Отзыв официального оппонента
на диссертационную работу Викуловой Анастасии Вадимовны
«Кубические поверхности над полями положительной характеристики»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 —
математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Настоящая диссертация посвящена геометрии гладких кубических поверхностей. Кубические поверхности — это классический объект изучения в алгебраической геометрии, один из наиболее интересных классов поверхностей дель Пеццо, обладающий богатой внутренней симметрией и имеющий многочисленные приложения в алгебраической геометрии и арифметике. Кубические поверхности хорошо исследованы над алгебраически замкнутыми полями, начиная с работ классиков (А. Кэли, Дж. Сальмон, А. Клебш, Б. Сегре и др.) над полем комплексных чисел, и вплоть до последней четверти XX в. и начала XXI в. (Ю. И. Манин, И. В. Долгачёв, Т. Хосох, В. В. Серганова, А. Н. Скоробогатов и др.). Над незамкнутыми полями, в особенности, в положительной характеристике, их структура изучена меньше. В частности, большой интерес представляет изучение групп автоморфизмов кубических поверхностей, в том числе и потому, что на них регуляризуются «большие» конечные подгруппы в группе Кремоны бирациональных преобразований проективной плоскости. Именно группам автоморфизмов кубических поверхностей главным образом посвящена настоящая диссертация, что делает её тематику весьма актуальной.

Основная задача диссертации состоит в описании наибольших (по порядку) возможных групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей и указании тех поверхностей, на которых эти группы реализуются. Над алгебраически замкнутыми полями эта классификация восходит к Б. Сегре (1942) и окончательно получена в нулевой характеристике Т. Хосохом (1997), а в положительной характеристике — И. В. Долгачёвым и А. Дунканом (2019). Вклад настоящей диссертации состоит в исследовании случая незамкнутого поля, причём наиболее интересные эффекты возникают в положительной характеристике, в том числе, над конечными полями.

К этому вопросу примыкает второй вопрос, исследуемый в диссертации, — вычисление константы Жордана группы Кремоны проективной плоскости над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Напомним, что константой Жордана группы G называется наименьшее число J, для которого любая конечная подгруппа в G содержит абелев нормальный делитель индекса $\leq J$. Существование такой константы J для группы Кремоны ранга 2 над полем нулевой характеристики было доказано Ж.-П. Серром (2009), а над полем $\mathbb{F}_q$ — Ю. Г. Прохоровым и К. А. Шрамовым (2023), которые также вычислили J для всех q кроме 2, 4 и 8. В настоящей диссертации автору удалось разобраться с этими случаями и завершить вычисление константы Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечными полями характеристики 2, реализуя «большие» конечные подгруппы в ней регулярными автоморфизмами кубических поверхностей.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

- Для гладких кубических поверхностей над произвольным полем F найдены наибольшие возможные порядки групп автоморфизмов, описаны сами максимальные (по порядку) группы автоморфизмов и найдены (единственные с точностью до изоморфизма) кубические поверхности, на которых эти группы действуют. Как

оказывается, такие поверхности бывают всего четырёх видов: кубика Ферма, кубика Клебша, и ещё две кубические поверхности X_1 и X_2, задаваемые в $\mathbb{P}^3$ уравнениями $x_0^2x_1+x_0x_1^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2=0$ и $x_0^3+x_0x_1^2+x_1x_2^2-x_2x_3^2=0$, соответственно.

- Вычислена константа Жордана J группы Кремоны ранга 2 над полем $\mathbb{F}_q$ для $q=2,4,8$. А именно, при $q>2$ константа J равна $q^3(q^2-1)(q^3-1)$ и достигается на группе $PGL_3(\mathbb{F}_q)$ автоморфизмов проективной плоскости (которая является простой конечной группой указанного порядка), а при $q=2$ оказывается, что $J=720$ достигается на группе S_6 автоморфизмов кубики X_1 (в которой нет абелевых нормальных подгрупп).

Кроме того, описаны все случаи изоморфизмов между четырьмя вышеуказанными замечательными кубическими поверхностями, в зависимости от основного поля F.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, краткого очерка истории исследований кубических поверхностей, и списка литературы, включая отдельный список работ автора по теме диссертации. Во введении даётся исторический обзор проблематики изучения кубических поверхностей, обосновывается её актуальность и значимость, формулируются цели диссертационной работы, описаны результаты предшественников автора в этом направлении исследований. Также описано краткое содержание диссертационной работы, сформулированы основные результаты диссертации, аргументирована их научная новизна и актуальность, а также степень достоверности и апробации результатов ссылками на публикации автора по теме диссертации и выступления на конференциях и семинарах.

В первой главе вводятся основные определения и обозначения и излагаются необходимые теоретические сведения из алгебры и геометрии кубических поверхностей. В частности, обсуждается структура группы Вейля типа E_6, связанной с конфигурацией 27 прямых на гладкой кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем и с группой автоморфизмов этой поверхности. Также приводятся результаты Т. Хосоха, И. В. Долгачёва и А. Дункана о группах автоморфизмах кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями.

Вторая глава посвящена вычислению константы Жордана для группы Кремоны ранга 2 над полями из 2, 4 и 8 элементов. Для этого, с учётом результатов Ю. Г. Прохорова и К. А. Шрамова, необходимо рассмотреть лишь группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 3 над указанными полями, что и осуществляется в данной главе.

В третьей главе диссертации описаны максимальные (по порядку) группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2 и найдены кубические поверхности с указанными группами автоморфизмов над этими полями. В четвёртой главе диссертации эти результаты обобщаются на случай произвольного основного поля. Там же описаны все возможные случаи изоморфизма между кубическими поверхностями, на которых реализуются максимальные группы автоморфизмов.

Таким образом, диссертационная работа является законченным научным исследованием, содержащим полное исчерпывающее решение ряда актуальных вопросов современной алгебраической геометрии. Автор продемонстрировал уверенное владение методами и техникой как алгебраической, так и геометрической природы, виртуозное сочетание которых позволило достичь вышеописанных результатов. Текст диссертации тщательно продуман, проработан и оформлен, диссертационная работа написана понятным и доступным языком, все результаты снабжены полными и подробными доказа-

тельствами. Из диссертационной работы нельзя не увидеть, что автор любит и глубоко понимает предмет своих исследований, хорошо владея историей вопроса.

Следует отметить и некоторые недостатки диссертационной работы. В частности, не очевидна необходимость выделения рассмотрений кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2 в отдельную главу 3, в то время как в главе 4 эти же вопросы рассматриваются в большей общности над любыми полями. Сам автор пишет, что случай конечных полей характеристики 2 «отличается изобилием геометрических аргументов», но геометрические аргументы широко используются и в общем случае. Скорее тут можно предположить, что в структуре диссертации в этом месте отразилась хронология исследований автора.

Можно было бы также несколько сократить описание структуры диссертации во введении, убрав, в частности, рекурсивную ссылку на само введение и оставив только формулировки самых основных результатов (чтобы не дублировать автореферат диссертации).

В разных местах диссертации на основное поле F накладываются разные ограничения: то алгебраической замкнутости, то сепарабельной замкнутости, то определённости всех 27 прямых на кубической поверхности над F. Складывается впечатление, что во многих рассматриваемых ситуациях эти ограничения по существу эквивалентны, и следовало бы унифицировать изложение, остановившись на ограничении какого-то одного типа.

Отметим ещё некоторые конкретные недочёты в тексте диссертационной работы.

При цитировании результатов Ю. Г. Прохорова и К. А. Шрамова о константе Жордана группы Кремоны ранга 2 над $\mathbb{F}_q$ во введении и в главе 2 следовало бы сразу подчеркнуть, для удобства читателя, что число $q^3(q^2-1)(q^3-1)$ равно порядку группы $PGL_3(\mathbb{F}_q)$ автоморфизмов проективной плоскости над $\mathbb{F}_q$.

На стр. 26 при рассмотрении ограничения скаляров по Вейлю многообразие X должно быть определено над полем $\mathbf{L}$, а оно выше подразумевается определённым над его подполем $\mathbf{F}$. В таблице 1.3.2 стоило бы лучше прояснить разницу между $G_\bullet H$ и $G^\bullet H$ (предполагается ли $G_\bullet H$ расщепимым расширением?). На стр. 35 множество Δ не «соответствует», а просто *является* системой корней типа E_6.

В доказательстве леммы 2.5.2 для нетривиальности действия $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на касательном пространстве к $\mathbb{P}^3$ в неподвижной точке не нужна ссылка на статью [CheShr2024] — факт сразу следует из полной приводимости представления $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в $\mathbb{F}_2^4$. Описание идеи доказательства теоремы 3.1.1 на стр. 54 содержит лишь идею доказательства единственности упомянутых в теореме кубических поверхностей, но теорема этим не исчерпывается. На стр. 80 указано, что в главе 4 рассматриваются кубические поверхности над полями любой характеристики, кроме 2, хотя случай характеристики 2 в этой главе тоже рассматривается.

Лемма 4.2.1 является хорошо известным фактом. В замечании 4.2.5 следует писать не об «определении сопряжённости в проективной группе» (оно ничем не отличается от определения сопряжённости в любой другой группе), а том, как его проверять на матричном языке. Некоторые леммы из теории групп (например, лемма 4.2.18) носят чисто комбинаторно-групповой характер, и для их доказательства нет необходимости прибегать к языку проективной геометрии.

На стр. 102 в конце доказательства следствия 4.3.12 поверхность S должна быть изоморфна кубике Клебша, а не Ферма.

Доказательство леммы 4.6.1 чересчур усложнено: достаточно просто заметить, что линейное представление знакопеременной группы A_4 в подпространстве векторов с ну-

левой суммой координат мономиального представления над полем $\mathbb{F}_3$ неприводимо, поскольку в самом мономиальном представлении (которое самодвойственно) есть единственное одномерное и единственное трёхмерное инвариантные подпространства, образующие прямую сумму.

Также в тексте работы имеются некоторые опечатки, лингвистические погрешности и примеры нестандартного использования математической терминологии. Например, на стр. 92 вместо русского «если» используется английское «if», а на стр. 36 и 71 грамотнее говорить об образе абсолютной группы Галуа *в группе* (а не «в группу») $W(E_6)$. На стр. 94 и 114 встречается термин «проективный гомоморфизм», под которым, видимо, понимается гомоморфизм канонической проекции вдоль нормального сомножителя в полупрямом произведении групп. Двумерные подпространства в $\mathbb{P}^3$ лучше называть просто плоскостями, а не гиперплоскостями (стр. 67, 108, 118).

Впрочем, все перечисленные недостатки не носят принципиального характера, легко устранимы и не влияют на высокую научную ценность диссертационной работы.

Подводя итоги, можно сказать, что диссертация А. В. Викуловой посвящена актуальным проблемам современной алгебраической геометрии, является законченным научным исследованием, результаты диссертации являются новыми и достоверными, получены автором самостоятельно, снабжены полными и подробными доказательствами, опубликованы в рецензируемых научных журналах и неоднократно доложены на научных конференциях и семинарах. Автореферат диссертации полностью соответствует её содержанию.

Таким образом, диссертационная работа А. В. Викуловой удовлетворяет критериям «Положения о порядке присуждения учёных степеней» (п. 9 Положения, утверждённого постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842), а её автор Викулова Анастасия Вадимовна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Тимашёв Дмитрий Андреевич

28 апреля 2025 г.

кандидат физико-математических наук,
научная специальность 01.01.06 —
математическая логика, алгебра и теория чисел,
доцент кафедры высшей алгебры
механико-математического факультета
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

Адрес:
Главное здание МГУ, Ленинские горы 1, ГСП-1, 119991, Москва

телефон: +7 (495) 939 16 11
эл. адрес: dmitry.timashev@math.msu.ru

Нач. отдела кадров: [illegible]