Отзыв научного руководителя на диссертацию А. В. Викуловой «Кубические поверхности над полями положительной характеристики», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация А. В. Викуловой посвящена изучению геометрии неособых кубических поверхностей. Главная задача, которая решается в диссертации, состоит в нахождении для каждого поля кубической поверхности с наибольшей по порядку группой автоморфизмов. Полученные результаты применяются для изучения конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов плоскости над конечными полями.

Кубическая поверхность является классическим объектом исследования в алгебраической геометрии начиная с 19 века. В частности, структура групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики была выяснена Т. Хосохом, а над алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики — И. В. Долгачёвым и А. Дунканом. В то же время над произвольными (то есть алгебраически незамкнутыми) полями этот вопрос до последнего времени практически не рассматривался. С другой стороны, усилившееся в последнее время внимание к группам бирациональных автоморфизмов поверхностей над произвольными полями требовало более подробного изучения групп автоморфизмов поверхностей дель Пеццо, в частности, кубических поверхностей.

Основной результат, полученный в диссертации А. В. Викуловой, состоит в классификации гладких кубических поверхностей с наибольшей (по порядку) группой автоморфизмов над произвольным полем. Ответ формулируется в терминах арифметических свойств поля, а именно, его характеристики и наличия в нём корней из единицы определённых степеней. Оказывается, что в каждом случае наибольшая группа автоморфизмов достигается на единственной с точностью до изоморфизма поверхности. Некоторые из этих поверхностей широко известны, например, кубика Ферма и кубика Клебша. Отметим, что несмотря на элементарную формулировку результата, вычислительный подход к нему совершенно бесперспективен. Это связано, во-первых, с тем, что перебор возможных групп автоморфизмов крайне трудоёмок даже в нулевой характеристике. Во-вторых, в положительной характеристике задача классификации представлений данной размерности для конечной группы, порядок которой делится на характеристику поля, в общем случае не имеет никакого разумного решения, так что вопрос об описании автоморфизмов кубик невозможно было бы даже свести к конечному элементарному перебору. В связи с этим в диссертации группы автоморфизмов кубических поверхностей изучаются при помощи более техничного и более содержательного подхода, а именно, при помощи бирациональных перестроек. В процессе получения классификации групп автоморфизмов в каждом из нужных случаев доказывается существование эквивариантной бирациональной перестройки на поверхность дель Пеццо с более простой структурой, например, на квадрику или поверхность дель Пеццо степени 5. Для каждой из этих поверхностей

над данным полем оказывается возможным описать её класс изоморфизма и действие нужной группы, откуда получается единственность полученной конструкции и исходной кубической поверхности. Часть основной теоремы, относящаяся к конечным полям характеристики 2, доказывается в диссертации двумя способами. Это связано с тем, что одна из полученных конструкций оказалась более общей и применимой также для бесконечных полей, в то время как вторая конструкция более геометрически прозрачна.

Другая задача, которая решается в диссертации, состоит в вычислении константы Жордана (то есть минимального индекса нормальных абелевых подгрупп в конечных подгруппах) для группы бирациональных автоморфизмов плоскости над полями $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{F}_8$. Над всеми конечными полями, кроме трёх перечисленных, соответствующая константа была вычислена ранее в работе Ю. Г. Прохорова и К. А. Шрамова, но возникшие в процессе вычисления технические трудности не позволили вычислить явное значение константы для этих трёх полей (была получена лишь верхняя оценка, впоследствии оказавшаяся довольно далёкой от точного значения). А. В. Викулова преодолела эти технические трудности. В частности, она получила более сильную оценку для констант Жордана групп автоморфизмов поверхностей дель Пеццо степени 1 и кубических поверхностей над полями характеристики 2. В конечном итоге это привело к вычислению константы Жордана группы бирациональных автоморфизмов, причём над полем $\mathbf{F}_2$, как выяснилось, эта константа достигается на группе автоморфизмов некторой специальной кубики, наиболее симметричной среди всех гладких кубических поверхностей над $\mathbf{F}_2$.

Диссертация состоит из введения, в котором даётся обзор темы и сформулированы основные результаты; четырёх глав, в которых изложены доказательства результатов; заключения; и приложения, содержащего краткий очерк истории изучения кубических гиперповерхностей и группы бирациональных автоморфизмов плоскости. Результаты диссертации опубликованы в реферируемых журналах «Математический сборник», «Finite fields and their applications», и «Математические заметки», причём во всех публикациях А. В. Викулова является единственным автором. Доказательства результатов изложены в диссертации внятно и полно, все нужные определения чётко сформулированы и достаточно подробно прокомментированы. Тема диссертации актуальна, в доказательствах применяется современная техника бирациональной геометрии.

Я считаю, что диссертация А. В. Викуловой удовлетворяет всем требованиям ВАК, а соискательница безусловно заслуживает присуждения ей степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

К. А. Шрамов, д.ф.-м.н.,
в.н.с. МИАН им В. А. Стеклова,
специальность 01.01.06

17.02.2025

Подпись Шрамова К. А.
заверяю

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
г. Москва

ЗАВЕДУЮЩИЙ ОТДЕЛОМ КАДРОВ
УСАЧЕВА О. Г.