Российская Академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.7



Викулова Анастасия Вадимовна

Кубические поверхности над полями положительной характеристики

1.1.5 – Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в отделе алгебраической геометрии Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:

ШРАМОВ Константин Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела алгебраической геометрии ФГБУН Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность – 01.01.06)

Официальные оппоненты:

ПАНИН Иван Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность – 01.01.06)

ТИМАШЁВ Дмитрий Андреевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВО "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" (специальность – 01.01.06)

Ведущая организация:

ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится " 15" мая 2025 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте
`https://mi-ras.ru/dis/ref25/vikulova/dis.pdf`

Автореферат разослан " " марта 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета 24.1.167.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. профессор РАН Д. В. Осипов

τὰ δὲ τοιαῦτα μαθήματα πρῶτον ἀφίστησι τῶν ἀτόπων τὰς γυναῖκας· αἰσχυνθήσεται γὰρ ὀρχεῖσθαι γυνὴ γεωμετρεῖν μανθάνουσα, καὶ φαρμάκων ἐπῳδὰς οὐ προσδέξεται τοῖς Πλάτωνος ἐπᾳδομένη λόγοις καὶ τοῖς Ξενοφῶντος. ἂν δέ τις ἐπαγγέλληται καθαιρεῖν τὴν σελήνην, γελάσεται τὴν ἀμαθίαν καὶ τὴν ἀβελτερίαν τῶν ταῦτα πειθομένων γυναικῶν, ἀστρολογίας μὴ ἀνηκόως ἔχουσα καὶ περὶ Ἀγλαονίκης ἀκηκουῖα τῆς Ἡγήτορος τοῦ Θετταλοῦ θυγατρὸς ὅτι τῶν ἐκλειπτικῶν ἔμπειρος οὖσα πανσελήνων καὶ προειδυῖα τὸν χρόνον, ἐν ᾧ συμβαίνει τὴν σελήνην ὑπὸ γῆς σκιᾶς ἁλίσκεσθαι, παρεκρούετο καὶ συνέπειθε τὰς γυναῖκας ὡς αὐτὴ καθαιροῦσα τὴν σελήνην.

– Πλούταρχος. Ἠθικά. Γαμικὰ παραγγέλματα.[1]

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Настоящая диссертация имеет своей основной целью изучение гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Отметим, что исторический обзор изысканий кубических поверхностей мы поместили в приложении А данной диссертации. Мы будем изучать главным образом автоморфизмы кубических поверхностей. Воззрение на геометрию как на изучение инвариантов группы преобразований впервые появляется в Эрлангенской программе Ф. Клейна.

Перейдем к более подробному обсуждению кубических поверхностей. Гладкая кубическая поверхность является поверхностью дель Пеццо степени три. Под поверхностью дель Пеццо разумеется такая гладкая поверхность, у которой антиканонический класс является обильным. В этом разделе мы попытаемся продемонстрировать важность поверхностей дель Пеццо степени три в бирациональной геометрии поверхностей.

Среди вопросов, интересующих современных геометров в теории ку-

[1]Такое обучение наилучшим образом ограждает женщин от всевозможных глупостей: ибо, учась геометрии, постыдится жена плясать, и не поддастся чарам колдунов, будучи очарована речами Платона и Ксенофонта. А если некто объявит, что достанет с неба луну, то она посмеется над невежеством и глупостью тех женщин, которые поверили этому заявлению. Ведь она сторонится женщин, не сведущих в астрономии, и слышала про Аглаонику, дочь фессалийца Гегетора, которая хорошо умела предсказывать лунные затмения и, заранее рассчитывая точное время исчезновения луны в тени, обманывала женщин, убеждая их, что луну с неба достала она. –Плутарх. Моралии. Наставления супругам. *Перевод с греческого Марии Александровны Степановой. Цитируется по: Πλογταρχογ τογ χαιρωνεωξ τα ηθικα. Plutarchi chaeronensis moralia, id est opera, exceptis vitis, reliqua. Tomus I. // Oxonii, e typographeo Clarendoniano. – 1795.*

бических поверхностей, отметим особо вопрос о классификации групп автоморфизмов этих поверхностей. Первая попытка такой классификации над полем комплексных чисел была предпринята Б. Сегре[2]. Лишь более чем через полвека по поводу этой классификации групп автоморфизмов Т. Хосох с своей статье[3] сделал замечание о неполноте классификации Б. Сегре и указал на ошибки, допущенные в ней. В той же работе Т. Хосох привел верную классификацию. Классификация же групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями ненулевой характеристики была дана лишь в 2019 году в работе[4] И. В. Долгачева и А. Дункана. Отметим, что исследования, проведенные в упомянутой работе, а также в работе И. В. Долгачева и Г. Мартина[5], показывают, что наибольшая по порядку конечная простая группа, которая действует бирационально на проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, регуляризуется на гладкой кубической поверхности, а сама группа имеет порядок 25 920 и изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Естественность исследований в алгебраической геометрии над алгебраически замкнутыми полями порой вытесняет подобные исследования над произвольными полями. Таким образом, само собою должно возникнуть желание классифицировать группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями. Было бы ошибкой не упомянуть здесь о совсем недавней работе Дж. Смита[6], в которой впервые была дана классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями характеристики нуль. Это дает пищу для размышлений над данной классификацией над произвольными полями положительной характеристики.

Поверхность дель Пеццо степени 3 над алгебраически замкнутым полем является рациональной. В частности, любая группа, действующая регулярно на кубической поверхности над алгебраически замкнутым по-

[2]Segre, B., *The non-singular cubic surfaces* // Oxford Univ. Press. – London. – 1942.

[3]Hosoh, T., *Automorphism groups of cubic surfaces* // J. Algebra. – 1997. – Т. 192. – №2. – С. 651–677.

[4]Dolgachev, I. V., Duncan, A., *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic* // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2019. – Т. 83. – №3. – С. 15–92.

[5]Dolgachev, I. V., Martin, G., *Automorphisms of del Pezzo surfaces of degree 2 in characteristic 2* // arXiv:2206.08913 [math.AG]. – 2022.

[6]Smith, J. M., *Groups acting on cubic surfaces in characteristic zero* // arXiv: 2401.15735 [math:AG]. – 2024.

лем, действует бирационально на проективной плоскости. В связи с этим здесь уместно поговорить о таком важнейшем объекте в алгебраической геометрии, как группа Кремоны. Под группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n над полем $\mathbf{F}$ мы понимаем группу всех бирациональных автоморфизмов проективного пространства размерности n над полем $\mathbf{F}$. При $n = 1$ группа Кремоны совпадает с группой проективных преобразований проективной прямой. Группа Кремоны ранга больше одного устроена значительно сложнее. В этом случае она неимоверно больше группы всех регулярных автоморфизмов проективного пространства. Такая ситуация не возникает в случае ранга один по той лишь причине, что рациональные отображения между нормальными кривыми являются на самом деле регулярными.

Для группы Кремоны ранга 2 над полем комплексных чисел в 2009 году И. В. Долгачевым и В. А. Исковских[7] была представлена классификация конечных подгрупп. Получившаяся классификация настолько громоздка, что не оставляет никакой надежды для подобной классификации подгрупп в группе Кремоны ранга больше двух. Одно из продвижений в исследовании группы Кремоны ранга два связано с исследованием устройства ее нормальных подгрупп и конечных подгрупп[8,9].

Одним из замечательнейших фактов[10,11] относительно группы Кремоны ранга 2 над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{F}$ заключается в том, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ порождается группой автоморфизмов проективного пространства и инволюцией

$$[x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy],$$

также носящее имя Л. Кремоны. Легко видеть, что инволюция Кремоны не является регулярным отображением. При $n = 3$ группа Кремоны уже не порождается группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$ и конечным числом бирациональных

[7] Dolgachev, I. V., Iskovskikh, V. A., *Finite Subgroups of the Plane Cremona Group* // Y. Tschinkel, Y. Zarhin, (eds). – Algebra, Arithmetic, and Geometry. Progress in Mathematics. – Birkhäuser Boston. – 2009. – Т. 269.

[8] Cantat, S., Lamy, S., *Normal subgroups in the Cremona group* // Acta Math. – 2013. – Т. 210. – №1. – С. 31–94.

[9] Serre, J.-P., *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis* // Astérisque. – Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. – 2010. – Т. 332. – Exp. No. 1000. – С. 75–100.

[10] Noether, M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* // Mathematische Annalen. – 1871. – Т. 3. – 161–227.

[11] Castelnuovo, G., *Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano* // Torino Atti. – 1901. – Т. 36. – С. 861–874.

преобразований, что мы находим в чудесном трактате Х. Хадсон[12], который изобилует фактами, связанными с группой Кремоны ранга 2 и 3, и в котором приведен прекрасный исторический очерк о группе Кремоны. И. Пан[13] показал, что при $n \geqslant 3$ группа Кремоны над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не порождается группой автоморфизмов проективного пространства и счетного числа бирациональных преобразований ограниченной степени. Вопрос о порождающих элементах группы Кремоны ранга больше двух до сих пор остается открытым.

Исследование группы Кремоны ранга больше двух представляет собой непомерные трудности: ее теория находится еще на той стадии развития, когда, несмотря на довольное изобилие результатов, непосредственно связанных с группой Кремоны ранга два, нет еще богатства методов для изучения группы Кремоны бóльших рангов. Из тех немногих продвижений, что имеются на данный момент в изысканиях группы Кремоны ранга три, отметим классификацию[14] неабелевых простых конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, а также классификацию[15,16,17] p-элементарных конечных подгрупп для почти всех простых чисел p, кроме небольшого количества исключений.

Для группы Кремоны произвольного ранга особо отметим исследование ее простоты. Для ранга 2 над полем комплексных чисел непростота была доказана в работе С. Канты и С. Лами[18], а для ранга $n \geqslant 3$ над полем комплексных чисел непростота была доказана в работе Дж. Бланка, С. Лами и С. Циммерман[19].

[12]Hudson, H. Ph., *Cremona transformations in plane and space* // The University Press. – 1927.

[13]Pan, I., *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona* // Bol. Soc. Bras. Mat. – 1999. – Т. 30. – 95–98.

[14]Prokhorov, Yu., *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3 // J. Algebraic Geom. – 2012. – Т. 21. – №3. – С. 563–600.

[15]Prokhorov, Yu., *p-elementary subgroups of the Cremona group of rank* 3 // Classification of algebraic varieties. – EMS Ser. Congr. Rep. – Eur. Math. Soc. – Zürich. – 2011. – С. 327–338.

[16]Prokhorov, Yu., 2-*elementary subgroups of the space Cremona group* // Automorphisms in birational and affine geometry. – Springer Proc. Math. Stat. – Т. 79. – Springer, Cham. – 2014. – С. 215–229.

[17]Prokhorov, Yu., Shramov, C., *p-subgroups in the space Cremona group* // Math. Nachr. – 2018. – Т. 291. – №8–9. – С. 1374–1389.

[18]Cantat, S., Lamy, S., *Normal subgroups in the Cremona group* // Acta Math. – 2013. – Т. 210. – №1. – С. 31–94.

[19]Blanc, J., Lamy, S., Zimmermann, S., *Quotients of higher-dimensional Cremona groups* // Acta Math. – 2021. – Т. 226. – №2. – С. 211–318.

Обзор современных достижений в исследовании группы Кремоны даны в работах Ж. Дезерти[20] и С. Канты[21,22].

Иногда группа Кремоны демонстрирует свое хорошее поведение на уровне конечных подгрупп. Для этого изучается свойство Жордана группы Кремоны. Будем говорить, что заданная группа обладает *свойством Жордана* (или же будем называть ее *жордановой*), если имеется такая константа $J > 0$, что любая конечная подгруппа имеет нормальную абелеву подгруппу индекса не больше, чем J. Если группа жорданова, то минимальную константу из определения жордановости будем называть константой Жордана. Своим названием жордановы группы обязаны выдающемуся ученому К. Жордану, внесшему неимоверный вклад в развитие теории групп и линейной алгебры. К. Жордан [23] в своей работе доказывает свойство Жордана группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ для произвольного натурального n. Исследование жордановости группы Кремоны впервые было начато Ж.-П. Серром[24]. В упомянутой работе Ж.-П. Серр показывает, что группа Кремоны ранга 2 над полем характеристики нуль является жордановой.

Классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями играет значимую роль в изучении константы Жордана группы Кремоны. Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов[25] исследовали свойство жордановости группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями и нашли точное значение константы Жордана упомянутой группы. Основной результат их работы заключается в том, что константа Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \notin \{2, 4, 8\}$ равна $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. Лишь поля $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$ стали препятствием для

[20]Déserti, J., *Some properties of the Cremona group* // Ensaios Matemáticos. – Т. 21. – Sociedade Brasileira de Matemática. – Rio de Janeiro. – 2012. С. 1–188.

[21]Cantat, S., *The Cremona group in two variables* // European Congress of Mathematics. – Eur. Math. Soc. – Zürich. – 2013. – С. 211–225.

[22]Cantat, S., *The Cremona group* // Algebraic geometry: Salt Lake City 2015. – Proc. Sympos. Pure Math.. – Т. 97. – №1. – Amer. Math. Soc. – Providence, RI. – 2018. – С. 101–142.

[23]Jordan, M. C., *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* // J. Reine Angew. Math. – 1878. – Т. 84. – 89–215.

[24]Serre, J.-P., *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field* // Mosc. Math. J. – 2009. – Т. 9. – №1. – С. 183–198.

[25]Прохоров, Ю. Г., Шрамов, К. А., *Свойство Жордана для группы Кремоны над конечным полем* // Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина. – Труды МИАН. – 2023. – Т. 320. – МИАН, Москва. – С. 298–310.

того, чтоб покончить с вопросом о константе Жордана группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями. Сложности, которые возникли при нахождении константы Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2, 4, 8\}$ в упомянутой работе, связаны как раз с отсутствием на тот момент классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2.

Нельзя не упомянуть о другом ярком примере возникновения кубических поверхностей в изучении бирациональных групп поверхностей; а именно, в исследовании поверхностей Севери–Брауэра. Под многообразиями Севери–Брауэра разумеются такие многообразия, которые при некотором расширении скаляров изоморфны проективному пространству. При этом, под нетривиальным многообразием Севери–Брауэра разумеются такие многообразия Севери–Брауэра, которые сами по себе не изоморфны проективному пространству. К. А. Шрамов[26] показал, что если конечная группа G действует бирационально на нетривальной поверхности Севери–Брауэра над полем рациональных чисел, то $G \subset (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Позже было показано[27], что любая подгруппа в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ может действовать бирационально на поверхности Севери–Брауэра с вышеупомянутыми условиями. При этом, мы приходим к интересному результату, что группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ на такую поверхность может действовать только бирационально, а регуляризуется эта группа на гладкой кубической поверхности, которая является формой кубики Ферма.

Цели и задачи.

Изучение групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Для заданного поля найти среди этих групп максимальную по порядку. Найти все с точностью до изоморфизма гладкие кубические поверхности, у которых группа автоморфизмов является наибольшей по порядку среди всех групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над заданным полем. Найти точную

[26] Shramov, C. A., *Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces* // European Journal of Mathematics. – 2021. – Т. 7. – С. 591–612.

[27] Vikulova, A. V., *Birational automorphism groups of Severi–Brauer surfaces over the field of rational numbers* // International Mathematics Research Notices. – Published online: `https://doi.org/10.1093/imrn/rnae249` . – 2024.

константу Жордана группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ ранга два для конечного поля $\mathbb{F}_q$ при $q \in \{2, 4, 8\}$, и, тем самым, предъявить константу Жордана группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ ранга два для любого конечного поля.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту.

Все основные результаты диссертации являются новыми и были получены по ходу исследований автора. Они состоят в следующем.

1. Найдена в явном виде константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечными полями $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$.

2. Найдены наибольшие по порядку группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Классифицированы самые симметричные гладкие кубические поверхности (то есть гладкие кубические поверхности с наибольшей по порядку группой автоморфизмов) над произвольными полями. Доказано, что над каждым произвольным полем такие кубические поверхности единственны с точностью до изоморфизма. Над конечными полями характеристики 2 были даны два альтернативных метода, дающих классификацию самых симметричных гладких кубических поверхностей.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и алгебраической комбинаторике.

Методология и методы исследования.

В работе используются методы программы минимальных моделей, бирациональной геометрии, теории поверхностей дель Пеццо, теории групп, теории Галуа.

Степень достоверности и апробация результатов.

Результаты диссертации сопровождаются строгими математическими доказательствами, что обосновывается публикацией оных в 3 ста-

тьях, собственно автору принадлежащих, в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, которые входят в базы данных Scopus и Web of Science. Список этих работ приведен в конце диссертации отдельно.

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии Математического института имени В.А. Стеклова (семинар И. Р. Шафаревича), на семинаре по многомерному комплексному анализу в МГУ (Семинар А.Г. Витушкина) и на семинаре Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ, а также на международных и всероссийских конференциях, в число которых входят:

- Международная конференция "Дни геометрии в Новосибирске – 2022", 29 августа – 2 сентября 2022 года, ИМ СО РАН, Новосибирск.
- Студенческая школа-конференция "Математическая весна – 2023", 27 – 30 марта 2023 года, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород.
- Международная конференция "Algebraic groups: the White Nights season III", 10 – 14 июля 2023 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.
- II Всероссийская научно-практическая конференция "Математика в современном мире", посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве, Секция "Алгебраическая геометрия и теория чисел", 19 – 22 сентября 2023 года, Вологодский государственный университет, Вологда.
- Международная конференция "Dynamics in Siberia", 26 февраля – 2 марта 2024 года, ИМ СО РАН, Новосибирск.
- Весенняя школа-конференция по теории чисел, алгебре и алгебраической геометрии для молодых исследователей, 1 – 5 мая 2024 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.
- IV Конференция математических центров, 6 – 11 августа 2024 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.

- Международная конференция “HSE/BIMSA Conference on Algebraic Geometry and Mathematical Physics”, 5–9 ноября 2024 года, НИУ ВШЭ, Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм, Москва.

Структура диссертации.

В заключение приведем краткое содержание настоящей диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы.

Во введении мы даем краткий обзор современного состояния науки об алгебраических поверхностях. Далее мы приводим цели и задачи диссертации, ее научную новизну и положения, выносимые на защиту, теоретическую и практическую значимость, методологию и методы исследования, степень достоверности и апробацию результатов, и даем краткое описание диссертации.

Чтобы сделать чтение диссертации более доступным, а структуру диссертации сделать более последовательной, мы принуждены были посвятить **первую главу** изложению некоторых общих соображений относительно гладких кубических поверхностей и их группы автоморфизмов. Читатель не раз увидит ссылки на эту главу в остальных главах, так как здесь собраны известные широкому кругу алгебраических геометров леммы, и обозначения, которыми мы будем постоянно пользоваться. В разделе 1.2 мы доказываем вспомогательную теорему (теорема 1.2.1) о связи геометрии поверхностей дель Пеццо малых степеней над алгебраически замкнутым полем и над сепарабельно замкнутым полем. Она гласит, что для поверхности дель Пеццо степени $d \leqslant 5$ группа автоморфизмов и группа Пикара над алгебраическим замыканием совпадает с группой автоморфизмов и группой Пикара над сепарабельным замыканием поля, соответственно, и что все прямые, определенные над алгебраическим замыканием поля определены уже и над сепарабельным замыканием поля.

В разделе 1.3 достаточно подробно изучена группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ системы корней E_6. Мы приводим таблицу с встречающимися далее классами сопряженности в группе $W(\mathrm{E}_6)$ с подробнейшим описанием, формулируем несколько лемм о подгруппах в группе $W(\mathrm{E}_6)$, приводим клас-

сификацию максимальных подгрупп в нормальной подгруппе индекса 2 в группе $W(\mathrm{E}_6)$. В разделе 1.4 мы вводим некоторые соглашения и обозначения относительно геометрии гладких кубических поверхностей и формулируем несколько важных для дальнейшего лемм. В разделе 1.5 мы приводим полезные для дальнейшего изложения примеры гладких кубических поверхностей и формулируем основной результат И. В. Долгачева и А. Дункана о классификации максимальных групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем.

Перед тем как перейти к описанию остальных глав диссертации, перечислим кубические поверхности, которые будут встречаться повсеместно в диссертации и, в частности, в формулировках основных результатов.

Гладкая кубическая поверхность, заданная уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^3$, называется *кубикой Ферма*. Гладкая кубическая поверхность, заданная уравнениями

$$x+y+z+t+w = xyz+xyt+xyw+xzt+xzw+xtw+yzt+yzw+ytw+ztw = 0$$

в $\mathbb{P}^4$, называется *кубикой Клебша*. Над полем характеристики, не равной 3, кубика Клебша может быть задана более простыми уравнениями

$$x + y + z + t + w = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + w^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^4$.

Нас часто будет интересовать кубическая поверхность, заданная уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0 \tag{1}$$

в $\mathbb{P}^3$. Над полем характеристики 3 у нас будет возникать гладкая кубическая поверхность, заданная уравнением

$$t^3 + tz^2 - xy^2 + x^2z = 0 \tag{2}$$

в $\mathbb{P}^3$.

Вторую главу мы посвятили вычислению константы Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечным полем. Напомним, что под группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n мы подразумеваем группу бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbf{F}$. Мы

будем изучать свойство жордановости группы Кремоны ранга 2 над конечным полем и искать ее точную константу Жордана. Ю. Г. Прохоровым и К. А. Шрамовым было доказано[28], что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, жорданова. Более того, они получили следующие оценки на константу Жордана.

Теорема 2.1.2. *Пусть $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ — константа Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$. Тогда*

$$\begin{aligned} &J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = q^3(q^2-1)(q^3-1), && \text{если } q \notin \{2,4,8\};\\ &J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) \leqslant 696\,729\,600, && \text{если } q \in \{2,4,8\}. \end{aligned}$$

В этой главе мы найдем точное значение константы Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2,4,8\}$. С этой целью нам достаточно изучить группы бирегулярных автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_q$, поскольку любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Для расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ и для поверхностей дель Пеццо степени $4 \leqslant d \leqslant 9$ и $d = 2$ константа Жордана группы автоморфизмов[29] не больше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$, что является порядком группы автоморфизмов $\mathbb{P}^2$. Поэтому нам нужно изучить группы регулярных действий на поверхности дель Пеццо степени 1 и 3, и нормальные абелевы подгруппы в этих группах. Изучение этих групп будет проводиться в разделе 2.2 для поверхностей дель Пеццо степени 3 и в разделе 2.3 для поверхностей дель Пеццо степени 1. Познакомим подробнее читателя с основными методами, используемыми в этих двух разделах. В разделе 2.2, используя классификацию[30] максимальных подгрупп для группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, мы доказываем следующую теорему.

[28]Прохоров, Ю. Г., Шрамов, К. А., *Свойство Жордана для группы Кремоны над конечным полем* // Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина. – Труды МИАН. – 2023. – Т. 320. – МИАН, Москва. – С. 298–310.

[29]Прохоров, Ю. Г., Шрамов, К. А., *Свойство Жордана для группы Кремоны над конечным полем* // Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина. – Труды МИАН. – 2023. – Т. 320. – МИАН, Москва. – С. 298–310.

[30]Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. Ph., Parker, R. A., Wilson, R. A., *ATLAS of Finite Groups* // Oxford University Press. – 1985. – ISBN: 0-19-853199-0.

Теорема 2.2.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, если порядок группы автоморфизмов равен 720, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$, где под группой $\mathfrak{S}_6$ мы подразумеваем группу перестановок из 6 элементов.

Далее мы приводим пример такой гладкой кубической поверхности S над полем $\mathbb{F}_2$, для которой группа автоморфизмов изоморфна группе перестановок из 6 элементов $\mathfrak{S}_6$. Отметим, что эта кубическая поверхность изоморфна поверхности, заданной уравнением (1). Это и доказывает, что группа $\mathfrak{S}_6$, как группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$, достигается. Нельзя не отметить, что приведенный нами пример указанной кубической поверхности является чрезвычайно полезным примером, ибо он будет в дальнейшем не раз встречаться в изучении групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями.

В разделе 2.3, представив поверхность дель Пеццо степени 1 в виде двойного накрытия поверхности $\mathbb{P}(1,1,2)$, мы находим оценку на порядок группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо степени 1 над конечными полями и показываем, что для любого поля $\mathbb{F}_q$ этот порядок меньше, чем порядок группы автоморфизмов проективного пространства $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$, которая не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп. А значит, константа Жордана группы Кремоны не меньше, чем порядок группы $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$.

Прямым следствием из вышесказанного являются следующие теорема и следствие, которые сформулированы в разделе 2.1, а доказаны в разделе 2.4.

Теорема 2.1.3. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816 & \text{при } q = 8; \\ 60\,480 & \text{при } q = 4; \\ 720 & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

Следствие 2.1.4. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кре-*

моны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ *равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|, & \text{если } q \neq 2; \\ |\mathfrak{S}_6| > 168 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)| & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

В качестве дополнения к доказательству теоремы 2.1.3 в разделе 2.5 мы покажем (теорема 2.1.5), что гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ с наибольшей группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма и ее группа автоморфизмов изоморфна группе $\mathfrak{S}_6$ перестановок из 6 элементов. При доказательстве этой теоремы мы показываем, что кубическая поверхность (1) обладает тем замечательным свойством, что она проходит через все 15 точек на $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_2}$. Действуя на множество кубических поверхностей, проходящие через все 15 точек, группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, мы показываем, что стабилизатор этого действия будет иметь порядок 720. Поэтому согласно теореме 2.2.1, группа автоморфизмов таких кубических поверхностей изоморфна группе перестановок из 6 элементов. При этом, подсчетом порядков мы получаем, что действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубические поверхности, проходящие через все 15 точек на $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_2}$, является транзитивным, что и доказывает единственность с точностью до изоморфизма таких поверхностей. Затем мы показываем, что если гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ обладает регулярным действием группы $\mathfrak{S}_6$, то она единственна с точностью до изоморфизма. Для этого мы изучаем возможные значения длины орбиты действия $\mathfrak{S}_6$ на точку на кубической поверхности, которая всегда есть согласно теореме Шевалле–Варнинга, и находим, что это значение может равняться только 15, что и доказывает требуемое в связи с единственностью с точностью до изоморфизма гладких кубических поверхностей, проходящих через 15 точек.

В третьей главе мы обобщаем результат предыдущего раздела, находя максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над всеми конечными полями характеристики 2. Мы доказываем следующую теорему, сформулированную в разделе 3.1.

Теорема 3.1.1. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над конечным полем $\mathbf{F}$ характеристики* 2.

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ *и* S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. *Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 720$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ *и* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (1).

В процессе доказательства теоремы 3.1.1 мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над конечным полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2. *Пусть* Γ *– образ абсолютной группы Галуа* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}/\mathbf{F})$ *в группу Вейля* $W(\mathrm{E}_6) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}}))$. *Предположим, что* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(S)$.

(i) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\Gamma = \{e\}$, *то* S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *и* $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *то* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (1).

Эти две теоремы доказываются в разделе 3.5, собрав воедино результаты предыдущих разделов этой главы. Объясним идею доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2. Сперва мы должны показать, что максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2 имеют вид как в теореме 3.1.1. Неравенство для полей вида $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ следует из классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей, которая приведена в теореме 1.5.1. То что эта оценка достижима, следует[31] из того, что группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_4$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Для полей вида $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ неравенство следует из того, что если бы группа автоморфизмов имела бы порядок больше 720, то по теореме 1.5.1 и классификации максимальных подгрупп в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, которая приведена в теореме 1.3.9, мы бы получили, что образ абсолютной группы Галуа в группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}})) \simeq W(\mathrm{E}_6)$ должен быть тривиален. Однако, в разделе 3.4, в котором изучается образ

[31] Dolgachev, I. V., Duncan, A., *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic* // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2019. – Т. 83. – №3. – С. 15–92.

группы Галуа в группу $W(\mathrm{E}_6)$ с помощью расслоений на коники гладких кубических поверхностей, мы показываем, что это невозможно. Достижение этой оценки следует из теоремы 2.2.1 предыдущей главы.

В разделе 3.4 мы также показываем, что имеется возможность $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно стянуть 5 непересекающихся прямых на кубической поверхности, определенных над заданным полем.

Следствие 3.4.7. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над конечным полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Следствие 3.4.9. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to Q$$

на поверхность $Q \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – сепарабельное квадратичное расширение $\mathbf{F}$, а $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$ – ограничение скаляров по Вейлю $\mathbb{P}^1$.

Заметим, что в двух упомянутых выше следствиях по существу конечность поля, над которым мы работаем. При стягиваниях, указанных в следствиях 3.4.7 и 3.4.9 мы получаем 5 точек в общем положении на квадриках. В разделе 3.3 мы показываем, что множество из таких 5 точек в общем положении на упомянутых квадриках единственно с точностью до автоморфизма. Тем самым, из единственности 5 точек на квадрике с точностью до автоморфизма мы получаем единственность гладкой кубической поверхности с заданными свойствами с точностью до изоморфизма.

Раздел 3.2 является вспомогательным: в нем мы доказываем некоторые полезные для дальнейшего леммы касательно группы автоморфизмов проективной прямой над конечным полем характеристики 2. В последнем разделе 3.6 сей главы, признавая несомненную пользу в демонстрации частных примеров, мы исследуем группу автоморфизмов

кубики Ферма над конечными полями характеристики 2 и доказываем следующее утверждение.

Утверждение 3.1.3. *Пусть $\mathcal{F}$ – кубика Ферма над полем $\mathbf{F}$ характеристики 2. Тогда если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то мы имеем $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$.*

Прямым следствием из этого утверждения является утверждение о том, что над полями $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ кубика Ферма и гладкая кубическая поверхность (1) не изоморфны, в то время как над полями $\mathbb{F}_{4^k}$ они изоморфны.

Следствие 3.1.4. *Пусть дано поле $\mathbf{F}$ характеристики 2.*

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то гладкая кубическая поверхность (1) не изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ или $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$, то гладкая кубическая поверхность (1) изоморфна кубике Ферма.*

В четвертой главе мы находим максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Главная цель этой главы – доказательство следующей теоремы, сформулированной в разделе 4.1.

Теорема 4.1.1. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над произвольным полем $\mathbf{F}$.*

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 2.*

  $(\mathrm{i})_2$ *Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$$

  и S изоморфна кубике Ферма.

  $(\mathrm{ii})_2$ *Если $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$$

  и S изоморфна гладкой кубической поверхности (1).

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *равна* 3.

  (i)$_3$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 216$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

  и S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (2). *Здесь под группой* $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$ *мы разумеем группу Гейзенберга верхнетреугольных матриц* 3×3 *над полем* $\mathbb{F}_3$ *с единицами на диагонали.*

  (ii)$_3$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

  и S *изоморфна кубике Клебша.*

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 5.

  (i)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

  и S *изоморфна кубике Ферма.*

  (ii)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 72$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$$

  и S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (1). *Здесь под группой* $\mathfrak{D}_4$ *мы разумеем группу диэдра порядка* 8.

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *не равна* 2, 3 *и* 5.

(i)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

и S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

и S *изоморфна кубике Клебша.*

Несмотря на то, что теорема 4.1.1 полностью содержит в себе результат теоремы 3.1.1, мы сочли необходимым посвятить конечным полям характеристики 2 отдельную главу, ибо доказательство теоремы 3.1.1 отличается от доказательства теоремы 4.1.1(i)$_2$ и (ii)$_2$ изобилием геометрических аргументов.

В качестве дополнения мы изучаем отношение изоморфности между кубическими поверхностями, упомянутыми в теореме 4.1.1.

Утверждение 4.1.3. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$.

(i) *Кубическая поверхность* (2) *не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубике Клебша, ни кубике* (1).

(ii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2, *то кубическая поверхность* (1) *и кубика Клебша изоморфны.*

(iii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 3, *то кубическая поверхность* (1) *изоморфна кубике Ферма тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы.*

(iv) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 2, *то кубика Клебша не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубической поверхности* (1).

Для удобства читателя мы перефразировали теорему 4.1.1, используя некоторую информацию из утверждения 4.1.3 в следующей таблице, в

которой за ω мы обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы, а за $\mathbf{i}$ мы обозначаем примитивный корень четвертой степени из единицы.

Поле	Наибольшая группа автоморфизмов G	Порядок группы G	Кубическая поверхность с группой автоморфизмов G
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$	25 920	Кубика Ферма = = (1) = = Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_6$	720	Кубика Клебша = = (1)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \in \mathbf{F}$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	216	(2)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (1)
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$	72	(1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша

Таблица 4.1.1: Таблица наибольших групп автоморфизмов.

Так же мы перефразировали утверждение 4.1.3 в следующей таблице, где за ω мы также обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы.

	(1)	(2)	Кубика Клебша	Кубика Ферма
(1)	Всегда	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$
(2)	Никогда	Всегда	Никогда	Никогда
Кубика Клебша	$char(\mathbf{F}) = 2$	Никогда	Всегда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$
Кубика Ферма	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	Всегда

Таблица 4.1.2: Таблица отношений изоморфности кубических поверхностей из утверждения 4.1.3

В разделе 4.2 мы приводим полезные для дальнейшего леммы. Раздел 4.3 мы посвятили действию группы перестановок из 5 элементов $\mathfrak{S}_5$ и кубике Клебша над полем характеристики, отличной от 5. В этом разделе мы доказываем, что гладкая кубическая поверхность с действием $\mathfrak{S}_5$ изоморфна кубике Клебша. Главным же инструментом в этом доказательстве является поверхность дель Пеццо степени 5 с максимальной группой автоморфизмов, которая, в свою очередь, сама единственна с точностью до изоморфизма. С помощью стягивания двух непересекающихся прямых на гладкой кубической поверхности с действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, образ абсолютной группы Галуа которой лежит в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, мы получаем именно такую поверхность дель Пеццо степени 5.

Поскольку геометрия кубических поверхностей над полем характеристики 3 сильно разнится с геометрией над полями других характеристик, показательным примером чего является кубика Ферма, которая не приведена в характеристике 3, а во всех остальных характеристиках — гладкая, мы посвящаем кубическим поверхностям в характеристике 3 отдельный раздел 4.4. В этом разделе мы показываем, что максимальная группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики 3, имеющим примитивный корень четвертой степени из единицы, изоморфна группе $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, что верно над алгебраически замкнутым полем характеристики 3. Далее

мы доказываем единственность с точностью до изоморфизма гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики 3, имеющим примитивный корень четвертой степени из единицы, с такой группой автоморфизмов. Для этого мы пользуемся утверждением[32] о том, что циклическая группа порядка 8, действующая на гладкую кубическую поверхность, единственна с точностью до сопряжения. Зафиксировав какой-то элемент порядка 8, и учитывая группу $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$, мы тем самым восстанавливаем гладкую кубическую поверхность с действием группы $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Рассматривая гладкие кубические поверхности над полем характеристики 3 без примитивного корня четвертой степени из единицы, мы получаем, что группа $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ уже не может реализовываться как группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей, так как в этом случае не существует нетривиального действия элементом порядка 8, что доказано в лемме 4.4.25. Тем самым, в конце раздела 4.4 мы делаем вывод, что максимальная группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем характеристики 3 без примитивного корня четвертой степени из единицы изоморфна группе перестановок из 5 элементов $\mathfrak{S}_5$ и реализуется эта группа лишь на гладкой кубической поверхности, изоморфной кубике Клебша.

Как мы уже выяснили в предыдущей главе, кубика Ферма над конечным полем характеристики 2, содержащим нетривиальный корень третьей степени из единицы, обладает максимальной по порядку группой автоморфизмов. При этом верно и обратное: над конечным полем характеристики 2, содержащим нетривиальный корень третьей степени из единицы, гладкая кубическая поверхность с максимальной группой автоморфизмов изоморфна кубике Ферма. В разделе 4.5 мы доказываем, что то же верно и для произвольных полей характеристики, отличной от 3.

В разделе 4.6 мы изучаем максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями характеристики, отличной от 3, не содержащие нетривиальный кубический корень из единицы. Мы показываем, что если характеристика поля не равна еще 2 и 5, то верна следующая лемма.

[32]Dolgachev, I. V., *Classical algebraic geometry. A modern view* // Cambridge University Press, Cambridge. – 2012. – ISBN: 978-1-107-01765-8.

Лемма 4.6.9. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 2, 3 *и* 5, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

Если же характеристика поля равна 2, то верен аналогичный результат:

Лемма 4.6.10. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. *Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ *и* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (1).

Две вышеупомянутые леммы следуют из классификации максимальных групп автоморфизмов над алгебраически замкнутыми полями, которая приведена в разделе 1.5 первой главы, и результатов раздела 4.3. Если же характеристика поля равна 5, то как легко заметить, кубика Клебша является особой поверхностью. Поэтому вторую часть раздела 4.6 мы посвятили именно этому случаю. С помощью детального анализа подгрупп группы

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \subset W(\mathrm{E}_6),$$

которая изоморфна группе автоморфизмов кубики Ферма, мы ищем такую максимальную подгруппу, которая определена над полем без нетривиального кубического корня из единицы. Мы показываем, что такая группа изоморфна группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$. Возвращаясь вновь к классификации максимальных групп автоморфизмов над алгебраически замкнутыми полями, которая приведена в разделе 1.5 первой главы, где мы можем найти так же следующие по величине после максимальных группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей, мы получаем, что упомянутая группа действительно является максимальной по порядку. Более того, мы показываем, что такая группа достигается на единственной с точностью до изоморфизма гладкой кубической поверхности, изоморфной (1).

В разделе 4.7 мы доказываем теорему 4.1.1 и утверждение 4.1.3.

В заключении мы сформулировали главные результаты диссертации.

В приложении мы сочли необходимым поместить краткий исторический очерк развития алгебраической геометрии в контексте теории кубических поверхностей.

Благодарности.

Автор сей диссертации искренне выражает глубочайшую благодарность своему дорогому научному руководителю и учителю Константину Александровичу Шрамову, который своим пристрастием к математике вдохновляет окружающих на изучение алгебраической геометрии. Автор также выражает благодарность Константину Александровичу Шрамову за постоянное участие и за помощь во всех затруднениях, связанных не только с математическими задачами, но и с правильным написанием математических работ, а также за неиссякаемое терпение и понимание. Автор также не может не поблагодарить последнего за ценные советы, которые впоследствии помогали разрешать не только математические, но и жизненные трудности автора. И конечно же, автор бесконечно благодарен Константину Александровичу Шрамову за его педагогический энтузиазм, благодаря которому его ученики не перестают увлекаться математикой и, более того, ставят ее на одно из первых мест в своей жизни.

Так же автор приносит свою благодарность абсолютно всему коллективу Математического института имени В. А. Стеклова за постоянную поддержку и безотказную помощь в любом вопросе автора. Также нельзя не поблагодарить весь коллектив института за то, что институт стал за несколько лет вторым домом автора. Автор не может не отметить особую свою благодарность отделам алгебраической геометрии и алгебры Математического института имени В. А. Стеклова за постоянную заботу, воспитательную работу и математические и педагогические уроки.

Автор благодарит Юрия Геннадьевича Прохорова, Сергея Олеговича Горчинского и Андрея Сергеевича Трепалина за прочтение сей диссертации и за весьма важные и полезные указания и советы.

Автор выражает благодарность своим друзьям, Арине и Максиму Савеловым, которые всегда поддерживают автора в любых его начинаниях и которые всегда вдохновляют автора на новые свершения.

Работы автора по теме диссертации

1. Викулова, А. В., *Константа Жордана для группы Кремоны ранга* 2 *над конечным полем* // Матем. заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 607–612.

2. Викулова, А. В., *Самые симметричные кубические поверхности* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – №2. – С. 32–80.

3. Vikulova, A. V., *The most symmetric smooth cubic surface over a finite field of characteristic* 2 // Finite Fields and Their Applications. – 2024. – Т. 98. – Art. 102470.