовательность $\{q_n\}$ эквивалентных полунорм на X и такая последовательность $\alpha_n \downarrow 0$, что $q_n \leqslant q_{n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{k=n}^{\infty} \mu\big(x\colon\, q_k(x) > k\alpha_k\big) = 0, \tag{1.3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x\colon\, q_n(x)>n\alpha_n\}} q_n(x)\, \mu(dx) = 0. \tag{1.3.2}$$

Выберем возрастающую последовательность $N_n \in \mathbb{N}$ с $N_{n+1} > 2^n N_n$ и

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{k=N_n}^{\infty} \mu\big(x\colon\, p_n(x) > k\big) \leqslant \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x\colon\, p_n(x)>N_n\}} p_n(x)\, \mu(dx) < 4^{-n}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_k = 1, \quad q_k = p_1 \quad &\text{при} \quad k \leqslant N_2, \\ \alpha_k = 2^{-1}, \quad q_k = p_2 \quad &\text{при} \quad N_2 < k \leqslant N_3, \\ \alpha_k = 2^{-n}, \quad q_k = p_n \quad &\text{при} \quad N_{n+1} < k \leqslant N_{n+2}. \end{aligned}$$

Тогда для всех $k \in (N_{n+1}, N_{n+2}]$

$$\alpha_k^{-1} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x\colon q_k(x)>k\alpha_k\}} q_k(x)\,\mu(dx) \leqslant 2^n \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\{x\colon p_n(x)>N_n\}} p_n(x)\,\mu(dx) < 2^{-n},$$

$$\begin{aligned} \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{k>N_{n+1}}^{\infty} \mu\big(x\colon q_k(x) > k\alpha_k\big) &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{N_{n+j}<k\leqslant N_{n+j+1}} \mu\big(x\colon q_k(x) > k\alpha_k\big) = \\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{N_{n+j}<k\leqslant N_{n+j+1}} \mu\big(x\colon p_{n+j-1}(x) > k2^{-(n+j-1)}\big) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{n+j-1} \sum_{k=N_{n+j-1}}^{\infty} \mu\big(x\colon p_{n+j-1}(x) > k\big) < 2^{1-n}, \end{aligned}$$

что и доказывает (1.3.1) и (1.3.2).

2) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем компакт $K_n \subset U_n := \{x\colon q_n(x) \leqslant n\}$ с условием

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(\alpha_n U_n \backslash \alpha_n K_n) < 2^{-n}.$$

Тогда

$$\mu\Big(X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n K_n\Big) = 0 \qquad \forall \mu \in \mathcal{M},$$

поскольку

$$\mu(X\backslash\alpha_n K_n) = \mu(\alpha_n U_n\backslash\alpha_n K_n) + \mu(X\backslash\alpha_n U_n) < 2^{-n} + \mu\big(x\colon q_n(x) > n\alpha_n\big).$$

3) Рассмотрим множество

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} c_n K_n, \qquad c_n := \alpha_n n^{-1}.$$

Покажем, что K вполне ограничено. Для $\varepsilon > 0$ выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такими,

чтобы $\alpha_{n_0} < \delta$ и

$$\{x\colon q_{n_0}(x) \leqslant \delta\} \subset B_X(0,\varepsilon),$$

где $B_X(0,\varepsilon)$ — открытый шар радиуса ε по метрике пространства X с центром в нуле. Тогда $c_nK_n \subset B_X(0,\varepsilon)$ при $n \geqslant n_0$, а конечное объединение $\bigcup_{n=1}^{n_0-1} c_nK_n$ компактно.

4) Согласно [36, предложение 1.8.2] замкнутая абсолютно выпуклая оболочка V множества K также вполне ограничена. Следовательно, V — компакт ([36, предложение 1.8.5]), а пространство (E_V, p_V) банахово ([36, предложение 2.5.1]). Функция p_V является борелевской в силу равенства $\{x\colon p_V(x) \leqslant c\} = cV$. Кроме того,

$$\alpha_nK_n \subset nK \subset nV,$$

откуда следует, что

$$\mu\big(x\colon p_V(x) > n\big) \leqslant \mu(X\backslash\alpha_nK_n) < 2^{-n} + \mu\big(x\colon q_n(x) > n\alpha_n\big).$$

Равномерная интегрируемость p_V следует из оценок

$$\begin{aligned}\int_{\{p_V>n\}} p_V\,d\mu &= n\mu\big(x\colon p_V(x) > n\big) + \int_n^\infty \mu\big(x\colon p_V(x) > t\big)\,dt \leqslant\\ &\leqslant n\big(2^{-n} + \mu\big(x\colon q_n(x) > n\alpha_n\big)\big) + \sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1} \mu\big(x\colon p_V(x) > t\big)\,dt \leqslant\\ &\leqslant n2^{-n} + \alpha_n^{-1}\int_{\{x\colon\, q_n(x)>n\alpha_n\}} q_n(x)\,\mu(dx) + \sum_{k=n}^\infty \big(2^{-k} + \mu\big(x\colon q_k(x) > k\alpha_k\big)\big).\end{aligned}$$

Правая часть равномерно по $\mu \in \mathcal{M}$ стремится к 0 при $n \to \infty$ согласно (1.3.1) и (1.3.2).

5) Наконец, докажем существование сепарабельного рефлексивного пространства E, удовлетворяющего условиям (i)–(iii). Найдется такое абсолютно выпуклое компактное множество W, что $V \subset W$, банахово пространство (E_W, p_W) сепарабельно и рефлексивно, причем K компактно по норме p_W (см. [36, следствие 2.5.12]). Тогда $p_W \leqslant p_V$, что показывает равномерную интегрируемость p_W относительно $\mathcal{M}$. Каждую меру $\mu \in \mathcal{M}$ можно ограничить на борелевскую σ-алгебру банахового пространства $E = E_W$, так как все борелевские в E_W множе-

ства также борелевские и в X (см. [31, теорема 6.8.6]), причем

$$\mu(X\setminus E_W) = \mu\Big(X\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} nW\Big) \leqslant \mu\Big(X\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n K_n\Big) = 0.$$

Наконец, равномерная плотность семейства $\mathcal{M}$ следует из компактности V в пространстве (E_W, p_W) и оценки

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(E_W\setminus nV) \leqslant \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(X\setminus \alpha_n K_n) < 2^{-n} + \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu\big(x\colon q_n(x) > n\alpha_n\big).$$

Теорема доказана. □

1.4 Полунормы Канторовича порядка q

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — фиксированная точка, $q \geqslant 1$ и $\mathcal{M}_r^q(X)$ — пространство радоновских мер μ с конечным моментом порядка q, т. е.

$$\int_X d(x, x_0)^q \, |\mu|(dx) < \infty.$$

Напомним, что для $q \geqslant 1$ пространство вероятностных мер $\mathcal{P}_r^q(X)$ может быть наделено q-метрикой Канторовича $d_{K,d,q}$, определенной равенством

$$d_{K,d,q}^q(\mu, \nu) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times X} d(x, y)^q \, \sigma(dxdy),$$

где $\Pi(\mu, \nu)$ — множество вероятностных мер на $X \times X$ с проекциями μ и ν на сомножители. При $q > 1$ метрика $d_{K,d,q}$ не порождается нормой (в отличие от случая $q = 1$, где $d_{K,d,1}(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_{K,d}$), однако норма

$$K_{d,q}(\mu) = \|(1 + d(\,\cdot\,, x_0)^q)\mu\|_{KR,d}$$

и метрика $d_{K,d,q}$ задают на $\mathcal{P}_r^q(X)$ одну и ту же топологию (см. [33, следствие 3.3.7], где в формуле опечатка: следует заменить $\|\cdot\|_K$ на $\|\cdot\|_{KR}$).

Хотя нормы $\|\,\cdot\,\|_{K,d}$ и $K_{d,1}$ задают одинаковую топологию на $\mathcal{P}_r^1(X)$, на пространстве $\mathcal{M}_r^1(X)$ они могут быть неэквивалентны. Рассмотрим $X = \mathbb{R}$ с евклидо-

вой метрикой d. Для мер $\mu_n = \delta_{n+1} - \delta_n$ имеем

$$\|\mu_n\|_{K,d} = 1, \quad K_{d,1}(\mu_n) = n + 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тем не менее всегда выполняется неравенство $\|\cdot\|_{K,d} \leqslant 3K_{d,1}$. Для доказательства зафиксируем $f \in \mathrm{Lip}_1(d)$ с $f(x_0) = 0$ и положим $g(x) = \big(1+d(x,x_0)\big)^{-1} f(x)$. Тогда $|g| \leqslant 1$ и $g \in \mathrm{Lip}_2(d)$, поскольку

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{|f(x) - f(y)|}{1 + d(x,x_0)} + |f(y)| \frac{d(x,y)}{\big(1 + d(x,x_0)\big)\big(1 + d(y,x_0)\big)}.$$

Следовательно,

$$\int_X f \, d\mu = \int_X g(x)\big(1 + d(x,x_0)\big)\, \mu(dx) \leqslant 2K_{d,1}(\mu).$$

Для оценки $|\mu(X)|$ рассмотрим функцию $g_0(x) = \big(1+d(x,x_0)\big)^{-1}$ из класса $\mathrm{Lip}_1(d)$ с $|g| \leqslant 1$. Тогда

$$|\mu(X)| = \left| \int_X g_0(x)\big(1 + d(x,x_0)\big)\, \mu(dx) \right| \leqslant K_{d,1}(\mu).$$

Объединяя оценки, получаем нужное неравенство.

Для семейства псевдометрик $\mathcal{D}$ на X определим топологию Канторовича $\tau_{K,q}$ при $q > 1$ на $\mathcal{M}_r^q(X)$ как локально выпуклую топологию, порожденную полунормами $\{K_{d,q}\}_{d \in \mathcal{D}}$.

Те же самые рассуждения, что и выше (см. доказательство предложения 1.2.3), приводят к следующему результату для $\tau_{K,q}$.

Предложение 1.4.1. *Пусть направленность мер $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_r^q(X)$ сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}_r^q(X)$ в топологии τ_{KR}. Если каждая псевдометрика $d \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условию равномерной интегрируемости*

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{\alpha} \int_{\{d \geqslant R\}} d(x,x_0)^q \, |\mu_\alpha|(dx) = 0,$$

то $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,q}$.

1.5 Выпуклые меры

Теперь исследуем сходимость выпуклых мер в топологиях Канторовича. Напомним ключевые определения и результаты.

Вероятностная радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется s-выпуклой ($s \leqslant 0$), если для всех борелевских множеств $A, B \subset X$ и всех $t \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\mu_*\big(tA + (1-t)B\big) \geqslant M_s^t\big(\mu(A), \mu(B)\big),$$

где μ_* обозначает нижнюю меру

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(K)\colon K \text{ — компакт},\ K \subset E\}, \qquad E \subset X,$$

а $M_s^t(u,v)$ задается формулой

$$M_s^t(u,v) := \begin{cases} \big(tu^s + (1-t)v^s\big)^{1/s}, & s < 0, \\ u^t v^{1-t}, & s = 0. \end{cases}$$

При $s = 0$ такие меры называются логарифмически вогнутыми. Для них справедливо эквивалентное характеристическое свойство: для всякого непрерывного линейного оператора $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ мера $\mu \circ T^{-1}$ имеет плотность e^{-V} относительно меры Лебега на аффинном подпространстве, где V — выпуклая функция (см. [32], [37]).

Класс логарифмически вогнутых мер содержит гауссовские меры, т. е. меры, для которых все непрерывные линейные функционалы являются гауссовскими случайными величинами. О гауссовских мерах см. [29].

Для доказательства основной теоремы используем известные оценки К. Борелля для выпуклых мер (см. [32, теорема 4.3.7] или [37]).

Пусть μ — s-выпуклая мера на локально выпуклом пространстве X и A — абсолютно выпуклое борелевское множество с $\theta := \mu(A) > 0$. Тогда при $s = 0$

$$\mu(X \backslash tA) \leqslant \Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{t/2}, \qquad t \geqslant 1, \tag{1.5.1}$$

а при $s < 0$ и $\theta > 1/2$

$$\mu(X\backslash tA) \leqslant \Big(\frac{t+1}{2}\big((1-\theta)^s - \theta^s\big) + \theta^s\Big)^{1/s}, \qquad t \geqslant 1. \tag{1.5.2}$$

Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости моментов для выпуклых мер.

Теорема 1.5.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Тогда для каждой непрерывной полунормы q верны следующие утверждения*:

(i) *Если $s = 0$, то существует такое $\kappa > 0$, что*

$$\lim_\alpha \int_X \exp(\kappa q)\, d\mu_\alpha = \int_X \exp(\kappa q)\, d\mu.$$

Кроме того, для каждого $r > 0$ справедливо равенство

$$\lim_\alpha \int_X q^r\, d\mu_\alpha = \int_X q^r\, d\mu.$$

(ii) *Если $s < 0$, то при $0 < r < -1/s$*

$$\lim_\alpha \int_X q^r\, d\mu_\alpha = \int_X q^r\, d\mu.$$

Доказательство. Выберем такое $c > 0$, что $\mu(q < c) > \theta > 1/2$. Поскольку меры μ_α сходятся слабо к мере μ и множество $\{q < c\}$ открыто, то по теореме Александрова (см. [33, следствие 4.3.3]) существует такой α_0, что $\mu_\alpha(q < c) > \theta$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. Далее доказательство пунктов (i) и (ii) проводится с использованием оценок (1.5.1) и (1.5.2).

(i) Из (1.5.1) получаем неравенство

$$\mu_\alpha(q \geqslant ct) \leqslant \Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{t/2}, \qquad t \geqslant 1.$$

Положим

$$\tau := \Big(\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{1/2}, \qquad \tau \in (0,1).$$

Для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ имеем

$$\int_X \exp(\kappa q)\, d\mu_\alpha = \int_0^\infty \mu_\alpha\big(\exp(\kappa q) > t\big)\, dt = 1 + c\kappa \int_0^\infty \exp(c\kappa t)\mu_\alpha(q \geqslant ct)\, dt =$$
$$= 1 + c\kappa \int_0^1 \exp(c\kappa t)\mu_\alpha(q \geqslant ct)\, dt + c\kappa \int_1^\infty \exp(c\kappa t)\mu_\alpha(q \geqslant ct)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \exp(c\kappa) + c\kappa \int_1^\infty \exp(c\kappa t)\tau^t\, dt.$$

Интеграл

$$\int_1^\infty \exp(c\kappa t)\tau^t\, dt$$

конечен при $\kappa < -\ln\tau/c$. Поэтому существует такое $\kappa_0 > 0$, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ выполнено неравенство

$$\int_X \exp(\kappa_0 q)\, d\mu_\alpha \leqslant I(\theta, c),$$

откуда для всех $\kappa < \kappa_0$ получаем

$$\int_{\{q \geqslant R\}} \exp(\kappa q)\, d\mu_\alpha \leqslant \exp\big((\kappa - \kappa_0)R\big) I(\theta, c).$$

Следовательно, интегралы от $\exp(\kappa q)$ сходятся (см. [33, теорема 4.3.15]), что дает сходимость интегралов от q^r.

Теперь докажем (ii). Из оценки (1.5.2) и убывания функции

$$x \mapsto \Big(\frac{t+1}{2}\big((1-x)^s - x^s\big) + x^s\Big)^{1/s}, \qquad x \in [1/2, 1]$$

следует, что

$$\mu_\alpha(q \geqslant ct) \leqslant \Big(\frac{t+1}{2}\big((1-\theta)^s - \theta^s\big) + \theta^s\Big)^{1/s} = \mathcal{O}(t^{1/s}), \qquad t \geqslant 1.$$

Тогда для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ имеем

$$\frac{1}{r}\int_{\{q\geqslant cn\}} q^r\,d\mu_\alpha = \mu_\alpha\big(x\colon q(x)\geqslant cn\big)\int_0^{cn} t^{r-1}\,dt + \int_{cn}^{\infty} t^{r-1}\mu_\alpha\big(x\colon q(x)\geqslant t\big)\,dt =$$

$$= \mu_\alpha\big(x\colon q(x)\geqslant cn\big)\int_0^{cn} t^{r-1}\,dt + c^r\int_n^{\infty} t^{r-1}\mu_\alpha\big(x\colon q(x)\geqslant ct\big)\,dt =$$

$$= \mathcal{O}(n^{r+1/s}) + \int_n^{\infty}\mathcal{O}(t^{r+1/s-1})\,dt,$$

что доказывает равномерную интегрируемость q^r. □

Следствие 1.5.2. *При условиях теоремы* 1.5.1 *направленность мер* μ_α *сходится к* μ *в топологии* $\tau_{K,q}$ *при следующих значениях* q:

(i) *если* $s = 0$, *то для всех* $q \geqslant 1$; (ii) *если* $s < 0$, *то для всех* $q < -1/s$.

1.6 Устойчивые меры

Устойчивые меры образуют еще один важный класс вероятностных мер (см. [19], [31], [40], [56]). Радоновская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X называется устойчивой порядка $p \in (0, 2]$, если для всяких $\alpha > 0, \beta > 0$ существует такой вектор $v = v(\alpha, \beta) \in X$, что образ μ при аффинном преобразовании $x \mapsto (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}x + v$ совпадает со сверткой образов μ при гомотетиях с коэффициентами α и β. В терминах преобразований Фурье (характеристических функций) это определение эквивалентно выполнению равенства

$$\varphi_\mu(\alpha f)\varphi_\mu(\beta f) = \varphi_\mu\big((\alpha^p + \beta^p)^{1/p} f\big)\exp\big(if(v)\big), \qquad f \in X^*,$$

где

$$\varphi_\mu\colon X^* \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_\mu(f) = \int_X \exp(if)\,d\mu.$$

Случай $p = 2$ соответствует гауссовским мерам. Это единственное пересечение класса устойчивых мер с классом логарифмически вогнутых мер.

Из определения устойчивости следует, что если мера μ устойчива порядка p, то все ее одномерные проекции $\mu_f := \mu \circ f^{-1}$, $f \in X^*$ также устойчивы порядка p. Обратно, согласно [40], если меры μ_f устойчивы для каждого $f \in X^*$, то они имеют

один и тот же порядок p; при $p > 1$ и условии полноты пары (X, X^*) (т. е. всякий линейный функционал на X^* имеет вид $f \mapsto f(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in X$) следует устойчивость μ порядка p.

Следующая лемма устраняет условие полноты для радоновских мер.

Лемма 1.6.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство и μ — радоновская вероятностная мера на X. Если μ_f устойчивы порядка $p > 1$ для всех $f \in X^*$, то μ устойчива порядка p.*

Доказательство. Пусть $J\colon X \to \mathbb{R}^T$ — линейное непрерывное вложение. Образ $\widetilde{\mu} = \mu \circ J^{-1}$ — радоновская мера на $\mathbb{R}^T$, чьи одномерные проекции устойчивы порядка p. Так как пара $\left(\mathbb{R}^T, (\mathbb{R}^T)^*\right)$ удовлетворяет условию полноты [40], мера $\widetilde{\mu}$ устойчива порядка p.

Заметим, что $\widetilde{\mu}$ сосредоточена на борелевски измеримом линейном подпространстве $L \subset J(X)$. Действительно, в силу радоновости μ существует последовательность компактов $K_n \subset X$ с $\mu(K_n) \to 1$. Положим $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} J(K_n)$ и $L = \operatorname{span} S$. Тогда $L \subset J(X)$ и $\widetilde{\mu}(L) = 1$, причем $L \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, так как S является σ-компактным множеством. Обозначив через $\widetilde{\mu}^t$ образ $\widetilde{\mu}$ при гомотетии $y \mapsto ty$, для $\alpha > 0, \beta > 0$ и $v = v(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^T$ из устойчивости $\widetilde{\mu}$ получаем

$$\widetilde{\mu}(L - v) = \widetilde{\mu}^{\alpha} * \widetilde{\mu}^{\beta}(L) = \int_{\mathbb{R}^T} \widetilde{\mu}^{\alpha}(L - \beta y)\, \widetilde{\mu}(dy) = \int_{L} \widetilde{\mu}^{\alpha}(L - \beta y)\, \widetilde{\mu}(dy) = 1.$$

Следовательно, $L \cap (L - v) \neq \varnothing$, откуда $v \in J(X)$. Устойчивость μ следует из инъективности J и того, что определяющее равенство достаточно проверять на компактах. □

Теперь докажем предложение о сохранении устойчивости при слабой сходимости.

Предложение 1.6.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских вероятностных мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то μ устойчива порядка $p \geqslant p_1$.*

Доказательство. Согласно лемме 1.6.1 достаточно рассмотреть одномерный случай. Выберем последовательность $\{\mu_n\} \subset \{\mu_\alpha\}$, сходящуюся слабо к μ. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что их порядки p_n сходятся к $p \in [p_1, 2]$.

Для $\alpha, \beta > 0$ и $\gamma_n = (\alpha^{p_n} + \beta^{p_n})^{1/p_n} \to \gamma := (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}$ из равномерной сходимости на отрезках последовательности $\{\varphi_{\mu_n}\}$ к φ_μ получаем, что для каждого $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\mu_n}(\gamma_n t) \to \varphi_\mu(\gamma t).$$

Выберем $\delta > 0$ так, что $\varphi_\mu(t) \neq 0$ для всех $|t| < \delta$. Тогда для достаточно больших n имеем $\varphi_{\mu_n}(\gamma_n t) \neq 0$ при $|t| < \delta$ и

$$\exp(itx_n) = \frac{\varphi_{\mu_n}(\alpha t)\varphi_{\mu_n}(\beta t)}{\varphi_{\mu_n}(\gamma_n t)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\varphi(\alpha t)\varphi(\beta t)}{\varphi(\gamma t)},$$

что дает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Выбирая сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x$, получаем

$$\varphi_\mu(\alpha t)\varphi_\mu(\beta t) = \varphi_\mu(\gamma t)\exp(itx) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

что доказывает устойчивость μ порядка p. □

Теорема 1.6.3. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,s}$ с любым $s \in [1, p_1)$.*

Доказательство. Зафиксируем $s \in [1, p_1)$ и непрерывную полунорму q на X. Достаточно доказать, что существуют такие $r \in (s, p_1)$ и $M > 0$, что

$$\sup_{\alpha \geqslant \alpha_0} \int_X q^r \, d\mu_\alpha \leqslant M$$

для некоторого α_0. В самом деле, если это так, то

$$\int_{\{q \geqslant R\}} q^s \, d\mu_\alpha = \int_{\{q \geqslant R\}} q^r q^{s-r} \, d\mu_\alpha \leqslant M R^{s-r} \qquad \forall \alpha \geqslant \alpha_0,$$

что дает равномерную интегрируемость функции q^s относительно направленности $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \geqslant \alpha_0}$. По предложению 1.4.1 $\mu_\alpha \to \mu$ в топологии $\tau_{K,s}$.

Докажем существование указанного $r \in (s, p_1)$. Выберем такие $\delta \in (2^{-1/2}, 1)$ и $k > 1$, что $(2^{1/2}\delta)^k > 3$. Положим

$$\varrho = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \delta^n).$$

Из [19, лемма 3.3] следует, что если мера μ устойчива с порядком $p \geqslant p_1 > 1$ и $\mu(q < 1) > 3/4$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(q > \beta^n) \leqslant 4k, \quad \beta = 2^{1/p}\delta. \tag{1.6.1}$$

Действительно, в обозначениях указанной леммы имеем $\beta(\beta^k - 2^{1/p}) > 1$, поскольку $2^{1/p} \leqslant 2$ и $\beta \geqslant 2^{1/2}\delta$ из-за ограничения $p \leqslant 2$. Следовательно,

$$\gamma = \mu\big(q \leqslant \beta(\beta^k - 2^{1/p})\big) > 3/4,$$

что дает оценку $2\gamma/(2\gamma - 1) < 4$, но в указанной лемме ряд выше оценивается через $k2\gamma/(2\gamma - 1)$.

Используя (1.6.1) и технику [19, теорема 3.1], получаем

$$\mu(q > t) \leqslant Ct^{-p}, \qquad t > 0,$$

где

$$C \leqslant 2C_n''\varrho^p = 2\varrho^p/C_n' = 2\varrho^p/\prod_{n=1}^{\infty}\mu(q \leqslant \beta^n) = 2\varrho^p/\prod_{n=1}^{\infty}\big(1 - \mu(q > \beta^n)\big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\varrho^p \exp\Big(2\sum_{n=1}^{\infty}\mu(q > \beta^n)\Big) \leqslant 2\varrho^p \exp(8k).$$

Наконец, в общем случае

$$\mu(q > t) \leqslant 2C(t-1)^{-p} \leqslant 4\varrho^p \exp(8k)(t-1)^{-p}, \qquad t > 1.$$

Ясно, что в нашей ситуации можем считать, что $\mu(q < 1) > 3/4$, поэтому по теореме Александрова $\mu_\alpha(q < 1) > 3/4$ для всех достаточно больших индексов α. Отсюда следует оценка

$$\mu_\alpha(q > t) \leqslant 8\varrho^{p_\alpha} \exp(8k)t^{-p_1}, \qquad t > 2.$$

Из этого неравенства при $1 < r < p_1$ имеем

$$\int_X q^r \, d\mu_\alpha = r \int_0^\infty t^{r-1} \mu_\alpha(q > t) \, dt \leqslant$$
$$\leqslant r \int_0^2 t^{r-1} \, dt + 8r\varrho^2 \exp(8k) \int_2^\infty t^{r-p_1-1} \, dt =: M.$$

Эта оценка завершает доказательство. $\square$

Глава 2
Барицентры мер и функционалов

2.1 Неравенства Йенсена

Напомним, что для борелевской меры μ на локально выпуклом пространстве X барицентр (или среднее) $m_\mu \in X$ определяется соотношением

$$f(m_\mu) = \int_X f(x)\,\mu(dx) \qquad \forall f \in X^*$$

при условии, что $X^* \subset L^1(|\mu|)$. Например, для дираковской меры δ_x имеем равенство $m_{\delta_x} = x$.

В банаховом пространстве X с радоновской мерой μ барицентр существует, если норма μ-интегрируема, и выражается интегралом Бохнера (см. [41])

$$m_\mu = \int_X x\,\mu(dx).$$

Аналогичное утверждение верно и в квазиполном локально выпуклом пространстве (где каждое ограниченное множество содержится в полном): существование барицентра для вероятностной радоновской меры гарантировано при условии интегрируемости всех полунорм, задающих топологию. Об условиях существования барицентров см., например, [36, §5.6].

Приведем векторную версию неравенства Йенсена. Напомним, что надграфиком функции $F\colon X \to \mathbb{R}$ называется множество

$$\operatorname{epi}_F := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R}\colon F(x) \leqslant r\}.$$

Лемма 2.1.1. *Пусть борелевская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X сосредоточена на борелевском выпуклом множестве V, а μ-интегрируемая функция $F\colon X \to \mathbb{R}$ выпукла на V и полунепрерывна снизу на $\overline{V}$. Если μ имеет барицентр m_μ, то*

$$F(m_\mu) \leqslant \int_X F(x)\,\mu(dx). \tag{2.1.1}$$

Доказательство. Обозначим через I интеграл в правой части (2.1.1). Рас-

смотрим отображение

$$S(x) = \big(x, F(x)\big), \qquad X \to X \times \mathbb{R}.$$

Барицентром образа $\mu \circ S^{-1}$ является пара (m_μ, I). Так как функция F выпукла на V, то замыкание $W = \overline{\mathrm{epi}_{F|_V}}$ является выпуклым замкнутым множеством в $X \times \mathbb{R}$, откуда $(m_\mu, I) \in W$. Заметим, что W лежит в надграфике сужения $F|_{\overline{V}}$. Действительно, если направленность $\{(x_t, r_t)\} \subset \mathrm{epi}_{F|_V}$ сходится к $(x, r) \in W$, то $x \in \overline{V}$ и в силу полунепрерывности снизу F на $\overline{V}$ имеем

$$F(x) \leqslant \liminf_t F(x_t) \leqslant \lim_t r_t = r.$$

Следовательно, $F(m_\mu) \leqslant I$, что завершает доказательство. □

В качестве следствия приведенной леммы получаем следующую версию неравенства Йенсена.

Следствие 2.1.2. *Пусть радоновская вероятностная мера μ с сильным первым моментом сосредоточена на возрастающей последовательности выпуклых компактов K_n, а функция $F \in L^1(\mu)$ выпукла на каждом K_n и полунепрерывна снизу на всех компактах в X. Если μ имеет барицентр m_μ, то верно неравенство* (2.1.1).

Доказательство. Положим $c_n = \mu(K_n)$ и $\mu_n = c_n^{-1}\mathbf{1}_{K_n} \cdot \mu$ для $n \in \mathbb{N}$ с $c_n > 1/2$. Каждая мера μ_n сосредоточена на выпуклом компакте K_n, поэтому имеет барицентр $m_{\mu_n} \in K_n$ (см. [36, предложение 5.6.6]). По лемме 2.1.1 неравенство (2.1.1) выполнено для всех μ_n.

Из возрастания K_n и условия $\mu(K_n) \to 1$ следует сходимость

$$\int_X f\, d|\mu_n - \mu| \to 0 \qquad \forall f \in L^1(\mu).$$

Так как μ имеет сильный первый момент, для всякой непрерывной полунормы q имеем

$$q(m_{\mu_n} - m_\mu) \leqslant \int_X q\, d|\mu_n - \mu| \to 0,$$

т. е. $m_{\mu_n} \to m_\mu$. Из полунепрерывности снизу F на компакте $\{m_{\mu_n}, m_\mu\}$ следует

$$F(m_\mu) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F(m_{\mu_n}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X F\, d\mu_n = \int_X F\, d\mu.$$

Утверждение доказано. □

2.2 Сходимость барицентров

Отметим, что если борелевская мера μ имеет барицентр и непрерывная полунорма q μ-интегрируема, то из теоремы Хана – Банаха и определения барицентра вытекает неравенство

$$q(m_\mu) = \sup\left\{\left|\int_X f\,d\mu\right| : f \in X^*,\ |f| \leqslant q\right\} \leqslant \|\mu\|_{K,q}.$$

Из этой оценки и следствия 1.2.4 получаем такой результат.

Следствие 2.2.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство с топологией, заданной системой полунорм $\mathcal{Q}$, и направленность $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$ сходится слабо к $\mu \in \mathcal{M}_\tau^{\mathcal{Q}}(X)$. Если каждая полунорма $q \in \mathcal{Q}$ равномерно интегрируема относительно $\{\mu_\alpha\}$, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$ при выполнении любого из условий*:

(i) *все меры μ_α неотрицательны*;

(ii) $\{\mu_\alpha\}$ *имеет слабо компактное замыкание в $\mathcal{M}_\tau(X)$* (*в частности, это условие автоматически выполнено для последовательностей мер*).

Пример ниже показывает, что даже в банаховом пространстве для произвольных направленностей знакопеременных мер слабая сходимость в сочетании с равномерной интегрируемостью нормы недостаточны для сходимости барицентров без дополнительных ограничений (i) или (ii) из следствия выше.

Пример 2.2.2. Рассмотрим банахово пространство $X = \ell^1$ со стандартным базисом $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ и нормой $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |x_j|$. Построим такую направленность $\{\mu_\alpha\}$ знакопеременных мер с носителями на единичной сфере, что $\mu_\alpha \to 0$ слабо и $\|\mu_\alpha\| = \|m_{\mu_\alpha}\| = 1$ для всех α.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество конечных наборов $\alpha = \{f_1, \ldots, f_n\} \subset C_b(X)$, упорядоченное по включению. Для каждого $\alpha = \{f_1, \ldots, f_n\}$ рассмотрим следующие векторы в $\mathbb{R}^n$:

$$v_j = \big(f_1(e_j), \ldots, f_n(e_j)\big), \qquad j = 1, \ldots, n+1.$$

В силу линейной независимости существуют такие $c_1, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}$, не все нули,

что

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j v_j = 0,$$

или, что равносильно,

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j f_i(e_j) = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Нормируем коэффициенты: $\tilde{c}_j = c_j / \sum_{k=1}^{n+1} |c_k|$, так что $\sum_{j=1}^{n+1} |\tilde{c}_j| = 1$. Определим меру по формуле

$$\mu_\alpha := \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{c}_j \delta_{e_j}.$$

Тогда $\operatorname{supp} \mu_\alpha \subset \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ и $\|\mu_\alpha\| = 1$. Кроме того, для функций $f \in \alpha$ интеграл от f по μ_α равен нулю, что доказывает слабую сходимость $\mu_\alpha \to 0$. Наконец, $m_{\mu_\alpha} = \sum \tilde{c}_j e_j$, следовательно, $\|m_{\mu_\alpha}\|_1 = \sum |\tilde{c}_j| = 1$.

2.3 Барицентры выпуклых и устойчивых мер

Пусть X — локально выпуклое пространство. Для s-выпуклых мер существование барицентра гарантировано при секвенциальной полноте X и конечности первых моментов полунорм, задающих топологию. Для гауссовских мер это верно без дополнительных условий (см. [29, теорема 3.2.3]).

Теорема 2.3.1. *Пусть направленность $\{\mu_\alpha\}$ s-выпуклых мер сходится слабо к мере μ. Если меры μ_α и μ имеют барицентры, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

Доказательство. Сходимость барицентров сразу следует из теоремы 1.5.1 и следствия 2.2.1. □

Перейдем к случаю устойчивых мер. Отметим, что устойчивые меры порядка $p > 1$ обладают барицентрами. Действительно, как показано в [19], для таких мер все измеримые полунормы интегрируемы, поэтому $X^* \subset L^1(\mu)$. Возьмем произвольные $f \in X^*$ и $\alpha, \beta > 0$. Из определения устойчивой меры следует равенство

$$\alpha \int_X f(x)\, \mu(dx) + \beta \int_X f(x)\, \mu(dx) = \gamma \int_X f(x)\, \mu(dx) + f(v),$$

где $\gamma := (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}$. Отсюда получаем

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = (\alpha + \beta - \gamma)^{-1} f(v).$$

Поскольку левая часть не зависит от α и β, имеем

$$m_\mu = (\alpha + \beta - \gamma)^{-1} v.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть $\{\mu_\alpha\}$ — направленность радоновских мер на локально выпуклом пространстве X, каждая из которых устойчива порядка $p_\alpha > p_1 > 1$. Если μ_α сходятся слабо к радоновской мере μ, то $m_{\mu_\alpha} \to m_\mu$.*

Доказательство. Сходимость барицентров вытекает из теоремы 1.6.3 и следствия 2.2.1. □

2.4 Барицентры функционалов

В данном разделе исследуются свойства барицентров с использованием аппарата плотных функционалов и компактификации Самюэля. Основные конструкции и результаты представлены ниже.

Пусть $(X, \mathcal{D})$ — равномерное пространство. Вероятностными функционалами назовем неотрицательные функционалы единичной нормы из пространства $U_b^*(X)$, где неотрицательность $m \in U_b^*(X)$ означает, что $m(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$; для этого используем запись $m \geqslant 0$.

Лемма 2.4.1. *Выпуклая оболочка семейства $\{\delta_x\}_{x\in X}$ плотна во множестве вероятностных функционалов в *-слабой топологии.*

Доказательство. Предположим, что существует вероятностный функционал $m_0 \in U_b^*(X)$, не лежащий в *-слабом замыкании C выпуклой оболочки дираковских мер. По теореме Хана – Банаха найдется такая функция $f \in U_b(X)$, что

$$m_0(f) > \sup_{m\in C} m(f) \geqslant \sup_{x\in X} f(x).$$

С другой стороны, $m_0(f) \leqslant m_0(1) \cdot \sup_{x\in X} f(x) = \sup_{x\in X} f(x)$, что приводит к противоречию. □

Функционал $m \in U_b^*(X)$ называется плотным, если для каждого $\varepsilon > 0$

существует такой компакт $K_\varepsilon \subset X$, что при $f \in U_b(X)$ и $f|_{K_\varepsilon} = 0$ выполнено неравенство

$$|m(f)| \leqslant \varepsilon \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Известно (см. [50, теорема 5.3]), что это условие эквивалентно существованию такой меры $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$, что

$$m(f) = \int_X f(x)\, \mu(dx) \qquad \forall f \in U_b(X). \tag{2.4.1}$$

Представление (2.4.1) сохраняется для компонент m^+, m^- и $|m|$ с μ^+, μ^- и $|\mu|$ соответственно, где m^+, $m^- \geqslant 0$, причем $m = m^+ - m^-$ и $|m| = m^+ + m^-$. Пространство плотных функционалов обозначается символом $U_b^*(X)_t$.

Из леммы 2.4.1 вытекает следующее утверждение, устанавливающее связь между плотными функционалами в $U_b(X)$ и $C_b(X)$.

Следствие 2.4.2. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — равномерное пространство и m — ненулевой функционал на $C_b(X)$. Тогда $m \in C_b^*(X)_t$ тогда и только тогда, когда его ограничение $m|_{U_b(X)} \in U_b^*(X)_t$. Более того, всякий ненулевой функционал из $U_b^*(X)_t$ единственным образом продолжается до линейного непрерывного функционала, принадлежащего $C_b^*(X)_t$.*

Доказательство. Пусть $m \in U_b^*(X)_t$ представляется мерой $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$ согласно (2.4.1). Без ограничения общности считаем m вероятностным. Согласно лемме 2.4.1, примененной к $\big(X, \mathcal{U}(C_b)\big)$, существует направленность $\{m_\gamma\}$ выпуклых комбинаций дираковских мер, сходящаяся C_b-слабо к m. Поскольку $C_b(X)$-слабая и $U_b(X)$-слабая топологии совпадают на $\mathcal{P}_r(X)$ (см. замечание 1.2.2, [50, следствие 5.17]) или [53, теорема 8.1], то $\{m_\gamma\}$ сходится слабо к μ. Следовательно, равенство (2.4.1) справедливо для всех $f \in C_b(X)$, что доказывает первую часть утверждения. Вторая часть следует из теоремы Хана – Банаха. □

Для равномерного пространства $(X, \mathcal{D})$ существует компактификация Самюэля sX (равномерная компактификация), см. [42, п. 8.5.7], [47] или [50, §6.5]. Она обладает следующими свойствами: X гомеоморфно вложено как всюду плотное подпространство в sX, каноническое вложение $J\colon X \hookrightarrow sX$ равномерно непрерывно, причем всякая функция $f \in U_b(X)$ продолжается до $\widehat{f} \in C(sX)$.

Важно отметить, что sX зависит не только от топологии X, но и от выбора равномерности $\mathcal{D}$. В частности, при $\mathcal{D} = \mathcal{U}(C_b)$ компактификация sX совпадает

со стоун-чеховской компактификацией βX [42], где каждая функция $f \in C_b(X)$ продолжается до $\widehat{f} \in C(\beta X)$.

Согласно [50, теорема 6.37] компактификация Самюэля равномерного пространства $(X, \mathcal{D})$ реализуется как *-слабое замыкание образа X в $U_b(X)^*$ при вложении $\delta\colon x \mapsto \delta_x$. Альтернативно sX можно получить как пополнение пространства X с равномерностью $\mathcal{U}\big(U_b(X)\big)$. Из этой конструкции видно, что равномерность на sX, вообще говоря, не индуцирует исходную равномерность $\mathcal{D}$ на X. Равенство индуцированной и исходной равномерностей имеет место тогда и только тогда, когда $(X, \mathcal{D})$ вполне ограничено. В этом случае X плотно в своем пополнении и равномерности согласованы.

Пусть $(X, \mathcal{D})$ — равномерное пространство с компактификацией Самюэля sX. Как уже отмечено выше, каждая функция $f \in U_b(X)$ единственным образом продолжается до $\widehat{f} \in C(sX)$. Для меры $\mu \in \mathcal{M}_r(sX)$ формула

$$m_\mu(f) := \int_{sX} \widehat{f}\, d\mu, \qquad f \in U_b(X)$$

задает линейный непрерывный функционал на $U_b(X)$ с $\|m_\mu\| = \|\mu\|$. Обратно, по теореме Рисса (см. [31, теорема 7.10.4] или [44, §436J]) для каждого функционала $m \in U_b^*(X) = C_b^*(sX)$ существует такая мера $\mu_m \in \mathcal{M}_r(sX)$, что $m = m_{\mu_m}$. Таким образом, отображение $m \mapsto \mu_m$ является изометрическим изоморфизмом пространств $U_b^*(X)$ и $\mathcal{M}_r(sX)$.

Следующая теорема характеризует функционалы, представимые радоновскими мерами на X (доказательство см. в [50, глава 7]).

Теорема 2.4.3. *Функционал $m \in U_b^*(X)$ принадлежит $U_b^*(X)_t$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $B \in \mathcal{B}(sX)$, что*

$$B \subset X \quad \textit{и} \quad |\mu_m|(sX \backslash B) = 0.$$

При выполнении условий теоремы имеем равенство

$$\mu_m(A) = \mu(A \cap X), \qquad A \in \mathcal{B}(sX),$$

где мера $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$ связана с m соотношением (2.4.1). Следовательно, пространство $\mathcal{M}_r(X)$ изометрически изоморфно подпространству мер в $\mathcal{M}_r(sX)$ с нулевой

внешней мерой дополнения X

$$\mathcal{M}_r(X) \cong \{\nu \in \mathcal{M}_r(sX) \colon |\nu|^*(sX \backslash X) = 0\}. \tag{2.4.2}$$

Следующее предложение описывает компактификацию $s\mathcal{P}_r(X)$ пространства вероятностных мер с $U_b(X)$-равномерностью.

Предложение 2.4.4. *Пространство $\mathcal{P}_r(sX)$ со слабой топологией является компактификацией Самюэля для пары $\big(\mathcal{P}_r(X), U_b(X)\big)$, т. е.*

$$s\mathcal{P}_r(X) = \mathcal{P}_r(sX).$$

В частности, для компактификации βX имеем $s\mathcal{P}_r(X) = \mathcal{P}_r(\beta X)$.

Доказательство. Пусть $J \colon X \to sX$ — равномерно непрерывное каноническое вложение. Рассмотрим отображение

$$\widehat{J} \colon \mu \mapsto \mu \circ J^{-1}, \qquad \mathcal{P}_r(X) \to \mathcal{P}_r(sX),$$

сопоставляющее мере μ на X ее продолжение $\widehat{\mu} := \mu \circ J^{-1}$ на sX. Покажем, что пара $\big(\mathcal{P}_r(sX), \widehat{J}\big)$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Пространство $\mathcal{P}_r(sX)$ слабо компактно [33, теорема 5.1.2]. Вложение $\widehat{J}$ является равномерным изоморфизмом между $\big(\mathcal{P}_r(X), U_b(X)\big)$ и своим образом. Это сразу следует из того, что для всякой функции $f \in U_b(X)$ с продолжением $\widehat{f} \in C(sX)$ выполняется равенство

$$\int_X f \, d\mu = \int_{sX} \widehat{f} \, d\widehat{\mu}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_r(X)$ с $U_b(X)$-равномерностью является равномерным подпространством $\mathcal{P}_r(sX)$ с $C(sX)$-равномерностью. Тогда каждая ограниченная $U_b(X)$-равномерно непрерывная функция на $\mathcal{P}_r(X)$ продолжается до непрерывной функции на $\mathcal{P}_r(sX)$ (см. [42, теорема 8.3.10] или [50, теорема 2.22]). Наконец, плотность пространства $\mathcal{P}_r(X)$ в $\mathcal{P}_r(sX)$ следует из плотности выпуклых комбинаций дираковских мер δ_x с $x \in sX$ в $\mathcal{P}_r(sX)$ (лемма 2.4.1) и плотности X в sX. □

Пусть X — вполне регулярное пространство. Напомним, что для функционала $L \in U_b^*\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$, где пространство $\mathcal{P}_r(X)$ наделено $U_b(X)$-слабой топологией,

барицентр определяется как функционал $\beta_L \in U_b^*(X)$, действующий по формуле

$$\beta_L(f) := L(l_f), \qquad f \in U_b(X), \tag{2.4.3}$$

где

$$l_f(p) = \int_X f\, dp, \qquad p \in \mathcal{P}_r(X).$$

При этом $\|\beta_L\| \leqslant \|L\|$.

В том случае, когда функционал L представляется τ-аддитивной мерой Q на $\mathcal{P}_r(X)$, β_L также представляется τ-аддитивной мерой β_Q на X, называемой барицентром меры Q. В самом деле, определим β_Q формулой

$$\beta_Q(B) = \int_{\mathcal{P}_r(X)} q(B)\, Q(dq) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Согласно [33, предложение 5.8.6 и следствие 5.8.7] мера β_Q является τ-аддитивной на X. При этом для каждого борелевского множества $B \subset X$ имеем

$$\beta_L(I_B) = L(l_{I_B}) = \beta_Q(B),$$

что согласуется с (2.4.3) для индикаторов. Применяя теорему о монотонных классах (см. [31, теорема 2.12.9]), получаем, что равенство

$$\int_X f\, d\beta_Q = \int_{\mathcal{P}_r(X)} \int_X f(x)\, q(dx)\, Q(dq) \tag{2.4.4}$$

верно для всех ограниченных борелевских функций f на X. Более того, для произвольной борелевской функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируемость по мере β_Q равносильна интегрируемости l_f по Q, причем равенство (2.4.4) сохраняется.

Хотя барицентр τ-аддитивной меры Q на $\mathcal{P}_r(X)$ является τ-аддитивной мерой на X, радоновость β_Q требует дополнительных условий. Согласно [2, предложение 3.1] мера β_Q радонова тогда и только тогда, когда Q сосредоточена на σ-компактном подмножестве вида $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, где каждое $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{P}_r(X)$ равномерно плотно и компактно в слабой топологии. В частности, это условие автоматически выполняется, если на X все τ-аддитивные меры радоновы (например, если X — суслинское пространство). При этом радоновость самой меры Q не гарантирует радоновость ее барицентра: в статье [34] приведен пример вполне регулярного

пространства X и меры $Q \in \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(X)\bigr)$, для которой β_Q не радонова. Тем не менее, если барицентр функционала представляет собой радоновскую меру, то сам функционал также задается радоновской мерой [60].

Теорема 2.4.5. *Если вероятностный функционал $L \in U_b^*\bigl(\mathcal{P}_r(X)\bigr)$ имеет плотный барицентр, то $L \in U_b^*\bigl(\mathcal{P}_r(X)\bigr)_t$.*

Доказательство. По предложению 2.4.4 пространство $\mathcal{P}_r(sX)$ со слабой топологией служит компактификацией Самюэля для $\mathcal{P}_r(X)$ с $U_b(X)$-равномерностью. Пусть $\sigma \in \mathcal{P}_r(sX)$ и $\beta \in \mathcal{P}_r(X)$ представляют функционалы L и β_L соответственно в смысле равенства (2.4.1). Барицентр β_σ совпадает с продолжением меры β до меры из $\mathcal{P}_r(sX)$, так как для всякой функции $f \in U_b(X)$ с продолжением $\widehat{f} \in C(sX)$ функционал l_f продолжается до

$$\widehat{l}_f \colon p \mapsto \int_{sX} \widehat{f}\, dp, \qquad p \in \mathcal{P}_r(sX),$$

и

$$\int_X f\, d\beta = L(l_f) = \int_{\mathcal{P}_r(sX)} \widehat{l}_f\, d\sigma = \int_{sX} \widehat{f}\, d\beta_\sigma.$$

Так как барицентр β_L является плотным, по теореме 2.4.3 существует $B \in \mathcal{B}(sX)$ с $B \subset X$ и $\beta_\sigma(sX \backslash B) = 0$. Множество

$$E := \{p \in \mathcal{P}_r(sX) \colon p(sX \backslash B) = 0\}$$

является борелевским в $\mathcal{P}_r(sX)$ ([33, предложение 5.8.5]) и $E \subset \mathcal{P}_r(X)$ в силу (2.4.2). При этом для каждого $\varepsilon > 0$ неравенство Чебышёва дает

$$\sigma\bigl(p \in \mathcal{P}_r(sX) \colon p(sX \backslash B) > \varepsilon\bigr) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{P}_r(sX)} p(sX \backslash B)\, \sigma(dp) = \frac{1}{\varepsilon} \beta_\sigma(sX \backslash B) = 0,$$

откуда $\sigma\bigl(\mathcal{P}_r(sX) \backslash E\bigr) = 0$, что по теореме 2.4.3 доказывает плотность функционала L. □

Из теоремы 2.4.5 вытекает следующее утверждение о свойствах отображения барицентра.

Следствие 2.4.6. *Пусть X — вполне регулярное пространство. Рассмотрим отображение барицентра*

$$\beta \colon L \mapsto \beta_L, \qquad L \in C_b^*\bigl(\mathcal{P}_r(X)\bigr),$$

определенное на вероятностных функционалах. Тогда для него выполнены следующие свойства:

(i) *прообраз* $\beta^{-1}\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$ *содержится в* $\mathcal{P}_r\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$;

(ii) *многозначное отображение*

$$p \mapsto \beta^{-1}(p), \qquad \mathcal{P}_r(X) \to 2^{\mathcal{P}_r\left(\mathcal{P}_r(X)\right)}$$

компактнозначно и полунепрерывно сверху;

(ii) *ограничение* β *на* $\beta^{-1}\big(\mathcal{P}_r(X)\big)$ *является совершенным отображением.*

В качестве еще одного следствия леммы 2.1.1 получаем следующий вариант неравенства Йенсена для мер на $\mathcal{P}_r(X)$.

Следствие 2.4.7. *Пусть мера* $Q \in \mathcal{P}_r(\mathcal{P}_r(X))$ *сосредоточена на счетном объединении возрастающей последовательности равномерно плотных компактов* $\Pi_n \subset \mathcal{P}_r(X)$*, а функция* $F \in L^1(Q)$ *выпукла на каждом* Π_n *и полунепрерывна снизу на всех равномерно плотных компактных подмножествах* $\mathcal{P}_r(X)$*. Тогда выполнено неравенство* (2.1.1)*.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем Π_n выпуклыми, поскольку выпуклая оболочка сохраняет равномерную плотность, а ее замыкание слабо компактно по теореме Прохорова.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ с $Q(\Pi_n) > 0$ определим меру

$$Q_n = \frac{1}{Q(\Pi_n)} \mathbf{1}_{\Pi_n} \cdot Q.$$

Каждая мера Q_n сосредоточена на выпуклом компакте $\Pi_n \subset \mathcal{P}_r(X)$, поэтому имеет барицентр $\beta_{Q_n} \in \mathcal{P}_r(X)$. По лемме 2.1.1 неравенство (2.1.1) выполнено для всех Q_n. Эти меры сходятся к Q по вариации, что дает сходимость $\beta_{Q_n} \to \beta_Q$ по вариации в силу оценки

$$|\beta_{Q_n}(B) - \beta_Q(B)| \leqslant \|Q_n - Q\| \qquad \forall B \in \mathcal{B}(X).$$

Следовательно, множество $\{\beta_{Q_n}, \beta_Q\}$ равномерно плотно и компактно в слабой топологии на $\mathcal{P}_r(X)$. Из полунепрерывности F на этом множестве имеем

$$F(\beta_Q) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F(\beta_{Q_n}).$$

Тогда из сходимости интегралов

$$\int_X F\, dQ_n \to \int_X F\, dQ$$

следует нужное неравенство для Q. $\square$

Глава 3
Задачи Канторовича

3.1 Двойственность в задачах Канторовича

Следующая фундаментальная теорема о представлении выпуклых функций лежит в основе принципов двойственности в задачах Канторовича.

Теорема 3.1.1. *Пусть X — локально выпуклое пространство. Предположим, что функция $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ не равна тождественно $+\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *f выпукла и полунепрерывна снизу*;

(ii) *f представима в виде супремума непрерывных аффинных функций, т. е. для всех $x \in X$*

$$f(x) = \sup\bigl\{\varphi(x)\colon \varphi \leqslant f,\ \varphi(x') = x^*(x') + b,\ x^* \in X^*, b \in \mathbb{R}\bigr\}. \tag{3.1.1}$$

Доказательство. Доказательство см. в [48, глава 4]. □

Замечание 3.1.2. Из теоремы следует, что выпуклая полунепрерывная снизу оболочка функции f совпадает с правой частью (3.1.1). Этот результат играет ключевую роль в выводе соотношений двойственности для задач Канторовича.

Для формулировки двойственности в задачах оптимального транспорта нам потребуется аппарат многозначных отображений.

Определение 3.1.3. Пусть X, Y — топологические пространства. Многозначное отображение $F\colon X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ называется:

(i) полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для всякого открытого множества $V \subset Y$ с условием $F(x_0) \subset V$ существует такая окрестность $U \ni x_0$, что $F(x) \subset V$ для всех $x \in U$;

(ii) полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для всякого открытого множества $V \subset Y$ с условием $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ существует такая окрестность $U \ni x_0$, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всех $x \in U$.

Отображение называется полунепрерывным (сверху/снизу), если оно обладает этим свойством во всех точках $x \in X$.

Отображение F будем называть компактнозначным, если $F(x)$ — компакт

в Y для всех $x \in X$. Обозначим через $\mathcal{K}(X)$ множество всех непустых компактов в X.

Например, непрерывная сюръекция $f\colon Y \to X$ является совершенным отображением, т. е. замкнутым и с компактными прообразами точек, тогда и только тогда, когда соответствующее многозначное отображение

$$x \mapsto f^{-1}(x), \qquad X \to 2^Y$$

компактнозначно и полунепрерывно сверху.

Приведем критерии полунепрерывности в терминах сходимости направленностей. Графиком многозначного отображения $F\colon X \to 2^Y$ называется множество

$$\Gamma_F := \{(x, y) \in X \times Y\colon y \in F(x)\}.$$

Теорема 3.1.4. (i) *Отображение $F\colon X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ компактнозначно и полунепрерывно сверху в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда всякой направленности $\{(x_t, y_t)\} \subset \Gamma_F$ с $x_t \to x$ направленность $\{y_t\}$ имеет предельную точку в $F(x)$.*

(ii) *Отображение $F\colon X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ полунепрерывно снизу в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякой точки $y \in F(x)$ и всякой направленности $x_t \to x$ существует такие поднаправленность $\{x_{t_s}\}$ в $\{x_t\}$ и направленность $\{y_s\} \subset Y$, что $\{(x_{t_s}, y_s)\} \subset \Gamma_F$ и $y_s \to y$.*

Доказательство. Доказательство см. в [21, теоремы 17.16, 17.19]. □

Также нам понадобится понятие оптимальной функции. Пусть заданы функция $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$, не равная тождественно $+\infty$, и многозначное отображение $F\colon X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$. Рассмотрим минимальную функцию

$$f^*(x) := \inf_{y \in F(x)} f(x, y), \qquad x \in X.$$

Далее предполагаем, что $f^* > -\infty$.

Следующая теорема дает условия выпуклости функции f^* (см. [48, теорема 2.129]).

Теорема 3.1.5. *Пусть X, Y — линейные пространства. Предположим, что многозначное отображение $F\colon X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ имеет выпуклый график, а функ-*

ция $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ *выпукла. Тогда* f^* *является выпуклой функцией на* X.

Имеются следующие достаточные условия, при которых функция f^* полунепрерывна снизу (см. [21, лемма 17.30]).

Лемма 3.1.6. *Пусть многозначное отображение* $F\colon X \to \mathcal{K}(Y)$ *полунепрерывно сверху и функция* $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ *полунепрерывна снизу. Тогда функция* f^* *полунепрерывна снизу на* X.

Следствие 3.1.7. *Пусть* X_0 *и* Y_0 *— замкнутые выпуклые подмножества в локально выпуклых пространствах* X *и* Y *соответственно. Предположим, что функция* $f\colon X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ *полунепрерывна снизу и выпукла, а многозначное отображение* $F\colon X_0 \to \mathcal{K}(Y_0)$ *имеет выпуклый график и полунепрерывно сверху. Тогда для всех* $x \in X_0$

$$f^*(x) = \sup\bigl\{x^*(x) + b\colon x^* \in X^*, b \in \mathbb{R}, x^*(x') + b \leqslant f^*(x'), x' \in X_0\bigr\}.$$

Доказательство. Продолжим функцию f^* значением $+\infty$ на $X\setminus X_0$. Такое продолжение выпукло на X по теореме 3.1.5 и полунепрерывно снизу по лемме 3.1.6. Применяя теорему 3.1.1 к продолжению, получаем требуемое представление. □

Теперь напомним классическую постановку задачи Канторовича оптимальной транспортировки мер. Пусть $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ — вероятностные пространства и $h\colon X \times Y \to [0, \infty)$ — $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримая функция стоимости. Задача состоит в минимизации функционала

$$I_h(\sigma) = \int_{X\times Y} h(x, y)\, \sigma(dx\, dy)$$

на множестве $\Pi(\mu, \nu)$ всех вероятностных мер на $(X \times Y, \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y)$ с проекциями μ и ν на сомножители, т. е. мер σ, удовлетворяющих условиям

$$\sigma(A \times Y) = \mu(A), \quad \sigma(X \times B) = \nu(B), \quad A \in \mathcal{B}_X,\ B \in \mathcal{B}_Y.$$

Инфимум функционала $I_h(\sigma)$ по всем таким мерам σ обозначается через $K_h(\mu, \nu)$. Меры μ и ν называются маргиналами, а меры из $\Pi(\mu, \nu)$ называются планами Канторовича. О задаче Канторовича см. [22], [23], [2], [4], [43], [52], [55].

В случае, когда X и Y являются вполне регулярными пространствами с бо-

релевскими σ-алгебрами $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}(Y)$, а меры μ и ν радоновы, можно считать, что $\Pi(\mu,\nu) \subset \mathcal{P}_r(X\times Y)$. Действительно, всякая мера $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$ регулярна и плотна на алгебре, порожденной системой измеримых прямоугольников $\{A\times B\colon A\in\mathcal{B}(X), B\in\mathcal{B}(Y)\}$, так как для каждого $\varepsilon>0$ существуют такие компакты $K_A\subset A$ и $K_B\subset B$, что

$$\mu(A\backslash K_A)+\nu(B\backslash K_B)<\varepsilon.$$

Тогда $K := K_A\times K_B\subset A\times B$ является компактом, причем

$$\sigma\big((A\times B)\backslash K\big)\leqslant\sigma\big((A\backslash K_A)\times B\big)+\sigma\big(A\times(B\backslash K_B)\big)<\varepsilon.$$

Следовательно, согласно [31, теорема 7.3.2] мера σ имеет единственное продолжение до радоновской меры на $X\times Y$.

По теореме Прохорова множество $\Pi(\mu,\nu)$ компактно в слабой топологии, что позволяет определить многозначное отображение

$$\Pi\colon(\mu,\nu)\mapsto\Pi(\mu,\nu),\qquad \mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)\to\mathcal{K}\big(\mathcal{P}_r(X\times Y)\big).$$

Покажем, что отображение Π полунепрерывно сверху. Рассмотрим слабо сходящиеся направленности $p_t\to p$ в $\mathcal{P}_r(X)$ и $q_t\to q$ в $\mathcal{P}_r(Y)$. Возьмем меры $\sigma_t\in\Pi(p_t,q_t)$. По теореме Банаха – Алаоглу выделим поднаправленность $\{\sigma_s\}$, поточечно сходящуюся к функционалу $L\in C_b^*(X\times Y)$. Проекции L на X и Y совпадают с p и q соответственно. Согласно [50, лемма 6.27] существует такая радоновская мера σ на $X\times Y$, что

$$L(f)=\int_{X\times Y} f\,d\sigma\qquad\forall f\in U_b(X\times Y).$$

По следствию 2.4.2 это равенство верно и для всех $f\in C_b(X\times Y)$. Поскольку $C_b(X\times Y)$-слабая и $U_b(X\times Y)$-слабая топологии совпадают на $\mathcal{P}_r(X\times Y)$ (см. замечание 1.2.2, [50, следствие 5.17]) или [53, теорема 8.1]), $\{\sigma_s\}$ сходится слабо к σ. Таким образом, σ — предельная точка направленности $\{\sigma_t\}$ в $\Pi(p,q)$.

Из доказанного вытекает классический результат о двойственности Канторовича.

Теорема 3.1.8. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, $\mu\in\mathcal{P}_r(X)$*

и $\nu \in \mathcal{P}_r(Y)$. *Если функция* $h\colon X \times Y \to [0, +\infty)$ *полунепрерывна снизу, то*

$$K_h(\mu, \nu) = \sup\biggl\{\int_X f\,d\mu + \int_Y g\,d\nu\biggr\}, \tag{3.1.2}$$

где супремум берется по всем парам функций $f \in C_b(X)$ *и* $g \in C_b(Y)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$f(x) + g(y) \leqslant h(x, y), \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

Доказательство. Функционал

$$\sigma \mapsto \int_{X\times Y} h(x, y)\,\sigma(dx\,dy), \qquad \sigma \in \mathcal{P}_r(X \times Y)$$

полунепрерывен снизу на $\mathcal{P}_r(X \times Y)$ (см. [33, предложение 5.8.6]). Применяя следствие 3.1.7 к $X_0 = \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y)$, $Y_0 = \mathcal{P}_r(X \times Y)$ и $F = \Pi$, получаем равенство (3.1.2). □

Полунепрерывность сверху отображения Π влечет совершенность проекции

$$\sigma \mapsto (\sigma_X, \sigma_Y), \qquad \mathcal{P}_r(X \times Y) \to \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y).$$

В частности, получаем критерий предкомпактности.

Следствие 3.1.9. *Множество мер* $M \subset \mathcal{P}_r(X \times Y)$ *предкомпактно в слабой топологии тогда и только тогда, когда предкомпактны его проекции* $M_X \subset \mathcal{P}_r(X)$ *и* $M_Y \subset \mathcal{P}_r(Y)$.

Перейдем к постановке линейной транспортной задачи Канторовича с фиксированным барицентром. Пусть заданы вполне регулярные пространства X и Y и ограниченная борелевская функция стоимости

$$h\colon X \times \mathcal{P}_r(Y) \to [0, +\infty).$$

Кроме того, пусть заданы меры $\mu \in \mathcal{P}_r(X)$ и $\beta \in \mathcal{P}_r(Y)$. Рассмотрим множество

$$\Pi^\beta(\mu) := \bigl\{P \in \mathcal{P}_r\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr)\colon P_X = \mu,\ \beta_{P_\mathcal{P}} = \beta\bigr\},$$

где P_X — проекция меры P на X, а $P_\mathcal{P}$ — проекция на $\mathcal{P}_r(Y)$. На этом множестве

рассматривается задача минимизации функционала

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp)\to\min,\qquad P\in\Pi^\beta(\mu). \tag{3.1.3}$$

Инфимум значения этого функционала будем обозначать через $K_h^\beta(\mu)$.

Отметим, что радоновость мер P_X и $\beta_{P_\mathcal{P}}$ равносильна тому, что мера P сосредоточена на счетном объединении множеств вида $K\times\Pi$, где K — компакт в X и Π — равномерный плотный компакт в $\mathcal{P}_r(Y)$. Класс таких мер обозначим через $\mathcal{P}_{r,u}\bigl(X\times\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$.

Как показано в работе [35], если функция стоимости h полунепрерывна снизу на $X\times\mathcal{P}_r(Y)$, то задача Канторовича (3.1.3) с заданным барицентром имеет решение. При этом всякая оптимальная мера $P\in\Pi^\beta(\mu)$ является оптимальной и для классической линейной задачи с той же самой функцией стоимости и маргиналами μ и $P_\mathcal{P}$, причем

$$K_h(\mu,P_\mathcal{P})=K_h^\beta(\mu).$$

Тогда из теоремы двойственности 3.1.8 вытекает равенство

$$K_h^\beta(\mu)=\sup\biggl\{\int_X f\,d\mu+\int_{\mathcal{P}_r(Y)} G\,dP_\mathcal{P}\biggr\}, \tag{3.1.4}$$

где супремум взят по всем парам функций $f\in C_b(X)$ и $G\in C_b\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$, удовлетворяющих неравенству

$$f(x)+G(p)\leqslant h(x,p),\qquad x\in X,\ p\in\mathcal{P}_r(Y).$$

Однако представляет интерес двойственность в следующей форме:

$$\begin{aligned}K_h^\beta(\mu)=\sup\biggl\{\int_X f\,d\mu+\int_Y g\,d\beta\colon\\ f\in C_b(X),\ g\in C_b(Y),\ f(x)+\int_Y g\,dp\leqslant h(x,p)\biggr\}.\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Супремум в правой части этого равенства обозначим через $J_h^\beta(\mu)$.

Принципиальное отличие двойственности (3.1.5) от (3.1.4) заключается в линейности выражения $\int_Y g dp$ по мере $p\in\mathcal{P}_r(Y)$, что влечет выпуклость и полунепрерывность снизу супремума $J_h^\beta(\mu)$ как функционала от мер μ и β.

Теорема 3.1.10. *Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, а функция стоимости h полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда имеет место равенство* (3.1.5).

Доказательство. Для мер $\mu \in \mathcal{P}_r(X)$ и $\beta \in \mathcal{P}_r(Y)$ множество $\Pi^\beta(\mu)$ является прообразом пары (μ, β) при совершенном выпуклом отображении

$$P \mapsto (P_X, \beta_{P_\mathcal{P}}), \qquad \mathcal{P}_{r,u}\big(X \times \mathcal{P}_r(Y)\big) \to \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y),$$

которое представляется в виде композиции двух совершенных выпуклых отображений $P \mapsto (P_X, P_\mathcal{P})$ и $(p, Q) \mapsto (p, \beta_Q)$. Следовательно, многозначное отображение $(\mu, \beta) \mapsto \Pi^\beta(\mu)$ обладает выпуклым графиком и полунепрерывно сверху. Требуемое тождество (3.1.5) следует из следствия 3.1.7. □

Замечание 3.1.11. Функция $(\mu, \beta) \mapsto K_h^\beta(\mu)$ максимальна среди выпуклых полунепрерывных снизу функций $G\colon \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y) \to (-\infty, +\infty]$, удовлетворяющих условию

$$G(\mu, \beta) \leqslant \int_X h(x, \beta)\, \mu(dx), \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}_r(X),\ \forall \beta \in \mathcal{P}_r(Y).$$

Действительно, продолжим G значением $+\infty$ вне $\mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда из выпуклости и полунепрерывности следует, что

$$G(\mu, \beta) = \sup\{\varphi(\mu, \beta)\colon \varphi \leqslant G\},$$

где супремум берется по всем аффиным непрерывным функциям φ, т. е. функциям вида

$$\varphi(\mu, \beta) = \int_X f\, d\mu + \int_Y g\, d\beta + b$$

для некоторых $f \in C_b(X)$, $g \in C_b(Y)$ и $b \in \mathbb{R}$. Для каждой такой φ, если $\varphi \leqslant G$, то для всех $x \in X$ и $p \in \mathcal{P}_r(Y)$ выполняется неравенство

$$f(x) + \int_Y [g(y) + b]\, p(dy) \leqslant h(x, p).$$

Следовательно, согласно (3.1.5) имеем $\varphi(\mu, \beta) \leqslant J_h^\beta(\mu) = K_h^\beta(\mu)$. Таким образом, выполнено неравенство $G(\mu, \beta) \leqslant K_h^\beta(\mu)$, которое доказывает максимальность функции $K_h^\beta(\mu)$.

Перейдем к рассмотрению конструкции выпуклой оболочки для функций стоимости. Зафиксируем ограниченную борелевскую функцию

$$h\colon X \times \mathcal{P}_r(Y) \to [0, +\infty),$$

где X и Y — вполне регулярные пространства. Рассмотрим функцию

$$H(x,p) = \inf_{Q \in B_p} \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,q)\, Q(dq), \qquad x \in X,\ p \in \mathcal{P}_r(Y),$$

где B_p — множество мер $Q \in \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$ с $\beta_Q = p$. Заметим, что выполнено равенство

$$H(x,p) = \inf_{P \in \Pi^p(\delta_x)} \int_{X \times \mathcal{P}_r(Y)} h(x',q)\, P(dx'\, dq), \tag{3.1.6}$$

вытекающее из того, что всякая мера P с $P_X = \delta_x$ имеет вид $P = \delta_x \otimes Q$ для некоторой меры $Q \in \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$, причем условие $\beta_{P_{\mathcal{P}}} = p$ означает $\beta_Q = p$.

Отметим, что функция

$$\widetilde{h}(x,Q) = \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,q)\, Q(dq), \qquad x \in X,\ Q \in \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$$

является борелевски измеримой как композиция борелевской функции ([33, предложение 5.8.5])

$$\widehat{h}(P) = \int_{X \times \mathcal{P}_r(Y)} h\, dP, \qquad P \in \mathcal{P}_r\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr)$$

с непрерывным отображением

$$(x,Q) \mapsto \delta_x \otimes Q, \qquad X \times \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr) \to \mathcal{P}_r\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr)$$

(см. [33, теорема 4.3.17]). Из этого наблюдения вытекает, что если Y — суслинское пространство, то функция H измерима относительно σ-алгебры, порожденной классом $\mathcal{S}\bigl(\mathcal{B}\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr)\bigr)$ на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$, так как все множества $\{H < r\}$ являются проекциями множеств

$$\bigl\{(x,Q,p) \in X \times \mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr) \times \mathcal{P}_r(Y)\colon \widetilde{h}(x,Q) < r,\ \beta_Q = p\bigr\} = \\ = \bigl(\widetilde{h}^{-1}[0,r) \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr) \cap \bigl(X \times \Gamma_\beta\bigr).$$

Следовательно, функция H универсально измерима, т. е. измерима относительно всех борелевских мер на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$.

Из равенства (3.1.6) и замечания 3.1.11 при условии полунепрерывности снизу функции h следует максимальность функции H во множестве всех функций $G\colon X \times \mathcal{P}_r(Y) \to \mathbb{R}$, которые полунепрерывны снизу по совокупности аргументов, выпуклы по второму аргументу и не превосходят h. Однако о функции H можно сказать немного больше.

Следствие 3.1.12. *Пусть функция h полунепрерывна снизу на произведении $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда для каждого $x \in X$ функция $p \mapsto H(x,p)$ является выпуклой полунепрерывной снизу оболочкой функции $p \mapsto h(x,p)$.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$. Из теоремы 3.1.10 вытекает, что функция $H(x,\cdot)$ выпукла и полунепрерывна снизу, причем

$$H(x,p) \leqslant h(x,p) \qquad \forall p \in \mathcal{P}_r(Y).$$

Пусть $G\colon \mathcal{P}_r(Y) \to \mathbb{R}$ — произвольная выпуклая полунепрерывная снизу функция, для которой $G \leqslant h(x,\cdot)$. Тогда для всякой $Q \in B_p$ имеем

$$\int_{\mathcal{P}_r(Y)} G(q)\,Q(dq) \leqslant \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,q)\,Q(dq).$$

С другой стороны, согласно следствию 2.4.7 выполняется неравенство Йенсена

$$G(p) \leqslant \int_{\mathcal{P}_r(Y)} G(q)\,Q(dq).$$

Следовательно,

$$G(p) \leqslant \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,q)\,Q(dq).$$

Переходя к инфимуму по $Q \in B_p$, получаем $G(x,p) \leqslant H(x,p)$. Таким образом, функция $H(x,\cdot)$ максимальна в классе функций с указанными свойствами. $\square$

В качестве еще одного следствия получаем утверждение о равенстве значений задачи Канторовича (3.1.3) с фиксированным барицентром для функций стоимости h и H.

Следствие 3.1.13. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, а функ-*

ция стоимости h полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда

$$\inf_{P\in\Pi^\beta(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp) = \inf_{P\in\Pi^\beta(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} H(x,p)\,P(dx\,dp).$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1.10 выполнены равенства

$$K_h^\beta(\mu) = J_h^\beta(\mu) \quad \text{и} \quad K_H^\beta(\mu) = J_H^\beta(\mu).$$

Следовательно, достаточно установить, что $J_h^\beta(\mu) = J_H^\beta(\mu)$. Возьмем произвольные функции $f \in C_b(X)$ и $g \in C_b(Y)$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(x,p) = f(x) + \int_Y g\,dp, \qquad X \times \mathcal{P}_r(Y) \to \mathbb{R}.$$

Она непрерывна по совокупности переменных и линейна по второму аргументу. Следовательно, если $\varphi \leqslant h$ то по следствию 3.1.12 получаем $\varphi \leqslant H$. Таким образом, множества допустимых пар (f,g) в задачах двойственности для H и h совпадают, откуда $J_h^\beta(\mu) = J_H^\beta(\mu)$, что и требовалось доказать. □

Рассмотрим еще две барицентрические задачи типа Канторовича.

Пусть задана ограниченная борелевская функция стоимости

$$h_1\colon \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y) \to [0,+\infty).$$

Определим множество планов с фиксированными барицентрами проекций

$$B_1(\mu,\nu) := \big\{Q \in \mathcal{P}_r\big(\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)\big)\colon \beta_{Q_{\mathcal{P}(X)}} = \mu,\ \beta_{Q_{\mathcal{P}(Y)}} = \nu\big\},$$

где $Q_{\mathcal{P}(X)}$ и $Q_{\mathcal{P}(Y)}$ — проекции меры Q на $\mathcal{P}_r(X)$ и $\mathcal{P}_r(Y)$ соответственно. На этом множестве рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\int_{\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)} h_1(p,q)\,Q(dp\,dq) \to \min, \qquad Q \in B_1(\mu,\nu). \tag{3.1.7}$$

Назовем эту задачу задачей Канторовича с фиксированными барицентрами проекций.

Для произвольных $\mu \in \mathcal{P}_r(X)$ и $\nu \in \mathcal{P}_r(Y)$ множество $B_1(\mu,\nu)$ является прообразом пары (μ,ν) при отображении $Q \mapsto \big(\beta_{Q_{\mathcal{P}(X)}}, \beta_{Q_{\mathcal{P}(Y)}}\big)$, определенном на множестве мер, сосредоточенных на счетных объединениях произведений

равномерно плотных компактов. Данное отображение выпукло и совершенно, поскольку представляет собой композицию отображений $Q \mapsto (Q_{\mathcal{P}(X)}, Q_{\mathcal{P}(Y)})$ и $(Q_1, Q_2) \mapsto (\beta_{Q_1}, \beta_{Q_2})$.

Заметим, что инфимум функционала в задаче (3.1.7) по $Q \in B_1(\mu, \nu)$ является оптимальной функцией, которая соответствует многозначному отображению $(\mu, \nu) \mapsto B_1(\mu, \nu)$ и функции

$$Q \mapsto \int_{\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)} h_1(p, q)\, Q(dp\, dq), \qquad Q \in \mathcal{P}_r\big(\mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y)\big).$$

Обозначим этот инфимум через $D_{h_1}(\mu, \nu)$. Для полунепрерывной снизу функции h_1 согласно следствию 3.1.7 выполняется равенство

$$D_{h_1}(\mu, \nu) = \sup\left\{ \int_X f\, d\mu + \int_Y g\, d\nu \colon \int_X f\, d\mu' + \int_Y g\, d\nu' \leqslant D_{h_1}(\mu', \nu') \right\},$$

где супремум берется по всем $f \in C_b(X)$ и $g \in C_b(Y)$. Неравенство в данном супремуме эквивалентно

$$\int_X f\, dp + \int_Y g\, dq \leqslant h_1(p, q) \qquad \forall (p, q) \in \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y).$$

Таким образом, получаем следующую двойственность в задаче (3.1.7):

$$\begin{aligned} D_{h_1}(\mu, \nu) = \sup\Bigg\{ \int_X f\, d\mu + \int_Y g\, d\nu \colon \\ f \in C_b(X),\ g \in C_b(Y),\ \int_X f\, dp + \int_Y g\, dq \leqslant h_1(p, q) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

В частности, если функция стоимости h_1 имеет вид

$$h_1(p, q) = \int_X h(x, q)\, p(dx), \qquad p \in \mathcal{P}_r(X),\ q \in \mathcal{P}_r(Y),$$

где $h \colon X \times \mathcal{P}_r(Y) \to [0, \infty)$ полунепрерывна снизу, то получим равенство значений задач

$$\inf_{Q\in B_1(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)} h_1(p, q)\, Q(dp\, dq) = \inf_{P\in\Pi^\beta(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x, q)\, P(dx\, dq).$$

Отметим также, что из (3.1.8) следует, что функция $(p, q) \mapsto D_{h_1}(p, q)$ — выпуклая полунепрерывная снизу оболочка h_1 и, кроме того, справедливо равенство

значений задачи (3.1.7)

$$D_{h_1}(\mu,\nu)=\inf_{Q\in B_1(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)} D_{h_1}(p,q)\,Q(dp\,dq).$$

Рассмотрим еще одну модификацию задачи с барицентрами — задачу с проекциями барицентра. Пусть задана ограниченная борелевская функция стоимости

$$h_2\colon \mathcal{P}_r(X\times Y)\to[0,+\infty).$$

На множестве

$$B_2(\mu,\nu):=\bigl\{P\in\mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(X\times Y)\bigr)\colon \beta_P\in\Pi(\mu,\nu)\bigr\}=\beta^{-1}\bigl(\Pi(\mu,\nu)\bigr)$$

рассматриваем задачу поиска минимума

$$\int_{\mathcal{P}_r(X\times Y)} h_2(\sigma)\,P(d\sigma)\to\min,\qquad P\in B_2(\mu,\nu). \tag{3.1.9}$$

В этом случае для мер $\mu\in\mathcal{P}_r(X)$ и $\nu\in\mathcal{P}_r(Y)$ множество $B_2(\mu,\nu)$ является прообразом при композиции двух выпуклых совершенных отображений $P\mapsto\beta_P$ и $\sigma\mapsto(\sigma_X,\sigma_Y)$. Обозначив инфимум интегралов в (3.1.9) через $V_{h_2}(\mu,\nu)$, замечаем, что V_{h_2} — оптимальная функция для многозначного отображения $(\mu,\nu)\mapsto B_2(\mu,\nu)$ и функции

$$P\mapsto\int_{\mathcal{P}_r(X\times Y)} h_2(\sigma)\,P(d\sigma),\qquad P\in\mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(X\times Y)\bigr).$$

Тогда при условии полунепрерывности снизу функции h_2 в силу следствия 3.1.7 получаем

$$V_{h_2}(\mu,\nu)=\sup\biggl\{\int_X f\,d\mu+\int_Y g\,d\nu\biggr\},$$

где супремум берется по функциям $f\in C_b(X)$ и $g\in C_b(Y)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\int_X f\,dp+\int_Y g\,dq\leqslant V_{h_2}(p,q),\qquad p\in\mathcal{P}_r(X),\ q\in\mathcal{P}_r(Y).$$

Класс таких пар функций (f, g) совпадает со множеством функций, для которых

$$\int_X f(x)\,\sigma_X(dx) + \int_Y g(y)\,\sigma_Y(dy) \leqslant h_2(\sigma) \qquad \forall \sigma \in \mathcal{P}_r(X \times Y).$$

Таким образом, получаем следующую двойственность в задаче (3.1.9):

$$\begin{aligned} V_{h_2}(\mu,\nu) = \sup\Bigg\{ \int_X f\,d\mu + \int_Y g\,d\nu : \\ f \in C_b(X),\ g \in C_b(Y),\ \int_X f\,dp + \int_Y g\,dq \leqslant \inf_{\sigma\in\Pi(p,q)} h_2(\sigma) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Более того, по лемме 3.1.6 функция

$$\widehat{h}(p,q) = \inf_{\sigma\in\Pi(p,q)} h_2(\sigma), \qquad (p,q) \in \mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y)$$

полунепрерывна снизу. Тогда из равенств двойственности (3.1.8) и (3.1.10) следует равенство значений задач (3.1.7) и (3.1.9)

$$V_{h_2}(\mu,\nu) = \inf_{Q\in B_1(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{P}_r(X)\times\mathcal{P}_r(Y)} \widehat{h}(p,q)\,Q(dp\,dq). \tag{3.1.11}$$

В частности, если $h_2(\sigma)$ представляется в виде интеграла по σ от полунепрерывной снизу функции $h\colon X \times Y \to [0,\infty)$, то $V_{h_2}(\mu,\nu) = K_h(\mu,\nu)$.

Таким образом, что соотношение (3.1.11) устанавливает связь задачи (3.1.7) с задачей (3.1.9) для функции стоимости h_2 на $\mathcal{P}_r(X \times Y)$. Обратная связь этих задач для функции стоимости h_1 на $\mathcal{P}_r(X) \times \mathcal{P}_r(Y)$ выражается равенством

$$D_{h_1}(\mu,\nu) = \inf_{P\in B_2(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{P}_r(X\times Y)} h_1(\sigma_X,\sigma_Y)\,P(d\sigma).$$

которое вытекает из (3.1.11) при $h_2(\sigma) = h_1(\sigma_X,\sigma_Y)$.

3.2 Задача Канторовича с условными мерами

В текущем разделе нам потребуется понятие условных мер.

Как хорошо известно (см. [31, следствие 10.4.15]), для измеримого пространства $(\Omega,\mathcal{B})$, суслинского пространства Z и вероятностной меры μ на $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(Z)$ для всех $\omega \in \Omega$ существуют такие меры $\mu^\omega \in \mathcal{P}_r(Z)$, называемые условными мерами, что для всякого множества $B \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(Z)$ функция $\omega \mapsto \mu^\omega(B_\omega)$ является

$\mathcal{B}$-измеримой и

$$\mu(B) = \int_\Omega \mu^\omega(B_\omega)\,\mu_\Omega(d\omega),$$

где $B_\omega := \{z \in Z\colon (\omega, z) \in B\}$, а μ_Ω — проекция μ на Ω. При этом меры μ^ω определены однозначно с точностью до множества μ_Ω-меры нуль. Более того, для всякой функции $f \in L^1(\mu)$ функция $z \mapsto f(\omega, z)$ измерима относительно $\mathcal{B}(Z)_{\mu^\omega}$ и μ^ω-интегрируема для μ_Ω-п. в. $\omega \in \Omega$, функция

$$\omega \mapsto \int_\Omega f(\omega, z)\,\mu^\omega(dz)$$

является $\mathcal{B}_{\mu_\Omega}$-измеримой и μ_Ω-интегрируемой, причем

$$\int_{\Omega\times Z} f(\omega, z)\,\mu(d\omega\,dz) = \int_\Omega \int_Z f(\omega, z)\,\mu^\omega(dz)\,\mu_\Omega(d\omega).$$

Отметим, что для вполне регулярного пространства X и измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{B})$ измеримость отображения $m\colon \Omega \to \mathcal{M}_r(X)$ относительно $\mathcal{B}$ и бэровской σ-алгебры на $\mathcal{M}_r(X)$ равносильна $\mathcal{B}$-измеримости всех функций вида

$$\omega \mapsto \int_X f(x)\,m(\omega)(dx), \qquad f \in C_b(X).$$

Из теоремы о монотонных классах (см. [31, теорема 2.12.9]) легко получить, что указанная измеримость равносильна также $\mathcal{B}$-измеримости функций

$$\omega \mapsto m(\omega)(B)$$

для всех бэровских множеств $B \subset X$. В случае вполне регулярного суслинского пространства X все эти условия эквивалентны $\big(\mathcal{B}, \mathcal{B}\big(\mathcal{M}_r(X)\big)\big)$-измеримости отображения m в силу совершенной нормальности пространства $\mathcal{M}_r(X)$ со слабой топологией.

Далее нам потребуется следующий вариант теоремы об измеримом выборе. Пусть Z и T — непустые множества, $D \subset Z \times T$ и $f\colon D \to \mathbb{R}$. Введем функцию

$$f_D(z) := \inf_{t\in D_z} f(z, t), \qquad z \in \pi_Z(D),$$

где через $\pi_Z(D)$ обозначена проекция множества D на Z, а через D_z — его сечение по переменной $z \in Z$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — измеримое пространство, T — суслинское пространство и $f\colon Z \times T \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу функция. Предположим, что $D \in \mathcal{S}\bigl(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)\bigr)$ и*

$$\{(z,t) \in Z \times T\colon f(z,t) < r\} \in \mathcal{S}\bigl(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)\bigr) \qquad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\pi_Z(D) \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\{z \in \pi_Z(D)\colon f_D(z) < r\} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ для всех $r \in \mathbb{R}$, причем для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\bigl(\sigma\bigl(\mathcal{S}(\mathcal{A})\bigr), \mathcal{B}(T)\bigr)$-измеримое отображение $g\colon \pi_Z(D) \to T$ с графиком в D, что

$$f\bigl(z, g(z)\bigr) \leqslant f_D(z) + \varepsilon \qquad \forall z \in \pi_Z(D).$$

Доказательство. Включение проекции $\pi_Z(D) \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ следует из [31, следствие 6.10.10]. Для доказательства второго включения заметим, что

$$\{z \in \pi_Z(D)\colon f_D(z) < r\} = \pi_Z\bigl(\{(z,t) \in D\colon f(z,t) < r\}\bigr).$$

Множество $\{(z,t) \in D\colon f(z,t) < r\}$ принадлежит $\mathcal{S}\bigl(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)\bigr)$, так как является пересечением множеств D и $\{(z,t) \in Z \times T\colon f(z,t) < r\}$, каждое из которых принадлежит $\mathcal{S}\bigl(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)\bigr)$, а операция Суслина замкнута относительно счетных пересечений согласно [31, теорема 1.10.4]. Применяя вновь [31, следствие 6.10.10], получаем требуемое.

Для доказательства существования отображения g для каждого целого k рассмотрим множество

$$D_k = \{(z,t) \in D\colon f(z,t) < k\varepsilon\} \in \mathcal{S}\bigl(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(T)\bigr).$$

Согласно теореме 6.9.12 из [31] существует $\bigl(\sigma\bigl(\mathcal{S}(\mathcal{A})\bigr), \mathcal{B}(T)\bigr)$-измеримое отображение $g_k\colon \pi_Z(D_k) \to T$ с графиком в D_k. Множества

$$X_k := \{z \in \pi_Z(D)\colon (k-1)\varepsilon \leqslant f_D(z) < k\varepsilon\}$$

образуют $\bigl(\sigma\bigl(\mathcal{S}(\mathcal{A})\bigr)\bigr)$-измеримое разбиение $\pi_Z(D)$, причем $X_k \subset \pi_Z(D_k)$. Искомая функция g задается равенством $g(z) = g_k(z)$ для $z \in X_k$. □

Классическая линейная задача Канторовича допускает естественное обобщение, в котором функция стоимости зависит не только от точек пространства, но

и от самого транспортного плана. Рассматривается задача минимизации нелинейного функционала

$$J_h(\sigma) = \int_{X\times Y} h(x, y, \sigma)\, \sigma(dx\, dy),$$

где функция стоимости h определена на $X \times Y \times \mathcal{P}_r(X \times Y)$. Инфимум функционала $J_h(\sigma)$ по всем $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ обозначим через $K_h(\mu, \nu)$.

В первых исследованиях на эту тему [46], [20], [26], [18], а также в [27] и [28] функция стоимости h имела специальный вид

$$h(x, y, \sigma) = h(x, \sigma^x),$$

где σ^x — условные меры на Y относительно меры μ. В работе [18] доказано, для полных сепарабельных метрических пространств X и Y, безатомической меры μ и непрерывной h выполняется равенство

$$K_h(\mu, \nu) = K_{h^{**}}(\mu, \nu),$$

где h^{**} — выпуклая оболочка функции h по второму аргументу. Переход к выпуклой функции стоимости важен тем, что, как показано в цитированных работах [46], [20], [26], [18], [27] (см. также обобщение в [6] на вполне регулярные пространства), условие выпуклости функции стоимости относительно аргумента-мера гарантирует существование минимума в задаче с условными мерами.

Далее мы обобщим результат об инвариантности значения задачи с условными мерами на более широкий класс пространств, используя концепцию условных мер, теорему 3.2.1 об измеримом выборе, конструкцию выпуклой оболочки функций стоимости и свойства суслинских пространств.

Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство. Тогда для всякой меры $\sigma \in \mathcal{P}_r(X \times Y)$ существует система $\{\sigma^x\}_{x\in X}$ условных мер, для которой отображение $x \mapsto \sigma^x$ является борелевским. Отсюда следует борелевская измеримость отображения

$$F_\sigma(x) = (x, \sigma^x), \qquad X \to X \times \mathcal{P}_r(Y).$$

Следовательно, для всякой $\sigma\big(\mathcal{S}\big(\mathcal{B}\big(X \times \mathcal{P}_r(Y)\big)\big)\big)$-измеримой функции G на произведении $X \times \mathcal{P}_r(Y)$ функция $x \mapsto G(x, \sigma^x) = G\big(F_\sigma(x)\big)$ измерима относитель-

но σ-алгебры $\sigma\bigl(\mathcal{S}\bigl(\mathcal{B}(X)\bigr)\bigr)$.

Зафиксируем меры $\mu \in \mathcal{P}_r(X)$, $\nu \in \mathcal{P}_r(Y)$ и ограниченную функцию стоимости $h\colon X \times \mathcal{P}_r(Y) \to [0, \infty)$, измеримую относительно $\sigma\bigl(\mathcal{S}\bigl(\mathcal{B}\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr)\bigr)\bigr)$. Задачу поиска минимума

$$\int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx) \to \min, \qquad \sigma \in \Pi(\mu, \nu) \tag{3.2.1}$$

назовем задачей Канторовича с условными мерами.

Установим связь между нелинейной задачей Канторовича (3.2.1) с условными мерами и линейной задачей Канторовича (3.1.3) с фиксированным барицентром. Для начала докажем неравенство.

Лемма 3.2.2. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство. Тогда*

$$\inf_{P \in \Pi^\nu(\mu)} \int_{X \times \mathcal{P}_r(Y)} h(x, p)\, P(dx\, dp) \leqslant \inf_{\sigma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx).$$

Доказательство. Для произвольной $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ положим $P := \mu \circ F_\sigma^{-1}$. Тогда $P \in \Pi^\nu(\mu)$, поскольку $P_X = \mu$ и

$$\beta_{P_\mathcal{P}}(B) = \int_X \sigma^x(B)\, \mu(dx) = \sigma(X \times B) = \nu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(Y).$$

Кроме того, по теореме о замене переменных в интеграле имеем равенство

$$\int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx) = \int_{X \times \mathcal{P}_r(Y)} h(x, p)\, P(dx\, dp),$$

из которого непосредственно вытекает требуемое неравенство. □

Оказывается, что при условии полунепрерывности снизу и выпуклости по второму аргументу функции стоимости доказанное равенство обращается в равенство.

Лемма 3.2.3. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, а функция стоимости h полунепрерывна снизу и выпукла по аргументу-мере. Тогда*

$$\inf_{P \in \Pi^\nu(\mu)} \int_{X \times \mathcal{P}_r(Y)} h(x, p)\, P(dx\, dp) = \inf_{\sigma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную меру $P \in \Pi^{\nu}(\mu)$. Поскольку пространство $\mathcal{P}_r(Y)$ является суслинским, существует борелевски измеримая система $\{P^x\}_{x\in X}$ условных мер на $\mathcal{P}_r(X)$. Применяя лемму 2.4.7 к мерам P^x, для всех $x \in X$ получаем неравенство Йенсена

$$h(x, \beta_{P^x}) \leqslant \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P^x(dp).$$

Интегрирование этого неравенства по мере μ дает

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P(dx\, dp) = \\ = \int_X \int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P^x(dp)\, \mu(dx) \geqslant \int_X h(x, \beta_{P^x})\, \mu(dx).$$

Определим теперь меру σ формулой $\sigma(dxdy) := \beta_{P^x}(dy)\, \mu(dx)$. Непосредственно проверяется, что $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$, причем

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P(dx\, dp) \geqslant \int_X h(x,\sigma^x)\, \mu(dx)$$

В сочетании с утверждением леммы 3.2.2 это доказывает искомое равенство. □

Следующий результат устанавливает неравенство между значениями задач (3.1.3) и (3.2.1) с функциями стоимости h и H.

Лемма 3.2.4. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, а функция h борелевски измерима. Тогда справедливо неравенство*

$$\inf_{P\in\Lambda(\mu,\nu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P(dx\, dp) \leqslant \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\, \mu(dx).$$

Доказательство. Зафиксируем меру $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$. Функция H допускает представление

$$H(x,\sigma^x) = \inf_{Q\in D_x} \widetilde{h}(x,Q),$$

где D — прообраз диагонали при борелевском отображении

$$(x,Q) \mapsto (\sigma^x, \beta_Q), \qquad X \times \mathcal{P}_r\big(\mathcal{P}_r(Y)\big) \to \mathcal{P}_r(Y) \times \mathcal{P}_r(Y).$$

Применяя теорему 3.2.1 к измеримому пространству $(X, \mathcal{B}(X))$, суслинскому про-

странству $\mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)$ и функции $\widetilde{h}$, найдем отображение $x \mapsto Q^x$, которое является $\bigl(\sigma\bigl(\mathcal{S}\bigl(\mathcal{B}(X)\bigr)\bigr), \mathcal{B}\bigl(\mathcal{P}_r\bigl(\mathcal{P}_r(Y)\bigr)\bigr)\bigr)$-измеримым, причем $\beta_{Q^x} = \sigma^x$ и

$$\int_{\mathcal{P}_r(Y)} h(x,q)\, Q^x(dq) \leqslant H(x,\sigma^x) + \varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Определим меру P на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$ равенством $P(dx\,dp) := Q^x(dp)\mu(dx)$, т. е.

$$P(C) = \int_X Q^x(C_x)\,\mu(dx), \qquad C \in \mathcal{B}\bigl(X \times \mathcal{P}_r(Y)\bigr).$$

Тогда $P \in \Pi^\nu(\mu)$, так как $P_X = \mu$ и

$$\begin{aligned}\beta_{P_\mathcal{P}}(B) &= \int_{\mathcal{P}_r(Y)} p(B)\, P_\mathcal{P}(dp) = \int_X \int_{\mathcal{P}_r(Y)} p(B)\, Q^x(dp)\,\mu(dx) = \\ &= \int_X \sigma^x(B)\,\mu(dx) = \sigma(X \times B) = \nu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(Y).\end{aligned}$$

Интегрируя неравенство (3.2.2) по мере μ, получаем

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h\, dP \leqslant \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε и σ утверждение доказано. □

В качестве следствия доказанных лемм получаем утверждение о равенстве значений задачи (3.1.3) с функцией стоимости h и задачи (3.2.1) с H.

Следствие 3.2.5. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, а функция стоимости h полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда*

$$\inf_{P\in\Pi^\nu(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\, P(dx\,dp) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

Доказательство. Из леммы 3.2.4 и неравенства $H \leqslant h$ получаем цепочку неравенств

$$K_H^\nu(\mu) \leqslant K_h^\nu(\mu) \leqslant \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

С другой стороны, по доказанному ранее функция H выпукла по второму аргументу и полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Применяя лемму 3.2.3 к функции H,

получаем равенство

$$\inf_{P\in\Pi^\nu(\mu)}\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} H(x,p)\,P(dx\,dp)=\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx),$$

что завершает доказательство. □

Наконец, установим равенство значений задач (3.1.3) и (3.2.1) с функцией стоимости без предположения выпуклости.

Лемма 3.2.6. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, мера μ сепарабельна и не имеет атомов, а функция h непрерывна на $X\times\mathcal{P}_r(Y)$. Тогда*

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx)=\inf_{P\in\Pi^\nu(\mu)}\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp).$$

Доказательство. Как показано в [2, теорема 4.5], значения в транспортной задаче (3.2.1) с условными мерами и в задаче Монжа с фиксированным барицентром равны, т. е.

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx)= \\ =\inf\biggl\{\int_X h\bigl(x,T(x)\bigr)\,\mu(dx)\colon T\colon X\to\mathcal{P}(Y),\ \beta_{\mu\circ T^{-1}}=\nu\biggr\},$$

где инфимум в правой части берется по всем борелевским преобразованиям T. С другой стороны, как отмечено выше, задача (3.1.3) имеет решение $P\in\Pi^\nu(\mu)$, причем выполнено равенство

$$K_h(\mu,P_{\mathcal{P}})=K_h^\beta(\mu).$$

Поскольку h непрерывна, а μ сепарабельна и не имеет атомов, то согласно [3] этот минимум совпадает с инфимумом Монжа

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h\,dP=\inf\biggl\{\int_X h\bigl(x,T(x)\bigr)\,\mu(dx)\colon T\colon X\to\mathcal{P}(Y),\mu\circ T^{-1}=P_{\mathcal{P}}\biggr\}.$$

Следовательно,

$$\int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h\,dP\geqslant\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)}\int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

В сочетании с леммой 3.2.2 это доказывает искомое равенство. □

Из всего доказанного выше вытекает утверждение основной теоремы о замене функции стоимости ее выпуклой оболочкой.

Теорема 3.2.7. *Пусть X, Y — вполне регулярные пространства, причем Y — суслинское пространство, мера μ сепарабельна и не имеет атомов, а функция h непрерывна на $X \times \mathcal{P}_r(Y)$. Тогда*

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

Доказательство. Из леммы 3.2.6 следует равенство

$$\inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X h(x,\sigma^x)\,\mu(dx) = \inf_{P\in\Pi^\nu(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp).$$

С другой стороны, согласно следствию 3.2.5 имеем

$$\inf_{P\in\Pi^\nu(\mu)} \int_{X\times\mathcal{P}_r(Y)} h(x,p)\,P(dx\,dp) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_X H(x,\sigma^x)\,\mu(dx).$$

Комбинируя эти два равенства, получаем требуемый результат. □

Глава 4
Гауссовские операторы перехода

4.1 Одномерный случай

В работе А. С. Холево [17] (анонсировано в [39]) установлено, что всякий феллеровский оператор T на $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, отображающий гауссовские меры в гауссовские, допускает представление в виде свертки фиксированной гауссовской меры γ_0 с образом меры при линейном операторе S:

$$T\mu = \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}). \tag{4.1.1}$$

Отметим, что оператор T вида (4.1.1) однозначно определяется образами дираковских мер, так как $\gamma_0 = T\delta_0$, а Sx является разностью средних гауссовских мер $T\delta_x$ и $T\delta_0$.

Отображение $T\colon \mathcal{M}_r(X) \to \mathcal{M}_r(X)$ называется феллеровским, если существует такое отображение $T^*\colon C_b(X) \to C_b(X)$, что

$$\int_X f(x)\, T\mu(dx) = \int_X T^* f(x)\, \mu(dx) \qquad \forall f \in C_b(X),\ \forall \mu \in \mathcal{M}_r(X).$$

Феллеровость оператора T эквивалентна линейности и непреывности в слабой топологии на $\mathcal{M}_r(X)$. При этом согласно теореме Банаха – Штейнгауза T автоматически ограничен по норме полной вариации.

Гауссовской мерой на $\mathbb{R}$ называется образ стандартной гауссовской меры с плотностью $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ при аффинном преобразовании. В том числе гауссовской считается мера δ_a. На локально выпуклом пространстве X гауссовской называется вероятностная радоновская мера γ, для которой все одномерные проекции $\gamma \circ f^{-1}$, $f \in X^*$, гауссовы. В силу устойчивости γ порядка 2 существует барицентр $m_\gamma \in X$. О гауссовских мерах см. [29].

Одномерной гауссовской мерой на X назовем образ стандартной гауссовской меры при аффинном вложении

$$L_{x,y}\colon \mathbb{R} \to X, \qquad t \mapsto tx + y, \qquad x, y \in X.$$

Через $\mathcal{G}(X)$ обозначим линейную оболочку множества гауссовских радоновских мер на X.

Далее рассмотрим одномерный случай $X = \mathbb{R}$, упрощая метод Холево из [17]. Гауссовскую меру на $\mathbb{R}$ со средним a и дисперсией σ^2 обозначим через $\mu_{a,\sigma}$.

Теорема 4.1.1. *Пусть отображение $T\colon \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R})$ переводит гауссовские меры в гауссовские, причем для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует такая функция $g_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$, что*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda x)\, T\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, \mu(dx) \qquad \forall \mu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}). \tag{4.1.2}$$

Тогда T линейно и существуют такие гауссовская мера γ_0 и линейная функция $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что (4.1.1) *верно для всех $\mu \in \mathcal{G}(X)$.*

Доказательство. Линейность T следует из линейности правой части равенства (4.1.2) по μ и инъективности преобразования Фурье.

Пусть гауссовская мера $\mu_{x,t}$, $t \geqslant 0$ имеет образ $T\mu_{x,t} = \mu_{a(x,t),\sigma(x,t)}$. Функции $a(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ непрерывны по (x,t), так как сходимость преобразований Фурье гауссовских мер равносильна сходимости параметров и

$$\mathcal{F}(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda y)\, T\mu_{x,t}(dy) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(y)\, \mu_{x,t}(dy) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

где через $\mathcal{F}(\mu)$ обозначено преобразование Фурье меры μ. В частности, при $t = 0$ получаем

$$\mathcal{F}(\mu_{a(x,0),\sigma(x,0)})(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(y)\, \mu_{x,0}(dy) = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(y)\, \delta_x(dy) = g_\lambda(x).$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\mu_{a(y,0),\sigma(y,0)})(\lambda)\, \mu_{x,t}(dy), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.1.3}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, & t > 0, \\ u(x,0) = g_\lambda(x) \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Так как плотность меры $\mu_{x,t}$ является фундаментальным решением уравнения

теплопроводности, то соотношение (4.1.3) означает, что функция

$$u_\lambda(x,t) = \mathcal{F}(\mu_{a(x,t),\sigma(x,t)})(\lambda)$$

является решением (4.1.4). Поскольку $u_\lambda \in C^\infty\big(\mathbb{R}\times(0,\infty)\big)$, функции $a(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ дифференцируемы при $t>0$. Подстановка

$$u_\lambda(x,t) = \exp\Big(i\lambda a(x,t) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma(x,t)\Big)$$

в уравнение (4.1.4) и дифференцирование дают

$$i\lambda\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{1}{2}\Big(i\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial^2 x} - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial^2\sigma}{\partial^2 x}\Big) + \frac{1}{2}\Big(i\lambda\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{2}\lambda^2\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Big)^2. \tag{4.1.5}$$

Так как левая часть — многочлен по λ степени не выше двух, коэффициент при λ^4 справа должен обращаться в ноль, откуда $\partial\sigma/\partial x = 0$. Учитывая это, приходим к двум уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial^2 x},\\ \frac{\partial\sigma}{\partial t} &= \Big(\frac{\partial a}{\partial x}\Big)^2.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Из независимости σ от x и второго уравнения (4.1.6) следует линейность a по x, т. е. $a(x,t) = A_t x + a(0,t)$. Тогда с учетом первого уравнения в (4.1.6) получим, что $a(x,t)$ не зависит от t. Следовательно,

$$a(x,t) = a(x) = Ax + a(0,0), \quad a(0,0) = a_{T\mu_{0,0}} = a_{T\delta_0}.$$

Тогда снова из второго тождества в (4.1.6) видно, что функция $\sigma(x,t)$ линейна по t. Окончательно получаем

$$\sigma(x,t) = A^2 t + \sigma(0,0), \quad \sigma(0,0) = \sigma_{T\mu_{0,0}} = \sigma_{T\delta_0}.$$

Положим $S(x) = Ax$. Для преобразования Фурье образа имеем

$$\begin{aligned} u_\lambda(x,t) &= \mathcal{F}(T\mu_{x,t})(\lambda) = \exp(i\lambda a(x,t)) \exp\Big(-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma(x,t)\Big) = \\ &= \exp\Big[i\lambda\big(S(x) + a(0,0)\big)\Big] \exp\Big[-\frac{1}{2}\lambda^2\big(A^2t + \sigma(0,0)\big)\Big] = \\ &= \mathcal{F}(T\delta_0)(\lambda)\mathcal{F}(\mu_{x,t})(A\lambda) = \mathcal{F}(T\delta_0)(\lambda)\mathcal{F}(\mu_{x,t}\circ S^{-1})(\lambda) = \\ &= \mathcal{F}\big(T\delta_0 * (\mu_{x,t}\circ S^{-1})\big)(\lambda), \end{aligned}$$

следовательно, $T\mu_{x,t} = T\delta_0 * (\mu_{x,t}\circ S^{-1})$. □

4.2 Общий случай

Перейдем к случаю произвольного локально выпуклого пространства. Сначала докажем лемму о непрерывности операций с мерами.

Лемма 4.2.1. *Пусть X, Y — топологические пространства и μ — τ-аддитивная мера на Y.*

(i) *Оператор*

$$\Phi\colon \mathcal{M}_\tau(X) \to \mathcal{M}_\tau(X\times Y), \qquad \nu \mapsto \nu\otimes\mu$$

непрерывен в слабой топологии.

(ii) *Если X — топологическое векторное пространство, то оператор*

$$\Psi\colon \mathcal{M}_\tau(X) \to \mathcal{M}_\tau(X), \qquad \nu \mapsto \nu * \mu$$

непрерывен в слабой топологии.

Доказательство. (i) Для $f \in C_b(X\times Y)$ функция

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mu(dy)$$

непрерывна и ограничена (см. [44, §417B]). Из этого и теоремы Фубини [44, §417H] для τ-аддитивных мер следует слабая непрерывность Φ.

(ii) Свертка выражается как композиция

$$\nu * \mu = (\nu\otimes\mu)\circ A^{-1}, \qquad A(x,y) = x + y.$$

Так как отображение A непрерывно, оператор $\sigma \mapsto \sigma \circ A^{-1}$ слабо непрерывен. В сочетании с (i) это дает слабую непрерывность Ψ. $\square$

Теорема 4.2.2. *Пусть X — локально выпуклое пространство и линейный оператор $T\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{M}_r(X)$ отображает все одномерные гауссовские меры в гауссовские. Предположим, что для каждого $f \in X^*$ существует такая ограниченная и непрерывная на аффинных прямых функция $g_f\colon X \to \mathbb{C}$, что*

$$\int_X \exp(if)\, d(T\nu) = \int_X g_f\, d\nu \qquad \forall \nu \in \mathcal{G}_1(X),$$

где $\mathcal{G}_1(X)$ — множество одномерных гауссовских мер на X. Тогда существуют такие гауссовская мера γ_0 и линейный оператор $S\colon X \to X$, что (4.1.1) *верно для всех дираковских мер.*

Если T продолжен до слабо непрерывного линейного оператора на $\mathcal{M}_r(X)$, то оператор S непрерывен и T имеет вид (4.1.1) *для всех мер из $\mathcal{M}_r(X)$.*

Доказательство. Для $x, y \in X$ и $f \in X^*$ положим $g_{x,y,f}(t) = g_f(tx + y)$,

$$G_{x,y,f}\colon \mathcal{G}(\mathbb{R}) \to \mathcal{G}(\mathbb{R}), \quad G_{x,y,f}\nu = T(\nu \circ L_{x,y}^{-1}) \circ f^{-1}, \qquad \nu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}).$$

Тогда $G_{x,y,f}$ отображает гауссовские меры на прямой в гауссовские. Кроме того, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda t)\, G_{x,y,f}\nu(dt) = \int_{\mathbb{R}} g_{x,y,\lambda f}(t)\, \nu(dt), \qquad \nu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}).$$

Это означает, что $G_{x,y,f}$ удовлетворяет предположениям теоремы 4.1.1 с

$$g_\lambda = g_{x,y,\lambda f} \in C_b(\mathbb{R}).$$

Следовательно, существуют такие $\sigma_{x,y,f} = G_{x,y,f}\delta_0 = T\delta_y \circ f^{-1}$ и линейная функция $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S_{x,y,f}(t) = s_{x,y,f}t$, что

$$G_{x,y,f}\nu = \sigma_{x,y,f} * (\nu \circ S_{x,y,f}^{-1}) \qquad \forall \nu \in \mathcal{G}(\mathbb{R}). \tag{4.2.1}$$

При $\nu = \delta_t$, $t \in \mathbb{R}$, получаем

$$G_{x,y,f}\nu = T(\delta_{tx+y}) \circ f^{-1} = T(\delta_y) \circ f^{-1} * \delta_{S_{x,y,f}(t)}, \tag{4.2.2}$$

откуда следует равенство средних

$$f\big(m_{T(\delta_{tx+y})}\big) = f\big(m_{T(\delta_y)}\big) + s_{x,y,f}t. \tag{4.2.3}$$

Положим $\gamma_0 := T\delta_0$ и определим $S\colon X \to X$ формулой

$$Sx := m_{T\delta_x} - m_{\gamma_0}.$$

Докажем линейность S. В самом деле, равенство (4.2.3) принимает вид

$$f\big(S(tx+y)\big) = f(Sy) + s_{x,y,f}t. \tag{4.2.4}$$

Так как $S(0) = 0$, то при $y = 0$ из (4.2.4) имеем

$$f\big(S(tx)\big) = s_{x,0,f}t = tf(Sx) = f(tSx) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В силу произвольности $f \in X^*$ заключаем, что

$$S(tx) = tS(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

что доказывает однородность S. Для доказательства аддитивности запишем соотношение (4.2.4) в виде

$$f\big(S(tx+y)\big) - f(Sy) = ts_{x,y,f} = t\big(f\big(S(x+y)\big) - f(Sy)\big). \tag{4.2.5}$$

Воспользовавшись однородностью S, имеем

$$f\big(S(x+y/t)\big) - f(Sy)/t = f\big(S(x+y)\big) - f(Sy). \tag{4.2.6}$$

Поменяв x, y в (4.2.5) местами, получим, что

$$\lim_{t\to 0} f\big(S(x+ty)\big) = f(Sx).$$

Тогда, переходя к пределу при $t \to \infty$ в (4.2.6), заключаем, что для всех $x, y \in X$ и $f \in X^*$ выполнено равенство

$$f(Sx) = f\big(S(x+y)\big) - f(Sy) = f\big(S(x+y) - Sy\big).$$

Поэтому S аддитивно. Линейность S доказана.

Теперь установим, что T имеет вид (4.1.1) для дираковских мер. Действительно, при $y = 0$ и $t = 1$ из (4.2.2) с учетом равенств

$$f(Sx) = s_{x,0,f} = S_{x,0,f}(1),$$

получим

$$T(\delta_x) \circ f^{-1} = \gamma_0 \circ f^{-1} * \delta_{f(Sx)} \qquad \forall f \in X^*,$$

откуда $T\delta_x = \gamma_0 * \delta_{Sx}$ для всех $x \in X$. Первое утверждение доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Непрерывность S следует из слабой непрерывности оператора T и теоремы 2.3.1 (или теоремы 2.3.2).

Наконец, чтобы доказать, что T имеет вид (4.1.1) на $\mathcal{M}_r(X)$, рассмотрим линейный оператор

$$R\colon \mathcal{M}_r(X) \to \mathcal{M}_r(X), \qquad \mu \mapsto \gamma_0 * (\mu \circ S^{-1}).$$

Из леммы 4.2.1 и непрерывности S следует, что отображение R слабо непрерывно. Так как T и R совпадают на дираковских мерах, а линейная оболочка $\{\delta_x\}_{x\in X}$ плотна в $\mathcal{M}_r(X)$ в слабой топологии, то $T = R$ на $\mathcal{M}_r(X)$. □

Замечание 4.2.3. Непрерывность S можно установить и непосредственно, без использования теорем 2.3.1 и 2.3.2. В самом деле, из непрерывности оператора T следует, что для всякой направленности $x_\alpha \to 0$,

$$T(\delta_{x_\alpha}) = \gamma_0 * \delta_{Sx_\alpha} \Rightarrow \gamma_0.$$

Предположим, что отображение S разрывно в нуле. Тогда существуют такие направленность $x_\alpha \to 0$ и непрерывная полунорма q на X, что $q(Sx_\alpha) > 1$ для всех α. Выберем $R > 0$ с $\gamma_0(q < R) > 1/2$. Для множества $V = \{q < R\}$ имеем $S(2Rx_\alpha) \notin 2V$ для всех α. Поэтому $V \cap \big(V - S(2Rx_\alpha)\big) = \varnothing$, откуда

$$\gamma_0\big(V - S(2Rx_\alpha)\big) = \gamma_0 * \delta_{S(2Rx_\alpha)}(V) < \frac{1}{2},$$

что противоречит слабой сходимости $\gamma_0 * \delta_{S(2Rx_\alpha)} \Rightarrow \gamma_0$.

Отметим, что работе [57] также получен аналог теоремы 4.2.2 для секвенциально непрерывных операторов T и соответствующих им секвенциально непрерывных операторов S в (4.1.1).

Пусть X — локально выпуклое пространство и $\mathcal{M}_S(X)$ — множество радоновских мер, сосредоточенных на счетных объединениях метризуемых компактов (эквивалентно — на суслинских множествах). Тогда $\mathcal{M}_S(X)$ — линейное подпространство в $\mathcal{M}_r(X)$, причем $\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{M}_S(X)$ согласно теореме Цирельсона (см. [29, теорема 3.4.1]).

Обозначим через $SC_b(X)$ пространство ограниченных секвенциально непрерывных функций на X. Функции из $SC_b(X)$ измеримы относительно всех мер из $\mathcal{M}_S(X)$, что позволяет определить на $\mathcal{M}_S(X)$ топологию τ_{SC} двойственности с $SC_b(X)$. Эта топология сильнее слабой, если на X существуют разрывные секвенциально непрерывные функции.

Теорема 4.2.4. *Пусть линейный оператор $T\colon \mathcal{M}_S(X) \to \mathcal{M}_S(X)$ отображает одномерные гауссовские меры в гауссовские и непрерывен в топологии τ_{SC}. Тогда найдутся такие гауссовская мера γ_0 и линейный секвенциально непрерывный оператор $S\colon X \to X$, что* (4.1.1) *верно для всех мер из $\mathcal{M}_S(X)$.*

Возвращаясь к вопросу о непрерывности в слабой топологии, покажем, что условие слабой непрерывности оператора T в теореме Холево и во втором утверждении теоремы 4.2.2 действительно является существенным и не может быть опущено.

Пример 4.2.5. Разложим пространство борелевских мер на прямой в прямую сумму трех пространств

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_a(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_s(\mathbb{R}),$$

где $\mathcal{M}_a(\mathbb{R})$ состоит из абсолютно непрерывных мер, $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ — мер, сосредоточенных на счетных множествах, а $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ — сингулярных мер без атомов.

В качестве оператора рассмотрим проектор T на $\mathcal{M}_a(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

$$T\mu = T(\mu_a + \mu_d + \mu_s) = \mu_a + \mu_d.$$

Этот оператор ограничен с $\|T\| \leqslant 1$ и отображает гауссовские меры в гауссовские, но разрывен в слабой топологии, так как равен нулю на всюду плотном в слабой топологии множестве $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$. Заметим, что для гауссовских мер T имеет вид (4.1.1) с $S = \mathrm{Id}$ и $\gamma_0 = \delta_0$.

Теперь модифицируем оператор на компоненте $\mathcal{M}_a(\mathbb{R})$

$$\widetilde{T}\mu = \gamma_1 * \mu_a + \mu_d,$$

где γ_1 — стандартная гауссовская мера. Оператор $\widetilde{T}$ сохраняет гауссовость мер, однако разрывен в слабой топологии и уже не представим в виде (4.1.1) на гауссовских мерах.

Заключение

В диссертационной работе проведено систематическое исследование топологий на пространствах мер и их приложений к задачам оптимального транспорта и функционального анализа. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории меры и могут быть применены в различных разделах математики.

Основные научные результаты работы заключаются в следующем.

1. **В первой главе** исследованы топологии типа Канторовича. Установлено, что топология Канторовича – Рубинштейна τ_{KR} совпадает со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах. Получены точные условия сходимости и компактности в топологиях τ_K и τ_{KR}, исследованы свойства носителей мер в пространствах Фреше. Рассмотрены также полунормы Канторовича порядка q и изучена сходимость выпуклых и устойчивых мер в соответствующих топологиях.

2. **Во второй главе** изучаются свойства барицентров мер и функционалов. Установлены обобщенные неравенства Йенсена для выпуклых функций на пространствах мер, получены условия сходимости барицентров при слабой сходимости мер. Исследованы свойства барицентров выпуклых и устойчивых мер, введено понятие барицентра функционала и доказана теорема о связи плотности функционала и плотности его барицентра.

3. **В третьей главе** решены важные задачи теории оптимального транспорта. Доказаны теоремы двойственности для задач Канторовича барицентрического типа. Установлена инвариантность значения задачи с условными мерами относительно замены функции стоимости на ее выпуклую оболочку. Разработан единый подход к изучению различных постановок задач оптимального транспорта.

4. **В четвертой главе** доказаны структурные теоремы, связанные с гауссовскими операторами перехода. Установлено, что операторы, сохраняющие гауссовость мер, представимы в виде свертки с фиксированной гауссовской мерой с образом меры при линейном операторе. Результаты получены как для одномерного случая, так и для общих локально выпуклых пространств.

Укажем несколько перспективных направлений дальнейших исследований.

1. Изучение нелинейных задач оптимального транспорта с дополнительными ограничениями.

2. Исследование топологий на пространствах мер со значениями в банаховых пространствах.

3. Исследование свойств псевдометрик Хаусдорфа на пространстве компактов, порожденных полунормами Канторовича.

4. Развитие теории гауссовских операторов для нелинейных преобразований.

5. Исследование вида операторов на пространствах мер, сохраняющих другие классы мер (выпуклые, устойчивые фиксированного порядка и др.).

Список литературы

[1] Александров А.Д. Additive set-functions in abstract spaces // Матем. сб. – 1940. – Т. 8(50). – С. 307–348; ibid. 1941. – Т. 9(51). – С. 563–628; ibid. 1943. – Т. 13(55). – С. 169–238.

[2] Богачев В.И. Задача Канторовича оптимальной транспортировки мер: новые направления исследований // УМН. – 2022. – Т. 77, № 5(467). – С. 3–52.

[3] Богачев В.И., Калинин А.Н., Попова С.Н. О равенстве значений в задачах Монжа и Канторовича // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2017. – Т. 457. – С. 53–73.

[4] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы // УМН. – 2012. – Т. 67, № 5(407). – С. 3–110.

[5] Богачев В.И., Колесников А.В., Шапошников С.В. Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований. М.–Ижевск, 2023. – 664 С.

[6] Богачев В.И., Резбаев А.В. Существование решений нелинейной задачи Канторовича оптимальной транспортировки // Матем. заметки. – 2022. – Т. 112, № 3. – С. 360–370.

[7] Булдыгин В.В. Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29, № 3. – С. 528–532.

[8] Варадарайн В.С. Меры на топологических пространствах // Матем. сб. – 1961. – Т. 55, № 1. – С. 35–100.

[9] Вершик А.М., Затицкий П.Б., Петров Ф.В. Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения // УМН – 2014. – Т. 69, № 6. – С. 81–114.

[10] Канторович Л.В. О перемещении масс // Докл. АН СССР. – 1942. – Т. 37, № 7–8. – С. 227–229.

[11] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 115, № 6. – С. 1058–1061.

[12] Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества // Вестн. ЛГУ. – 1958. – Т. 7, № 2. – С. 52–59.

[13] Ле-Кам Л. Сходимость по распределению случайных процессов // Математика. – 1960. – Т. 4, № 3. – С. 107–142.

[14] Малыхин Ю.В., Рютин К.С. Поперечники и жесткость безусловных множеств и случайных векторов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 45–59.

[15] Погодаев Н.И., Старицын М.В. Нелокальные уравнения баланса с параметром в пространстве знакопеременных мер // Матем. сб. – 2022. – Т. 213, № 1. – С. 69–94.

[16] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. – 1956. – Т. 1, № 2. – С. 177–238.

[17] Холево А.С. О характеризации гауссовских операторов перехода // Теория вероятн. и ее примен. – 2016. – Т. 61, № 4. – С. 830–837.

[18] Acciaio B., Beiglböck M., Pammer G. Weak transport for non-convex costs and model-independence in a fixed-income market // Math. Finance. – 2021. – Vol. 31, No. 4. – P. 1423–1453.

[19] de Acosta A. Stable measures and seminorms // Ann. Probab. – 1975. – Vol. 3, No. 5. – P. 865–875.

[20] Alibert J.-J., Bouchitté G., Champion T. A new class of costs for optimal transport planning // Eur. J. Appl. Math. – 2019. – Vol. 30, No. 6. – P. 1229–1263.

[21] Aliprantis C.D., Border K.C. Infinite dimensional analysis. A hitchhiker's guide. 3rd ed. Springer. Berlin, 2006. – xxii+703 P.

[22] Ambrosio L., Brué E., Semola D. Lectures on optimal transport. 2nd ed. Springer. Cham, 2024. – xi+260 P.

[23] Ambrosio L., Gigli N. A user's guide to optimal transport // Lect. Notes in Math. – 2013. – Vol. 2062. – P. 1–155.

[24] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures. 2nd ed. Birkhäuser. Basel, 2008. – vii+334 P.

[25] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Density of Lipschitz functions and equivalence of weak gradients in metric measure spaces // Rev. Mat. Iberoam. – 2013. – Vol. 29, No. 3. – P. 969–996.

[26] Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Pammer G. Existence, duality, and cyclical monotonicity for weak transport costs // Calc. Var. Partial Differ. Equ. – 2019. – Vol. 58, No. 6. – Art. 203. – 28 P. 5

[27] Backhoff-Veraguas J., Pammer G. Applications of weak transport theory // Bernoulli. – 2022. – Vol. 28, No. 1. – P. 370–394.

[28] Backhoff-Veraguas J., Pammer G. Stability of martingale optimal transport and weak optimal transport // Ann. Appl. Probab. – 2022. – Vol. 32, No. 1. – P. 721–752.

[29] Bogachev V.I. Gaussian measures. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1998. – xii+433 P.

[30] Bogachev V.I. Average approximations and moments of measures // J. Complexity. – 2000. – Vol. 16, No. 2. – P. 390–410.

[31] Bogachev V.I. Measure theory. V. 1, 2. Springer. Berlin., 2007. – xviii+500 P., xiv+575 P.

[32] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2010. – xvi+488 P.

[33] Bogachev V.I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2018. – xii+286 P.

[34] Bogachev V.I., Popova S.N. On Radon barycenters of measures on spaces of measures // Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat. – 2023. – Vol. 44. – P. 19–30.

[35] Bogachev V.I., Popova S.N., Rezbayev A.V. On nonlinear Kantorovich problems with density constraints // Mosc. Math. J. – 2023. – Vol. 23, No. 3. – P. 285–307.

[36] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Topological vector spaces and their applications. Springer. Cham, 2017. – x+456 P.

[37] Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Mat. – 1974. – Vol. 12, No. 2. – P. 239–252.

[38] Castaing C., Raynaud de Fitte P., Valadier M. Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2004. – xii+320 P.

[39] De Palma G., Mari A., Giovannetti V., Holevo A.S. Normal form decomposition for Gaussian-to-Gaussian superoperators // J. Math. Phys. – 2015. – Vol. 56, No. 5. – Art. 052202. – 19 P.

[40] Dudley R.M., Kanter M. Zero-one laws for stable measures // Proc. Am. Math. Soc. – 1974. – Vol. 45, No. 2. – P. 245–252.

[41] Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators, I. General Theory. Interscience Publishers. New York, 1958. – xxiv+858 P.

[42] Engelking R. General topology. Heldermann Verlag. Berlin, 1989. – viii+529 P.

[43] Figalli A., Glaudo F. An invitation to optimal transport, Wasserstein distances, and gradient flows. EMS Press. Berlin, 2023. – vi+146 P.

[44] Fremlin D.H. Measure theory. University of Essex. Colchester, 2000-2003. – V. 1-5.

[45] Fremlin D.H., Johnson R.A., Wajch E. Countable network weight and multiplication of Borel sets // Proc. Am. Math. Soc. – 1996. – Vol. 124, No. 9. – P. 2897–2903.

[46] Gozlan N., Roberto C., Samson P.-M., Tetali P. Kantorovich duality for general transport costs and applications // J. Funct. Anal. – 2017. – Vol. 273, No. 11. – P. 3327–3405.

[47] Isbell J.R. Uniform spaces. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1964. – xi+175 P.

[48] Mordukhovich B.S., Nam N.M. Convex Analysis and Beyond. Volume I. Basic Theory. Springer. Cham, 2022. – xvii+585 P.

[49] Melleray J., Petrov F.V., Vershik A.M. Linearly rigid metric spaces and the embedding problem // Fundam. Math. – 2008. – Vol. 199, No. 2. – P. 177–194.

[50] Pachl J. Uniform spaces and measures. Springer. New York, 2013. – x+209 P.

[51] Page W. Topological uniform structures. Dover Publications. New York, 1988. – xvi+398 P.

[52] Santambrogio F. Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs, and modeling. Birkhäuser/Springer. Cham, 2015. – xxvii+353 P.

[53] Topsøe F. Topology and measure. Springer-Verlag. Berlin-New York, 1970. – xiv+79 P.

[54] Vershik A.M., Petrov F.V., Zatitskiy P.B. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11, No. 3. – P. 379–400.

[55] Villani C. Optimal transport. Old and new. Springer-Verlag. Berlin, 2009. – xxii+973 P.

[56] Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1986. – ix+284 P.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[57] Алексеев А.Г., Афонин К.А., Богачев В.И. О гауссовских операторах перехода // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2021. – Т. 500. – С. 10–15.

Alekseev A.G., Afonin K.A., Bogachev V.I. On Gaussian transition operators // Dokl. Math. – 2021. – Vol. 104, No. 2. – P. 229–233.

[58] Afonin K.A., Bogachev V.I. Kantorovich type topologies on spaces of measures and convergence of barycenters // Commun. Pure Appl. Anal. – 2023. – Vol. 22, No. 2. – P. 597–612.

[59] Афонин К.А. Нелинейная задача Канторовича оптимальной транспортировки мер с невыпуклыми функциями стоимости // Функц. анализ и его прил. – 2023. – Т. 57, № 4. – С. 3–16.

Afonin K.A. The nonlinear Kantorovich transportation problem with nonconvex costs // Funct. Anal. Appl. – 2023. – V. 57, No. 4. – P. 267–278.

[60] Афонин К.А. Двойственность в задаче Канторовича с фиксированным барицентром и барицентры функционалов // Функц. анализ и его прил. – 2024. – Т. 58, № 2. – С. 5–22.

Afonin K.A. Duality for the Kantorovich problem with a fixed barycenter and barycenters of functionals // Funct. Anal. Appl. – 2024. – V. 58, No. 2. – P. 105–119.

Тезисы докладов на научных конференциях

[61] Афонин К.А. О гауссовских эндоморфизмах // Сборник тезисов докладов шестой Санкт-Петербургской молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике. СПбГУ. 2022. – с. 4–5.

[62] Афонин К.А. Топологии типа Канторовича на пространстве мер и сходимость барицентров // Сборник тезисов докладов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025». М: МГУ. 2025. – 1 с.