ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации К. А. Афонина
«Топология пространств мер»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук
по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный
и функциональный анализ

Представленная работа К. А. Афонина является исследованием в области теории меры и функционального анализа. Ее цель — систематическое изучение топологий типа Канторовича на пространствах мер и их приложений к задачам оптимальной транспортировки, теории барицентров и структуре линейных операторов. Тематика диссертации относится к интенсивно развивающемуся сейчас направлению функционального анализа на стыке с теорией меры, теорией экстремальных задач и стохастическим анализом. В последние два десятилетия заметно возрос интерес к топологиям Канторовича и Канторовича–Рубинштейна. Это связано с развитием теории оптимального транспорта и приложениями в статистике, машинном обучении, теории случайных процессов и математической экономике. Упомянутые топологии дают естественный язык для описания сходимости мер и обладают богатой дуальной структурой, что позволяет применять методы функционального анализа к задачам о сходимости и компактности. Актуальность исследования задач оптимальной транспортировки мер в бесконечномерных пространствах обусловлена расширяющимся применением математических методов анализа распределения ресурсов и транспортных потоков с большим числом параметров и степеней свободы, что во многих ситуациях ведет к целесообразности рассмотрения таких систем как бесконечномерных.

Исследования в близких к диссертации направлениях проводятся в ведущих научных центрах мира, по этой тематике регулярно выходят публикации в центральных математических журналах. Среди ведущих специалистов, активно работающих в этой области, можно назвать Л. Амброзио, С. Виллани, А. Фигалли.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 14 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы. Во введении дан обзор по теме работы и сформулированы ее основные результаты.

Результаты главы 1 относятся к общей теории слабых топологий на пространствах мер на вполне регулярных топологических пространствах.

В главе 2 изучаются свойства барицентров мер и функционалов. Установлена интересная векторная версия неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств. Из нее получен более специальный вариант для барицентров мер, заданных на пространствах вероятностных мер. Эта версия существенно используется в третьей главе при исследовании задачи Канторовича с условными мерами и обосновании перехода от нелинейной постановки к линейной. В этой же главе строится теория барицентров функционалов. Она позволяет рассматривать не только меры, но и линейные функционалы, что расширяет методы анализа и связывает экстремальные задачи с геометрией пространств мер. В частности, найдена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра. Полученные результаты также применяются в задачах двойственности для оптимального транспорта в главе 3.

Глава 3 посвящена задачам Канторовича оптимальной транспортировки мер в различных постановках, в том числе задачам с фиксированным барицентром и с условными мерами. Эта тематика восходит к основополагающей работе Л. В. Канторовича 1942 года, в которой рассматривалась линейная постановка, ставшая классической. Первый раздел этой главы связан с двойственностью в задачах Канторовича барицентрического типа. Основное внимание уделено задаче с фиксированным барицентром. Для нее доказана общая теорема двойственности, обобщающая ранее известные результаты на случай вполне регулярных пространств. Кроме того, рассмотрены две новые постановки задач: задача с фиксированными барицентрами проекций и

задача с фиксированными проекциями барицентра. Для них также доказаны теоремы двойственности. Показано, что все эти барицентрические задачи тесно связаны между собой и с классической задачей Канторовича. Для специальных функций стоимости их значения совпадают. При доказательстве активно использовался аппарат барицентров функционалов, развитый во второй главе. В этой же главе рассматривается нелинейная задача Канторовича с условными мерами, где функция стоимости зависит от условных мер транспортного плана. Эта проблематика активно развивается в последние годы. Основным результатом является равенство значений исходной задачи и задачи с выпуклой оболочкой функции стоимости. Доказательство опирается на вариант неравенства Йенсена для мер на пространствах мер, тонкие свойства условных мер и теоремы об измеримом выборе в суслинских пространствах. Полученные результаты обобщают утверждения, известные ранее для полных сепарабельных метрических пространств.

Четвертая глава посвящена гауссовским операторам перехода. Это линейные операторы на пространствах мер, которые сохраняют класс гауссовских мер. Источником данной проблематики послужили работы А. С. Холево, в которых был установлен результат о структуре таких операторов в конечномерном случае. Сначала рассмотрен уже известный одномерный случай, однако приведено его упрощенное обоснование. Основным результатом главы является теорема об общей структуре гауссовских операторов перехода в произвольных локально выпуклых пространствах. Доказано, что при условии слабой непрерывности всякий такой оператор представим в виде композиции линейного преобразования и свертки с фиксированной гауссовской мерой. Этот результат существенно обобщает теорему Холево на бесконечномерный случай. Особое внимание уделено вопросу о непрерывности возникающих линейных операторов. Показано, что слабая непрерывность исходного оператора влечет непрерывность соответствующего линейного отображения. При доказательстве этого факта использованы результаты о сходимости барицентров мер из второй главы, что устанавливает связь с предыдущими разделами диссертации.

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Развита теория топологий типа Канторовича на пространствах мер. Для общих вполне регулярных пространств установлены условия совпадения топологии Канторовича – Рубинштейна со слабой топологией на конусе неотрицательных мер и слабо компактных подмножествах пространства τ-аддитивных мер. Введены и изучены полунормы Канторовича порядка $q \geq 1$, получены необходимые и достаточные условия сходимости в соответствующих топологиях $\tau_{K,q}$, сочетающие слабую сходимость и равномерную интегрируемость степеней псевдометрик, порождающих топологию. Эти критерии применены к исследованию сходимости выпуклых и устойчивых мер.

2. Для равномерно плотного семейства радоновских мер на пространстве Фреше с равномерно интегрируемыми полунормами доказано существование сепарабельного рефлексивного пространства-носителя, в котором семейство сохраняет свойства равномерной плотности и равномерной интегрируемости.

3. Разработана теория барицентров, включающая векторную версию неравенства Йенсена для локально выпуклых пространств и ее вариант для мер на пространствах вероятностных мер. Введено понятие барицентра функционала и установлена связь между плотностью функционала и плотностью его барицентра.

4. Доказаны теоремы двойственности для барицентрических задач Канторовича, включая новые постановки — задачи с фиксированными барицентрами проекций и задачи с фиксированными проекциями барицентра. Установлена связь между этими задачами и классической задачей Канторовича. Для задачи Канторовича с условными мерами доказано, что ее значение не изменяется при замене функции стоимости на ее выпуклую по аргументу-мере оболочку, что обобщает известные результаты для полных сепарабельных метрических пространств на случай вполне регулярных суслинских пространств и позволяет сводить нелинейные задачи к выпуклым.

5. Описана общая структура гауссовских операторов перехода в бесконечномерных пространствах, обобщающая теорему Холево на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и обоснованы в виде строгих математических доказательств.

По теме диссертации опубликованы 4 статьи в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательском семинаре «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Шапошникова (2021 – 2025 г.), на Шестой Санкт-Петербургской молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, 2022) и на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025» (Москва, МГУ, 2025).

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах функционального анализа, теории меры, бесконечномерного анализа и стохастического анализа. Результаты и методы работы К. А. Афонина будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, НИУ «Высшая школа экономики», МФТИ, Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Со РАН (Иркутск), Новосибирском государственном университете.

Таким образом, можно заключить, что в диссертационной работе К. А. Афонина «Топология пространств мер» решено несколько актуальных и трудных задач функционального анализа и теории меры. Эта работа удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертационным работам, выдвигаемым на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор К. А. Афонин заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук, член-корр. РАН,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова,
(119991, Ленинские горы, 1, МГУ, Главное здание,
механико-математический факультет,
тел. +74959391244, факс +74959392090
email: mmmf@mech.math.msu.su, сайт http//www.math.msu.su/)
доктор физико-математических наук, профессор
(тел. +74959393680, email: vibogach@mail.ru)

В. И. Богачев
02.03.2026

Подпись профессора В.И. Богачева удостоверяю

Нач. отдела кадров: (Соколова)