УТВЕРЖДАЮ
И. о. директора Федерального
государственного бюджетного учреждения науки
Института математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.

Миронов А.Е.

«18» апреля 2025 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Викуловой Анастасии Вадимовны «Кубические поверхности над полями положительной характеристики», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Исследования геометрических объектов с давних времен (по крайней мере со времени публикации в 1872 году «Эрлангенской программы» Клейна) тесно связаны с изучением их симметрий, т. е. их групп автоморфизмов, а также различных инвариантов этих групп.

Диссертационная работа Анастасии Вадимовны Викуловой посвящена изучению гладких кубических поверхностей и их групп автоморфизмов. Замысел состоит в том, чтобы описать «самые симметричные» такие поверхности, т. е. для каждого поля найти наибольший возможный порядок группы автоморфизмов гладкой кубической поверхности над этим полем и указать с точностью до изоморфизма все поверхности, на группах автоморфизмов которых этот максимум достигается.

Классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем комплексных чисел была окончательно завершена только в 1997 году Хосохом. Над произвольным алгебраически замкнутым полем характеристики нуль аналогичная классификация была получена Долгачевым и Исковских в 2009 году, причем в гораздо более общей постановке: они решили эту задачу для поверхностей дель Пеццо (поверхности дель Пеццо степени три можно естественным образом отождествить с гладкими кубическими поверхностями, используя антиканоническое вложение). В случае алгебраически замкнутого поля положительной характеристики группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо были описаны в недавних работах Долгачева, Дункана и Мартина (2019–2023 гг.)

Ситуация, когда поле не является алгебраически замкнутым, предсказуемо оказывается существенно сложнее. Для поверхностей дель Пеццо над полем вещественных чисел классификация групп их автоморфизмов была получена Ясинским в 2019 году. Для гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики нуль задача решена Смитом в 2024 году. В частности, известны и «самые симметричные» такие поверхности, если поле имеет нулевую характеристику. Таким

образом, исследование случая произвольного поля положительной характеристики завершает решение задачи описания «самых симметричных» гладких кубических поверхностей.

Интерес к гладким кубическим поверхностям с самой большой группой автоморфизмов вызван, в частности, их связью с задачей вычисления константы Жордана для двухмерной группы Кремоны над соответствующим полем. Напомним определение жордановости для произвольной группы, возникшее впервые в работе Попова 2011 года, но восходящее к классической теореме Жордана о существовании «большой» нормальной абелевой подгруппы в любой конечной подгруппе конечномерной линейной группы над полем комплексных чисел. Говорят, что группа G жорданова (обладает свойством Жордана), если существует такая константа J, что в любой конечной подгруппе группы G есть нормальная абелева подгруппа индекса, не превосходящего J. В этой терминологии теорема Жордана утверждает жордановость любой комплексной группы матриц. Если группа G жорданова, то минимальное возможное число J называют константой Жордана $J(G)$ группы G.

Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$, т. е. группа всех бирациональных автоморфизмов n-мерной проективной плоскости $\mathbb{P}^n$ над полем k, естественным образом отождествляется с полной группой автоморфизмов поля рациональных функций от n неизвестных над полем k. Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий — классический объект изучения в алгебраической геометрии, которому посвящено множество работ. При этом полные групп таких автоморфизмов, как правило, устроены очень сложно. Поэтому имеет смысл попытаться классифицировать их конечные подгруппы или хотя бы дать их некоторое качественное описание, например, установив свойство жордановости. Так, для группы Кремоны $G = \mathrm{Cr}_2(k)$ Серр в 2009 году показал, что каждая ее конечная подгруппа, порядок которой взаимно прост с характеристикой поля k, имеет нормальную абелеву подгруппу, индекс которой ограничен некоторой универсальной константой, в частности, группа G над полем нулевой характеристики жорданова. Заметим, что при $n = 1$ группа Кремоны изоморфна $PGL_2(k)$ и ее жордановость при $k = \mathbb{C}$ вытекает из теоремы Жордана.

Если поле k имеет положительную характеристику p, то группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ уже не обязана быть жордановой даже при $n = 1$. Действительно, группа $\mathrm{Cr}_1(\overline{\mathbb{F}}_p) = PGL_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ поля $\mathbb{F}_p$ содержит конечные простые подгруппы $PSL_2(\mathbb{F}_{p^r})$, $r \in \mathbb{N}$, порядки которых не ограничены. Тем не менее, в 2023 году Прохоров и Шрамов, рассмотрев случай произвольного конечного поля $\mathbb{F}_q$, доказали, что группа $G = \mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ жорданова, и установили верхнюю оценку на константу Жордана $J(G)$. Более того, они показали, что если $q \notin \{2, 4, 8\}$, то $J(G) = q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1) = |PGL_3(q)|$. В оставшихся трех случаях они ограничились заведомо грубой оценкой на $J(G)$, оценив ее через порядок группы Вейля $W(E_8)$ системы корней E_8.

Основные результаты представленной диссертации состоят в следующем.

1. Найдена константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечными полями $\mathbb{F}_q$, $q \in \{2, 4, 8\}$, тем самым завершено исследование данного вопроса для произвольного конечного поля.

2. Для любого поля k найдены все гладкие кубические поверхности над k с наибольшей по порядку группой автоморфизмов, найдены группы автоморфизмов этих поверхностей и их порядки, а также доказано, что такие поверхности единственны с точностью до изоморфизма.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения.

В первой главе собраны определения и вспомогательные утверждения.

Вторая глава посвящена вычислению константы Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ для $q \in \{2, 4, 8\}$. Как было показано в работе Прохорова и Шрамова, конечная подгруппа G в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ — это группа автоморфизмов либо поверхности дель Пеццо, либо поверхности, которая имеет структуру G-эквивариантного расслоения на коники. Более того, если $J(G) > |PGL_3(q)|$, то можно считать, что $G = \mathrm{Aut}(S)$, где S — поверхность дель Пеццо степени 1 или 3. Представляя поверхность дель Пеццо степени 1 в виде двойного накрытия поверхности $\mathbb{P}(1, 1, 2)$, автор диссертации показывает, что $|\mathrm{Aut}(S)| \leq |PGL_3(q)|$ для любого q. Поэтому все сводится к ситуации, когда S — это поверхность дель Пеццо степени 3, т. е. S — гладкая кубическая поверхность над $\mathbb{F}_q$. Так вопрос о константе Жордана для группы Кремоны связывается с вопросом о наибольшем возможном порядке группы автоморфизмов кубической поверхности. В главе 2 автору приходится рассматривать его фактически только для поля порядка 2 (если $q = 4, 8$, то несложно снова установить, что $|G| \leq |PGL_3(q)|$). В случае $q = 2$ автор, используя известные вложения $\mathrm{Aut}(S)$ в группы $W(E_6)$ и $PGL_4(2)$, а также информацию о максимальных подгруппах последней группы из «Атласа конечных групп», показывает, что $|\mathrm{Aut}(S)| \leq |\mathrm{Sym}(6)| = 720$, а затем предъявляет кубическую поверхность S, группа автоморфизмов которой изоморфна $PSp_4(2) \simeq \mathrm{Sym}(6)$. Поскольку $720 > 168 = |PGL_3(2)|$, случай $q = 2$ оказывается единственным исключением в утверждении о том, что $J(G) = |PGL_3(q)|$.

В третьей главе автор, обобщая методы предыдущей главы, находит гладкую кубическую поверхность S над произвольным полем $\mathbb{F}_{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, с наибольшей возможной группой автоморфизмов и показывает, что S определена однозначно с точностью до изоморфизма. Оказывается, что при четном k поверхность S — это кубика Ферма, $\mathrm{Aut}(S) \simeq PSU_4(2)$ и $|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$, а при нечетном k поверхность S задана уравнением $x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0$, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{Sym}(6)$ и $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$. При доказательстве используется классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями положительной характеристики, полученная в 2019 году Долгачевым и Дунканом, в частности, тот факт, что $\mathrm{Aut}(S)$ изоморфно вкладывается в группу Вейля $W(E_6) \simeq PSU_4(2) \rtimes C_2$, где C_2 — группа порядка 2. Случай четного k довольно просто получается из уже известных результатов, а вот в случае, когда k нечетно, доказательство совершенно нетривиально и опирается на тонкие геометрические соображения и анализ подгруппового строения группы $W(E_6)$.

В заключительной четвертой главе решается та же задача, что и в третьей, но уже для случая произвольного (не обязательно конечного) поля произвольной характеристики. Как уже отмечалось, те же результаты в случае нулевой характеристики могут быть выведены из соответствующей классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей, полученной Смитом в 2024 году. Мы не будем приводить здесь полную формулировку основного результата данной главы, отметим только, что он разбивается на случаи в зависимости от того, равна ли характеристика p числам $2, 3, 5$ (эти три числа составляют полный набор простых делителей порядка группы $W(E_6)$) или не равна ни одному из них, а также содержит ли поле примитивный корень из единицы степени n, где $n = 4$ для $p = 3$ и $n = 3$ во всех остальных случаях. Кроме того, дается полный ответ на вопрос, при каких условиях на поле k возникает изоморфизм соответствующих «самых симметричных» поверхностей из

формулировки основного результата. Доказательства идейно близки к рассуждениям из главы 3, но, безусловно, содержат целый ряд новых моментов. Во-первых, даже в случае $p = 2$ приходится иметь дело с произвольным, не обязательно конечным полем, и автор, фактически, изобретает новое доказательство. Во-вторых, случаи $p = 5$ и, особенно, $p = 3$ требуют отдельного внимания. Мы не будем подробно здесь на этом останавливаться, заметим лишь, что глава занимает без малого 60 страниц.

В заключении автор повторяет свои основные результаты. Приложение содержит любопытный исторический материал по теме диссертации.

Научная значимость и актуальность темы диссертационной работы не взывает, на наш взгляд, никаких сомнений. С одной стороны, кубические поверхности и их симметрии — классический объект исследования в алгебраической геометрии (их изучении ведется с девятнадцатого века). С другой стороны, в последние годы началось активное изучение таких поверхностей над произвольными, не обязательно алгебраически замкнутыми полями, в том числе в связи с вниманием к структуре групп бирациональных автоморфизмов поверхностей над произвольными полями. Соискателем получен исчерпывающий ответ на вопрос о том, каковы гладкие кубические поверхности с наибольшей группой автоморфизмов. Результаты работы представляют интерес для специалистов по алгебраической геометрии как у нас в стране, так и за рубежом, и могут быть использованы для дальнейших исследований в этой области, подготовке специальных курсов для студентов и аспирантов математических специальностей.

Текст диссертации свидетельствует об уверенном владении соискателем инструментарием современной алгебры: Анастасия Вадимовна легко переходит от содержательных геометрических наблюдений к работе в конечных группах автоморфизмов и обратно. В целом, диссертация хорошо оформлена. Доказательства очень подробны, так что верификация результатов не вызывает у читателя особых затруднений. Конечно, текст такой длины, а диссертация насчитывает 159 страниц, не может обойтись без опечаток, пропущенных запятых и стилистических шероховатостей. Мы не видим смысл перечислять их здесь (аннотированный pdf-файл диссертации, где все они отмечены, отправлен автору). Остановимся лишь на замечаниях к работе общего характера.

1. Название диссертации точнее отражало бы ее содержание, если бы в нем были упомянуты не только кубические поверхности, но и их группы автоморфизмов.

2. Термин «жордановость» по отношению к произвольной группе был предложен в работе Попова 2011 года. Автор делает соответствующую ссылку во второй главе диссертации. Однако ни во введении, ни в автореферате этого не сделано, что странно, учитывая, что жордановость — одно из ключевых понятий диссертации.

3. Страницы 26–27 «Атласа конечных групп» содержат информацию не только о максимальных подгруппах простой группы $PSU_4(2)$, но и информацию о ее классах сопряженных элементов. Кроме того, там же имеется информация о максимальных подгруппах и классах сопряженных элементов группы Вейля $W(E_6)$ как полной группы автоморфизмов группы $PSU_4(2)$. Таким образом, леммы 1.3.4, 1.3.5, 1.3.7, 1.3.8 и 1.3.10 не требуют иного доказательства, кроме ссылки на «Атлас» (как это сделано автором в случае леммы 1.3.9).

4. Стремление автора сохранить в тексте диссертации живость изложения, присущую ее докладам, приводит иногда к языковым ляпам, например, к попытке «затронуть историческую составляющую данных поверхностей».

Указанные замечания не влияют на общую высокую оценку диссертационной работы.

Результаты диссертации опубликованы в виде 3 статей в журналах «Математический сборник», «Математические заметки», «Finite fields and their applications». Все статьи личные, без соавторов. Результаты хорошо апробированы, они докладывались на конференциях и семинарах в Москве, Санкт-Петербурге, Вологде, Нижнем Новгороде и неоднократно у нас в Новосибирске, в том числе на объединенном семинаре лаборатории алгебры ИМ СО РАН. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Суммируя сказанное, можно заключить, что диссертационная работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям: она представляет собой научно-квалификационную работу, в которой получены важные теоретические результаты в области алгебраической геометрии, их актуальность и новизна не вызывают сомнений. Работа обладает внутренним единством и безусловно свидетельствует о личном вкладе соискателя в науку. Автор диссертации, Анастасия Вадимовна Викулова, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Отзыв составлен главным научным сотрудником лаборатории алгебры ИМ СО РАН А.В. Васильевым. Отзыв обсужден и одобрен на заседании лаборатории алгебры ИМ СО РАН 16 апреля 2025 г.

И.о. зав. лабораторией алгебры ИМ СО РАН
д.ф.-м.н. М.А. Гречкосеева

Г.н.с лаборатории алгебры ИМ СО РАН
д.ф.-м.н., профессор А.В. Васильев