ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА ДИССЕРТАЦИЮ А.В.ВИКУЛОВОЙ "КУБИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ НАД ПОЛЯМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ" ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 1.1.5 — МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Настоящая диссертация безусловно является очень сильной. Она содержит целую россыпь замечательных геометрических теорем и конструкций. И является продолжением работ знаменитой школы И.Р. Шафаревича. Работ И.В.Долгачева, В.А.Исковских, Ж.-П. Серра, Ю.Г.Прохорова, К.А. Шрамова и других. Более детально, работа посвящена изучению групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полями положительной характеристики. Таким образом тема диссертации актуальна.

Рассматриваются следующие постановки задач. Для заданного поля найти среди этих групп максимальную по порядку (по числу элементов). Найти все с точностью до изоморфизма гладкие кубические поверхности, у которых группа автоморфизмов является наибольшей по порядку среди всех групп автоморфизмов кубических поверхностей над данным полем. Наконец, найти точную константу Жордана группы Кремоны $Cr_2(F_q)$ ранга 2 для конечного поля F_q при q=2,4 и 8. Последнее завершает исследования Ю.Г.Прохорова, К.А. Шрамова по нахождению точного значения константы Жордана группы Кремоны $Cr_2(F_q)$ ранга 2 для любого конечного поля. *Это еще раз подтверждает актуальность данной диссертации.*

Основными результатами тдиссертации являются следующие.

1. Найдена совершенно явно константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечными полями F_2, F_4, F_8 что завершает работы Ю.Г.Прохорова, К.А. Шрамова по этой теме.
2. Над произвольным полем конечной характеристики найдены гладкие кубические поверхности с наибольшей по порядку группой автоморфизмов.
3. Доказано, что над каждым таким полем такая кубическая поверхность ровно одна (с точностью до изоморфизма).

Date: 14.04.2025.

4. Над конечными полями характеристики 2 приведены два разных метода, классифицирующих самые симметричные гладкие кубические поверхности.

Все эти результаты являются новыми, получены автором самостоятельно, в рецензируемых научных журналах из списка ВАК. Результаты докладывались автором на семинарах им.И.Р.Шафаревича, им. А.Г.Витушкина, семинаре Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ, а также на целой серии международных и всероссийских конференций.

Разберем более подробно содержание диссертации по главам.

Имеется Введение и первая глава (вспомогательная). В главе I доказана Теорема 1.2.1, гласящая, что для поверхностей дель Пеццо степени не выше 5 нет разницы между геометрией над сепарабельно замкнутым полем и его алгебраическим замыканием. Здесь же, среди прочего, отмечается, что систематически в диссертации будут встречаться кубики Ферма, Клебша и некоторые другие.

Вторая глава посвящена точному вычислению константы Жордана группы Кремоны $Cr_2(F_q)$ ранга 2 над конечным полем. Одной из ключевых является Теорема 2.2.1. Она гласит, что для гладкой кубической поверхности S над полем F_2 порядок имеем $|Aut(S)| \leq 720$. Если же ее порядок равен 720, то $Aut(S)$ - это в точности группа перестановок на 6 элементах. Причем, это равенство реализуется для поверхности, заданной уравнением (1) из автореферата.

Из сказанного и еще одного наблюдения вытекает Теорема 2.1.3: Константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над полями F_8, F_4, F_2 равна 16 482 816, 60 480 и 720 соответственно. Подробное доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.4.

Интересное Следствие 2.1.4 говорит, что константа Жордана $Cr_2(F_q)$ ранга 2 равна порядку группы $PGL_3(F_q)$ при $q \neq 2$ и порядку группы Σ_6 при $q = 2$. Отметим особо, что $|\Sigma_6| > |PGL_3(F_2)| = 168$.

В главе 3 автор находит максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей S над всеми конечными полями характеристики 2. Теорема 3.1.1 утверждает, что если $F = F_{2^{2k}}$, то порядок группы автоморфизмов не превосходит 25 920. И он равен этому числу, если и только, если группа $Aut(S)$ равна группе $PSU_4(F_2)$, а сама кубика изоморфна кубике Ферма.

Если же $F = F_{2^{2k+1}}$, то та же Теорема утверждает, что порядок группы автоморфизмов не превосходит 720. И он равен этому числу, если и только, если группа $Aut(S)$ равна группе Σ_6, а сама кубика задана уравнением (1) из автореферата (точнее ей изоморфна).

Отметим особо следующий красивый промежуточный результат (Теорема 3.1.2). В условиях предыдущей теоремы пусть Γ - образ абсолютной группы Галуа $Gal(\bar{F}/F)$ в группе Вейля $W(E_6)$ (группе автоморфизмов решетки Пикара). Предположим, что циклическая группа пятого порядка

содержится в $Aut(S)$. Тогда,
(а) если $F = F_{2^{2k}}$ и $\Gamma = \{e\}$, то S изоморфна кубике Ферма;
(б) если $F = F_{2^{2k+1}}$ и $\Gamma = \mathbb{Z}/2Z$, то кубика задана уравнением (1) из автореферата (точнее ей изоморфна).

В Главе 4 автор находит максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Основной результат здесь - это Теорема 4.1.1. В ней детально и последовательно сформулированы ответы в характеристике 2, характеристике 3, характеристике 5, характеристике p, не равной указанным.

Диссертация написана на очень высоком научном уровне. Отдельные опечатки на страницах 4, 13, 26, 52, 63, 70 и 85 не влияют на отмеченное высокое качество диссертации в целом.

Диссертация А.В.Викуловой является серьезным вкладом в развитие алгебраической геометрии в целом и в теорию кубических поверхностей, в особенности. Ее результаты завершают проблему нахождения точного значения константы Жордана группы Кремоны ранга 2, проблему классификации самых симметричных гладких кубических поверхностей над произвольными полями и решают целую серию родственных красивейших задач. Результаты диссертации опубликованы в ведущих российских математических журналах. Всего по теме диссертации А.В. Викуловой опубликовано 3 статьи. Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами.

Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на ведущих семинарах по алгебраической геометрии, на международных и важнейших российских математических конференциях. Можно с уверенностью сказать, что эти результаты найдут применение как в различных разделах алгебраической геометрии. Кроме того, они могут найти применение в алгебраической теории чисел. Они могут послужить основой для спецкурсов в ПОМИ РАН, МГУ им.М.В.Ломоносова, МКН, НИУ ВШЭ и других высших учебных заведениях.

Заключение. Кандидатская диссертация А.В.Викуловой представляет собой самостоятельную работу по актуальной теме, носящей теоретический характер. В силу актуальности, сложности и научной новины целой серии доказанных результатов, считаю, что работа удовлетворяет всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предьявляемых к кандидатским диссертациям по специальности 1.1.5.

Считаю, что Викулова Анастасия Вадимовна, безусловно заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
чл.-корр. РАН,
доктор физико-математических наук Иван Александрович Панин
специальность – 01.01.06

Адрес: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), наб. Фонтанки 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия. Адрес электронной почты: panin@pdmi.ras.ru. Сайт: www.pdmi.ras.ru; тел. 8(812) 310-65-18

Подпись И.А. Панина заверяю
Помощник директора по кадрам Елена Геннадиевна Скрипка
Дата: 16 апреля 2025

