ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Викулова Анастасия Вадимовна

УДК: 512.7

Кубические поверхности над полями положительной характеристики

1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Константин Александрович Шрамов

Москва – 2025

Оглавление

Введение **3**

1 Предварительные сведения **26**

1.1 Обозначения 26

1.2 Сепарабельное замыкание основного поля 27

1.3 Группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ 28

1.4 Кубические поверхности 33

1.5 Кубические поверхности над алгебраически замкнутыми полями 40

2 Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем **42**

2.1 Введение 42

2.2 Гладкие кубические поверхности над полем $\mathbb{F}_2$ 44

2.3 Поверхности дель Пеццо степени 1 47

2.4 Доказательство теоремы 2.1.3 48

2.5 Единственность гладкой кубической поверхности с группой автоморфизмов $\mathfrak{S}_6$ над полем $\mathbb{F}_2$ 50

3 Кубические поверхности над конечными полями характеристики 2 **52**

3.1 Введение 52

3.2 Проективная прямая 54

3.3 Квадратичные поверхности 59

3.4 Структура расслоения на коники на кубической поверхности 66

3.5 Доказательство основных результатов 74

3.6 Кубика Ферма над полем характеристики 2 77

4 Кубические поверхности над произвольными полями 80

4.1 Введение 80

4.2 Предварительные сведения 86

4.3 Группа $\mathfrak{S}_5$ и кубика Клебша 96

4.4 Кубические поверхности над полем характеристики 3 102

4.5 Кубика Ферма 115

4.6 Поля без кубических корней из единицы 119

4.7 Доказательство основных результатов 133

Заключение 137

А Краткий исторический очерк 140

Список работ по теме диссертации 149

Литература 150

Введение

> Τούτων γὰρ δὴ τῶν ἐναιθερίων ἤχων καὶ πρὸς ἀλλήλους γίνονται λόγοι. τὸ γὰρ δὴ ζωδιακὸν μερισθῆναι μὲν συμβέβηκεν εἰς μέρη δώδεκα, ἰσαρίθμως τοῖς τε ἐν μουσικῇ τόνοις καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου· τοῦτο γὰρ ἐκ πασῶν ῥητῶν συνίσταμεν πρῶτον ... τοῦ δὲ τοιούτου τριγώνου, συνεστῶτος, ὡς ἔφην, ἐκ $\overline{\gamma}$ καὶ $\overline{\delta}$ καὶ $\overline{\epsilon}$ ...<...> ἀλλ' εἰ καὶ τῶν πλευρῶν ἑκάστην κατὰ βάθος αὐξήσαιμεν (βάθος γὰρ ἡ σώματος φύσις), ποιήσαιμεν ἂν τὸν $\overline{\sigma\iota\overline{\sigma}}$, ἰσάριθμον ὄντα σύνεγγυς τῷ τῶν ἑπταμήνων.
>
> – Ἀριστείδης ὁ Κοϊντιλιανός. [1]

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Настоящая диссертация имеет своей основной целью изучение гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Отметим, что исторический обзор изысканий кубических поверхностей мы поместили в приложении А. Мы будем изучать главным образом автоморфизмы кубических поверхностей. Воззрение на геометрию как на изучение инвариантов группы преобразований впервые появляется в Эрлангенской программе Ф. Клейна.

Перейдем к более подробному обсуждению кубических поверхностей. Гладкая кубическая поверхность является поверхностью дель Пеццо степени три. Под поверх-

[1] [Ar1652, С.151] Между звуками эфира также существуют и взаимные соотношения. В самом деле, сложилось так, что зодиак разделен на двенадцать частей, — столько же, сколько тонов в музыке и в периметре того прямоугольного треугольника, который из всех треугольников с целыми сторонами составляется первым ... этот треугольник, как я уже говорил, составлен из чисел три, четыре и пять ...<...> Но если мы еще добавим глубину, третье измерение по каждой из сторон (ведь у тел есть еще и глубина), то мы получим 216, что примерно равно возрасту семимесячных детей. – Аристид Квинтилиан. *Прим.: речь идет о сумме кубов* $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 = 216$. *Перевод с греческого и примечание Марии Александровны Степановой.*

ностью дель Пеццо разумеется такая гладкая поверхность, у которой антиканонический класс является обильным (краткое историческое замечание о них приведено на странице 146 в приложении А). В этом разделе мы попытаемся продемонстрировать важность поверхностей дель Пеццо степени три в бирациональной геометрии поверхностей.

Среди вопросов, интересующих современных геометров в теории кубических поверхностей, отметим особо вопрос о классификации групп автоморфизмов этих поверхностей. Первая попытка такой классификации над полем комплексных чисел была предпринята Б. Сегре в трактате [Se1942, §100]. Лишь более чем через полвека по поводу этой классификации групп автоморфизмов Т. Хосох с своей статье [Ho1997] сделал замечание о неполноте классификации Б. Сегре и указал на ошибки, допущенные в ней (см. [Ho1997, Remark 5.4]). В той же работе Т. Хосох привел верную классификацию. Классификация же групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями ненулевой характеристики была дана лишь в 2019 году И. В. Долгачевым и А. Дунканом в статье [DoDu2019]. Отметим, что исследования, проведенные в упомянутой статье, а также в работе [DoMa2022] И. В. Долгачева и Г. Мартина, показывают, что наибольшая по порядку конечная простая группа, которая действует бирационально на проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем характеристики 2, регуляризуется на гладкой кубической поверхности, а сама группа имеет порядок 25 920 и изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Естественность исследований в алгебраической геометрии над алгебраически замкнутыми полями порой вытесняет подобные исследования над произвольными полями. Таким образом, само собою должно возникнуть желание классифицировать группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями. Было бы ошибкой не упомянуть здесь о совсем недавней работе Дж. Смита [Sm2024], в которой впервые была дана классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями характеристики нуль. Это дает пищу для размышлений над данной классификацией над произвольными полями положительной характеристики.

Поверхность дель Пеццо степени 3 над алгебраически замкнутым полем явля-

ется рациональной. В частности, любая группа, действующая регулярно на кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем, действует бирационально на проективной плоскости. В связи с этим здесь уместно поговорить о таком важнейшем объекте в алгебраической геометрии, как группа Кремоны. Под группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n над полем $\mathbf{F}$ мы понимаем группу всех бирациональных автоморфизмов проективного пространства размерности n над полем $\mathbf{F}$. При $n = 1$ группа Кремоны совпадает с группой проективных преобразований проективной прямой. Группа Кремоны ранга больше одного устроена значительно сложнее. В этом случае она неимоверно больше группы всех регулярных автоморфизмов проективного пространства. Такая ситуация не возникает в случае ранга один по той лишь причине, что рациональные отображения между нормальными кривыми являются на самом деле регулярными.

Для группы Кремоны ранга 2 над полем комплексных чисел в 2009 году в работе [DoIsk2009] И. В. Долгачевым и В. А. Исковских была представлена классификация конечных подгрупп. Получившаяся классификация настолько громоздка, что не оставляет никакой надежды для подобной классификации подгрупп в группе Кремоны ранга больше двух. Одно из продвижений в исследовании группы Кремоны ранга два связано с исследованием устройства ее нормальных подгрупп и конечных подгрупп, что подробно описано в трудах [CaLa2013] и [Serr2010].

Не можем не упомянуть об одном замечательнейшем факте относительно группы Кремоны ранга 2 над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{F}$. В работах [Noe1870] и [Cast1901] мы находим, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ порождается группой автоморфизмов проективного пространства и инволюцией

$$[x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy],$$

также носящее имя Л. Кремоны. Легко видеть, что инволюция Кремоны не является регулярным отображением. При $n = 3$ группа Кремоны уже не порождается группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$ и конечным числом бирациональных преобразований, что мы находим в чудесном трактате Х. Хадсон [Hu1927, Chapter XVI, §32], который изобилует

фактами, связанными с группой Кремоны ранга 2 и 3, и в котором приведен прекрасный исторический очерк о группе Кремоны. В работе [Pan1999] показано, что при $n \geqslant 3$ группа Кремоны над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль не порождается группой автоморфизмов проективного пространства и счетного числа бирациональных преобразований ограниченной степени. Вопрос о порождающих элементах группы Кремоны ранга больше двух до сих пор остается открытым.

Исследование группы Кремоны ранга больше двух представляет собой непомерные трудности: ее теория находится еще на той стадии развития, когда, несмотря на довольное изобилие результатов, непосредственно связанных с группой Кремоны ранга два, нет еще богатства методов для изучения группы Кремоны бóльших рангов. Из тех немногих продвижений, что имеются на данный момент в изысканиях группы Кремоны ранга три, отметим классификацию неабелевых простых конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ (см. [Pr2012, Theorem 1.3]), а также классификацию p-элементарных конечных подгрупп для почти всех простых чисел p, кроме небольшого количества исключений (см. [Pr2011, Pr2014, PrShr2018]).

Для группы Кремоны произвольного ранга особо отметим исследование ее простоты. Для ранга 2 над полем комплексных чисел непростота была доказана в работе [CaLa2013, Main Theorem], а для ранга $n \geqslant 3$ над полем комплексных чисел непростота была доказана в работе [BlLaZi2021, Theorem A].

Обзор современных достижений в исследовании группы Кремоны даны в работах Ж. Дезерти [Dé2012] и С. Канты [Ca2013, Ca2018].

Иногда группа Кремоны демонстрирует свое хорошее поведение на уровне конечных подгрупп. Для этого изучается свойство Жордана группы Кремоны. Будем говорить, что заданная группа обладает *свойством Жордана* (или же будем называть ее *жордановой*), если имеется такая константа $J > 0$, что любая конечная подгруппа имеет нормальную абелеву подгруппу индекса не больше, чем J. Если группа жорданова, то минимальную константу из определения жордановости будем называть константой Жордана. Своим названием жордановы группы обязаны выдающемуся ученому К. Жордану, внесшему неимоверный вклад в развитие теории групп и линейной алгебры. В своей работе [Jo1878] К. Жордан доказывает свойство Жорда-

на группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ для произвольного натурального n. Исследование жордановости группы Кремоны впервые было начато Ж.-П. Серром (см. [Serr2009, Theorem 5.3]). В упомянутой работе Ж.-П. Серр показывает, что группа Кремоны ранга 2 над полем характеристики нуль является жордановой.

Классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями играет значимую роль в изучении константы Жордана группы Кремоны. В своей статье [ПрШр2023] Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов исследовали свойство жордановости группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями и нашли точное значение константы Жордана упомянутой группы. Основной результат работы [ПрШр2023] заключается в том, что константа Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \notin \{2, 4, 8\}$ равна $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. Лишь поля $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$ стали препятствием для того, чтоб покончить с вопросом о константе Жордана группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями. Сложности, которые возникли при нахождении константы Жордана группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2, 4, 8\}$ в упомянутой работе, связаны как раз с отсутствием на тот момент классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2.

Нельзя не упомянуть о другом ярком примере возникновения кубических поверхностей в изучении бирациональных групп поверхностей; а именно, в исследовании поверхностей Севери–Брауэра. Под многообразиями Севери–Брауэра разумеются такие многообразия, которые при некотором расширении скаляров изоморфны проективному пространству. При этом, под нетривиальным многообразием Севери–Брауэра разумеются такие многообразия Севери–Брауэра, которые сами по себе не изоморфны проективному пространству. В статье [Shr2021] К. А. Шрамов показал, что если конечная группа G действует бирационально на нетривальной поверхности Севери–Брауэра над полем рациональных чисел, то $G \subset (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Автор нынешней диссертации в работе [Vik2024], не входящей в данную диссертацию, дополняет исследования К. А. Шрамова и приходит к заключению, что любая подгруппа в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ может действовать бирационально на поверхности Севери–Брауэра с вышеупомянутыми условиями. При этом, мы приходим к интересному результату, что группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ на такую поверхность может действовать только бирационально,

а регуляризуется эта группа на гладкой кубической поверхности, которая является формой кубики Ферма.

Цели и задачи. Изучение групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Для заданного поля найти среди этих групп максимальную по порядку. Найти все с точностью до изоморфизма гладкие кубические поверхности, у которых группа автоморфизмов является наибольшей по порядку среди всех групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над заданным полем. Найти точную константу Жордана группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ ранга два для конечного поля $\mathbb{F}_q$ при $q \in \{2, 4, 8\}$, и, тем самым, предъявить константу Жордана группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ ранга два для любого конечного поля.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми и были получены по ходу исследований автора. Они состоят в следующем.

1. Найдена в явном виде константа Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечными полями $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$.

2. Найдены наибольшие по порядку группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Классифицированы самые симметричные гладкие кубические поверхности (то есть гладкие кубические поверхности с наибольшей по порядку группой автоморфизмов) над произвольными полями. Доказано, что над каждым произвольным полем такие кубические поверхности единственны с точностью до изоморфизма. Над конечными полями характеристики 2 были даны два альтернативных метода, дающих классификацию самых симметричных гладких кубических поверхностей.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и алгебраической комбинаторике.

Методология и методы исследования. В работе используются методы программы минимальных моделей, бирациональной геометрии, теории поверхностей дель

Пеццо, теории групп, теории Галуа.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации сопровождаются строгими математическими доказательствами, что обосновывается публикацией оных в 3 статьях, собственно автору принадлежащих, в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, которые входят в базы данных Scopus и Web of Science. Список этих работ приведен в конце диссертации отдельно.

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии Математического института имени В.А. Стеклова (семинар И. Р. Шафаревича), на семинаре по многомерному комплексному анализу в МГУ (Семинар А.Г. Витушкина) и на семинаре Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ, а также на международных и всероссийских конференциях, в число которых входят:

- Международная конференция "Дни геометрии в Новосибирске – 2022", 29 августа – 2 сентября 2022 года, ИМ СО РАН, Новосибирск.
- Студенческая школа-конференция "Математическая весна – 2023", 27 – 30 марта 2023 года, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород.
- Международная конференция "Algebraic groups: the White Nights season III", 10 – 14 июля 2023 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.
- II Всероссийская научно-практическая конференция "Математика в современном мире", посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве, Секция "Алгебраическая геометрия и теория чисел", 19 – 22 сентября 2023 года, Вологодский государственный университет, Вологда.
- Международная конференция "Dynamics in Siberia", 26 февраля – 2 марта 2024 года, ИМ СО РАН, Новосибирск.
- Весенняя школа-конференция по теории чисел, алгебре и алгебраической геометрии для молодых исследователей, 1 – 5 мая 2024 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.

- IV Конференция математических центров, 6 – 11 августа 2024 года, Международный Математический Институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург.

- Международная конференция “HSE/BIMSA Conference on Algebraic Geometry and Mathematical Physics”, 5–9 ноября 2024 года, НИУ ВШЭ, Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм, Москва.

Структура диссертации.

В заключение приведем краткое содержание настоящей диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка литературы.

Во введении мы даем краткий обзор современного состояния науки об алгебраических поверхностях. Далее мы приводим цели и задачи диссертации, ее научную новизну и положения, выносимые на защиту, теоретическую и практическую значимость, методологию и методы исследования, степень достоверности и апробацию результатов, и даем краткое описание диссертации.

Чтобы сделать чтение диссертации более доступным, а структуру диссертации сделать более последовательной, мы принуждены были посвятить **первую главу** изложению некоторых общих соображений относительно гладких кубических поверхностей и их группы автоморфизмов. Читатель не раз увидит ссылки на эту главу в остальных главах, так как здесь собраны известные широкому кругу алгебраических геометров леммы, и обозначения, которыми мы будем постоянно пользоваться. В разделе 1.2 мы доказываем вспомогательную теорему (теорема 1.2.1) о связи геометрии поверхностей дель Пеццо малых степеней над алгебраически замкнутым полем и над сепарабельно замкнутым полем. Она гласит, что для поверхности дель Пеццо степени $d \leqslant 5$ группа автоморфизмов и группа Пикара над алгебраическим замыканием совпадает с группой автоморфизмов и группой Пикара над сепарабельным замыканием поля, соответственно, и что все прямые, определенные над алгебраическим замыканием поля определены уже и над сепарабельным замыканием поля.

В разделе 1.3 достаточно подробно изучена группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ системы корней E_6. Мы приводим таблицу с встречающимися далее классами сопряженности в

группе $W(\mathrm{E}_6)$ с подробнейшим описанием, формулируем несколько лемм о подгруппах в группе $W(\mathrm{E}_6)$, приводим классификацию максимальных подгрупп в нормальной подгруппе индекса 2 в группе $W(\mathrm{E}_6)$. В разделе 1.4 мы вводим некоторые соглашения и обозначения относительно геометрии гладких кубических поверхностей и формулируем несколько важных для дальнейшего лемм. В разделе 1.5 мы приводим полезные для дальнейшего изложения примеры гладких кубических поверхностей и формулируем основной результат И. В. Долгачева и А. Дункана о классификации максимальных групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем.

Перед тем как перейти к описанию остальных глав диссертации, перечислим кубические поверхности, которые будут встречаться повсеместно в диссертации и, в частности, в формулировках основных результатов.

Гладкая кубическая поверхность, заданная уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^3$, называется *кубикой Ферма*. Гладкая кубическая поверхность, заданная уравнениями

$$x + y + z + t + w = xyz + xyt + xyw + xzt + xzw + xtw + yzt + yzw + ytw + ztw = 0$$

в $\mathbb{P}^4$, называется *кубикой Клебша*. Над полем характеристики, не равной 3, кубика Клебша может быть задана более простыми уравнениями

$$x + y + z + t + w = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + w^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^4$.

Нас часто будет интересовать кубическая поверхность, заданная уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0 \tag{0.0.1}$$

в $\mathbb{P}^3$. Над полем характеристики 3 у нас будет возникать гладкая кубическая поверхность, заданная уравнением

$$t^3 + tz^2 - xy^2 + x^2z = 0 \tag{0.0.2}$$

в $\mathbb{P}^3$. Обратим внимание читателя на то, что эта кубическая поверхность является циклической, то есть трехлистно накрывает $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в каспидальной кривой.

Вторую главу мы посвятили вычислению константы Жордана группы Кремоны ранга 2 над конечным полем. Напомним, что под группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n мы подразумеваем группу бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbf{F}$. Мы будем изучать свойство жордановости группы Кремоны ранга 2 над конечным полем и искать ее точную константу Жордана. В статье [ПрШр2023] Ю. Г. Прохоровым и К. А. Шрамовым было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, жорданова. Более того, они получили следующие оценки на константу Жордана.

Теорема 2.1.2([ПрШр2023, теорема 1.2]). *Пусть $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ — константа Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$. Тогда*

$$\begin{aligned} &J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = q^3(q^2-1)(q^3-1), && \text{если } q \notin \{2,4,8\};\\ &J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) \leqslant 696\,729\,600, && \text{если } q \in \{2,4,8\}. \end{aligned}$$

В этой главе мы найдем точное значение константы Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2,4,8\}$. С этой целью нам достаточно изучить группы бирегулярных автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_q$, поскольку любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Согласно [ПрШр2023, следствие 5.3 и лемма 6.1], для расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ и для поверхностей дель Пеццо степени $4 \leqslant d \leqslant 9$ и $d = 2$ константа Жордана группы автоморфизмов не больше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$, что является порядком группы автомор-

физмов $\mathbb{P}^2$. Поэтому нам нужно изучить группы регулярных действий на поверхности дель Пеццо степени 1 и 3, и нормальные абелевы подгруппы в этих группах. Изучение этих групп будет проводиться в разделе 2.2 для поверхностей дель Пеццо степени 3 и в разделе 2.3 для поверхностей дель Пеццо степени 1. Познакомим подробнее читателя с основными методами, используемыми в этих двух разделах. В разделе 2.2, используя классификацию максимальных подгрупп для группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, которую можно найти в [ATLAS1985], мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2.2.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, если порядок группы автоморфизмов равен 720*, то* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$*, где под группой* $\mathfrak{S}_6$ *мы подразумеваем группу перестановок из* 6 *элементов.*

Далее мы приводим пример такой гладкой кубической поверхности S над полем $\mathbb{F}_2$, для которой группа автоморфизмов изоморфна группа перестановок из 6 элементов $\mathfrak{S}_6$. Отметим, что эта кубическая поверхность изоморфна поверхности, заданной уравнением (0.0.1). Это и доказывает, что группа $\mathfrak{S}_6$, как группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$, достигается. Нельзя не отметить, что приведенный нами пример указанной кубической поверхности является чрезвычайно полезным примером, ибо он будет в дальнейшем не раз встречаться в изучении групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями.

В разделе 2.3, представив поверхность дель Пеццо степени 1 в виде двойного накрытия поверхности $\mathbb{P}(1,1,2)$, мы находим оценку на порядок группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо степени 1 над конечными полями и показываем, что для любого поля $\mathbb{F}_q$ этот порядок меньше, чем порядок группы автоморфизмов проективного пространства $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$, которая не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп. А значит, константа Жордана группы Кремоны не меньше, чем порядок группы $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$.

Прямым следствием из вышесказанного являются следующие теорема и след-

ствие, которые сформулированы в разделе 2.1, а доказаны в разделе 2.4.

Теорема 2.1.3. *Константа Жордана* $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ *для группы Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ *равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816 & \text{при } q = 8; \\ 60\,480 & \text{при } q = 4; \\ 720 & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

Следствие 2.1.4. *Константа Жордана* $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ *для группы Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ *равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|, & \text{если } q \neq 2; \\ |\mathfrak{S}_6| > 168 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)| & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

В качестве дополнения к доказательству теоремы 2.1.3 в разделе 2.5 мы покажем (теорема 2.1.5), что гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ с наибольшей группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма и ее группа автоморфизмов изоморфна группе $\mathfrak{S}_6$ перестановок из 6 элементов. При доказательстве этой теоремы мы показываем, что кубическая поверхность (0.0.1) обладает тем замечательным свойством, что она проходит через все 15 точек на $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_2}$. Действуя на множество кубических поверхностей, проходящие через все 15 точек, группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, мы показываем, что стабилизатор этого действия будет иметь порядок 720. Поэтому согласно теореме 2.2.1, группа автоморфизмов таких кубических поверхностей изоморфна группе перестановок из 6 элементов. При этом, подсчетом порядков мы получаем, что действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубические поверхности, проходящие через все 15 точек на $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_2}$, является транзитивным, что и доказывает единственность с точностью до изоморфизма таких поверхностей. Затем мы показываем, что если гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ обладает регулярным действием группы $\mathfrak{S}_6$, то она единственна с точностью до изоморфизма. Для этого мы изучаем возможные значения длины орбиты действия $\mathfrak{S}_6$ на точку на кубической поверхности, которая всегда есть согласно теореме Шевалле–Варнинга, и находим,

что это значение может равняться только 15, что и доказывает требуемое в связи с единственностью с точностью до изоморфизма гладких кубических поверхностей, проходящих через 15 точек.

В третьей главе мы обобщаем результат предыдущего раздела, находя максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над всеми конечными полями характеристики 2. Мы доказываем следующую теорему, сформулированную в разделе 3.1.

Теорема 3.1.1. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над конечным полем $\mathbf{F}$ характеристики* 2.

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ и S изоморфна кубике Ферма.

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 720$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

В процессе доказательства теоремы 3.1.1 мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над конечным полем $\mathbf{F}$ характеристики* 2. *Пусть Γ – образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}/\mathbf{F})$ в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}}))$. Предположим, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(S)$.*

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\Gamma = \{e\}$, то S изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то S изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

Эти две теоремы доказываются в разделе 3.5, собрав воедино результаты предыдущих разделов этой главы. Объясним идею доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Сперва мы должны показать, что максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2 имеют вид как в теореме 3.1.1. Неравенство для полей вида $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ следует из классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей, которая приведена в теореме 1.5.1. То что эта оценка достижима, следует из утверждения, доказанного в статье [DoDu2019, §5.1], о том, что группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_4$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Для полей вида $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ неравенство следует из того, что если бы группа автоморфизмов имела бы порядок больше 720, то по теореме 1.5.1 и классификации максимальных подгрупп в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, которая приведена в теореме 1.3.9, мы бы получили, что образ абсолютной группы Галуа в группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}})) \simeq W(\mathrm{E}_6)$ должен быть тривиален. Однако, в разделе 3.4, в котором изучается образ группы Галуа в группу $W(\mathrm{E}_6)$ с помощью расслоений на коники гладких кубических поверхностей, мы показываем, что это невозможно. Достижение этой оценки следует из теоремы 2.2.1 предыдущей главы.

В разделе 3.4 мы также показываем, что имеется возможность $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно стянуть 5 непересекающихся прямых на кубической поверхности, определенных над заданным полем.

Следствие 3.4.7. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над конечным полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Следствие 3.4.9. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to Q$$

на поверхность $Q \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – сепарабельное квадратичное расшире-

ние $\mathbf{F}$, *а* $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$ – *ограничение скаляров по Вейлю* $\mathbb{P}^1$.

Заметим, что в двух упомянутых выше следствиях по существу конечность поля, над которым мы работаем. При стягиваниях, указанных в следствиях 3.4.7 и 3.4.9 мы получаем 5 точек в общем положении на квадриках. В разделе 3.3 мы показываем, что множество из таких 5 точек в общем положении на упомянутых квадриках единственно с точностью до автоморфизма. Тем самым, из единственности 5 точек на квадрике с точностью до автоморфизма мы получаем единственность гладкой кубической поверхности с заданными свойствами с точностью до изоморфизма.

Раздел 3.2 является вспомогательным: в нем мы доказываем некоторые полезные для дальнейшего леммы касательно группы автоморфизмов проективной прямой над конечным полем характеристики 2. В последнем разделе 3.6 сей главы, признавая несомненную пользу в демонстрации частных примеров, мы исследуем группу автоморфизмов кубики Ферма над конечными полями характеристики 2 и доказываем следующее утверждение.

Утверждение 3.1.3. *Пусть* $\mathcal{F}$ – *кубика Ферма над полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2. *Тогда если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то мы имеем* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$.

Прямым следствием из этого утверждения является утверждение о том, что над полями $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ кубика Ферма и гладкая кубическая поверхность (0.0.1) не изоморфны, в то время как над полями $\mathbb{F}_{4^k}$ они изоморфны.

Следствие 3.1.4. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2.

(i) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то гладкая кубическая поверхность* (0.0.1) *не изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *или* $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$, *то гладкая кубическая поверхность* (0.0.1) *изоморфна кубике Ферма.*

В четвертой главе мы находим максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями. Главная цель этой главы – доказательство следующей теоремы, сформулированной в разделе 4.1.

Теорема 4.1.1. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над произвольным полем $\mathbf{F}$.*

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 2.*

  (i)$_2$ *Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$$

  и S изоморфна кубике Ферма.

  (ii)$_2$ *Если $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$$

  и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 3.*

  (i)$_3$ *Если $\mathbf{F}$ содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 216$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

  и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.2). *Здесь под группой $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$ мы разумеем группу Гейзенберга верхнетреугольных матриц 3×3 над полем $\mathbb{F}_3$ с единицами на диагонали.*

  (ii)$_3$ *Если $\mathbf{F}$ не содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

  и S изоморфна кубике Клебша.

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 5.

  (i)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

  и S *изоморфна кубике Ферма.*

  (ii)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 72$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$$

  и S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1). *Здесь под группой* $\mathfrak{D}_4$ *мы разумеем группу диэдра порядка* 8.

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *не равна* 2, 3 *и* 5.

  (i)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

  и S *изоморфна кубике Ферма.*

  (ii)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

  и S *изоморфна кубике Клебша.*

Несмотря на то, что теорема 4.1.1 полностью содержит в себе результат теоремы 3.1.1, мы сочли необходимым посвятить конечным полям характеристики 2 от-

дельную главу, ибо доказательство теоремы 3.1.1 отличается от доказательства теоремы 4.1.1(i)$_2$ и (ii)$_2$ изобилием геометрических аргументов.

В качестве дополнения мы изучаем отношение изоморфности между кубическими поверхностями, упомянутыми в теореме 4.1.1.

Утверждение 4.1.3. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$.

(i) *Кубическая поверхность* (0.0.2) *не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубике Клебша, ни кубике* (0.0.1).

(ii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2, *то кубическая поверхность* (0.0.1) *и кубика Клебша изоморфны.*

(iii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 3, *то кубическая поверхность* (0.0.1) *изоморфна кубике Ферма тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы.*

(iv) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 2, *то кубика Клебша не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубической поверхности* (0.0.1).

Для удобства читателя мы перефразировали теорему 4.1.1, используя некоторую информацию из утверждения 4.1.3 в следующей таблице, в которой за ω мы обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы, а за $\mathbf{i}$ мы обозначаем примитивный корень четвертой степени из единицы.

Поле	Наибольшая группа автоморфизмов G	Порядок группы G	Кубическая поверхность с группой автоморфизмов G
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$	25 920	Кубика Ферма = = (0.0.1) = = Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_6$	720	Кубика Клебша = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \in \mathbf{F}$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	216	(0.0.2)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$	72	(0.0.1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша

Таблица 4.1.1: Таблица наибольших групп автоморфизмов.

Так же мы перефразировали утверждение 4.1.3 в следующей таблице, где за ω мы также обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы.

	(0.0.1)	(0.0.2)	Кубика Клебша	Кубика Ферма
(0.0.1)	Всегда	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$
(0.0.2)	Никогда	Всегда	Никогда	Никогда
Кубика Клебша	$char(\mathbf{F}) = 2$	Никогда	Всегда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$
Кубика Ферма	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	Всегда

Таблица 4.1.2: Таблица отношений изоморфности кубических поверхностей из утверждения 4.1.3

В разделе 4.2 мы приводим полезные для дальнейшего леммы. Раздел 4.3 мы посвятили действию группы перестановок из 5 элементов $\mathfrak{S}_5$ и кубике Клебша над полем характеристики, отличной от 5. В этом разделе мы доказываем, что гладкая кубическая поверхность с действием $\mathfrak{S}_5$ изоморфна кубике Клебша. Главным же инструментом в этом доказательстве является поверхность дель Пеццо степени 5 с максимальной группой автоморфизмов, которая, в свою очередь, сама единственна с точностью до изоморфизма. С помощью стягивания двух непересекающихся прямых на гладкой кубической поверхности с действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, образ абсолютной группы Галуа которой лежит в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, мы получаем именно такую поверхность дель Пеццо степени 5.

Поскольку геометрия кубических поверхностей над полем характеристики 3 сильно разнится с геометрией над полями других характеристик, показательным примером чего является кубика Ферма, которая не приведена в характеристике 3, а во всех остальных характеристиках – гладкая, мы посвящаем кубическим поверхностям в характеристике 3 отдельный раздел 4.4. В этом разделе мы показываем, что

максимальная группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики 3, имеющим примитивный корень четвертой степени из единицы, изоморфна группе $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, что верно над алгебраически замкнутым полем характеристики 3. Далее мы доказываем единственность с точностью до изоморфизма гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики 3, имеющим примитивный корень четвертой степени из единицы, с такой группой автоморфизмов. Для этого мы пользуемся аргументом из [Do2012, §9.5.1] о том, что циклическая группа порядка 8, действующая на гладкую кубическую поверхность, единственна с точностью до сопряжения. Зафиксировав какой-то элемент порядка 8, и учитывая группу $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$, мы тем самым восстанавливаем гладкую кубическую поверхность с действием группы $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ однозначно с точностью до изоморфизма.

Рассматривая гладкие кубические поверхности над полем характеристики 3 без примитивного корня четвертой степени из единицы, мы получаем, что группа $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ уже не может реализовываться как группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей, так как в этом случае не существует нетривиального действия элементом порядка 8, что доказано в лемме 4.4.25. Тем самым, в конце раздела 4.4 мы делаем вывод, что максимальная группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем характеристики 3 без примитивного корня четвертой степени из единицы изоморфна группе перестановок из 5 элементов $\mathfrak{S}_5$ и реализуется эта группа лишь на гладкой кубической поверхности, изоморфной кубике Клебша.

Как мы уже выяснили в предыдущей главе, кубика Ферма над конечным полем характеристики 2, содержащим нетривиальный корень третьей степени из единицы, обладает максимальной по порядку группой автоморфизмов. При этом верно и обратное: над конечным полем характеристики 2, содержащим нетривиальный корень третьей степени из единицы, гладкая кубическая поверхность с максимальной группой автоморфизмов изоморфна кубике Ферма. В разделе 4.5 мы доказываем, что то же верно и для произвольных полей характеристики, отличной от 3.

В разделе 4.6 мы изучаем максимальные группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольными полями характеристики, отличной от 3,

не содержащие нетривиальный кубический корень из единицы. Мы показываем, что если характеристика поля не равна еще 2 и 5, то верна следующая лемма.

Лемма 4.6.9. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 2, 3 *и* 5, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

Если же характеристика поля равна 2, то верен аналогичный результат:

Лемма 4.6.10. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. *Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ *и* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

Две вышеупомянутые леммы следуют из классификации максимальных групп автоморфизмов над алгебраически замкнутыми полями, которая приведена в разделе 1.5 первой главы, и результатов раздела 4.3. Если же характеристика поля равна 5, то как легко заметить, кубика Клебша является особой поверхностью. Поэтому вторую часть раздела 4.6 мы посвятили именно этому случаю. С помощью детального анализа подгрупп группы

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \subset W(\mathrm{E}_6),$$

которая изоморфна группе автоморфизмов кубики Ферма, мы ищем такую максимальную подгруппу, которая определена над полем без нетривиального кубического корня из единицы. Мы показываем, что такая группа изоморфна группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$. Возвращаясь вновь к классификации максимальных групп автоморфизмов над алгебраически замкнутыми полями, которая приведена в разделе 1.5 первой главы, где мы можем найти так же следующие по величине после максимальных группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей, мы получаем, что упомянутая группа действительно является максимальной по порядку. Более того, мы показываем, что такая группа достигается на единственной с точностью до изоморфизма гладкой кубической поверхности, изоморфной (0.0.1).

В разделе 4.7 мы доказываем теорему 4.1.1 и утверждение 4.1.3.

В заключении мы сформулировали главные результаты диссертации.

В приложении мы сочли необходимым поместить краткий исторический очерк развития алгебраической геометрии в контексте теории кубических поверхностей.

Благодарности. Автор сей диссертации искренне выражает глубочайшую благодарность своему дорогому научному руководителю и учителю Константину Александровичу Шрамову, который своим пристрастием к математике вдохновляет окружающих на изучение алгебраической геометрии. Автор также выражает благодарность Константину Александровичу Шрамову за постоянное участие и за помощь во всех затруднениях, связанных не только с математическими задачами, но и с правильным написанием математических работ, а также за неиссякаемое терпение и понимание. Автор также не может не поблагодарить последнего за ценные советы, которые впоследствии помогали разрешать не только математические, но и жизненные трудности автора. И конечно же, автор бесконечно благодарен Константину Александровичу Шрамову за его педагогический энтузиазм, благодаря которому его ученики не перестают увлекаться математикой и, более того, ставят ее на одно из первых мест в своей жизни.

Так же автор приносит свою благодарность абсолютно всему коллективу Математического института имени В. А. Стеклова за постоянную поддержку и безотказную помощь в любом вопросе автора. Также нельзя не поблагодарить весь коллектив института за то, что институт стал за несколько лет вторым домом автора. Автор не может не отметить особую свою благодарность отделам алгебраической геометрии и алгебры Математического института имени В. А. Стеклова за постоянную заботу, воспитательную работу и математические и педагогические уроки.

Автор благодарит Юрия Геннадьевича Прохорова, Сергея Олеговича Горчинского и Андрея Сергеевича Трепалина за прочтение сей диссертации и за весьма важные и полезные указания и советы.

Автор выражает благодарность своим друзьям, Арине и Максиму Савеловым, которые всегда поддерживают автора в любых его начинаниях и которые всегда вдохновляют автора на новые свершения.

Глава 1

Предварительные сведения

В этой главе мы собрали общие сведения касательно гладких кубических поверхностей и группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Перед тем, как непосредственно перейти к обзору теории кубических поверхностей, мы сочли небесполезным ввести основные обозначения, которыми будем пользоваться в течение всего изложения, и привести одну важную теорему, которая демонстрирует связь между алгебраической геометрией поверхностей дель Пеццо малых степеней над алгебраически замкнутыми полями и над сепарабельно замкнутыми полями.

1.1 Обозначения

Пусть X – многообразие над полем $\mathbf{F}$. Пусть $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – расширение поля $\mathbf{F}$. Через $X_{\mathbf{L}}$ мы обозначим многообразие

$$X_{\mathbf{L}} = X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbf{F})} \mathrm{Spec}(\mathbf{L})$$

над полем $\mathbf{L}$. Через $X(\mathbf{F})$ мы обозначим $\mathbf{F}$-рациональные точки на X. Через $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(X)$ мы обозначим ограничение скаляров по Вейлю многообразия X. Через $\overline{\mathbf{F}}$ мы обозначим алгебраическое замыкание поля $\mathbf{F}$. Через $\mathbf{F}^{sep}$ мы обозначим сепарабельное замыкание поля $\mathbf{F}$. Через $\mathfrak{S}_n$ мы обозначим группу перестановок из n элементов, через $\mathfrak{A}_n$ мы обозначим знакопеременную группу перестановок из n элементов и че-

рез $\mathfrak{D}_n$ мы обозначим группу диэдра порядка $2n$. Через $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$ мы обозначим группу Гейзенберга верхнетреугольных матриц 3×3 над полем $\mathbb{F}_3$ с единицами на диагонали. За ω мы будем всегда обозначать нетривиальный кубический корень из единицы, за $\mathbf{i}$ мы будем обозначать примитивный корень четвертой степени из единицы, а за ζ_n мы будем обозначать примитивный n-ый корень из единицы.

1.2 Сепарабельное замыкание основного поля

Теорема 1.2.1 (ср. [Li2017, Theorem 4.2] и [ShrVol2018, Lemma 7.1]). *Пусть X – поверхность дель Пеццо степени $d \leqslant 5$ над полем $\mathbf{F}$. Тогда выполнено следующее.*

(i) *Имеется изоморфизм* $\mathrm{Aut}(X_{\overline{\mathbf{F}}}) \simeq \mathrm{Aut}(X_{\mathbf{F}^{sep}})$.

(ii) *Прямые на $X_{\overline{\mathbf{F}}}$ определены над полем $\mathbf{F}^{sep}$.*

(iii) *Имеется изоморфизм* $\mathrm{Pic}(X_{\overline{\mathbf{F}}}) \simeq \mathrm{Pic}(X_{\mathbf{F}^{sep}})$.

Доказательство. Первые два утверждения доказываются следующим образом. Обозначим за $\mathcal{S}$ либо $\mathrm{Aut}(X_{\overline{\mathbf{F}}})$, либо Гильбертову схему $\mathcal{H}il\mathcal{b}_{l,X_{\overline{\mathbf{F}}}}$ прямых на $X_{\overline{\mathbf{F}}}$. Размерность схемы $\mathcal{S}$ равна нулю. Для начала покажем, что схема $\mathcal{S}$ гладкая. Далее, применяя [BLR1990, Corollary 2.2.13], мы получаем, что множество точек на $\mathcal{S}$, которые определены над $\mathbf{F}^{sep}$, плотно. Так как $\mathcal{S}$ конечно, мы получаем, что все точки $\mathcal{S}$ определены над полем $\mathbf{F}^{sep}$.

Перейдем к доказательству гладкости схемы $\mathcal{S}$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что касательное пространство Зарисского $T_p\mathcal{S}$ к схеме $\mathcal{S}$ в любой точке $p \in \mathcal{S}$ удовлетворяет равенству

$$\dim T_p\mathcal{S} = 0. \tag{1.2.2}$$

Пусть $\mathcal{S} = \mathrm{Aut}(X_{\overline{\mathbf{F}}})$. Хорошо известно, что

$$T_p\mathrm{Aut}(X_{\overline{\mathbf{F}}}) \simeq H^0(X_{\overline{\mathbf{F}}}, TX_{\overline{\mathbf{F}}}),$$

где $TX_{\overline{\mathbf{F}}}$ – это касательное расслоение к $X_{\overline{\mathbf{F}}}$. Так как $X_{\overline{\mathbf{F}}}$ – это поверхность дель Пеццо степени $d \leqslant 5$ над алгебраически замкнутым полем, то она является раздутием $9 - d > 3$ точек. Второй класс Чженя расслоения $T\mathbb{P}^2$ равен 3. А это значит, что не существует глобальных сечений касательного расслоения к $\mathbb{P}^2$, которые равны нулю в $9 - d$ точках. Так как глобальные сечения расслоения $TX_{\overline{\mathbf{F}}}$ соответствуют глобальным сечениям расслоения $T\mathbb{P}^2$, которые равны нулю в $9 - d$ точках, мы имеем $H^0(X_{\overline{\mathbf{F}}}, TX_{\overline{\mathbf{F}}}) = 0$. То есть мы получаем равенство (1.2.2) и, в результате, гладкость схемы $\mathrm{Aut}(X_{\overline{\mathbf{F}}})$.

Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{H}il\mathcal{b}_{l,X_{\overline{\mathbf{F}}}}$. Хорошо известно, что

$$T_l\mathcal{H}il\mathcal{b}_{l,X_{\overline{\mathbf{F}}}} \simeq H^0(l, \mathcal{N}_{l/X_{\overline{\mathbf{F}}}}),$$

где $\mathcal{N}_{l/X_{\overline{\mathbf{F}}}}$ – это нормальное расслоение к прямой l на $X_{\overline{\mathbf{F}}}$. Степень расслоения $\mathcal{N}_{l/X_{\overline{\mathbf{F}}}}$ равна -1. Значит, $H^0(X_{\overline{\mathbf{F}}}, TX_{\overline{\mathbf{F}}}) = 0$. Иными словами, выполнено равенство (1.2.2) и, как следствие, имеет место гладкость схемы $\mathcal{H}il\mathcal{b}_{l,X_{\overline{\mathbf{F}}}}$.

Утверждение (iii) следует из (ii).

□

1.3 Группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$

В этом разделе мы докажем некоторые леммы, связанные с группой Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Сначала мы напомним о строении группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$.

Лемма 1.3.1 ([Wi2009, §3.12.4]). *Имеется изоморфизм*

$$W(\mathrm{E}_6) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

с нетривиальным действием $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *на* $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Напомним результаты из [Cart1972, Table 9] и [Swin1967, Theorem 1] о классах сопряженности элементов в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$.

Лемма 1.3.2. *В Таблице 1.3.1 приведены классы сопряженности элементов в группе Вейля* $W(\mathrm{E}_6)$ *порядков* 2, 3, 5, 8, 9 *и* 10, *количество элементов в классах сопряженности, порядки их централизаторов, наборы собственных значений канонического представления на решетке корней* E_6.

Порядок элемента	Класс сопряженности	Количество элементов в классе	Порядок централизатора	Собственные значения
2	A_1	36	1440	$-1,1,1,1,1,1$
2	A_1^2	270	192	$-1,-1,1,1,1,1$
2	A_1^3	540	96	$-1,-1,-1,1,1,1$
2	A_1^4	45	1152	$-1,-1,-1,-1,1,1$
3	A_2	240	216	$\omega,\omega^2,1,1,1,1$
3	A_2^2	480	108	$\omega,\omega,\omega^2,\omega^2,1,1$
3	A_2^3	80	648	$\omega,\omega,\omega,\omega^2,\omega^2,\omega^2$
5	A_4	5184	10	$\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4,1,1$
8	D_5	6480	8	$\zeta_8,\zeta_8^3,\zeta_8^5,\zeta_8^7,-1,1$
9	$E_6(a_1)$	5760	9	$\zeta_9,\zeta_9^2,\zeta_9^4,\zeta_9^5,\zeta_9^7,\zeta_9^8$
10	$A_4\times A_1$	5184	10	$\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4,-1,1$

Таблица 1.3.1: Таблица классов сопряженности элементов порядка 2, 3, 5, 8, 9 и 10 в $W(\mathrm{E}_6)$.

Несмотря на то, что в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ целых 7 классов сопряженности элементов порядка 6, нам понадобится лишь один класс сопряженности, который обозначается $E_6(a_2)$.

Лемма 1.3.3 ([Swin1967, Theorem 1])**.** *Пусть* g *– элемент порядка* 6 *в группе Вей-*

ля $W(\mathrm{E}_6)$, *который лежит в классе сопряженности* $E_6(a_2)$. *Тогда его набором собственных значений канонического представления на решетке корней* E_6 *является*

$$-\omega, -\omega, -\omega^2, -\omega^2, \omega, \omega^2,$$

где $\omega \in \mathbb{C}$ *– нетривиальный кубический корень из единицы.*

Лемма 1.3.4. *Пусть* $g \in W(\mathrm{E}_6)$.

(i) *Если* g *лежит в классе сопряженности* $E_6(a_2)$, *то* g^2 *лежит в классе сопряженности* A_2^3 *и* g^3 *лежит в классе сопряженности* A_1^4.

(ii) *Если порядок* g *равен* 8, *то* g^4 *лежит в классе сопряженности* A_1^4.

(iii) *Если порядок* g *равен* 10, *то* g^5 *лежит в классе сопряженности* A_1.

Доказательство. Это непосредственно следует из лемм 1.3.2 и 1.3.3. Но для удобства читателя докажем пункт (i). Согласно лемме 1.3.3 набором собственных значений элемента g на решетке корней E_6 является набор

$$-\omega, -\omega, -\omega^2, -\omega^2, \omega, \omega^2.$$

Значит, набором собственных значений g^2 является набор

$$\omega, \omega, \omega, \omega^2, \omega^2, \omega^2,$$

что является набором собственных значений элемента из класса сопряженности A_2^3 по лемме 1.3.2. Аналогично, набором собственных значений g^3 является набор

$$-1, -1, -1, -1, 1, 1,$$

что является набором собственных значений элемента из класса сопряженности A_1^4 по лемме 1.3.2.

Доказательство пунктов (ii) и (iii) аналогично.

□

Лемма 1.3.5. *Централизатор элемента порядка* 5 *в* $W(\mathrm{E}_6)$ *изоморфен* $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть g – элемент порядка 5. Согласно лемме 1.3.2, порядок централизатора элемента g в группе $W(\mathrm{E}_6)$ равен 10. Это значит, что централизатор элемента g изоморфен либо $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, либо группе диэдра порядка 10, так как это две единственные группы порядка 10 с точностью до изоморфизма. Однако, группа диэдра порядка 10 не может быть централизатором, потому что g обязан в нем лежать.

□

Лемма 1.3.6. *Централизатор любой подгруппы в* $W(\mathrm{E}_6)$, *изоморфной* $\mathfrak{S}_5$, *лежит в подгруппе, изоморфной* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Доказательство. Централизатор $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(\mathfrak{S}_5)$ подгруппы $\mathfrak{S}_5$ в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ лежит в централизаторе $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(\tau)$ элемента τ порядка 5 в $\mathfrak{S}_5$. По лемме 1.3.5 имеем $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(\tau) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Так как $\tau \in \mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(\tau)$ и τ не лежит в центре $\mathfrak{S}_5$, мы получаем требуемое.

□

Следствие 1.3.7. *Пусть дан элемент* $g \in W(\mathrm{E}_6)$ *порядка* 2, *который лежит в централизаторе элемента порядка* 5. *Тогда* g *лежит в классе сопряженности* A_1.

Доказательство. Пусть h – такой элемент порядка 5 в $W(\mathrm{E}_6)$, что g лежит в централизаторе h. Тогда элемент gh имеет порядок 10. Из леммы 1.3.2 следует, что в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ существует только один класс сопряженности, состоящий из элементов порядка 10. Значит, из леммы 1.3.4(iii) следует, что элемент g лежит в классе сопряженности A_1.

□

Из [Swin1967, Theorem 1] мы немедленно получаем следующую полезную лемму.

Лемма 1.3.8. *Не существует элементов порядка* 24 *в группе Вейля* $W(\mathrm{E}_6)$.

Перейдем к изучению подгрупп в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ и в группе $W(\mathrm{E}_6)$.

Лемма 1.3.9 ([ATLAS1985, p. 26])**.** *В таблице 1.3.2 приведены максимальные собственные подгруппы в группе* $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Подгруппа	Порядок
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5$	960
$\mathfrak{S}_6$	720
$(\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\bullet}\, \mathfrak{A}_4$	648
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{\bullet}\, (\mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{A}_4))_{\bullet}\, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	576

Таблица 1.3.2: Таблица максимальных подгрупп в $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Здесь за $G_{\bullet}H$ мы обозначаем группу с нормальной подгруппой изоморфной G и фактором, изоморфным H, а за $G^{\bullet}H$ мы обозначаем группу $G_{\bullet}H$, которая не является расщепимым расширением. Все подгруппы в таблице 1.3.2 единственны с точностью до сопряжения.

Лемма 1.3.10. *Подгруппа в группе $W(\mathrm{E}_6)$, изоморфная $\mathfrak{A}_6$, единственна с точностью до сопряжения.*

Доказательство. Сначала докажем, что подгруппа в группе $W(\mathrm{E}_6)$, изоморфная $\mathfrak{A}_6$, лежит в $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Рассмотрим естественную проекцию

$$\mathrm{pr}\colon W(\mathrm{E}_6) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Обозначим за $\mathrm{pr}\,|_{\mathfrak{A}_6}$ ограничение гомоморфизма pr на подгруппу $\mathfrak{A}_6$. Тогда ядро гомоморфизма

$$\mathrm{pr}\,|_{\mathfrak{A}_6}\colon \mathfrak{A}_6 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

является всей группой $\mathfrak{A}_6$ из-за ее простоты. Значит, $\mathfrak{A}_6$ лежит $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Теперь докажем, что в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ с точностью до сопряжения существует ровно одна подгруппа, изоморфная $\mathfrak{A}_6$. Подгруппа в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, изоморфная $\mathfrak{A}_6$, должна лежать в некоторой максимальной подгруппе группы $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Из

леммы 1.3.9 следует, что единственная максимальная подгруппа, порядок которой делится на порядок $\mathfrak{A}_6$, изоморфна $\mathfrak{S}_6$. Значит, $\mathfrak{A}_6$ должна лежать в группе $\mathfrak{S}_6$. Подгруппа в группе $\mathfrak{S}_6$, изоморфная $\mathfrak{A}_6$, единственна. Значит, так как $\mathfrak{S}_6$ единственна с точностью до сопряжения в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, мы получаем, что $\mathfrak{A}_6$ с точностью до сопряжения единственна в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Поэтому с точностью до сопряжения в группе $W(\mathrm{E}_6)$ существует единственная подгруппа, изоморфная $\mathfrak{A}_6$.

□

Лемма 1.3.11. *Централизатор подгрупп* $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ *и* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5 \subset \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ *в группе Вейля* $W(\mathrm{E}_6)$ *тривиальный.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5$ в $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Достаточно доказать, что централизатор подгруппы G в группе $W(\mathrm{E}_6)$ тривиальный. В группе G есть элемент порядка 5. Поэтому из леммы 1.3.5 следует, что централизатор G лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Однако, элемент порядка 5 не лежит в центре G. Это означает, что централизатор G лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Предположим, что централизатор изоморфен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и обозначим за h образующий централизатора. Из леммы 1.3.5 следует, что элемент h лежит в классе сопряженности A_1. По лемме 1.3.2 порядок централизатора элемента из класса сопряженности A_1 равен 1440. Но порядок $|G| = 960$ не делит 1440. Значит, централизатор G тривиальный. Как следствие, получаем, что централизатор подгруппы $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ в группе $W(\mathrm{E}_6)$ тоже тривиальный.

□

1.4 Кубические поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$. Напомним, что по теореме 1.2.1 прямые на $S_{\overline{\mathbf{F}}}$ определены над полем $\mathbf{F}^{sep}$ и имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}}) \simeq \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}}).$$

Значит, $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ – это раздутие 6 точек

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$$

в общем положении на $\mathbb{P}^2_{\mathbf{F}^{sep}}$. Напомним определение.

Определение 1.4.1. Будем говорить, что точки $P_1, \ldots, P_i \in \mathbb{P}^2$ при $i \leqslant 6$ в *общем положении*, если никакие 3 точки из этого множества не лежат на прямой и никакие 6 точек из этого множества не лежат на конике.

Из вышесказанного следует, что существует бирациональный морфизм

$$\pi\colon S_{\mathbf{F}^{sep}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbf{F}^{sep}}$$

который стягивает прообразы точек $P_1, \ldots, P_6$. Обозначим за

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,\ E_5,\ E_6$$

прообразы точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6 при морфизме π, соответственно. Исключительные кривые раздутия π – это прямые на $S_{\mathbf{F}^{sep}} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{F}^{sep}}$. Индекс самопересечения прямой на гладкой кубической поверхности равен -1. Обозначим за Q_i при $i \in \{1, \ldots, 6\}$ собственный прообраз при морфизме π гладкой коники, проходящей через все точки $P_1, \ldots, P_6$, кроме P_i. Обозначим за L_{ij} при $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$ и $i < j$ собственный прообраз при морфизме π прямой, проходящей через точки P_i и P_j. Собственные прообразы Q_i и L_{ij} при $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$ и $i < j$ вместе с $E_1, \ldots, E_6$ задают множество из 27 прямых на кубической поверхности $S_{\mathbf{F}^{sep}}$. Хорошо известно, что на гладкой кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем существует

ровно 27 прямых. Их индексы пересечения:

$$E_i^2 = Q_i^2 = L_{ij}^2 = -1 \quad \text{при} \quad i \neq j;$$
$$E_i \cdot E_j = Q_i \cdot Q_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j;$$
$$E_i \cdot Q_j = L_{ij} \cdot E_i = L_{ij} \cdot Q_i = 1 \quad \text{при} \quad i \neq j;$$
$$L_{ij} \cdot L_{kl} = 1 \quad \text{при попарно различных } i, j, k, l \in \{1, \ldots, 6\};$$
$$L_{ij} \cdot L_{jk} = 0 \quad \text{при попарно различных } i, j, k \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Рассмотрим множество

$$\Delta = \{\alpha \in \mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \mid K_{S_{\mathbf{F}^{sep}}} \cdot \alpha = 0 \text{ и } \alpha^2 = -2\}.$$

Это множество соответствует системе корней E_6. Группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ действует на группе Пикара $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$ преобразованиями, сохраняющими форму пересечения. Это действие ограничивается на конфигурацию прямых на $S_{\mathbf{F}^{sep}}$. Оно сохраняет $K_{S_{\mathbf{F}^{sep}}}$ и сохраняет конус эффективных дивизоров.

Напомним следующую важную теорему.

Теорема 1.4.2 (см., например, [Do2012, Corollary 8.2.40])**.** *Группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности изоморфна подгруппе в группе Вейля* $W(\mathrm{E}_6)$.

Замечание 1.4.3. *Несмотря на то, что теорема 1.4.2 в [Do2012] доказана для гладких кубических поверхностей над полем характеристики нуль, те же самые рассуждения верны и над полями положительной характеристики.*

Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$. Мы будем подразумевать под группой $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}}))$ группу автоморфизмов $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$, сохраняющих форму пересечения и канонический класс. Абсолютная группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ действует на группе $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$ и сохраняет канонический класс S и форму пересечения. Хорошо известно (см. [Ma1972, Глава IV, теорема 1.9]), что группа $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}}))$ изоморфна группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Тем самым, согласно [Ma1972,

Глава IV, теорема 1.8]), имеется естественный гомоморфизм

$$g\colon \mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F}) \to W(\mathrm{E}_6).$$

Пусть Γ – образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ при этом гомоморфизме. Напомним, что Γ лежит в централизаторе $\mathrm{Aut}(S)$, так как все автоморфизмы кубической поверхности S определены над полем $\mathbf{F}$.

Замечание 1.4.4. *Всюду под образом абсолютной группы Галуа в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ мы будем подразумевать образ $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ при гомоморфизме g.*

Используя классификацию групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем, мы можем сформулировать следующую лемму.

Лемма 1.4.5. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность. Тогда*

$$\mathrm{Aut}(S) \leqslant 25\,920.$$

Доказательство. Это непосредственно следует из классификации групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем, которая может быть найдена в статье [Ho1997, Theorem 5.3] для характеристики нуль и в статье [DoDu2019, Theorem 1.1] для положительной характеристики.

□

Пусть Γ – образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$. Напомним, что Γ лежит в централизаторе $\mathrm{Aut}(S)$, так как все автоморфизмы кубической поверхности S определены над полем $\mathbf{F}$.

Нам понадобится следующее определение.

Определение 1.4.6. Пусть S – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$. Будем говорить, что 5 непересекающихся прямых $l_1, \ldots, l_5$ на S находятся *в квадратичном положении*, если при их стягивании над полем $\mathbf{F}^{sep}$ мы получаем поверхность

$$\mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}}.$$

Отметим, что в определении 1.4.6 по умолчанию требуется, чтобы все прямые $l_1, \ldots, l_5$ были определены над полем $\mathbf{F}$.

Замечание 1.4.7. *Согласно [Hu2023, Chapter 4, Proposition 2.7 and Exercise 2.9] при раздутии точек в общем положении на квадратичной поверхности* $\mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}}$ *мы получаем гладкую кубическую поверхность. Иными словами, прообраз точек в общем положении при стягивании на квадратичную поверхность дает нам прямые на гладкой кубической поверхности в квадратичном положении. Обратно, образ при стягивании прямых в квадратичном положении на гладкой кубической поверхности является набором из* 5 *точек в общем положении на* $\mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}}$.

Напомним, что графом прямых на проективном многообразии называют такой граф, вершины которого соответствуют прямым, а между двумя вершинами имеется ребро тогда и только тогда, когда соответствующие этим двум вершинам прямые пересекаются. Нам понадобится еще одно определение.

Определение 1.4.8. Пусть S – это гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$. Будем говорить, что 5 прямых $l_1, \ldots, l_5$ на S находятся *в звездном положении*, если их граф образует звезду (см. рисунок 1.1).

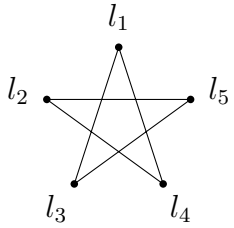


Рис. 1.1: Прямые в звездном положении

Вернемся к изучению классов сопряженности элементов в группе $W(\mathrm{E}_6)$. Теперь мы будем рассматривать элементы $W(\mathrm{E}_6)$ как преобразования группы Пикара гладкой кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем, сохраняющие форму пересечения.

Лемма 1.4.9 ([BFL2019, Table 7.1, column 8])**.** *Пусть дана гладкая кубическая поверхность* S *над сепарабельно замкнутым полем. Рассмотрим элемент* g *порядка* 2

в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$, действующий на конфигурацию прямых на S. Тогда выполнены следующие утверждения.

(i) *Пусть g лежит в классе сопряженности A_1. Существуют ровно 15 прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g. Более того, существуют ровно 6 пар непересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g.*

(ii) *Пусть g лежит в классе сопряженности A_1^2. Существуют ровно 7 прямых на S каждая из которых инвариантна под действием g. Существуют ровно 8 пар непересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g. Более того, существуют ровно 2 пары пересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g.*

(iii) *Пусть g лежит в классе сопряженности A_1^3. Существуют ровно 3 прямые на S, каждая из которых инвариантна под действием g. Существуют ровно 6 пар непересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g. Более того, существуют ровно 6 пар пересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g.*

(iv) *Пусть g лежит в классе сопряженности A_1^4. Существуют ровно 3 прямые на S, каждая из которых инвариантна под действием g. Более того, существуют ровно 12 пар пересекающихся прямых на S, каждая из которых инвариантна под действием g, и прямые в каждой паре переставляются под действием g.*

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем лемма непосредственно вытекает из [BFL2019, Table 7.1, column 8]. Из теоремы 1.2.1(ii) следует, что лемма

верна и над сепарабельно замкнутым полем.

□

Лемма 1.4.10. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над сепарабельно замкнутым полем. Рассмотрим элемент $g \in W(\mathrm{E}_6)$, действующий на конфигурацию прямых на S. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Пусть порядок g равен 5. Существуют ровно 2 прямые на S, каждая из которых инвариантна под действием g. Существуют ровно 3 пятерки прямых на S, каждая из которых состоит из попарно непересекающихся прямых и инвариантна под действием элемента g. Все прямые в каждой пятерке прямых транзитивно переставляются действием g. Более того, существуют ровно 2 пятерки прямых на S, каждая из которых состоит из прямых в звездном положении и инвариантна под действием элемента g. Все прямые в каждой пятерке прямых транзитивно переставляются действием g.*

(ii) *Пусть порядок g равен 10. Существует единственная пара непересекающихся прямых на S, которая инвариантна при действии элемента g, и эти прямые меняются местами под действием g. Существует единственная пятерка попарно непересекающихся прямых на S, которая инвариантна под действием элемента g. Все прямые в пятерке прямых транзитивно переставляются действием g. Существуют ровно 2 пятерки прямых на S, каждая из которых состоит из прямых в звездном положении и инвариантна под действием элемента g. Все прямые в каждой пятерке прямых транзитивно переставляются действием g. Более того, оставшиеся 10 прямых на S образуют g-инвариантную десятку прямых, и все прямые в этой десятке транзитивно переставляются действием g.*

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем лемма непосредственно вытекает из [BFL2019, Table 7.1, column 8]. Из теоремы 1.2.1(ii) следует, что лемма верна и над сепарабельно замкнутым полем.

□

Докажем лемму о расположении двух пересекающихся прямых на гладкой кубической поверхности относительно остальных.

Лемма 1.4.11. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над сепарабельно замкнутым полем. Пусть l_1 и l_2 – две пересекающиеся прямые на S. Тогда существует единственная прямая $l_3 \subset S$, которая пересекает обе эти прямые.*

Доказательство. Рассмотрим гиперплоскость T в $\mathbb{P}^3$, такую что $l_1, l_2 \subset T$. Тогда

$$T \cap S = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \tag{1.4.12}$$

где l_3 – некоторая прямая на S. Предположим, что существует прямая l_4, которая не лежит в T и которая пересекает l_1 и l_2. Из (1.4.12) мы получаем

$$-K_S = l_1 + l_2 + l_3. \tag{1.4.13}$$

Значит, с одной стороны, мы имеем равенство $-K_S \cdot l_4 = 1$, а с другой стороны, из (1.4.13) мы получаем

$$-K_S \cdot l_4 = l_1 \cdot l_4 + l_2 \cdot l_4 + l_3 \cdot l_4 = 2 + l_3 \cdot l_4 \neq 1.$$

Это противоречие дает нам единственность прямой, которая пересекает прямые l_1 и l_2.

□

1.5 Кубические поверхности над алгебраически замкнутыми полями

В этом разделе мы затронем классификацию максимальных групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями произвольной характеристики.

Теорема 1.5.1 ([DoDu2019, Theorem 1.1] и [Ho1997, Theorem 5.3]). *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{F}$. Тогда*

(i)′ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 2, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ и S изоморфна кубике Ферма.*

(i)″ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 2 и $|\mathrm{Aut}(S)| < 25\,920$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 192$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$.*

(ii)′ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 3, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ и S изоморфна гладкой кубической поверхности 0.0.2.*

(ii)″ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 3 и $|\mathrm{Aut}(S)| < 216$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ и S изоморфна кубике Клебша.*

(iii)′ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 5, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ и S изоморфна кубике Ферма.*

(iii)″ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 5 и $|\mathrm{Aut}(S)| < 648$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 108$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Более того, если $|\mathrm{Aut}(S)| < 108$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 54$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

(iv)′ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики, не равной 2, 3 и 5, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ и S изоморфна кубике Ферма.*

(iv)″ *Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики, не равной 2, 3 и 5, и $|\mathrm{Aut}(S)| < 648$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. Причем равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ и S изоморфна кубике Клебша.*

Замечание 1.5.2. *Из теоремы 1.2.1*(i) *мы немедленно получаем, что теорема 1.5.1 верна в предположении сепарабельной замкнутости поля $\mathbf{F}$.*

Глава 2

Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем

В этой главе мы найдем явные константы Жордана для группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями. В процессе доказательства мы строим кубическую поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ с действием группы $\mathfrak{S}_6$, которая является самой большой группой автоморфизмов для гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$. Также мы докажем единственность с точностью до изоморфизма гладкой кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$, на которой действует группа $\mathfrak{S}_6$.

2.1 Введение

Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n — это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbf{F}$. Несмотря на то, что она возникает очень естественно, ее структура является очень сложной при $n \geqslant 2$. Более того, даже описание конечных подгрупп этой группы является чрезвычайно трудоемким делом. Уже в первом нетривиальном случае ранга 2 были классифицированы классы сопряженности конечных подгрупп только над $\mathbb{C}$ (см. [DoIsk2009]). Тем не менее, мы можем понять, какими свойствами могут обладать конечные подгруппы группы Кремоны.

Определение 2.1.1 ([Pop2011, Definition 2.1]). Группа G называется *жордановой*, если существует константа J такая, что любая конечная подгруппа группы G имеет нормальную абелеву подгруппу индекса не больше чем J. Минимальная такая константа J называется *константой Жордана* группы G и обозначается $J(G)$.

Жаном-Пьером Серром в [Serr2009, Theorem 5.3] было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ ранга 2 над полем $\mathbf{F}$ характеристики нуль является жордановой. Однако для алгебраически замкнутого поля $\mathbf{F}$ характеристики $p > 0$ этот факт уже неверен, так как в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ имеются простые подгруппы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$, порядок которых растет с ростом n. В статье [ПрШр2023] Юрием Геннадьевичем Прохоровым и Константином Александровичем Шрамовым было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, жорданова. Более того, они получили следующие оценки на константу Жордана.

Теорема 2.1.2 ([ПрШр2023, теорема 1.2]). *Пусть $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ — константа Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$. Тогда*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = q^3(q^2-1)(q^3-1), \qquad \text{если } q \notin \{2,4,8\};$$
$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) \leqslant 696\,729\,600, \qquad \text{если } q \in \{2,4,8\}.$$

Наша цель — найти точное значение константы Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2,4,8\}$. С этой целью нам достаточно изучить группы бирегулярных автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_q$, поскольку любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Согласно [ПрШр2023, следствие 5.3 и лемма 6.1], для расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ и для поверхностей дель Пеццо степени $4 \leqslant d \leqslant 9$ и $d = 2$ оценка на константу Жордана группы автоморфизмов не больше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$, что является порядком группы автоморфизмов $\mathbb{P}^2$. Поэтому нам нужно изучить группы регулярных действий на поверхности дель Пеццо степени 1 и 3, и нормальные абелевы подгруппы в этих группах, чем мы и будем заниматься.

В этой главе мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.1.3. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816 & \text{при } q = 8; \\ 60\,480 & \text{при } q = 4; \\ 720 & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

Следствие 2.1.4. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|, & \text{если } q \neq 2; \\ |\mathfrak{S}_6| > 168 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)| & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

В качестве дополнения к доказательству теоремы 2.1.3 мы выведем следующий факт об автоморфизмах кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$.

Теорема 2.1.5. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда порядок ее группы автоморфизмов удовлетворяет неравенству*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Если равенство выполнено, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$. Более того, гладкая кубическая поверхность с группой автоморфизмов $\mathfrak{S}_6$ единственна с точностью до изоморфизма.

2.2 Гладкие кубические поверхности над полем $\mathbb{F}_2$

Согласно теореме 1.4.2 группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$ вкладывается в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Напомним, что

$$|W(\mathrm{E}_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51\,840.$$

Из теоремы 1.5.1(i)$'$ получаем, что группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности максимального порядка над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_2$ является группа $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, являющаяся группой автоморфизмов кубики Ферма.

Однако для конечного поля $\mathbb{F}_2$ ситуация сильно меняется. Мы докажем, что для кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$ максимальный порядок группы автоморфизмов равен 720.

Теорема 2.2.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, если порядок группы автоморфизмов равен 720*, то* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$.

Доказательство. Группа $\mathrm{Aut}(S)$ лежит в группе $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, потому что вложение $S \subset \mathbb{P}^3$ задается линейной системой $|-K_S|$, которая инвариантна относительно группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$. В то же время она лежит в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Предположим, что существует кубическая поверхность S, для которой $720 < |\mathrm{Aut}(S)|$.

Максимальная подгруппа в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ изоморфна одной из следующих групп (см. список максимальных подгрупп группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ в [ATLAS1985, стр. 22]):

$$\mathfrak{A}_7,\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2),\ \mathfrak{S}_6,\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes (\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3),\ (\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Используя это описание, по нашему предположению мы получаем, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$ должна либо совпадать со всей группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, либо быть подгруппой в $\mathfrak{A}_7$, либо быть подгруппой в $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Первый вариант невозможен, так как $|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)|$ не делит $|W(\mathrm{E}_6)|$. Пусть выполнен второй вариант, то есть порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ делит и порядок группы $\mathfrak{A}_7$, и порядок группы $W(\mathrm{E}_6)$, то есть

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant \mathrm{НОД}(|\mathfrak{A}_7|, |W(\mathrm{E}_6)|) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 < 720.$$

Значит, этот вариант также невозможен.

Наконец, пусть выполнен третий вариант, иными словами, имеем

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant \mathrm{НОД}(|(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)|, |W(\mathrm{E}_6)|) = 2^6 \cdot 3 = 192 < 720.$$

Значит, группа автоморфизмов S имеет порядок не больше, чем 720.

Используя таблицу [ATLAS1985, стр. 22], получаем, что единственной подгруппой порядка 720 в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ является группа $\mathfrak{S}_6$, так как она максимальная, а другие максимальные подгруппы группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ не содержат группу порядка 720.

□

Предъявим явно кубическую поверхность с группой автоморфизмов $\mathfrak{S}_6$.

Пример 2.2.2. Рассмотрим кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, заданную уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0. \tag{2.2.3}$$

Очевидно, что это уравнение задает гладкую кубическую поверхность. Более того, она проходит через все точки на $\mathbb{P}^3$. Покажем, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$.

Рассмотрим матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует кососимметрической билинейной форме. Группа, которая сохраняет эту матрицу, то есть группа таких элементов $g \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, что $g^T\Omega g = \Omega$, изоморфна группе $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2)$.

Заметим, что левая часть уравнения (2.2.3) равна

$$(x^2, y^2, z^2, t^2)^T\Omega(x, y, z, t).$$

Значит, группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2)$ содержится в группе автоморфизмов кубической поверхности S. Как известно (см., например, [Die1954, §5]), имеется изоморфизм

$$\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_6.$$

То есть мы получаем, что $\mathfrak{S}_6 \subset \mathrm{Aut}(S)$, а по теореме 2.2.1 группа $\mathfrak{S}_6$ является максимальной возможной группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности над $\mathbb{F}_2$. Значит, имеем $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$.

Отметим, что кубическая поверхность (2.2.3) рациональна. В самом деле, на ней есть две непересекающиеся прямые l_1 и l_2, задающиеся уравнениями

$$x = y = 0 \ \text{ и } \ z = t = 0,$$

соответственно, что и дает бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow S$.

Замечание 2.2.4. *В статье [Ka2021] с помощью компьютерных вычислений было показано, что группа автоморфизмов кубической поверхности (2.2.3) имеет порядок* 720. *Тем не менее, в указанной статье не была исследована структура ее группы автоморфизмов.*

2.3 Поверхности дель Пеццо степени 1

В этом разделе мы рассмотрим гладкие поверхности дель Пеццо степени 1.

Утверждение 2.3.1. *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени* 1 *над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда порядок группы* $\mathrm{Aut}(S)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Aut}(S) \leqslant 2q^4(q-1)^2(q+1) < q^3(q^3-1)(q^2-1).$$

Доказательство. Накрытие

$$\phi_{|-2K_S|} : S \to \mathbb{P}(1,1,2) \tag{2.3.2}$$

степени 2, заданное дважды антиканонической линейной системой, дает нам точную последовательность:

$$1 \to G \to \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2)),$$

где $|G| \leqslant 2$. Найдем группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2))$. Ясно (см. [Am1989, §8.3]),

что автоморфизмы задаются следующим образом:

$$[x : y : z] \mapsto [ax + by : cx + dy : ez + f(x, y)],$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

невырождена, $e \in \mathbb{F}_q^*$, а $f(x, y)$ — однородный квадратичный многочлен. Значит, имеем

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1, 1, 2)) \simeq \frac{\left(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^*\right) \ltimes (\mathbb{F}_q)^3}{\mathbb{F}_q^*}.$$

Следовательно, порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1, 1, 2))| = 2q^4(q - 1)^2(q + 1) < q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1).$$

□

Замечание 2.3.3. *Можно показать, что морфизм (2.3.2) сепарабельный (см., например, [DoMa2022, Proposition 1.2]). Поэтому группа G в доказательстве утверждения 2.3.1 изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

2.4 Доказательство теоремы 2.1.3

В этом разделе мы докажем теорему 2.1.3. Сначала напомним результат из статьи [ПрШр2023]:

Утверждение 2.4.1 ([ПрШр2023, следствие 5.3])**.** *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени не равной 1 и 3 над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда $\mathrm{Aut}(S)$ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше чем $q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$.*

Теперь докажем основную теорему этой главы.

Доказательство теоремы 2.1.3. Как уже было замечено ранее, любая конечная подгруппа G группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели ра-

циональной поверхности. Поэтому нам достаточно найти минимальный индекс нормальной абелевой подгруппы для каждой группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и для расслоений на коники. Максимальное такое число и будет нам давать константу Жордана.

Согласно утверждению 2.4.1 индекс нормальной абелевой подгруппы группы автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени не равной 1 и 3 над полем $\mathbb{F}_q$ не превосходит $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. А согласно [ПрШр2023, лемма 6.1], индекс нормальной абелевой подгруппы группы автоморфизмов расслоения на коники над полем $\mathbb{F}_q$ тоже не превосходит $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. Для поверхностей дель Пеццо степени 1 над полем $\mathbb{F}_q$, согласно утверждению 2.3.1, группа автоморфизмов всегда имеет порядок меньше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$.

Осталось найти наибольшее значение среди всех минимальных индексов нормальных абелевых подгрупп групп автоморфизмов кубических поверхностей. Если $q=4$ или 8, то

$$|W(\mathrm{E}_6)| = 51\,840 < 60\,480 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_4)| \leqslant |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|,$$

и, значит, порядок группы автоморфизмов гладкой кубической поверхности меньше $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. А при $q=2$, согласно теореме 2.2.1 порядок группы автоморфизмов кубической поверхности не превосходит

$$720 > 168 = q^3(q^2-1)(q^3-1).$$

Все перечисленные значения, а именно, 720 для $\mathbb{F}_2$ и $q^3(q^2-1)(q^3-1)$ для $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$, реализуются как порядки групп автоморфизмов некоторых рациональных поверхностей. Действительно, для $q=4$ и 8 эти значения достигаются на группе автоморфизмов $\mathbb{P}^2$, которая изоморфна $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$ и не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп, см. [ПрШр2023, лемма 2.4]. Для $q=2$ значение константы Жордана достигается на гладкой рациональной кубической поверхности с группой автоморфизмов $\mathfrak{S}_6$ (см. пример 2.2.2), которая тоже не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп.

□

2.5 Единственность гладкой кубической поверхности с группой автоморфизмов $\mathfrak{S}_6$ над полем $\mathbb{F}_2$

В этом разделе мы докажем теорему 2.1.5.

Лемма 2.5.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящая через все 15 точек в $\mathbb{P}^3$. Тогда S изоморфна кубической поверхности вида (2.2.3), и ее группой автоморфизмов является группа $\mathfrak{S}_6$.*

Доказательство. Заметим, что кубические поверхности, проходящие через все точки $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеют вид

$$a_1xy(x+y)+a_2xz(x+z)+a_3xt(x+t)+a_4yz(y+z)+a_5yt(y+t)+a_6zt(z+t)=0,$$

где $a_i \in \mathbb{F}_2$. Значит, всего таких кубических поверхностей 63.

Рассмотрим действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубические поверхности в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящие через 15 точек. Пусть $\mathrm{Orb}(S)$ — орбита S действия группы $\mathfrak{S}_6$. Имеем,

$$\frac{|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)|}{|\mathrm{Aut}(S)|}=|\mathrm{Orb}(S)|.$$

Оценим количество элементов в орбите S. Рассмотрим особую кубическую поверхность, которая является объединением трех плоскостей в $\mathbb{P}^3$, пересекающихся одновременно в одной прямой. Ясно, что на такой приводимой кубической поверхности будет 15 точек. Несложно проверить, что в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеется ровно 35 прямых. Значит, таких особых кубических поверхностей по крайней мере 35. То есть гладких кубических поверхностей, проходящих через 15 точек, не более 28. Значит, получаем, что $|\mathrm{Orb}(S)| \leqslant 28$. Но тогда имеем неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \geqslant 720$, что возможно, согласно теореме 2.2.1, тогда и только тогда когда $\mathrm{Aut}(S) = \mathfrak{S}_6$ и $|\mathrm{Orb}(S)| = 28$. Другими словами, все гладкие кубические поверхности, проходящие через 15 точек,

изоморфны друг другу. Так как кубическая поверхность (2.2.3) проходит через 15 точек, получаем, что S ей изоморфна.

□

Лемма 2.5.2. *Пусть группа $\mathfrak{S}_6$ является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности S над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда S изоморфна кубической поверхности* (2.2.3).

Доказательство. Заметим, что согласно теореме Шевалле–Варнинга на кубической поверхности S есть точка. Обозначим одну из таких точек через p. Действие группы $\mathfrak{S}_6$ на S определяет ее действие на $\mathbb{P}^3$. Предположим, что орбита точки p имеет длину $l \neq 5, 10, 15$. Тогда стабилизатор каждой точки в орбите является подгруппой $\mathfrak{S}_6$ индекса l. Более того, в стабилизаторе лежит подгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, так как l взаимно просто с 5. Тогда группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действует нетривиально на касательном пространстве к $\mathbb{P}^3$ в точке p (см., например, [CheShr2024, Theorem 3.7]). То есть $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. Но это невозможно, так как $|\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)| = 168$.

Случай $l = 5$ невозможен, так как в группе $\mathfrak{S}_6$ нет подгруппы индекса 5. Если же $l = 10$, то на $\mathbb{P}^3$ есть еще орбиты действия $\mathfrak{S}_6$ длины не больше 5. Но, как мы только что показали, таких нет.

Поэтому возможен только случай $l = 15$. Значит, на кубической поверхности S с действием группы $\mathfrak{S}_6$ ровно 15 точек. А по лемме 2.5.1 такие кубические поверхности изоморфны (2.2.3).

□

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.1.5.

Доказательство теоремы 2.1.5. Первая часть теоремы следует из теоремы 2.2.1. Существование и единственность следуют из лемм 2.5.1 и 2.5.2.

□

Также из лемм 2.5.1 и 2.5.2 мы получаем следствие.

Следствие 2.5.3. *Группа $\mathfrak{S}_6$ действует на гладкой кубической поверхности S над полем $\mathbb{F}_2$ тогда и только тогда, когда S проходит через все* 15 *точек в $\mathbb{P}^3$.*

Глава 3

Кубические поверхности над конечными полями характеристики 2

В этой главе мы найдем наибольшие группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2. Мы докажем, что если порядок поля равен степени 4, то наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Если порядок поля не равен степени 4, то мы докажем, что наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей изоморфна группе перестановок из 6 элементов. Более того, мы докажем, что над заданным полем гладкая кубическая поверхность с наибольшей группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма.

3.1 Введение

Группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над конечным полем может быть намного меньше, чем группа той же кубической поверхности над алгебраическим замыканием этого поля. Например, согласно теоремам 1.5.1(i)′ и 2.1.5, в то время как максимальная группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутыми полем характеристики 2 имеет порядок 25 920, над полем $\mathbb{F}_2$ порядок таких групп не превышает 720.

Цель этой главы – нахождение наибольшей группы автоморфизмов гладких ку-

бических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{2^k}$ порядка 2^k при любом натуральном k. Итак, мы докажем следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над конечным полем $\mathbf{F}$ характеристики 2.*

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ и S изоморфна кубике Ферма.

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 720$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ и S изоморфна гладкой кубической поверхности 0.0.1.

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0.$$

В процессе доказательства теоремы 3.1.1 мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над конечным полем $\mathbf{F}$ характеристики 2. Пусть Γ – образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}/\mathbf{F})$ в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}}))$. Предположим, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(S)$.*

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\Gamma = \{e\}$, то S изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, то S изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

Следующее утверждение устанавливает, что над полями $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ кубика Ферма и гладкая кубическая поверхность (0.0.1) не изоморфны, в то время как над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_2$ они изоморфны.

Утверждение 3.1.3 (ср. теорема 3.1.1(i)). *Пусть $\mathcal{F}$ – кубика Ферма над полем $\mathbf{F}$ характеристики 2. Тогда если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то мы имеем*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4.$$

Следствие 3.1.4. *Пусть дано поле $\mathbf{F}$ характеристики 2.*

(i) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, то гладкая кубическая поверхность* (0.0.1) *не изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ или $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}$, то гладкая кубическая поверхность* (0.0.1) *изоморфна кубике Ферма.*

Кратко опишем идею доказательства теоремы 3.1.1. Мы показываем, что имеется возможность $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно стянуть 5 непересекающихся прямых на кубической поверхности, определенных над заданным полем. При этом стягивании мы получим либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, либо квадрику, изоморфную ограничению скаляров по Вейлю $\mathbb{P}^1$. В первом случае ранг группы Пикара стягивания равен 2, во втором случае ранг группы Пикара стягивания равен 1. При стягивании мы получаем 5 точек в общем положении. Мы показываем, что множество из таких 5 точек на упомянутых квадриках единственно с точностью до автоморфизма. Тем самым из единственности 5 точек на квадрике с точностью до автоморфизма мы получаем единственность гладкой кубической поверхности с заданными свойствами с точностью до изоморфизма.

3.2 Проективная прямая

В этом разделе мы докажем некоторые вспомогательные леммы касательно группы автоморфизмов проективной прямой над конечным полем характеристики 2. В первую очередь, упомянем следующий очевидный факт.

Замечание 3.2.1. *Поле $\mathbb{F}_{2^k}$ для $k \in \mathbb{N}$ содержит нетривиальной корень пятой степени из единицы тогда и только тогда, когда $k = 4l$. Действительно, то, что*

поле $\mathbb{F}_{2^k}$ содержит нетривиальной корень пятой степени из единицы эквивалентно тому, что

$$2^k - 1 \equiv 0 \mod 5.$$

Это выполнено тогда и только тогда, когда $k = 4l$.

Сформулируем очевидную лемму, связанную с нетривиальным корнем пятой степени из единицы в поле характеристики 2.

Лемма 3.2.2. *Пусть $\zeta_5 \in \overline{\mathbb{F}}_2$ – нетривиальный корень пятой степени из единицы. Тогда*

(i) *элементы $\zeta_5^2 + \zeta_5^3$ и $\zeta_5 + \zeta_5^4$ лежат в $\mathbb{F}_{4^k}$;*

(ii) *элементы $\zeta_5^2 + \zeta_5^3$ и $\zeta_5 + \zeta_5^4$ не лежат $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$;*

(iii) *если $\psi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{4^{2k+1}}/\mathbb{F}_{2^{2k+1}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – образующий группы Галуа, то*

$$\psi(\zeta_5 + \zeta_5^4) = \zeta_5^2 + \zeta_5^3.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $4^k \equiv (-1)^k \mod 5$. Используя это наблюдение, мы можем доказать (i) и (ii). Действительно, (i) следует из равенств

$$(\zeta_5 + \zeta_5^4)^{4^k} = \zeta_5^{4^k} + \zeta_5^{4^{k+1}} = \zeta_5^{(-1)^k} + \zeta_5^{(-1)^{k+1}} = \zeta_5 + \zeta_5^4$$
$$(\zeta_5^2 + \zeta_5^3)^{4^k} = \zeta_5^{2\cdot 4^k} + \zeta_5^{3\cdot 4^k} = \zeta_5^{2\cdot(-1)^k} + \zeta_5^{3\cdot(-1)^k} = \zeta_5^2 + \zeta_5^3.$$

Утверждения (ii) и (iii) следуют из того факта, что группа Галуа конечного расширения конечного поля порождается автоморфизмом Фробениуса (см., например, [La2002, Chapter V, Theorem 5.4]).

□

Сейчас мы переходим к изучению группы автоморфизмов проективной прямой. Мы сформулируем несколько лемм о подгруппах порядка 5 в $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ для конечного поля $\mathbf{F}$. Начнем со следующей очевидной леммы.

Лемма 3.2.3. *Порядок группы* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{2^{2k+1}})$ *не делится на* 5.

Доказательство. Порядок группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{2^{2k+1}})$ равен

$$2^{2k+1}(4^{2k+1}-1) \equiv (-1)^k \mod 5.$$

□

Лемма 3.2.4. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– конечное поле. Рассмотрим точную последовательность*

$$1 \to \mathbf{F}^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}) \to 1.$$

Если $a \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ *удовлетворяет равенству* $a^5 = e$*, где* e *– нейтральный элемент в* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$*, то существует матрица* $M \in \rho^{-1}(a)$*, что* $M^5 = E$*, где за* E *обозначена единичная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M \in \rho^{-1}(a)$. Имеем

$$M^5 = c \cdot E, \tag{3.2.5}$$

где $c \in \mathbf{F}^*$.

Разделим доказательство на два случая. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы. Тогда гомоморфизм

$$f\colon \mathbf{F}^* \to \mathbf{F}^*,$$

такой что $f(x) = x^5$, является на самом деле изоморфизмом из-за тривиальности ядра f и конечности $\mathbf{F}^*$. Значит, существует такой элемент $m \in \mathbf{F}^*$, что

$$m^5 M^5 = E.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы. В этом случае f не является изоморфизмом. Это значит, что в равенстве (3.2.5) константа c не обязана лежать в образе f. Если c все-таки лежит в

образе f, то, как и в первом случае, мы можем найти такой элемент $m \in \mathbf{F}^*$, что выполнено равенство $m^5 M^5 = E$ и, значит, доказана лемма. Теперь предположим, что c не лежит в образе f. Минимальный полином $g(x) \in \mathbf{F}[x]$ матрицы M должен иметь степень 2, потому что $\sqrt[5]{c}\zeta_5 \notin \mathbf{F}^*$ для любого корня пятой степени из единицы $\zeta_5 \in \mathbf{F}$. Более того, $g(x)$ делит $x^5 - c$. Значит, минимальный многочлен имеет вид

$$g(x) = x^2 - \sqrt[5]{c}(\zeta_5^i + \zeta_5^j)x + \sqrt[5]{c^2}\zeta_5^{i+j},$$

где $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $i \neq j$. Однако, $\sqrt[5]{c^2}\zeta_5^{i+j}$ не лежит в $\mathbf{F}$. Значит, в этом случае не существует такой матрицы $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$, которая будет удовлетворять (3.2.5). Это значит, что c лежит в образе f. Значит, как и в предыдущем случае, $\widetilde{M}^5 = E$ для некоторой матрицы $\widetilde{M} \in \rho^{-1}(a)$.

□

Следствие 3.2.6. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– конечное поле. Рассмотрим точную последовательность*

$$1 \to \mathbf{F}^* \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}) \to 1.$$

Тогда для любой подгруппы $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *в* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ *существует такая подгруппа* $\widetilde{G} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *в* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$, *что* $\rho(\widetilde{G}) = G$. *Более того, если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы* ζ_5, *то с точностью до сопряжения* $\widetilde{G}$ *порождается матрицей* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{smallmatrix}\right)$. *В частности, подгруппа* G *единственна с точностью до сопряжения.*

Доказательство. Это следует из леммы 3.2.4. Действительно, для группы

$$G \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}),$$

которая изоморфна $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, существует такая матрица $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ порядка 5, что $\rho(M)$ – порождающий G. Так как ζ_5 лежит в $\mathbf{F}$, матрица M диагонализуема. С точностью до сопряжения и умножения на ζ_5^r для целого r имеет место равенство $M^s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{smallmatrix}\right)$ для некоторого $s = 1, 2, 3, 4$. Это означает, что группа порядка 5 в $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ единственна с точностью до сопряжения.

□

Лемма 3.2.7. *Предположим, что $\mathbb{F}_{4^k}$ не содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы. Тогда подгруппа G порядка 5 в группе $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ с точностью до сопряжения порождается элементом*

$$\begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.8}$$

где $\zeta_5 \in \overline{\mathbb{F}}_2$ – нетривиальный корень пятой степени из единицы. В частности, подгруппа G единственна с точностью до сопряжения.

Доказательство. Пусть σ – порождающий подгруппы $G \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ порядка 5. По следствию 3.2.6 существует такая матрица $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ порядка 5, что ее образ в группу $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ с помощью естественного гомоморфизма

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$$

равен σ. Поэтому матрица M должна удовлетворять уравнению

$$x^5 - 1 = 0. \tag{3.2.9}$$

Исходя из того, что минимальный полином матрицы M делит (3.2.9) и матрица M не является скалярной, степень ее минимального полинома равна 2. Зафиксируем нетривиальный корень пятой степени из единицы ζ_5. Имеем

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 + (\zeta_5 + \zeta_5^4)x + 1)(x^2 + (\zeta_5^2 + \zeta_5^3)x + 1).$$

Согласно лемме 3.2.2(i) и $\zeta_5 + \zeta_5^4$, и $\zeta_5^2 + \zeta_5^3$ лежат в $\mathbb{F}_{4^k}$. Значит, матрица M сопряжена одной из матриц

$$\begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \zeta_5^2 + \zeta_5^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальный полином первой матрицы равен $x^2 + (\zeta_5 + \zeta_5^4)x + 1$, а минимальный полином второй матрицы равен $x^2 + (\zeta_5^2 + \zeta_5^3)x + 1$. Заметим, что если M сопряжена матрице $\left(\begin{smallmatrix} \zeta_5+\zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, то M^2 сопряжена $\left(\begin{smallmatrix} \zeta_5^2+\zeta_5^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, и наоборот. Значит, с точностью до сопряжения подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ порождена (3.2.8). Поэтому мы получаем, что подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^k})$ единственна с точностью до сопряжения.

□

3.3 Квадратичные поверхности

В этом разделе мы изучим гладкие квадрики в $\mathbb{P}^3$ над конечными полями характеристики 2. Мы отсылаем читателя к книгам [ГоШр2018, §8.1] и [Wei1982, Section 1.3], в которых даны базовые факты касательно ограничения скаляров по Вейлю. Напомним результат из статьи [ShrVol2018] о классификации квадрик в $\mathbb{P}^3$.

Лемма 3.3.1 (ср. [ShrVol2018, Lemma 7.3]). *Пусть дано произвольное поле* $\mathbf{F}$. *Пусть* X *– такая поверхность дель Пеццо степени* $K_X^2 = 8$, *что* $X_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}}$. *Тогда поверхность* X *изоморфна либо* $C \times C'$, *где* C *и* C' *– коники над* $\mathbf{F}$, *либо* $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(D)$, *где* $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ *сепарабельное квадратичное расширение поля* $\mathbf{F}$ *и* D *– коника над* $\mathbf{L}$.

Поверхность X *изоморфна квадрике в* $\mathbb{P}^3$ *тогда и только тогда, когда*

$$X \simeq C \times C \ \text{ или } \ X \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(C_{\mathbf{L}})$$

для некоторой коники C *над полем* $\mathbf{F}$. *В этом случае имеем*

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}^\circ(X) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где $\mathrm{Aut}^\circ(X) \subset \mathrm{Aut}(X)$ *– подгруппа, состоящая из автоморфизмов* X, *которые действуют тривиально на* $\mathrm{Pic}(X_{\mathbf{F}^{sep}})$. *Точнее, имеются изоморфизмы*

$$\mathrm{Aut}^\circ(C \times C) \simeq \mathrm{Aut}(C) \times \mathrm{Aut}(C) \ \text{ и } \ \mathrm{Aut}^\circ(\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(C_{\mathbf{L}})) \simeq \mathrm{Aut}(C_{\mathbf{L}}).$$

Однако, в этой главе мы имеем дело с конечными полями, поэтому по теореме Шевалле–Варнинга все коники изоморфны $\mathbb{P}^1$. Переформулируем лемму 3.3.1 для случая конечных полей.

Лемма 3.3.2. *Пусть X – такая поверхность дель Пеццо степени 8 над конечным полем $\mathbf{F}$, что $X_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}}$. Тогда X – квадратичная поверхность.*

Более того, если ранг Пикара X равен 2, то $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq (\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ меняет местами элементы в паре $(a, b) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$.

Если же ранг Пикара X равен 1, то поверхность X изоморфна ограничению скаляров по Вейлю $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – квадратичное расширение $\mathbf{F}$. Группа автоморфизмов X в этом случае равна

$$\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{L}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \tag{3.3.3}$$

где $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ действует на $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{L})$ как группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{F}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Замечание 3.3.4. *Обозначим за Q ограничение скаляров по Вейлю $\mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – сепарабельное квадратичное расширение $\mathbf{F}$. Пусть τ – порождающий группы Галуа этого расширения. Рассмотрим автоморфизм*

$$\phi = (\chi, \upsilon) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{L}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

многообразия Q. Тогда этот автоморфизм продолжается до автоморфизма

$$\phi = (\chi, \tau(\chi), \upsilon) \in (\mathrm{PGL}_2(\mathbf{L}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbf{L})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

многообразия $Q_{\mathbf{L}} = \mathbb{P}^1_{\mathbf{L}} \times \tau_* \mathbb{P}^1_{\mathbf{L}}$, где $\tau_* \mathbb{P}^1_{\mathbf{L}} \simeq \mathbb{P}^1$ – Галуа-сопряженное многообразие к $\mathbb{P}^1_{\mathbf{L}}$. Это немедленно следует из эквивалентности категорий проективных многообразий над полем $\mathbf{F}$ и проективных многообразий над полем $\mathbf{L}$ с данными спуска.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение 3.3.5. Будем говорить, что 5 точек $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ находятся в *общем положении*, если никакие 2 точки из этого множества не лежат на дивизорах бистепени $(1,0)$ и $(0,1)$ и никакие 4 точки из этого множества не лежат на дивизоре бистепени $(1,1)$. Если $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{F}}$ – квадрика над полем $\mathbf{F}$, тогда будем говорить, что 5 точек $P_1, \dots, P_5 \in Q$ находятся *в общем положении*, если они находятся в общем положении на многообразии $Q_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}}$.

Остановимся подробнее на множестве из 5 точек в общем положении на квадратичной поверхности над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ для $k \in \mathbb{N}$.

Утверждение 3.3.6. *Пусть $P_1, \dots, P_5$ – такое множество из 5 точек в общем положении на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_{4^{2k}}$ для $k \in \mathbb{N}$, что оно образует орбиту некоторой подгруппы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. Тогда это множество точек $P_1, \dots, P_5$ единственно с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Доказательство. Из замечания 3.2.1 следует, что поле $\mathbb{F}_{4^{2k}}$ содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы. Нам нужно определить вложение

$$\eta : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq (\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Из следствия 3.2.6 мы получаем, что проекции образа этого вложения на обе копии $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}})$ в произведении сопряжены подгруппе, порожденной элементом $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{smallmatrix}\right)$ для нетривиального корня пятой степени из единицы $\zeta_5 \in \mathbb{F}_{4^{2k}}$.

Из определения общего положения точек $P_1, \dots, P_5$ (то есть никакие 2 точки из этого множества не лежат на дивизорах бистепени $(1,0)$ и $(0,1)$) мы получаем, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ нетривиально проецируется на обе копии $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}})$. Иными словами, с точностью до сопряжения мы имеем

$$\eta(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\zeta_5} \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle,$$

где σ – образующий $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, и ζ_5 и $\widetilde{\zeta_5}$ – нетривиальные корни пятой степени из единицы.

Без ограничения общности мы можем считать, что

$$P_1 = ([1:1],[1:1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Действительно, любая точка вида

$$([a:b],[c:d]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \tag{3.3.7}$$

где a, b, c и d все не равны нулю, может быть получена действием автоморфизма

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle$$

на точку $([1:1],[1:1])$. Этот автоморфизм коммутирует с $\eta(\sigma)$. Если хотя бы один из элементов a, b, c, d равен нулю, то орбита точки (3.3.7) под действием группы, порожденной элементом $\eta(\sigma)$, находится не в общем положении. Из определения общего положения точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (то есть никакие 4 точки из этого множества не лежат на дивизоре бистепени $(1,1)$) мы получаем, что $\zeta_5 \neq \widetilde{\zeta_5}$. Зафиксируем некоторый нетривиальный корень пятой степени из единицы ζ_5. Тогда с точностью до сопряжения мы имеем следующие вложения:

$$\eta_2(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5^2 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle,$$

$$\eta_3(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5^3 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle,$$

$$\eta_4(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_5^4 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle.$$

Орбита точки P_1 под действием группы $\eta_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ имеет вид

$$([1:1],[1:1]);\ ([1:\zeta_5],[1:\zeta_5^2]);\ ([1:\zeta_5^2],[1:\zeta_5^4]);\ ([1:\zeta_5^3],[1:\zeta_5]);\ ([1:\zeta_5^4],[1:\zeta_5^3]). \tag{3.3.8}$$

Орбита точки P_1 под действием группы $\eta_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ имеет вид

$$([1:1],[1:1]);\ ([1:\zeta_5],[1:\zeta_5^3]);\ ([1:\zeta_5^2],[1:\zeta_5]);\ ([1:\zeta_5^3],[1:\zeta_5^4]);\ ([1:\zeta_5^4],[1:\zeta_5^2]). \tag{3.3.9}$$

Орбита точки P_1 под действием группы $\eta_4(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ имеет вид

$$([1:1],[1:1]);\ ([1:\zeta_5],[1:\zeta_5^4]);\ ([1:\zeta_5^2],[1:\zeta_5^3]);\ ([1:\zeta_5^3],[1:\zeta_5^2]);\ ([1:\zeta_5^4],[1:\zeta_5]). \tag{3.3.10}$$

Легко видеть, что множество точек (3.3.9) может быть получено из множества точек (3.3.8) перестановкой местами элементов в каждой из 5 пар этого множества. Заметим также, что множество точек (3.3.10) может быть получено из множества точек

$$([1:1],[1:1]);\ ([1:\zeta_5],[1:\zeta_5]);\ ([1:\zeta_5^2],[1:\zeta_5^2]);\ ([1:\zeta_5^3],[1:\zeta_5^3]);\ ([1:\zeta_5^4],[1:\zeta_5^4]) \tag{3.3.11}$$

действием элемента

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle \in (\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k}})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Все точки из множества (3.3.11) лежат на дивизоре бистепени $(1,1)$. Поэтому это множество, а также множество (3.3.10) не являются набором точек, лежащих в общем положении. Значит, мы получили единственное с точностью до автоморфизма множество из 5 точек в общем положении.

□

Утверждение 3.3.12. *Пусть $P_1,\dots,P_5$ – такое множество различных точек в общем положении на $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_{4^{2k+1}}$ для $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что они образуют орбиту*

некоторой подгруппы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. *Тогда это множество точек* $P_1, \ldots, P_5$ *единственно с точностью до автоморфизма* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Доказательство. Из замечания 3.2.1 следует, что поле $\mathbb{F}_{4^{2k+1}}$ не содержит нетривиальный корень пятой степени из единицы. Пусть σ – порождающий $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. По лемме 3.2.7 проекции образа элемента σ при вложении в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ на обе копии $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k+1}})$ сопряжены элементу (3.2.8). Из определения общего положения точек $P_1, \ldots, P_5$ (то есть никакие 2 точки из этого множества не лежат на дивизорах бистепени $(1,0)$ и $(0,1)$) мы получаем, что образ σ проецируется нетривиально на обе копии $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k+1}})$.

Аналогично доказательству утверждения 3.3.6 мы можем считать, что

$$P_1 = ([1:1],[1:1]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Из определения общего положения точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (то есть никакие 4 точки из этого множества не лежат на дивизоре бистепени $(1,1)$) мы получаем, что проекции образа элемента σ при вложении в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ на обе копии $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k+1}})$ различны. Значит, с точностью до сопряжения образ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ может порождаться следующими элементами в группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$:

$$\eta(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_5^2 + \zeta_5^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle,$$

$$\widetilde{\eta}(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_5^2 + \zeta_5^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle,$$

где $\zeta_5 \in \mathbb{F}_{16^{2k+1}}$ – нетривиальный корень пятой степени из единицы.

Орбита точки P_1 под действием группы, порожденной $\eta(\sigma)$, получается перестановкой местами элементов в каждой из 5 пар орбиты точки P_1 под действием группы, порожденной $\widetilde{\eta}(\sigma)$. Итак, с точностью до автоморфизма имеется только одна орбита под действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, которая состоит из точек в общем положении на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

□

Сейчас мы перейдем к изучению ограничений скаляров по Вейлю $\mathbb{P}^1$.

Утверждение 3.3.13. *Пусть Q – квадрика над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, изоморфная ограничению скаляров по Вейлю $\mathrm{R}_{\mathbb{F}_{4^{2k+1}}/\mathbb{F}_{2^{2k+1}}}(\mathbb{P}^1)$. Пусть дано множество различных точек $P_1, \ldots, P_5$ в общем положении на Q над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$, образующую орбиту некоторой группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(Q)$. Тогда такое множество точек единственно с точностью до автоморфизма Q.*

Доказательство. Из леммы 3.2.7 следует, что образующий подгруппы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в группе $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k+1}})$ сопряжен элементу (3.2.8) для некоторого нетривиального корня пятой степени из единицы $\zeta_5 \in \overline{\mathbb{F}}_2$. Значит, с точностью до сопряжения подгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в группе $\mathrm{Aut}(Q)$ порождается

$$\alpha(\sigma) = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle.$$

Из замечания 3.3.4 следует, что автоморфизм $\alpha(\sigma)$ многообразия Q продолжается до автоморфизма

$$\alpha(\sigma)_{\mathbb{F}_{4^{2k+1}}} = \left\langle \begin{pmatrix} \zeta_5 + \zeta_5^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_5^2 + \zeta_5^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle$$

многообразия $Q_{\mathbb{F}_{4^{2k+1}}}$, так как по лемме 3.2.2(iii) элементы $\zeta_5+\zeta_5^4$ и $\zeta_5^2+\zeta_5^3$ в поле $\mathbb{F}_{4^{2k+1}}$ являются Галуа-сопряженными.

Без ограничения общности всегда можем считать, что

$$P_1 = ([1:1],[1:1]) \in Q_{\mathbb{F}_{2^{2k+1}}}.$$

Действительно, любая точка вида

$$([a:b],[\psi(a):\psi(b)]) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \tag{3.3.14}$$

где a и b не равны нулю и $\psi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{4^{2k+1}}/\mathbb{F}_{2^{2k+1}})$ – нетривиальный элемент, может быть получена действием автоморфизма

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \mathrm{id} \right\rangle$$

на точку $([1:1],[1:1])$. Этот автоморфизм коммутирует с $\alpha(\sigma)$. Если a или b равны нулю, то орбита точки (3.3.14) под действием группы, порожденной $\alpha(\sigma)$, не образует множество точек в общем положении.

Орбита точки $P_1 = ([1:1],[1:1]) \in Q_{\mathbb{F}_{2^{2k+1}}}$ под действием группы, порожденной элементом $\alpha(\sigma)_{\mathbb{F}_{4^{2k+1}}}$, имеет вид

$$([1:1],[1:1]);\ ([\zeta_5^2+\zeta_5^3:1],[\zeta_5+\zeta_5^4:1]);\ ([0:1],[0:1]);$$
$$([1:0],[1:0]);\ ([\zeta_5+\zeta_5^4:1],[\zeta_5^2+\zeta_5^3:1]).$$

Несложно видеть, что точки в этом множестве находятся в общем положении. Значит, с точностью до автоморфизма Q, существует единственное множество из 5 точек на Q в общем положении, которое является орбитой действия подгруппы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ в группе

$$\mathrm{Aut}(Q) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{4^{2k+1}}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

3.4 Структура расслоения на коники на кубической поверхности

В этом разделе мы изучим свойства структуры расслоения на коники гладких кубических поверхностей и выведем важные и полезные для доказательства основных результатов следствия.

Лемма 3.4.1. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем* **F**. *Предпо-*

ложим, что на $S_{\overline{\mathbf{F}}}$ *есть прямая* L*, которая определена над полем* $\mathbf{F}$*. Тогда над* $\mathbb{P}^1$ *существует расслоение на коники*

$$b\colon S \to \mathbb{P}^1$$

на поверхности S*, которое задается пучком гиперплоскостей в* $\mathbb{P}^3_{\overline{\mathbf{F}}}$*, проходящих через прямую* L*. Это расслоение на коники имеет ровно* 5 *вырожденных слоев над полем* $\overline{\mathbf{F}}$*. Каждый вырожденный слой над полем* $\overline{\mathbf{F}}$ *является объединением двух пересекающихся прямых на* $S_{\overline{\mathbf{F}}}$*.*

Доказательство. Несмотря на то, что этот факт является хорошо известным, мы, тем не менее, остановимся подробнее на его доказательстве. Рассмотрим пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3_{\overline{\mathbf{F}}}$, проходящих через прямую L. Этот пучок дает структуру расслоения на коники на S над полем $\mathbf{F}$. Базой этого расслоения на коники является $\mathbb{P}^1$, так как прямая L определена над полем $\mathbf{F}$, а, значит, существует точка $p \in L$, определенная над полем $\mathbf{F}$. Поэтому точка $b(p)$ тоже определена над полем $\mathbf{F}$.

По определению, вырожденный слой расслоения на коники на $S_{\overline{\mathbf{F}}}$ является объединением двух пересекающихся прямых. Исходя из значения эйлеровой характеристики расслоения на коники на $S_{\overline{\mathbf{F}}}$, мы можем сделать вывод, что существует ровно 5 вырожденных слоев.

□

Лемма 3.4.2. *Пусть* X *– раздутие* $\mathbb{P}^2$ *в точке. Тогда на* X *существует ровно одна структура расслоения на коники.*

Доказательство. Это непосредственно следует из структуры конуса Мори на поверхности X.

□

Теперь мы перейдем к изучению действий элементов из группы $W(\mathrm{E}_6)$ порядка 5 и 10 на гладких кубических поверхностях.

Лемма 3.4.3. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть $\delta \in W(\mathrm{E}_6)$ – элемент порядка 10, действующий на конфигурации прямых на S. Тогда*

(i) *на S не существует прямых, инвариантных под действием элемента δ;*

(ii) *существует пара прямых на S, инвариантная под действием элемента δ, и эта пара состоит из непересекающихся прямых.*

Доказательство. Обозначим за D циклическую подгруппу в группе $W(\mathrm{E}_6)$, порожденную δ. Так как порядок группы D равен 10, мы получаем, что длина орбиты под действием D на конфигурацию прямых S может быть либо 1, либо 2, либо 5, либо 10. Докажем, что не существует орбит длины 1. Допустим противное. Предположим, что l – инвариантная под действием группы D прямая на S. Тогда мы можем стянуть прямую l и получить поверхность дель Пеццо S' степени 4. Обозначим за

$$\pi\colon S \to S'$$

упомянутое стягивание. Из [Do2012, Corollary 8.2.40] и [DoDu2019, §3.1] мы имеем

$$\mathrm{Aut}(S') \subseteq W(\mathrm{D}_5) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5,$$

где за $W(\mathrm{D}_5)$ обозначается группа Вейля D_5. Несложно видеть, что в группе $W(\mathrm{D}_5)$ нет элементов порядка 10. Так как прямая l является D-инвариантной прямой, мы получаем, что D действует и на конфигурации прямых поверхности S', поскольку D сохраняет форму пересечения на $\mathrm{Pic}(S_{\overline{\mathbf{F}}})$. Это значит, что $D \subset W(\mathrm{D}_5)$, что невозможно. Тем самым, (i) доказано.

Теперь докажем существование такой орбиты длины 2 под действием D, что эта орбита состоит из 2 непересекающихся прямых. Существование орбиты длины 2 следует из (i), потому что 27 не делится нацело на 5. Предположим, что орбита состоит из пересекающихся прямых. Тогда существует прямая l, которая пересекает обе эти прямые. Но это значит, что l остается неподвижной относительно действия D на конфигурацию прямых, что противоречит (i). Значит, мы получаем, что орбита длины 2

состоит из непересекающихся прямых. Тем самым, (ii) доказано.

□

Лемма 3.4.4. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть l_1 и l_2 – две непересекающиеся прямые на S. Тогда существует в точности 5 прямых на S, которые пересекают каждую из прямых l_1 и l_2.*

Доказательство. Рассмотрим расслоение на коники

$$b\colon S \to \mathbb{P}^1,$$

которое задано пучком гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3_{\overline{\mathbf{F}}}$, проходящих через l_1. Согласно лемме 3.4.1, у расслоения b существует 5 вырожденных слоев. Так как l_1 не пересекает l_2, то получается, что l_2 пересекает любой слой b в точке. Это значит, что прямая l_2 в каждом вырожденном слое пересекает ровно одну из прямых. Обозначим за $\mathcal{L}_i$ при $i = 1, \ldots, 5$ те прямые в 5 вырожденных слоях, которые пересекаются с l_2. Так как l_1 пересекает все $\mathcal{L}_i$ при $i = 1, \ldots, 5$ из конструкции расслоения b мы получаем, что множество $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ является требуемой пятеркой прямых. Единственность следует из того, что все прямые, которые пересекаются с l_1, лежат в вырожденных слоях.

□

Лемма 3.4.5. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть G – группа порядка 5, действующая на конфигурацию прямых S. Тогда на S существует инвариантная под действием группы G пара непересекающихся прямых.*

Доказательство. Длина орбиты под действием группы G на конфигурацию прямых S может быть либо 1, либо 5. Так как 27 не делится нацело на 5, мы получаем, что существуют по крайней мере 2 инвариантные под действием группы G прямые. Обозначим их l_1 и l_2. Допустим, что они пересекаются. Тогда существует единственная прямая, пересекающая и l_1, и l_2. Эта прямая тоже будет инвариантна

относительно действия G. Значит, у нас имеется по крайней мере 3 прямые, которые инвариантны под действием группы G. Так как $27-3=24$ не делится нацело на 5, из всего вышесказанного следует, что существуют по крайней мере 7 прямых, каждая из которых инвариантна относительно действия G. Очевидно, среди этих 7 прямых найдутся 2 непересекающиеся прямые.

□

Лемма 3.4.6. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует пятерка попарно непересекающихся прямых в квадратичном положении, которая инвариантна относительно действия группы G.*

Доказательство. Из леммы 3.4.5 следует существование 2 прямых, инвариантных относительно действия группы G на S. Обозначим их l_1 и l_2. По лемме 3.4.4 существуют ровно 5 прямых на S, которые пересекают и l_1, и l_2. Стянем эту пятерку прямых. Мы получим гладкую поверхность дель Пеццо S' степени 8. Допустим, что S' является раздутием точки на $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим два расслоения на коники на S,

$$b_i\colon S \to \mathbb{P}^1,$$

каждое из которых задается с помощью пучка гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3_{\mathbf{F}}$, проходящих через l_i при $i=1,2$. Расслоение на коники b_i дает структуру $\mathbb{P}^1$-расслоения на S' при $i=1,2$. Значит, имеется два разных $\mathbb{P}^1$-расслоения на S'. По лемме 3.4.2 это невозможно. Значит, $S' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

□

Следствие 3.4.7. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над конечным полем $\mathbf{F}$, что все 27 прямых определены над полем $\mathbf{F}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Доказательство. По лемме 3.4.6 существует множество из 5 непересекающихся пря-

мых в квадратичном положении, которое образует G-орбиту. Значит, при стягивании множества этих прямых мы получаем G-эквивариантный морфизм

$$\pi : S \to X,$$

где $X_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Так как все 27 прямых определены на S, мы имеем

$$\mathrm{rkPic}(S) = 7,$$

и, значит,

$$\mathrm{rkPic}(X) = \mathrm{rkPic}(S) - 5 = 2.$$

Из леммы 3.3.2, следует, что $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

□

Лемма 3.4.8. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует множество из 5 попарно непересекающихся прямых на S, которые образуют орбиту под действием группы G.*

Доказательство. Обозначим за γ порождающий Γ и за g обозначим порождающий G. Так как γ и g коммутируют, мы получаем группу $D = G \times \Gamma \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Согласно лемме 3.4.3(ii) существует орбита длины 2 под действием группы D на конфигурацию прямых на поверхности $S_{\overline{\mathbf{F}}}$, состоящая из прямых l_1 и l_2. Значит, эти 2 прямые являются также орбитой длины 2 под действием Γ. Согласно лемме 3.4.4 существуют ровно 5 прямых на S, скажем, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$, каждая из которых пересекает и l_1, и l_2. Так как эта пятерка прямых с заданным условием на пересечения с l_1 и l_2 единственна, мы получаем, что каждая прямая $\mathcal{L}_i$ инвариантна относительно действия группы Γ. Это значит, что все прямые $\mathcal{L}_i$ при $i = 1, \ldots, 5$ определены над полем $\mathbf{F}$. Более того, эта пятерка прямых является орбитой длины 5 под действием группы G, так как иначе группа G действовала бы тривиально на S.

Стянем эту пятерку прямых. Мы получим гладкую поверхность дель Пеццо S'

степени 8. Допустим, что S' – это раздутие точки на $\mathbb{P}^2$. Тогда на S существует прямая, инвариантная относительно действия D. Однако, это противоречит лемме 3.4.3(i). Значит, $S'_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbf{F}}}$.

□

Следствие 3.4.9. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Пусть G – подгруппа порядка 5 в группе $\mathrm{Aut}(S)$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание*

$$\pi : S \to Q$$

на поверхность $Q \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – сепарабельное квадратичное расширение $\mathbf{F}$.

Доказательство. Из леммы 3.4.8 вытекает существование множества из 5 непересекающихся прямых в квадратичном положении, которое образует G-орбиту (в частности, каждая прямая в этом множестве определена над полем $\mathbf{F}$). Значит, стягивание этих прямых дает G-эквивариантный морфизм

$$\pi : S \to X,$$

где $X_{\overline{\mathbf{F}}} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Из нетривиальности группы Γ следует неравенство

$$\mathrm{rkPic}(S) \leqslant 6,$$

и, значит,

$$\mathrm{rkPic}(X) = \mathrm{rkPic}(S) - 5 = 1.$$

Из леммы 3.3.2 мы получаем, что $X \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – сепарабельное квадратичное расширение $\mathbf{F}$.

□

Сформулируем несложную лемму о тривиальности образа группы Галуа в группу $W(\mathrm{E}_6)$ для гладкой кубической поверхности с достаточно большой группой авто-

морфизмов.

Лемма 3.4.10. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$, чья группа автоморфизмов изоморфна либо $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5$. Тогда образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален.*

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 1.3.11, так как Γ коммутирует с группой автоморфизмов S.

□

Заключая раздел, мы докажем две леммы касательно образа абсолютной группы Галуа в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Лемма 3.4.11. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что $\mathrm{Aut}(S)$ содержит подгруппу порядка 5. Тогда образ абсолютной группы Галуа в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ нетривиален.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда все прямые на $S_{\overline{\mathbb{F}}_2}$ определены над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$. Из леммы 3.4.6 мы получаем существование $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантного стягивания на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Однако, по лемме 3.2.3 порядок группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ не делится на 5.

□

Лемма 3.4.12. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$. Тогда образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{F}}_2/\mathbb{F}_{2^{2k+1}}\right)$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и порождается элементом из класса сопряженности A_1.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in \mathfrak{S}_6$ порядка 5 в группе $W(\mathrm{E}_6)$. Из леммы 1.3.5 следует, что централизатор элемента g в группе $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфен $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Элемент g не лежит в централизаторе подгруппы $\mathfrak{S}_6$ в группе $W(\mathrm{E}_6)$, потому что g не лежит в центре $\mathfrak{S}_6$. Значит, централизатор подгруппы $\mathfrak{S}_6$ в группе $W(\mathrm{E}_6)$ лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Значит, $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Из леммы 3.4.11 следует, что группа Γ нетривиальна. Поэтому группа Γ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Из следствия 1.3.7 мы получаем, что группа Γ порождается элементом из класса сопряженности A_1.

□

3.5 Доказательство основных результатов

В этом разделе мы изучим группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над всеми конечными полями характеристики 2 и докажем теоремы 3.1.1 и 3.1.2. Начнем с формулировки теоремы, которая непосредственно следует из доказательства теоремы 1.5.1(i)′ (см. [DoDu2019, §5.1]).

Теорема 3.5.1. *Пусть S – кубика Ферма над полем $\mathbb{F}_4$. Тогда имеет место изоморфизм* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Лемма 3.5.2. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$ и в случае равенства имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2).$$

Доказательство. Неравенство следует из леммы 1.4.5. Из теоремы 1.5.1(i)′ следует, что над алгебраически замкнутым полем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S_{\overline{\mathbb{F}}_2}) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Докажем, что оценка достигается уже над полем $\mathbb{F}_{4^k}$. Рассмотрим гладкую кубическую поверхность над полем $\mathbb{F}_{4^k}$. Согласно теореме 3.5.1 группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_4$ изоморфна группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Это означает, что наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ изоморфна группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

□

Лемма 3.5.3. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$ и в случае равенства имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6.$$

Доказательство. Пусть группа автоморфизмов S имеет максимальный порядок среди всех групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Тогда по теореме 2.1.5 мы имеем неравенство

$$|\mathrm{Aut}(S)| \geqslant 720. \tag{3.5.4}$$

Согласно теореме 1.5.1(i)′ и (i)″ это значит, что $\mathrm{Aut}(S_{\overline{\mathbb{F}}_2}) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(S)$ является подгруппой в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Согласно лемме 1.3.9 с точностью до сопряжения существуют ровно 3 подгруппы в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$, удовлетворяющие (3.5.4):

$$\mathfrak{S}_6,\ \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2) \text{ и } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5.$$

Однако, группы $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ и $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5$ не могут быть группами автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, потому что по лемме 3.4.11 образ Γ абсолютной группы Галуа в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ нетривиальный, в то время как по лемме 3.4.10 мы получаем, что в этих случаях Γ тривиальна. Значит, наибольшая группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ изоморфна $\mathfrak{S}_6$.

□

Теперь приступим к доказательству основных результатов. Начнем с теоремы 3.1.2.

Доказательство теоремы 3.1.2. Докажем (i). Так как Γ тривиальна, все прямые на $S_{\overline{\mathbf{F}}}$ определены над полем $\mathbf{F}$. По лемме 3.4.6 существует множество из 5 непересекающихся прямых в квадратичном положении, которое образует орбиту под действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(S)$. Согласно следствию 3.4.7 мы можем стянуть эти прямые $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно и получить $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Замечание 1.4.7 говорит нам о том, что образом данных прямых при этом стягивании являются 5 точек в общем положении на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Из утверждений 3.3.6 и 3.3.12 мы получаем, что такое множество из 5 точек единственно с точностью до автоморфизма. Значит, гладкая кубическая поверхность, на которую действует регулярно группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ и для которой Γ три-

виальна, единственна с точностью до изоморфизма. Из теоремы 3.5.1 следует, что на кубику Ферма регулярно действует группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Поэтому S изоморфна кубике Ферма.

Теперь докажем (ii). Из леммы 3.4.8 следует существование множества из 5 непересекающихся прямых в квадратичном положении, которое образует орбиту под действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(S)$. Благодаря следствию 3.4.9 мы можем $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно стянуть это множество и получить ограничение скаляров по Вейлю $Q \simeq \mathrm{R}_{\mathbf{L}/\mathbf{F}}(\mathbb{P}^1)$, где $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – это квадратичное расширение поля $\mathbf{F}$. Замечание 1.4.7 говорит нам о том, что образом данных прямых при этом стягивании являются 5 точек в общем положении на Q. Из утверждения 3.3.13 мы получаем, что такое множество из 5 точек единственно с точностью до автоморфизма. Значит, гладкая кубическая поверхность, на которую действует регулярно группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ и для которой $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, единственна с точностью до изоморфизма. По лемме 2.5.1 мы получаем, что на гладкую кубическую поверхность (0.0.1) регулярно действует группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Значит, S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

□

Доказательство теоремы 3.1.1. Для начала рассмотрим гладкие кубические поверхности над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ при $k \in \mathbb{N}$. Из леммы 3.5.2 следует, что наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ при $k \in \mathbb{N}$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Осталось показать, что гладкая кубическая поверхность с данной группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма. Так как группа $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, и по лемме 3.4.10 образ абсолютной группы Галуа в группу $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален, применяя теорему 3.1.2(i), мы получаем желаемое.

Теперь перейдем к рассмотрению гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. По лемме 3.5.3 наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ изоморфна $\mathfrak{S}_6$. Осталось показать, что гладкая кубическая поверхность с данной группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма. Группа $\mathfrak{S}_6$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. По лемме 3.4.12 образ абсолютной группы Галуа в группу $W(\mathrm{E}_6)$ изомор-

фен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Значит, мы можем применить теорему 3.1.2(ii) и получить желаемое.

□

3.6 Кубика Ферма над полем характеристики 2

В этом разделе мы изучим группу автоморфизмов кубики Ферма над полями характеристики 2 и докажем утверждение 3.1.3 и следствие 3.1.4.

Доказательство утверждения 3.1.3. Из теоремы 3.1.1(i) следует, что группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ при $k \in \mathbb{N}$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Для полноты изложения напомним доказательство этого факта, кое можно найти в статье [DoDu2019, §5.1] (ср. [Cheng2022, §1.3 и 2.3]). Рассмотрим эрмитову билинейную форму на 4-мерном векторном пространстве над полем $\mathbb{F}_4$

$$H\left((x,y,z,t),(x',y',z',t')\right) = x\Phi(x') + y\Phi(y') + z\Phi(z') + t\Phi(t'),$$

где $\Phi : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$ – автоморфизм Фробениуса, заданный $\Phi(\mathtt{x}) = \mathtt{x}^2$ при $\mathtt{x} \in \mathbb{F}_4$. Значит, так как уравнение кубики Ферма задано

$$H\left((x,y,z,t),(x,y,z,t)\right) = x^3 + y^3 + z^3 + t^3,$$

мы получаем, что ее группа автоморфизмов содержит группу $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Согласно лемме 3.5.2 это означает, что группа автоморфизмов кубики Ферма над $\mathbb{F}_4$ и алгебраическим расширением поля $\mathbb{F}_4$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$.

Рассмотрим кубику Ферма над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ при $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Над расширением степени 2 этого поля группа автоморфизмов кубики Ферма изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Группа $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ состоит из таких элементов $A \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_4)$ что выполнено равенство

$$A^\top \Phi(A) = E, \tag{3.6.1}$$

где E – единичная матрица и $A^\top$ – транспонированная матрица к A.

Рассмотрим алгебраическое расширение $\mathbb{F}_{2^{2k+1}} \subset \mathbb{F}_{4^{2k+1}}$. Пусть Γ – группа Галуа

этого расширения. Тогда группой автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ является группа

$$G = \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)^{\Gamma} \subset \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$$

Галуа-инвариантных элементов. Группа Галуа алгебраического расширения конечного поля порождается автоморфизмом Фробениуса, то есть таким элементом ψ, что

$$\psi(\mathtt{x}) = \mathtt{x}^{2^{2k+1}} \text{ для } \mathtt{x} \in \mathbb{F}_{4^{2k+1}}.$$

Значит, группа G является подгруппой в группе $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_4)$, состоящая из таких элементов A, удовлетворяющих уравнению

$$A = \Phi(A). \tag{3.6.2}$$

Поэтому группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_2$ и над полем $\mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ изоморфны. Значит, нам достаточно найти группу автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_2$. Из (3.6.1) и (3.6.2) мы получаем, что автоморфизмы кубики Ферма над полем $\mathbb{F}_2$ – это такие матрицы

$$M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2),$$

которые удовлетворяют уравнению $M^{\top}M = E$. Иными словами, это такие матрицы

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_2),$$

что

$$\sum_{i=1}^{4} m_{ij} = 1 \text{ при любых } j = 1,2,3,4 \quad \text{и} \tag{3.6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_{ij}m_{ik} = 0 \text{ при любых } j,k = 1,2,3,4 \text{ и } j \neq k. \tag{3.6.4}$$

Используя невырожденность M, из (3.6.3) мы получаем, что любой столбец матрицы M состоит либо из одной 1, либо из трех 1. Из (3.6.4) мы получаем, что если один из столбцов матрицы M состоит из одной 1, то и все остальные столбцы состоят только из одной 1. Группа, состоящая из таких элементов изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$. Что и доказывает утверждение.

□

Доказательство следствия 3.1.4. Согласно теореме 3.1.1(ii) группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности (0.0.1) изоморфна $\mathfrak{S}_6$, в то время как по утверждению 3.1.3 группа автоморфизмов кубики Ферма изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$. Это доказывает (i).

Изоморфизм между гладкой кубической поверхностью (0.0.1) и кубикой Ферма над полем $\mathbb{F}_{4^k}$ задается проективным преобразованием

$$[x : y : z : t] \mapsto [x + y : \omega x + \omega^2 y : z + t : \omega z + \omega^2 t],$$

где $\omega \in \mathbb{F}_{4^k}$ – нетривальный кубический корень из единицы, которое преобразует уравнение (0.0.1) в уравнение кубики Ферма. Это доказывает (ii).

□

Глава 4

Кубические поверхности над произвольными полями

В этой главе мы найдем наибольшие группы автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полями любой характеристики, кроме 2. Более того, мы докажем, что над заданным полем гладкая кубическая поверхность с наибольшей группой автоморфизмов единственна с точностью до изоморфизма.

4.1 Введение

Основная цель этой главы – доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1.1. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$.*

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 2.*

  (i)$_2$ *Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный корень третьей степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$$

  и S изоморфна кубике Ферма.

(ii)$_2$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный корень третьей степени из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$$

и S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *равна* 3.

(i)$_3$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 216$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

и S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.2).

(ii)$_3$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

и S *изоморфна кубике Клебша.*

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 5.

(i)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

и S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 72$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$$

и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *не равна* 2, 3 *и* 5.

(i)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

и S изоморфна кубике Ферма.

(ii)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

и S изоморфна кубике Клебша.

Отметим, что в статье [Sm2024] дана классификация групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над произвольным полем характеристики нуль. Поэтому результат теоремы 4.1.1 для полей характеристики нуль следует из результата [Sm2024, Theorem 1.1].

Теорема 4.1.1 является обобщением теоремы 3.1.1. Из теоремы 4.1.1 мы получаем следующее следствие, из которого вместе с теоремой 3.1.1 вытекает классификация наибольших групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над конечными полями.

Следствие 4.1.2. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над конечным полем* $\mathbf{F}$ *нечетной характеристики.*

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 3.

(i)$_3$ *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{9^k}$ *для* $k \in \mathbb{N}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 216$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *и S изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.2).

(ii)$_3$ *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{3^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 5.

(i)$_5$ *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{25^k}$ *для* $k \in \mathbb{N}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ *и* S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii)$_5$ *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{5^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 72$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$ *и* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *не меньше* 7.

(i)$_{\geqslant 7}$ *Если порядок поля* $\mathbf{F}$ *сравним с* 1 *по модулю* 3, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ *и* S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii)$_{\geqslant 7}$ *Если порядок поля* $\mathbf{F}$ *сравним с* 2 *по модулю* 3, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

Небезынтересным является вопрос о том, над какими полями кубики Ферма и Клебша, кубические поверхности (0.0.2) и (0.0.1) могут быть изоморфны. Следующее утверждение дает ответ на этот вопрос.

Утверждение 4.1.3. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$.

(**o**) *Кубика Ферма особа (и даже не приведенная) тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 3. *Кубика Клебша особа тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 5. *Кубическая поверхность* (0.0.2) *особа тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2. *Кубическая поверхность* (0.0.1) *особа тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 3.

(i) *Кубическая поверхность* (0.0.2) *не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубике Клебша, ни кубической поверхности* (0.0.1).

(ii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2, *то кубическая поверхность* (0.0.1) *и кубика Клебша изоморфны.*

(iii) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 3, *то кубическая поверхность* (0.0.1) *изоморфна кубике Ферма тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы.*

(iv) *Если* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 2, *то кубика Клебша не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубической поверхности* (0.0.1).

Для удобства читателя мы перефразируем теорему 4.1.1, используя некоторую информацию из утверждения 4.1.3 в следующей таблице.

Поле	Наибольшая группа автоморфизмов G	Порядок группы G	Кубическая поверхность с группой автоморфизмов G
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	$\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$	25 920	Кубика Ферма = = (0.0.1) = = Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_6$	720	Кубика Клебша = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \in \mathbf{F}$	$\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	216	(0.0.2)
$char(\mathbf{F}) = 3$, $\mathbf{i} \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) = 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$	72	(0.0.1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \in \mathbf{F}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$	648	Кубика Ферма = = (0.0.1)
$char(\mathbf{F}) \neq 2, 3, 5$, $\omega \notin \mathbf{F}$	$\mathfrak{S}_5$	120	Кубика Клебша

Таблица 4.1.1: Таблица наибольших групп автоморфизмов.

Здесь за ω мы обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы, а за $\mathbf{i}$ мы обозначаем примитивный корень четвертой степени из единицы.

Так же мы перефразируем утверждение 4.1.3 в следующей таблице.

	(0.0.1)	(0.0.2)	Кубика Клебша	Кубика Ферма
(0.0.1)	Всегда	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$
(0.0.2)	Никогда	Всегда	Никогда	Никогда
Кубика Клебша	$char(\mathbf{F}) = 2$	Никогда	Всегда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$
Кубика Ферма	$char(\mathbf{F}) \neq 3$, $\omega \in \mathbf{F}$	Никогда	$char(\mathbf{F}) = 2$, $\omega \in \mathbf{F}$	Всегда

Таблица 4.1.2: Таблица отношений изоморфности кубических поверхностей из утверждения 4.1.3

Здесь за ω мы обозначаем нетривиальный кубический корень из единицы.

4.2 Предварительные сведения

В этом разделе мы докажем вспомогательные леммы, которые мы будем далее пользоваться. В дальнейшем мы будем изучать классы сопряженности элементов в группе $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbf{F}})$ над полями $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^{sep}$. Но перед этим мы докажем следующую вспомогательную лемму о сопряженных матрицах над наперед заданным полем $\mathbf{F}$ и его расширением $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$.

Лемма 4.2.1. *Пусть $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ – расширение поля $\mathbf{F}$. Пусть даны две матрицы A и B из $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{F})$. Предположим, что они сопряжены в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{L})$. Тогда они сопряжены в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{F})$.*

Доказательство. Посмотрим на матрицы A и B как на операторы, действующие в векторных пространствах $\mathbf{F}^n$ и $\mathbf{L}^n$. Так как A и B сопряжены над полем $\mathbf{L}$, то

по [Gor2016, Theorem 15.1] эти операторы сопряжены оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbf{L}[t]}{p_1^{m_1}(t)} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbf{L}[t]}{p_k^{m_k}(t)}, \tag{4.2.2}$$

где все полиномы $p_i(t)$ при $i = 1, \ldots, k$ приведены и неприводимы над $\mathbf{L}$. Заметим, что мы не требуем, чтобы полиномы $p_i(t)$ были различными. По [Gor2016, Corollary 15.4] характеристический полином операторов A и B равен

$$p_1^{m_1}(t) \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}(t).$$

По [Gor2016, Theorem 15.1] оператор A над полем $\mathbf{F}$ сопряжен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbf{F}[t]}{f_1^{u_1}(t)} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbf{F}[t]}{f_s^{u_s}(t)} \tag{4.2.3}$$

и оператор B над полем $\mathbf{F}$ сопряжен оператору умножения на t в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbf{F}[t]}{g_1^{v_1}(t)} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbf{F}[t]}{g_r^{v_r}(t)}, \tag{4.2.4}$$

где $f_i(t)$ и $g_j(t)$ при $i = 1, \ldots, s$ и $j = 1, \ldots, r$ приведены и неприводимы над $\mathbf{F}$. Из равенств

$$p_1^{m_1}(t) \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}(t) = f_1^{u_1}(t) \cdot \ldots \cdot f_s^{u_s}(t) = g_1^{v_1}(t) \cdot \ldots \cdot g_r^{v_r}(t)$$

мы получаем, что множества различных полиномов среди $f_1(t), \ldots, f_s(t)$ и среди $g_1(t), \ldots, g_r(t)$ совпадают. Тензорно умножая (4.2.3) и (4.2.4) на $\mathbf{L}$ мы получаем прямую сумму (4.2.2). Это значит, что для любого неприводимого полинома над полем $\mathbf{F}$ наборы степеней, с какими он встречается в прямых суммах (4.2.3) и (4.2.4), совпадают. То есть прямые суммы (4.2.3) и (4.2.4) изоморфны, что и означает, что A и B сопряжены в $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbf{F})$.

□

Замечание 4.2.5. *Напомним определение сопряженности в проективной группе.*

Пусть дано поле $\mathbf{F}$. *Рассмотрим естественный гомоморфизм*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \stackrel{\rho}{\twoheadrightarrow} \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}).$$

Пусть a *и* b *– два произвольных элемента в* $\mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$ *и рассмотрим какие-нибудь элементы* $A \in \rho^{-1}(a)$ *и* $B \in \rho^{-1}(b)$. *Два элемента* $a, b \in \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F})$ *мы называем сопряженными, если существуют такие* $\lambda \in \mathbf{F}^*$ *и* $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, *что имеет место равенство*

$$CAC^{-1} = \lambda B.$$

Лемма 4.2.6. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* $p \neq 3$. *Пусть* $\mathbf{F} \subset \mathbf{L}$ *– расширение поля* $\mathbf{F}$. *Пусть* a *и* b *– элементы порядка* 3 *в* $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$, *которые сопряжены в* $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{L})$. *Тогда они сопряжены и в* $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$.

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\mathrm{GL}_4(\mathbf{F}) \stackrel{\rho}{\twoheadrightarrow} \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F}).$$

Рассмотрим произвольные $A \in \rho^{-1}(a)$ и $B \in \rho^{-1}(b)$. Так как $a, b \in \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$ сопряжены в $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{L})$, мы получаем существование таких $\lambda \in \mathbf{L}^*$ и $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{L})$, что

$$CAC^{-1} = \lambda B. \tag{4.2.7}$$

Докажем, что $\lambda \in \mathbf{F}^*$. Так как a и b имеют порядок 3, то мы имеем равенства $A^3 = sE$ и $B^3 = tE$, где $s, t \in \mathbf{F}^*$ и E – единичная матрица. Возводя в куб (4.2.7), мы получаем равенство

$$sE = A^3 = \lambda^3 B^3 = \lambda^3 tE.$$

Это значит, что

$$\lambda^3 = \frac{s}{t} \in \mathbf{F}^*. \tag{4.2.8}$$

Беря определитель обеих частей равенства (4.2.7), мы получаем равенство

$$\lambda^4 \det(B) = \det(A).$$

Это значит, что

$$\lambda^4 = \frac{\det(A)}{\det(B)} \in \mathbf{F}^*. \tag{4.2.9}$$

Деля (4.2.9) на (4.2.8), мы получаем

$$\lambda = \frac{t\det(A)}{s\det(B)} \in \mathbf{F}^*.$$

Зафиксируем некоторое λ, удовлетворяющее равенству (4.2.7). Применяя лемму 4.2.1 к матрицам A и λB, мы получаем, что существует такая невырожденная матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, что выполнено (4.2.7). Это значит, что a и b сопряжены в $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$.

□

Сейчас мы приступим к доказательству вспомогательных лемм касательно группы Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ с действием на конфигурацию прямых на гладкой кубической поверхности.

Лемма 4.2.10. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над сепарабельно замкнутыми полем. Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Aut}(S)$ порядка 5. Тогда две прямые на S, которые инвариантны относительно действия g, не пересекаются.*

Доказательство. Пусть l_1 и l_2 – две прямые на S, которые инвариантны под действием элемента g. Предположим, что они пересекаются. Тогда по лемме 1.4.11 существует единственная прямая l_3, которая пересекает обе прямые l_1 и l_2. Однако, так как l_1 и l_2 остаются неподвижными под действием g, можно прийти к убеждению, что прямая l_3 тоже остается неподвижной под действием g. Но это противоречит лемме 1.4.10(i). Значит, прямые l_1 и l_2 не пересекаются.

□

Лемма 4.2.11. *Пусть дано сепарабельно замкнутое поле $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3. Пусть S – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$. Пусть дан автоморфизм g поверхности S порядка 3. Обозначим за $\omega \in \mathbf{F}$ нетривиальный кубический корень из единицы. Тогда для автоморфизма g выполнено одно из следующих утверждений.*

(i) *Автоморфизм g лежит в классе сопряженности A_2 и его индуцированное на $\mathbb{P}^3$ действие с точностью до сопряжения задается проективным преобразованием*

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

(ii) *Автоморфизм g лежит в классе сопряженности A_2^2 и его индуцированное на $\mathbb{P}^3$ действие с точностью до сопряжения задается проективным преобразованием*

$$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Автоморфизм g лежит в классе сопряженности A_2^3 и его индуцированное на $\mathbb{P}^3$ действие с точностью до сопряжения задается проективным преобразованием*

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем лемма непосредственно вытекает из [DoDu2019, Theorem 10.4]. Из леммы 4.2.6 следует, что лемма верна и над сепарабельно замкнутым полем.

□

Следствие 4.2.12. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 3. *Пусть* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы. Если* g *– автоморфизм порядка* 3 *гладкой кубической поверхности над полем* $\mathbf{F}$, *то* g *не лежит в классе сопряженности* A_2^3.

Доказательство. Предположим, что g лежит в классе сопряженности A_2^3. Согласно лемме 4.2.11(iii), над полем $\mathbf{F}^{sep}$ индуцированное на $\mathbb{P}^3$ действие элемента g с точностью до сопряжения задается проективным преобразованием

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический полином aA, где $a \in \overline{\mathbf{F}}^*$. Этот полином имеет вид

$$F(\lambda) = (\lambda - a\omega)(\lambda - a)^3 = \lambda^4 - a\lambda^3(3+\omega) + a^2\lambda^2(3+\omega) - a^3\lambda(3+\omega) + a^4\omega.$$

Так как g – автоморфизм гладкой кубической поверхности над полем $\mathbf{F}$, то мы получаем существование такого $a \in \overline{\mathbf{F}}^*$, что все коэффициенты $F(\lambda)$ лежат в $\mathbf{F}$. В частности, отношение коэффициента при λ^2 к квадрату коэффициента при λ^3

$$\frac{a^2(3+\omega)}{a^2(3+\omega)^2} = \frac{1}{3+\omega} \in \mathbf{F},$$

что неверно. Значит, g не лежит в классе сопряженности A_2^3.

□

Из следствия 4.2.12 и закона контрапозиции мы получаем еще одно следствие.

Следствие 4.2.13. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 3. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность* S *над полем* $\mathbf{F}$. *Предположим, что существует автоморфизм* $g \in \mathrm{Aut}(S)$, *который лежит в классе сопряженности* A_2^3. *Тогда* $\mathbf{F}$

содержит нетривальный кубический корень из единицы.

Сейчас мы переходим к изучению группы автоморфизмов кубики Ферма.

Пример 4.2.14. Пусть дано поле $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3. За S обозначим кубику Ферма над полем $\mathbf{F}$. Предположим, что в $\mathbf{F}$ лежит нетривальный кубический корень из единицы $\omega \in \mathbf{F}^{sep}$. Тогда несложно понять, что

$$\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4,$$

где $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ действует умножением однородных координат x, y, z, t в $\mathbb{P}^3$ на кубические корни из единицы и $\mathfrak{S}_4$ действует перестановками на однородные координаты x, y, z, t. По теореме 1.5.1 (iii)$'$ и (iv)$'$ и замечанию 1.5.2 мы имеем

$$\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4, & \text{if } char\mathbf{F} \neq 2; \\ \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2), & \text{if } char\mathbf{F} = 2. \end{cases}$$

Значит, имеет место изоморфизм $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, если характеристика $\mathbf{F}$ еще и отлична от 2.

Лемма 4.2.15. *Пусть $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ изоморфна группе, действующей регулярно на кубику Ферма над алгебраически замкнутым полем характеристики, не равной 3. Пусть $\tau = gh \in G$ – элемент порядка 3, где $g \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ и $h \in \mathfrak{S}_4$ – неединичные элементы в группе. Тогда элементы g и h в некоторой системе координат задаются проективными преобразованиями*

$$g = \begin{pmatrix} \omega^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $h = (123)$ – перестановка координат, где $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ либо попарно различные

числа, либо все равны 1 *или* 2.

Доказательство. Так как τ – элемент порядка 3, имеем

$$ghghgh = e,$$

где $e \in G$ – единичный элемент. Это равенство можно переписать как

$$g(hgh^{-1})(h^{-1}gh) = e. \tag{4.2.16}$$

Из примера 4.2.14 и из единственности, согласно лемме 1.3.9, с точностью до сопряжения подгруппы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ следует, что g может задаваться проективным преобразованием

$$g = \begin{pmatrix} \omega^{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{a_4} \end{pmatrix}$$

над сепарабельно замкнутым полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3, где

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{0, 1, 2\}$$

не все равны. Пусть σ – перестановка элементов в множестве $\{1, 2, 3, 4\}$, которая соответствует сопряжению с помощью элемента h. Тогда элемент

$$g(hgh^{-1})(h^{-1}gh)$$

задается проективным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \omega^{a_1+a_{\sigma(1)}+a_{\sigma^2(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{a_2+a_{\sigma(2)}+a_{\sigma^2(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{a_3+a_{\sigma(3)}+a_{\sigma^2(3)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{a_4+a_{\sigma(4)}+a_{\sigma^2(4)}} \end{pmatrix}. \tag{4.2.17}$$

Согласно (4.2.16) это единичный элемент в группе G. По условию, элемент σ имеет порядок 3. В некоторой системе координат $\sigma = (123)$. То есть

$$\omega^{a_4+a_{\sigma(4)}+a_{\sigma^2(4)}} = 1.$$

Поэтому из того, что элемент (4.2.17) равен единичному элементу, следует, что

$$\omega^{a_i+a_{\sigma(i)}+a_{\sigma^2(i)}} = 1.$$

для $i = 1, 2, 3$. Значит, легко увидеть, что $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2\}$ либо попарно различные числа, либо все равны 1 или 2.

□

Лемма 4.2.18. *Пусть $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ изоморфна группе, действующей регулярно на кубику Ферма над алгебраически замкнутым полем характеристики, не равной* 3. *Обозначим за*

$$\mathrm{pr}\colon G \to \mathfrak{S}_4$$

проективный гомоморфизм на $\mathfrak{S}_4$. Рассмотрим группу G как подгруппу в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Тогда все элементы группы G из класса сопряженности A_2^3 лежат в $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr})$.

Доказательство. Из леммы 4.2.11(iii) и примера 4.2.14 очевидным образом следует, что в ядре $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr})$ есть элементы из класса сопряженности A_2^3. Докажем, что остальные элементы не лежат в классе сопряженности A_2^3. Предположим, что в G

существует такой элемент $\tau = gh$, где $g \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ и $h \in \mathfrak{S}_4$ – неединичные элементы в группе, что τ лежит в классе сопряженности A_2^3. Тогда элементы g и h удовлетворяют условию леммы 4.2.15. Это значит, что в некоторой системе координат элемент g задается проективным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \omega^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$ либо попарно различные числа, либо все равны 1 или 2, а h действует на диагональные элементы g перестановкой вида (123). По лемме 4.2.11(iii) легко видеть, что такие gh не лежат в классе сопряженности A_2^3.

□

Лемма 4.2.19. *Пусть $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ изоморфна группе, действующей регулярно на кубику Ферма над алгебраически замкнутым полем характеристики, не равной 3. Пусть g – неединичный элемент в нормальной подгруппе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ в G. Тогда централизатор элемента g группы G изоморфен $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes D$, где группа D изоморфна либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, либо $\mathfrak{S}_3$.*

Доказательство. Из примера 4.2.14 и из единственности, согласно лемме 1.3.9, с точностью до сопряжения подгруппы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ следует, что нормальная подгруппа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ в G состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} \omega^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F}) \tag{4.2.20}$$

где $\omega \in \mathbf{F}$ – нетривальный кубический корень из единицы в поле $\mathbf{F}$ характеристики,

не равной 3, и $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$. Подгруппа $\mathfrak{S}_4$ действует на $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ перестановкой диагональных элементов в представлении элементов из $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ как элементов (4.2.20) в $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$.

Рассмотрим все возможные централизаторы неединичных элементов

$$g \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$$

в группе G. С точностью до сопряжения имеются три случая.

- Пусть g – такой автоморфизм, что $a = b$, $c \neq d$ и $c, d \neq a$. Тогда централизатор элемента g группы G изоморфен $\mathrm{C}_G(g) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- Пусть g – такой автоморфизм, что $a = b$, $c = d$ и $c \neq a$. Тогда централизатор элемента g группы G изоморфен $\mathrm{C}_G(g) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

- Пусть g – такой автоморфизм, что $a = b = c$ и $d \neq a$. Тогда централизатор элемента g группы G изоморфен $\mathrm{C}_G(g) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_3$.

□

4.3 Группа $\mathfrak{S}_5$ и кубика Клебша

В этом разделе мы будем рассматривать группу $\mathfrak{S}_5$ как группу автоморфизмов гладкой кубической поверхности над произвольным полем $\mathbf{F}$ любой характеристики, кроме 5. Сначала напомним структуру группы автоморфизмов кубики Клебша.

Пример 4.3.1. Очевидно, что группа автоморфизмов кубики Клебша над произвольным полем $\mathbf{F}$ любой характеристики, не равной 5, содержит группу $\mathfrak{S}_5$, которая действует на $\mathbb{P}^4$ перестановкой однородных координат x, y, z, t, w. Заметим, что по лемме 1.3.6 образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в $W(\mathrm{E}_6)$ в этом случае лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Замечание 4.3.2. *Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 – 4 точки в общем положении на $\mathbb{P}^2$. Тогда эта четверка единственна с точностью до проективного преобразования.*

Лемма 4.3.3. *Пусть F – гладкая поверхность дель Пеццо степени 5 над полем $\mathbf{F}$. Предположим, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$. Тогда F единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Так как все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$, мы можем стянуть 4 непересекающиеся прямые на $\mathbb{P}^2$. Поверхность F является раздутием 4 точек в общем положении на $\mathbb{P}^2$. По замечанию 4.3.2 четверка точек в общем положении на $\mathbb{P}^2$ определена единственным образом с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^2$. Значит, поверхность дель Пеццо степени 5, на которой все прямые над $\mathbf{F}^{sep}$ определены над $\mathbf{F}$, единственна с точностью до изоморфизма.

□

Пример 4.3.4. Пусть $\mathbf{F}$ – сепарабельно замкнутое поле характеристики, не равной 5. Построим пример гладкой поверхности дель Пеццо степени 5 с нетривиальным регулярным действием $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ над полем $\mathbf{F}$. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – гладкая коника с нетривиальным действием $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Действие $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на C продолжается до действия на $\mathbb{P}^2$. Группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ фиксирует 2 точки P_1 и P_2 на C. Значит, оно оставляет неподвижной прямую $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}^2$, которая проходит через точки P_1 и P_2. Заметим, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действует на $\mathcal{L}$ нетривиально, потому что иначе $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ с точностью до сопряжения порождалась бы элементом

$$\begin{pmatrix} \zeta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_3(\mathbf{F}),$$

где $\zeta_5 \in \mathbf{F}$ – нетривиальный корень пятой степени из единицы. Тогда на $\mathbb{P}^2$ не существовало бы гладкой коники, которая оставалась инвариантной под действием $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Значит, существует точка P_3 вне C, которая неподвижна относительно действия $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Раздуем орбиту из 5 точек на C под действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Мы получаем $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантный морфизм

$$p\colon X \to \mathbb{P}^2,$$

при котором $p^{-1}C$ – это (-1)-кривая. Значит, мы можем $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантно стянуть $p^{-1}C$ и, тем самым, получить гладкую поверхность дель Пеццо степени 5 с 2 неподвижными точками.

Сформулируем следствие из [Зай2023, теорема 1.5].

Лемма 4.3.5. *Пусть F – такая гладкая поверхность дель Пеццо степени 5 над полем $\mathbf{F}$, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над полем $\mathbf{F}$. Тогда*

$$\mathrm{Aut}(F) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

Следствие 4.3.6. *Пусть F – гладкая поверхность дель Пеццо степени 5 с нетривиальным регулярным действием $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ над произвольным полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 5. Тогда это действие оставляет неподвижными ровно 2 точки на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$.*

Доказательство. По лемме 4.3.3 над полем $\mathbf{F}^{sep}$ гладкая поверхность дель Пеццо степени 5 единственна с точностью до изоморфизма. По лемме 4.3.5 имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Aut}(F_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

Так как в группе $\mathfrak{S}_5$ с точностью до сопряжения существует единственный элемент порядка 5, то согласно примеру 4.3.4 мы получаем, что $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ оставляет неподвижными ровно 2 точки на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$.

□

Лемма 4.3.7. *Пусть F – гладкая поверхность дель Пеццо степени 5 над полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 5. Предположим, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над полем $\mathbf{F}$. Тогда такая поверхность единственна с точностью до изоморфизма. Более того, F обладает нетривиальным регулярным действием группы $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, и такое действие единственно с точностью до сопряжения.*

Доказательство. Из леммы 4.3.3 следует, что такая поверхность F единственна с точностью до изоморфизма. По лемме 4.3.5 мы получаем, что группа автоморфизмов F изоморфна $\mathfrak{S}_5$. Значит, с точностью до сопряжения существует единственное регулярное действие $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на F.

□

Лемма 4.3.8. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$ с регулярным действием группы $G \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу $W(\mathrm{E}_6)$ лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Тогда при G-эквивариантном стягивании 2 непересекающихся прямых*

$$\pi\colon S \to F$$

мы получаем такую гладкую поверхность дель Пеццо F степени 5, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$.

Доказательство. Согласно леммам 1.4.10(i) и 4.2.10 существуют две прямые l_1 и l_2 на S, которые инвариантны под действием группы G. Предположим, что Γ – тривиальна. Тогда при их стягивании мы получим такой G-эквивариантный морфизм из S на гладкую поверхность дель Пеццо F степени 5, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$.

Теперь предположим, что $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Обозначим за g порождающий группы G и за τ – порождающий группы Γ. Тогда g и τ коммутируют. Значит, порядок элемента $\sigma = g\tau$ равен 10. Поэтому по лемме 1.3.4(iii) элемент τ лежит в классе сопряженности A_1. По лемме 1.4.10 прямые l_1 и l_2 переставляются элементом σ. Иными словами, они образуют Γ-орбиту. Значит, мы можем стянуть эту Γ-орбиту и получить гладкую поверхность дель Пеццо степени 5

$$\pi\colon S \to F.$$

Так как l_1 и l_2 инвариантны относительно действия G, то морфизм π является G-эквивариантным стягиванием.

Из свойств раздутия имеем равенство

$$\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) = \mathrm{Pic}(F_{\mathbf{F}^{sep}}) \oplus \mathbb{Z}\langle l_1, l_2\rangle.$$

Согласно лемме 1.3.2, собственные значения действия τ на $\mathrm{Pic}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$ имеют вид

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, -1.$$

Более того, элемент τ действует нетривиально на подрешетке $\mathbb{Z}\langle l_1, l_2\rangle$, потому что множество $\{l_1, l_2\}$ образует Γ-орбиту длины 2. Это значит, что τ действует тривиально на $\mathrm{Pic}(F_{\mathbf{F}^{sep}})$. Из этого следует, что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$.

□

Лемма 4.3.9. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 5. *Пусть* S *– такая гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$, *что* $\mathrm{Aut}(S) \supseteq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *и образ* Γ *абсолютной группы Галуа* $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ *в* $W(\mathrm{E}_6)$ *лежит в группе, изоморфной* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Тогда* S *изоморфна кубике Клебша.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Aut}(S)$ порядка 5 и группу $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, порожденную этим элементом. Из леммы 4.3.8 следует существование такого $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантного стягивания S на гладкую поверхность дель Пеццо F степени 5

$$\pi\colon S \to F,$$

что все прямые на $F_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над полем $\mathbf{F}$. Согласно лемме 4.3.7, такая поверхность F единственна с точностью до изоморфизма и на F существует нетривиальное регулярное действие $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, которое единственно с точностью до сопряжения. Согласно следствию 4.3.6, количество неподвижных точек действия $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на F над полем $\mathbf{F}^{sep}$ равняется 2. Получается, что множество из двух точек на F, неподвижных относительно действия $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, единственно с точностью до изоморфизма, поскольку регулярное действие $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ на F единственно с точностью до сопряжения. Значит, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-эквивариантное раздутие двух точек единственно с точностью до изоморфизма. Поэтому мы получаем единственную с точностью до изоморфизма гладкую кубическую поверхность с требуемыми свойствами. Согласно примеру 4.3.1, группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ регулярно действует на кубике Клебша. Таким образом мы получаем, что S изоморфна кубике Клебша.

□

Нам понадобится следующее следствие из этой леммы для доказательства единственности гладкой кубической поверхности над полем характеристики, не равной 5, с регулярным действием $\mathfrak{S}_5$.

Следствие 4.3.10. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 5. *Пусть дана такая гладкая кубическая поверхность* S *над полем* $\mathbf{F}$, *что* $\mathrm{Aut}(S) \supseteq \mathfrak{S}_5$. *Тогда* S *изоморфна кубике Клебша.*

Доказательство. По лемме 1.3.6 из вложения $\mathrm{Aut}(S) \supseteq \mathfrak{S}_5$ следует, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в $W(\mathrm{E}_6)$ лежит в группе, изоморфной $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Применяя лемму 4.3.9, мы получаем, что S изоморфна кубике Клебша.

□

Перед тем как давать следствие из леммы 4.3.9 в характеристике 2, сформулируем лемму.

Лемма 4.3.11. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2. *Тогда если в поле* $\mathbf{F}$ *есть нетривиальный кубический корень из единицы, то* $\mathbb{F}_4 \subset \mathbf{F}$.

Доказательство. Так как $\mathbf{F}$ – поле характеристики 2, имеем $\mathbb{F}_2 \subset \mathbf{F}$. Исходя из того, что нетривиальный кубический корень $\omega \in \mathbf{F}^{sep}$ лежит в $\mathbf{F}$, мы получаем

$$\mathbf{F} \supset \mathbb{F}_2(\omega) = \mathbb{F}_2[t]/(t^2 + t + 1) = \mathbb{F}_4.$$

□

Следствие 4.3.12. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2. *Тогда выполнено следующее.*

(i) *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то кубика Ферма изоморфна кубике Клебша.*

(ii) *Кубическая поверхность* (0.0.1) *изоморфна кубике Клебша.*

Доказательство. Докажем утверждение (i). Пусть S – кубика Ферма над полем $\mathbb{F}_4$. По теореме 4.1.1(i) имеется изоморфизм $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Значит,

$$\mathrm{Aut}(S) \supset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

По лемме 3.4.10 образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_2/\mathbb{F}_4)$ в $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален. Поэтому по лемме 4.3.9 кубическая поверхность S изоморфна кубике Клебша над полем $\mathbb{F}_4$. По лемме 4.3.11 поле $\mathbf{F}$ содержит поле $\mathbb{F}_4$. Значит, кубика Ферма изоморфна кубике Клебша над любым расширением $\mathbf{F}$ поля $\mathbb{F}_4$.

Докажем утверждение (ii). Пусть S – кубическая поверхность (0.0.1) над полем $\mathbb{F}_2$. По теореме 3.1.1(ii) мы получаем изоморфизм $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$. Значит,

$$\mathrm{Aut}(S) \supset \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

По лемме 3.4.12 образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_2/\mathbb{F}_2)$ в $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфен $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Значит, по лемме 4.3.9 над полем $\mathbb{F}_2$ кубическая поверхность S изоморфна кубике Ферма. Поэтому кубическая поверхность (0.0.1) изоморфна кубике Клебша над любым расширением $\mathbf{F}$ поля $\mathbb{F}_2$.

□

4.4 Кубические поверхности над полем характеристики 3

В этом разделе мы изучаем гладкие кубические поверхности с наибольшей группой автоморфизмов над полем характеристики 3. Для начала мы сформулируем очевидные леммы о полях характеристики 3.

Лемма 4.4.1. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 3. *Тогда* $\mathbf{F}$ *содержит примитивный корень четвертой степени из единицы тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *содержит подполе* $\mathbb{F}_9$.

Доказательство. Так как характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 3, имеем $\mathbb{F}_3 \subset \mathbf{F}$. Предпо-

ложим, что в поле $\mathbf{F}$ лежит примитивный корень четвертой степени из единицы. Обозначим его за $\mathbf{i}$. Тогда имеем

$$\mathbf{F} \supset \mathbb{F}_3(\mathbf{i}) = \mathbb{F}_3[t]/(t^2+1) = \mathbb{F}_9.$$

Пусть $\mathbf{F} \supset \mathbb{F}_9$. Тогда в поле $\mathbf{F}$ существуют элементы, удовлетворяющие равенству $t^8 = 1$. В частности, в $\mathbf{F}$ существуют элементы, удовлетворяющие уравнению $t^4 = 1$. Иными словами, в поле $\mathbf{F}$ есть примитивный корень четвертой степени из единицы.

□

Лемма 4.4.2. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 3. *Тогда* $\mathbf{F}$ *содержит примитивный корень четвертой степени из единицы тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}$ *содержит примитивный корень восьмой степени из единицы.*

Доказательство. Если $\mathbf{F}$ содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то по лемме 4.4.1 имеем $\mathbf{F} \supset \mathbb{F}_9$. Значит, в $\mathbf{F}$ есть элементы, удовлетворяющие

$$t^8 = 1 \text{ и } t^i \neq 1 \text{ для любого целого } 1 \leqslant i \leqslant 7.$$

Это значит, что в $\mathbf{F}$ есть примитивный корень восьмой степени из единицы. Если $\mathbf{F}$ не содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, то ясно, что $\mathbf{F}$ не содержит также и примитивный корень восьмой степени из единицы.

□

Пусть дано поле $\mathbf{F}$ характеристики 3. Мы поделим этот раздел на две части: в первой части мы будем изучать кубические поверхности над полем $\mathbf{F}$, при условии, что оно содержит примитивный корень четвертой степени из единицы, а во второй части мы рассмотрим кубические поверхности над полем $\mathbf{F}$, при условии, что оно уже не будет содержать примитивный корень четвертой степени из единицы.

Начнем со случая, когда $\mathbf{F}$ содержит примитивный корень четвертой степени из единицы. По теореме 1.5.1(ii)$'$ наибольшая группа автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 изоморф-

на $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Докажем, что эта группа реализуется как группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.2) уже над полем $\mathbf{F}$.

Лемма 4.4.3. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3, *содержащее примитивный корень четвертой степени из единицы. Тогда группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности* (0.0.2) *над полем* $\mathbf{F}$ *изоморфна* $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Доказательство. По лемме 4.4.2 в поле $\mathbf{F}$ лежит примитивный корень восьмой степени из единицы. Рассмотрим элемент порядка 8

$$h = \begin{pmatrix} \zeta_8^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_8^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F}).$$

Рассмотрим группу G, которая состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^3 & -\alpha^6 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_4(\overline{\mathbf{F}}), \tag{4.4.4}$$

где α и c – это элементы из $\overline{\mathbf{F}}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha^9 - \alpha = 0 \tag{4.4.5}$$

$$c^3 + c - \alpha^4 = 0. \tag{4.4.6}$$

Несложно видеть, что $\alpha, c \in \mathbf{F}$. Действительно, из леммы 4.4.1 следует, что $\alpha \in \mathbf{F}$. Более того, по той же лемме мы получаем, что примитивный корень четвертой степени из единицы $\mathbf{i} \in \mathbf{F}^{sep}$ лежит в поле $\mathbf{F}$. Если $\alpha = 0$, то уравнение (4.4.6) имеет ровно три решения: 0 и $\pm\mathbf{i}$. Если $\alpha \neq 0$, то из (4.4.5) мы получаем, что $\alpha^4 = \pm 1$. Значит,

уравнение (4.4.6) в этом случае имеет вид $c^3+c\pm 1=0$. Корнями полинома c^3+c+1 являются элементы 1 и $1\pm\mathbf{i}$ из поля $\mathbf{F}$, а корнями полинома c^3+c-1 являются элементы -1 и $-1\pm\mathbf{i}$, которые тоже содержатся в поле $\mathbf{F}$. Значит, элементы группы G лежат в $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$.

Обозначим за (α, c) элемент (4.4.4) в группе G. Читатель с легкостью может обнаружить следующее соотношение между элементами в группе G :

$$(\alpha_1, c_1)\cdot(\alpha_2, c_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1\alpha_2^3 + c_1 + c_2). \tag{4.4.7}$$

Ясно, что группа G имеет порядок 27, а из (4.4.7) следует, что все неединичные элементы имеют порядок 3 и G не абелева. Поэтому группа G изоморфна $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)$.

Группа G и элемент h, действующие на $\mathbb{P}^3$ с однородными координатами x, y, z, t, оставляют на месте гладкую кубическую поверхность, заданную уравнением (0.0.2). Значит, группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.2) содержит подгруппу порядка 216. По теореме 1.5.1(ii)$'$ и замечанию 1.5.2 группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности (0.0.2) над полем $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна группе $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)\rtimes\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, которая имеет порядок 216. Это означает, что группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.2) над полем $\mathbf{F}$ изоморфна $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3)\rtimes\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

□

Лемма 4.4.8. *Пусть дано поле $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 2. Предположим, что поле $\mathbf{F}$ содержит примитивный корень восьмой степени из единицы $\zeta_8\in\mathbf{F}^{sep}$. Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над полем $\mathbf{F}$. Пусть H – циклическая группа порядка 8 в группе автоморфизмов поверхности S. Тогда H с точностью до сопряжения порождается элементом*

$$h = \begin{pmatrix} \zeta_8^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_8^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F}). \tag{4.4.9}$$

Доказательство. Над алгебраически замкнутым полем характеристики, не равной 2, лемма непосредственно вытекает из [Do2012, §9.5.1].

□

Лемма 4.4.10. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3, *содержащее примитивный корень восьмой степени из единицы* ζ_8. *Пусть* S – *гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$ *такая, что*

$$\mathrm{Aut}(S) \supset \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Тогда S *изоморфна гладкой кубической поверхности, заданной уравнением*

$$\alpha t^3 + tz^2 - xy^2 + x^2 z = 0 \tag{4.4.11}$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{F}^*$ *и этот полином инвариантен относительно действия элементом из* $\mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$ *вида* (4.4.9).

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{Aut}(S)$ – автоморфизм порядка 8. Тогда по лемме 4.4.8 автоморфизм h с точностью до сопряжения имеет вид (4.4.9). Обозначим за x, y, z, t однородные координаты на $\mathbb{P}^3$, в которых h имеет вид (4.4.9). Тогда автоморфизм h действует на мономы умножением на корень восьмой степени из единицы. Приведем таблицу, в которой каждому моному третьей степени относительно переменных x, y, z, t соотнесен коэффициент, на который он умножается при действии элементом h.

Коэффициент	Мономы
1	t^3, x^2z, y^2x, z^2t
ζ_8	z^2y, t^2y
ζ_8^2	x^3, y^2t, xzt
ζ_8^3	y^3, xyz
ζ_8^4	z^3, x^2t, t^2z
ζ_8^5	x^2y, yzt
ζ_8^6	y^2z, z^2x, t^2x
ζ_8^7	xyt

Таблица 4.4.3: Таблица мономов третьей степени с действием h.

Из таблицы 4.4.3 видно, что гладкая кубическая поверхность, инвариантная относительно действия h, изоморфна какой-то из кубических поверхностей вида

$$at^3 + btz^2 + cxy^2 + dx^2z = 0 \tag{4.4.12}$$

при $a, b, c, d \in \mathbf{F}^*$. Заметим, что если хотя бы один из коэффициентов a, b, c или d равен нулю, то (4.4.12) будет особой поверхностью. С помощью замены координат

$$x \mapsto x, \;\; y \mapsto y, \;\; -\frac{d}{c}z \mapsto z, \;\; -\frac{bc}{d^2}t \mapsto t$$

гладкая кубическая поверхность (4.4.12) преобразуется в гладкую кубическую поверхность (4.4.11) с $\alpha = \frac{ad^6}{b^3c^4}$.

□

Лемма 4.4.13. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3, *которое содержит нетривиальный корень восьмой степени из единицы* $\zeta_8 \in \mathbf{F}^{sep}$. *Пусть* S *– гладкая куби-*

ческая поверхность над полем $\mathbf{F}$, *изоморфная кубической поверхности* (4.4.11) *при некотором* $\alpha \in \mathbf{F}^*$. *Предположим, что все прямые на* $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ *определены над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $\alpha \in \mathbf{F}^8$.

Доказательство. Зафиксируем $\alpha \in \mathbf{F}^*$ такое, что поверхность S изоморфна кубической поверхности S', которая задана уравнением

$$\alpha t^3 + tz^2 - xy^2 + x^2 z = 0.$$

Прямая l, заданная системой уравнений в $\mathbb{P}^3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0, \end{cases}$$

лежит на поверхности S'. Рассмотрим пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^3_{\mathbf{F}^{sep}}$, проходящих через прямую l. Любая гиперплоскость в этому пучке задается уравнением

$$x = \lambda t \ \text{ при } \ \lambda \in \mathbf{F}^{sep} \ \text{ или } \ t = 0. \tag{4.4.14}$$

Найдем все такие гиперплоскости T среди (4.4.14), что пересечение T и S' состоит из 3 прямых. Если T определено уравнением $t = 0$, то пересечение $T \cap S'$ является объединением прямой и гладкой коники. Предположим, что T задается уравнением $x = \lambda t$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{F}^{sep}$. Тогда $T \cap S'$ задано уравнением

$$t(\alpha t^2 + \lambda^2 tz + z^2 - \lambda y^2) = 0.$$

Пусть

$$f = \alpha t^2 + \lambda^2 tz + z^2 - \lambda y^2.$$

Найдем все такие λ, что полином f является произведением двух различных линейных однородных полиномов. Проделав несложные вычисления, можно убедиться, что f является произведением двух различных линейных однородных полиномов

тогда и только тогда, когда или $\lambda = 0$, или

$$\alpha = \lambda^4. \tag{4.4.15}$$

Значит, из (4.4.15) следует, что

$$f = (\lambda^2 t - z)^2 - \lambda y^2 = (\lambda^2 t - z - \mu y)(\lambda^2 t - z + \mu y),$$

где $\mu \in \mathbf{F}^{sep}$ и $\mu^2 = \lambda$. Так как все прямые на $S'_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$, мы получаем, в частности, что прямая

$$\begin{cases} x = \lambda t \\ \lambda^2 t - z \pm \mu y = 0 \end{cases}$$

определена над $\mathbf{F}$. То есть $\mu \in \mathbf{F}$ или, что то же самое, $\lambda \in \mathbf{F}^2$. Значит, согласно (4.4.15), мы получаем, что существует такое $\gamma \in \mathbf{F}^*$, что $\alpha = \gamma^8$.

□

Лемма 4.4.16. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3, *которое содержит примитивный корень восьмой степени из единицы* $\zeta_8 \in \mathbf{F}^{sep}$. *Пусть* S – *гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$, *изоморфная кубической поверхности* (4.4.11) *при некотором* $\alpha \in \mathbf{F}^*$. *Предположим, что все прямые на* $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ *определены над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.2).

Доказательство. По лемме 4.4.13 гладкая кубическая поверхность S изоморфна поверхности, заданной уравнением (4.4.11) для некоторого ненулевого элемента $\alpha \in \mathbf{F}^8$. То есть $\alpha = \gamma^8$ для некоторого $\gamma \in \mathbf{F}^*$. С помощью замены координат

$$x \mapsto \gamma^2 x, \;\; y \mapsto \gamma^3 y, \;\; z \mapsto \gamma^4 z, \;\; t \mapsto t$$

уравнение (4.4.11) преобразуется в уравнение (0.0.2) и мы получаем требуемое.

□

Лемма 4.4.17 (см. [DoDu2019, Table 7])**.** *Пусть* S – *гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3. *Предположим, что* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Тогда если $g \in \mathrm{Aut}(S)$ *– элемент порядка* 6, *то он лежит в классе сопряженности* $E_6(a_2)$. *Если* $g \in \mathrm{Aut}(S)$ *– элемент порядка* 3, *то он лежит либо в классе сопряженности* A_2^2, *либо в классе сопряженности* A_2^3.

Лемма 4.4.18. *Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3. *Предположим, что* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. *Тогда центр группы* $\mathrm{Aut}(S)$ *тривиален.*

Доказательство. Обозначим за Z центр $\mathrm{Aut}(S)$. Предположим, что Z – нетривиальная группа. Тогда порядок группы Z делится либо на 2, либо на 3. Предположим, что порядок Z делится на 2. Это значит, что существует элемент $h \in Z$ порядка 2. Значит, для любого $g \in \mathrm{Aut}(S)$ порядка 3 есть элемент

$$g^2 h = h g^2 = \tau \tag{4.4.19}$$

порядка 6, который по лемме 4.4.17 лежит в классе сопряженности $E_6(a_2)$. Из (4.4.19) мы немедленно получаем $g = \tau^2$. В частности, это означает, что любой элемент порядка 3 в группе $\mathrm{Aut}(S)$ является квадратом некоторого элемента из класса сопряженности $E_6(a_2)$. Согласно лемме 1.3.4(i) это значит, что любой элемент порядка 3 из группы $\mathrm{Aut}(S)$ должен лежать в классе сопряженности A_2^3, что противоречит лемме 4.4.17.

Предположим, что порядок Z делится на 3. Тогда в группе $\mathrm{Aut}(S)$ есть элемент порядка 24, что невозможно по лемме 1.3.8.

□

Лемма 4.4.20. *Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3. *Предположим, что* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. *Тогда образ* Γ *абсолютной группы Галуа* $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ *в* $W(\mathrm{E}_6)$ *тривиален.*

Доказательство. По теореме 1.5.1(ii)′ и теореме 1.2.1(i) мы имеем изоморфизм

$$\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},$$

причем $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ изоморфна гладкой кубической поверхности, заданной уравнением (0.0.2). Значит, группа $\mathrm{Aut}(S)$ изоморфна группе автоморфизмов гладкой кубической поверхности (0.0.2). Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Aut}(S)$ порядка 8. Так как Γ коммутирует со всеми элементами в $\mathrm{Aut}(S)$, мы получаем, что Γ лежит в централизаторе $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ элемента g в группе $W(\mathrm{E}_6)$. Согласно лемме 1.3.2, в группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ существует единственный класс сопряженности элементов порядка 8 и централизатор $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ элемента g имеет порядок 8. Исходя из того, что $g \in \mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$, мы получаем, что $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ – циклическая группа порядка 8, порожденная g. Значит, имеют место вложения

$$\Gamma \subset \mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g) \subset \mathrm{Aut}(S).$$

Однако, согласно лемме 4.4.18, центр группы $\mathrm{Aut}(S)$ тривиален. Это значит, что группа Γ тривиальна.

□

Лемма 4.4.21. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 3, *которое содержит примитивный корень восьмой степени из единицы* $\zeta_8 \in \mathbf{F}^{sep}$. *Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$, *чья группа автоморфизмов*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Тогда S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.2).

Доказательство. По лемме 4.4.10 гладкая кубическая поверхность S изоморфна кубической поверхности S', заданной уравнением (4.4.11) для некоторого $\alpha \in \mathbf{F}^*$. По лемме 4.4.20 образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален. Это значит, что все прямые на $S'_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$. Значит, по лемме 4.4.16 гладкая кубичекая поверхность S' изоморфна (0.0.2).

□

Сейчас мы переходим к рассмотрению гладких кубических поверхностей над полем $\mathbf{F}$ характеристики 3, которое не содержит примитивный корень четвертой степени из единицы. Сформулируем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 4.4.22. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над сепарабельно замкнутым полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 2. Пусть $h \in \mathrm{Aut}(S)$ – автоморфизм порядка 8. Тогда h имеет 3 неподвижные точки на S. Более того, пересечение S с касательным пространством в одной из фиксированных автоморфизмом h точке является каспидальная кубическая кривая, а в остальных двух точках – это приводимая кривая.*

Доказательство. По леммам 4.4.8 и 4.4.10 автоморфизм h с точностью до сопряжения действует на $\mathbb{P}^3$ как элемент

$$\begin{pmatrix} \zeta_8^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_8^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$$

и S задана уравнением

$$\alpha t^3 + tz^2 - xy^2 + x^2 z = 0 \tag{4.4.23}$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{F}^*$. Из явного вида h и S легко увидеть, что автоморфизм h фиксирует на S три точки:

$$[1:0:0:0],\ [0:1:0:0],\ [0:0:1:0].$$

Пересечение S с касательным пространством в точке $[1:0:0:0]$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} z = 0 \\ \alpha t^3 - xy^2 = 0, \end{cases}$$

которая соответствует кубической каспидальной кривой. Пересечение S с касатель-

ным пространством в точке $[0:1:0:0]$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = 0 \\ t(\alpha t^2 + z^2) = 0, \end{cases}$$

которая соответствует приводимой кривой. Пересечение S с касательным пространством в точке $[0:0:1:0]$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} t = 0 \\ x(xz - y^2) = 0, \end{cases}$$

которая соответствует приводимой кривой.

□

Лемма 4.4.24. *Пусть C – каспидальная кубическая кривая над полем $\mathbf{F}$ с $\mathbf{F}$-рациональной особой точкой. Тогда*

$$\mathrm{Aut}(C) \subseteq \mathbf{F} \rtimes \mathbf{F}^*,$$

где группа $\mathbf{F} \rtimes \mathbf{F}^*$ изоморфна подгруппе в группе автоморфизмов $\mathbb{P}^1_{\mathbf{F}}$, которая состоит из элементов, оставляющих на месте заданную точку $Q \in \mathbb{P}^1(\mathbf{F})$.

Доказательство. Пусть P – особая точка кривой C. Рассмотрим нормализацию

$$\eta\colon D \to C,$$

где $D_{\mathbf{F}^{sep}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}}$. Рассмотрим морфизм

$$\eta_{\mathbf{F}^{sep}}\colon \mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}} \to C_{\mathbb{P}^1_{\mathbf{F}^{sep}}}.$$

Из определения каспидальной кривой нетрудно видеть, что $\eta^{-1}_{\mathbf{F}^{sep}}(P)$ – это точка. Так как $P \in C(\mathbf{F})$, мы получаем, что $\eta^{-1}(P) \in D(\mathbf{F})$. Это значит, что $D \simeq \mathbb{P}^1$. Морфизм η является изоморфизмом вне P. Поэтому группа автоморфизмов кривой C

лежит в подгруппе группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$, состоящей из автоморфизмов, которые фиксируют $\eta^{-1}(P)$.

□

Лемма 4.4.25. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 2, *не содержащее примитивный корень восьмой степени из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(S)$ *не содержит элементов порядка* 8.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $h \in \mathrm{Aut}(S)$ – элемент порядка 8. Тогда по лемме 4.4.22 элемент h, как элемент из группы $\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$, имеет 3 неподвижные точки на $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ и пересечение $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ с касательным пространством в неподвижных точках является каспидальной кубической кривой только для одной из трех неподвижных точек. Обозначим эту точку P и пусть $C = S \cap T_P S$. Тогда и P, и C определены над полем $\mathbf{F}$.

Из [CheShr2024, Theorem 3.7] для группы $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, порожденной автоморфизмом h, имеет место вложение

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \subset \mathrm{GL}\left(T_P(S)\right).$$

Это значит, что $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \subset \mathrm{Aut}(C)$. Тогда по лемме 4.4.24 имеем $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \subset \mathbf{F} \rtimes \mathbf{F}^*$. Рассмотрим проективный гомоморфизм

$$\mathrm{pr}\colon \mathbf{F} \rtimes \mathbf{F}^* \to \mathbf{F}^*.$$

Так как характеристика поля $\mathbf{F}$ не равна 2, мы получаем, что

$$\mathrm{pr}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Но это невозможно, так как $\mathbf{F}$ не содержит примитивный корень восьмой степени из единицы.

□

Лемма 4.4.26. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 3, *не содержащее примитивный корень восьмой степени из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над*

полем $\mathbf{F}$. *Тогда выполнено неравенство* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

Доказательство. Из теоремы 1.5.1(ii)′ и замечания 1.5.2 следует, что наибольшая группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности над полем $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ и имеет порядок 216. По лемме 4.4.25 в группе $\mathrm{Aut}(S)$ нет элемента порядка 8. Это значит, что если

$$\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},$$

то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 108$.

Рассмотрим такую гладкую кубическую поверхность S над полем $\mathbf{F}$, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$ является следующей наибольшей группой автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полем $\mathbf{F}^{sep}$ после группы $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Согласно теореме 1.5.1(ii)″, это означает, что $\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathfrak{S}_5$. Значит, порядок $\mathrm{Aut}(S)$ не больше 120. Из примера 4.3.1 следует, что группа $\mathfrak{S}_5$ действует на кубике Клебша над полем $\mathbf{F}$. Из следствия 4.3.10 мы получаем, что гладкая кубическая поверхность S единственная с точностью до изоморфизма и изоморфна кубике Клебша.

□

4.5 Кубика Ферма

В этом разделе мы изучаем кубику Ферма и группу $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, которая регулярно действует на гладкой кубической поверхности. Все это время мы будем рассматривать группу $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ как группу, изоморфной группе, регулярно действующей на кубике Ферма над сепарабельно замкнутым полем характеристики, не равной 3. Это означает, что с точностью до сопряжения $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ действует умножением однородных координат x, y, z, t на $\mathbb{P}^3$ на кубические корни из единицы и $\mathfrak{S}_4$ действует перестановками координат x, y, z, t.

Лемма 4.5.1. *Центр группы* $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ *тривиален.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $(a, b) \in G$ – элемент из центра группы G. Тогда для любого элемента $(c, d) \in G$ имеет место

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a\,{}^b c, bd) = (c\,{}^d a, db) = (c, d) \cdot (a, b), \tag{4.5.2}$$

где ${}^b c$ и ${}^d a$ – результат действия $\mathfrak{S}_4$ на $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Так как центр $\mathfrak{S}_4$ тривиален, то из (4.5.2) мы получаем, что b – единичный элемент. Это значит, что для любого элемента $d \in \mathfrak{S}_4$ мы имеем $a = {}^d a$. Из определения группы G следует, что a – единичный элемент.

□

Теперь мы готовы приступить к изучению гладких кубических поверхностей с регулярным действием $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ над произвольным полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3.

Лемма 4.5.3. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3. Предположим, что $\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Тогда образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален.*

Доказательство. Так как группа $\mathrm{Aut}(S)$ содержит $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, в ней существует элемент g порядка 9. Так как Γ коммутирует с любым элементом из $\mathrm{Aut}(S)$, мы получаем, что Γ лежит в централизаторе $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ элемента g в группе $W(\mathrm{E}_6)$. По лемме 1.3.2 существует единственный класс сопряженности элементов порядка 9 в $W(\mathrm{E}_6)$ и централизатор $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ элемента g имеет порядок 9. Значит, $\mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g)$ – циклическая группа порядка 9, порожденная g. Поэтому имеют место включения

$$\Gamma \subset \mathrm{C}_{W(\mathrm{E}_6)}(g) \subset \mathrm{Aut}(S).$$

Однако, по лемме 4.5.1 центр $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ тривиален. Это значит, что Γ тривиальна.

□

Лемма 4.5.4. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3. Предположим, что $\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Тогда $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный кубический корень из единицы $\omega \in \mathbf{F}^{sep}$.*

Доказательство. Так как группа $\mathrm{Aut}(S)$ содержит $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, в ней существует элемент g порядка 9. По лемме 1.3.2 набором собственных значений канонического представления элемента g на решетке корней E_6 является

$$\zeta_9, \zeta_9^2, \zeta_9^4, \zeta_9^5, \zeta_9^7, \zeta_9^8.$$

Согласно лемме 1.3.2, это значит, что куб g^3 лежит в классе сопряженности A_2^3. Значит, из следствия 4.2.13 мы получаем, что в $\mathbf{F}$ существует нетривиальный кубический корень из единицы.

□

Лемма 4.5.5. *Пусть S – гладкая кубическая поверхность над полем $\mathbf{F}$ характеристики, не равной 3. Предположим, что $\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Тогда S изоморфна кубике Ферма.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, по теореме 1.5.1 имеем

$$\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4, & \text{если } char\mathbf{F} \neq 2; \\ \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2), & \text{если } char\mathbf{F} = 2 \end{cases}$$

и $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ изоморфна кубике Ферма. По лемме 4.5.4 существует нетривиальный кубический корень из единицы $\omega \in \mathbf{F}$. Более того, из леммы 4.5.3 следует, что образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален. Значит, все прямые на $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над полем $\mathbf{F}$.

Пусть G – нормальная подгруппа в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, изоморфная $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Из примера 4.2.14 и из единственности, согласно лемме 1.3.9, с точностью до сопряжения подгруппы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ в группе $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ следует, что над полем $\mathbf{F}^{sep}$ с точностью до сопряжения эта группа действует умножением однородных координат x, y, z, t на $\mathbb{P}^3$ на кубические корни из единицы. Из леммы 4.2.6 вытекает, что то же самое верно и над полем $\mathbf{F}$. Заметим, что для любых двух мономов третьей степени, никакой из которых не равен x^3, y^3, z^3, t^3, существует такой элемент $g \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$, действие которого умножает два эти монома на различные кубические корни из единицы. По-

этому гладкая кубическая поверхность, инвариантная относительно действия группы G, задана уравнением

$$x^3 + ay^3 + bz^3 + ct^3 = 0, \tag{4.5.6}$$

где $a, b, c \in \mathbf{F}^*$.

Рассмотрим гиперплоскость T в $\mathbb{P}^3_{\mathbf{F}^{sep}}$, заданную уравнением $x + \alpha y = 0$, где $\alpha \in \mathbf{F}^{sep}$ удовлетворяет уравнению $\alpha^3 = a$. В пересечении гиперплоскости T и кубической поверхности $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ лежат три прямые.

Предположим, что $\alpha \notin \mathbf{F}$. Тогда существует элемент $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$, удовлетворяющий

$$\tau(\alpha) \neq \alpha. \tag{4.5.7}$$

Пересечение $\tau(T)$ и $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ снова состоит из 3 прямых. Однако, из (4.5.7) следует, что пересечение T и $\tau(T)$ состоит только из одной прямой. Это означает, что не все прямые в пересечении T и $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$. Однако, согласно лемме 4.5.3 образ Γ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален. Поэтому все прямые $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над полем $\mathbf{F}$. Значит, $\alpha \in \mathbf{F}$.

То же самое работает и для гиперплоскостей $x + \beta z = 0$ и $x + \gamma t = 0$, где $\beta^3 = b$ и $\gamma^3 = c$, соответственно. Значит, имеем $a, b, c \in \mathbf{F}^3$. Следовательно, заменой координат

$$x \mapsto x, \quad \sqrt[3]{a}y \to y, \quad \sqrt[3]{b}z \to z, \quad \sqrt[3]{c}t \to t$$

над полем $\mathbf{F}$ гладкая кубическая поверхность (4.5.6) преобразуется в гладкую кубическую поверхность

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0,$$

которая является кубикой Ферма.

□

4.6 Поля без кубических корней из единицы

В этом разделе мы изучаем гладкие кубические поверхности над полями характеристики, не равной 3, которые не содержат нетривиальных кубических корней из единицы. Как и в предыдущем разделе, группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ изоморфна группе, действующей регулярно на кубику Ферма над сепарабельно замкнутым полем характеристики, не равной 3. То есть с точностью до сопряжения $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ действует умножением однородных координат x, y, z, t на $\mathbb{P}^3$ на кубические корни из единицы и $\mathfrak{S}_4$ действует перестановками координат x, y, z, t. Первая часть этого раздела посвящена изучению возможных групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полями без нетривиальных кубических корней из единицы. Затем над полями без нетривиальных кубических корней из единицы характеристики 5 мы найдем наибольшую среди таких группу и покажем, на каких кубических поверхностях такая группа действует регулярно. В конце в качестве иллюстрации мы покажем, для каких полей имеется изоморфизм между кубикой Ферма и кубической поверхностью (0.0.1).

Лемма 4.6.1. *Пусть G изоморфна некоторой подгруппе в группе автоморфизмов кубики Ферма над алгебраически замкнутым полем характеристики, не равной* 2 *и* 3. *Рассмотрим гомоморфизм*

$$\mathrm{pr}\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4$$

и обозначим за $\mathrm{pr}\,|_G$ *ограничение гомоморфизма* pr *на подгруппу G. Предположим, что* $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}\,|_G)$ *не изоморфна ни тривиальной группе, ни группе* $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Тогда* $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}\,|_G)$ *не изоморфна ни* $\mathfrak{S}_4$, *ни* $\mathfrak{A}_4$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда имеется следующая точная последовательность

$$1 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^i \to G \xrightarrow{\mathrm{pr}|_G} \mathrm{Coker}(\mathrm{pr}\,|_G) \to 1,$$

где $i = 1$ или 2 и $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}\,|_G)$ изоморфна либо $\mathfrak{S}_4$, либо $\mathfrak{A}_4$. Тогда из абелевости

группы $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}\,|_G)$ мы имеем следующий гомоморфизм

$$f : \mathrm{Coker}(\mathrm{pr}\,|_G) \to \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^i\right).$$

Имеются следующие изоморфизмы

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2\right) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3). \tag{4.6.2}$$

Группа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ не содержит подгруппу, изоморфную $\mathfrak{A}_4$, потому что иначе группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ содержала бы подгруппу, изоморфную $\mathfrak{A}_4$. Однако, это не так, потому что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ не содержит четверную группу Клейна.

Значит, по (4.6.2) мы получаем, что группа $\mathrm{Ker}(f)$ изоморфна либо $\mathfrak{S}_4$, либо $\mathfrak{A}_4$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Поэтому либо $\mathfrak{S}_4$, либо $\mathfrak{A}_4$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ действует тривиально сопряжениями на $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^i$. По лемме 4.2.19 централизатор любого неединичного элемента в нормальной подгруппе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ изоморфен $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes D$, где D подгруппа в $\mathfrak{S}_4$, изоморфная либо $\mathfrak{S}_3$, либо $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, либо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ни $\mathfrak{S}_4$, ни $\mathfrak{A}_4$ не лежат в этих группах. Поэтому единственный возможный случай – $\mathrm{Ker}(f) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и $\mathrm{Coker}(\mathrm{pr}\,|_G) \simeq \mathfrak{A}_4$. В этом случае $i = 2$. Из доказательства леммы 4.2.19 следует, что есть только 6 элементов порядка 3 в $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr})$, для которых группа D изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Значит, этот случай тоже не реализуется. Это противоречие доказывает лемму.

□

Лемма 4.6.3. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 2 *и* 3, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$.

Доказательство. Предположим, что выполнено неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| > 120$. Тогда по теореме 1.5.1 (iii)′, (iii)″, (iv)′ и (iv)″ имеем включение

$$\mathrm{Aut}(S) \subseteq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4.$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$\mathrm{pr}\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4,$$

который является естественной проекцией на группу $\mathfrak{S}_4$. Рассмотрим ограничение $\mathrm{pr}\,|_{\mathrm{Aut}(S)}$ гомоморфизма pr на подгруппу $\mathrm{Aut}(S)$. Ядро $\mathrm{pr}\,|_{\mathrm{Aut}(S)}$ – это подгруппа в нормальной подгруппе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Так как $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, по следствию 4.2.13 и лемме 4.2.18 мы имеем

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{pr}\,|_{\mathrm{Aut}(S)}\right) \subsetneq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3. \tag{4.6.4}$$

Так как $648 \geqslant |\mathrm{Aut}(S)| > 120$, получаем, что порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ равен либо 162, либо 216, либо 324, либо 648. Из (4.6.4) следует, что единственный возможный порядок равен 216, то есть для группы $\mathrm{Aut}(S)$ имеется точная последовательность

$$1 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to \mathrm{Aut}(S) \xrightarrow{\mathrm{pr}|_{\mathrm{Aut}(S)}} \mathfrak{S}_4 \to 1.$$

Из леммы 4.6.1 следует, что это невозможно. Значит, имеет место неравенство

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120.$$

□

Прежде чем доказать похожий результат над полем характеристики 2, напомним общеизвестный результат, полученный Арно Бовилем.

Утверждение 4.6.5 ([Bea2010, Proposition 1.1])**.** *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* $p \geqslant 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$*. При* $p > 0$ *будем предполагать, что* $\gcd(n, p) = 1$*. Группа* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ *содержит* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *тогда и только тогда когда* $\zeta_n + \zeta_n^{-1} \in \mathbf{F}$*.*

Из этого утверждения мы немедленно получаем следующую лемму.

Лемма 4.6.6. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики* 2*, не содержащее нетривиальных кубических корней из единицы. Тогда группа* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ *не содержит* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по утверждению 4.6.5 мы имеем $\zeta_5 + \zeta_5^4 \in \mathbf{F}$. Однако, в поле $\mathbf{F}$ характеристики 2 имеет место равенство

$$(\zeta_5 + \zeta_5^4)^3 = 1,$$

что противоречит предположению, что $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальных кубических корней из единицы.

□

Теперь докажем аналог леммы 4.6.3 над полем характеристики 2.

Лемма 4.6.7. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Доказательство. Предположим, что $|\mathrm{Aut}(S)| > 720$. Тогда по теореме 1.5.1(i)′ и (i)″ мы получаем изоморфизм $\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Используя лемму 1.3.9 и ограничение на порядок группы автоморфизмов, мы имеем

$$\mathrm{Aut}(S) \supseteq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{A}_5.$$

Значит, используя лемму 3.4.10, мы получаем, что образ абсолютной группы Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}^{sep}/\mathbf{F})$ в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ тривиален. Иными словами, все прямые на $S_{\mathbf{F}^{sep}}$ определены над $\mathbf{F}$.

Рассмотрим элемент $g \in \mathrm{Aut}(S)$ порядка 5. По лемме 1.4.10(i) существует g-инвариантная прямая $l \subset S$. Действие элементом g на прямую l не тривиально, так как иначе все прямые, которые пересекаются с l, были бы g-инвариантными, что невозможно по лемме 1.4.10(i) и по тому факту, что через заданную точку на гладкой кубической поверхности может проходить не более трех прямых (см. лемму 1.4.11). Значит,

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}). \tag{4.6.8}$$

Однако, так как $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то из леммы 4.6.6 мы получаем, что инъекция (4.6.8) невозможна. Это противоречие доказывает лемму.

□

Лемма 4.6.9. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 2, 3 *и* 5, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120.$$

Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$ *и* S *изоморфна кубике Клебша.*

Доказательство. По лемме 4.6.3 имеет место неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. По теореме 1.5.1(iv)′ и (iv)″ равенство выполнено тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5.$$

Из примера 4.3.1 непосредственно следует, что группа $\mathfrak{S}_5$ реализуется как группа автоморфизмов кубики Клебша над полем $\mathbf{F}$.

Пусть $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$. Тогда из следствия 4.3.10 получаем, что S изоморфна кубике Клебша.

□

Лемма 4.6.10. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ *и* S *изоморфна гладкой кубической поверхности* (0.0.1).

Доказательство. По лемме 4.6.7 имеет место неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Если вы-

полнено равенство, то по теореме 1.5.1(i)′ и (i)″ мы имеем вложение

$$\mathrm{Aut}(S) \subset \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2).$$

По лемме 1.3.9 это значит, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$. По теореме 3.1.1(ii) эта группа реализуется как группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности (0.0.1). Используя следствия 4.3.10 и 4.3.12(ii), мы получаем, что S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

□

Прежде чем переходить к изучению групп автоморфизмов гладких кубических поверхностей над полями характеристики 5, которые не содержат нетривиальный кубический корень из единицы, дадим несколько лемм о подгруппах в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$.

Лемма 4.6.11. *В группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ существует единственная с точностью до сопряжения подгруппа изоморфная $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$.*

Доказательство. Пусть $G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes_\phi \mathfrak{D}_4$ – подгруппа в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ для некоторого гомоморфизма

$$\phi : \mathfrak{D}_4 \to \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2\right) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3).$$

Покажем, что все такие подгруппы в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ сопряжены. Рассмотрим гомоморфизм проекции

$$\mathrm{pr}\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4.$$

Тогда $\mathrm{pr}(G) \simeq \mathfrak{D}_4$. Рассмотрим в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ действие на $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ группой $\mathfrak{S}_4$ как представление

$$\rho\colon \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}(V),$$

где V – векторное пространство размерности 3 над полем $\mathbb{F}_3$, соответствующее нормальной подгруппе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Гомоморфизм ρ инъективен, значит, $\rho\,|_{\mathfrak{D}_4}$ тоже инъективен.

Докажем, что у действия $\mathfrak{D}_4$ на V есть инвариантное подпространство размерности 2. Предположим противное. Тогда либо V неприводимо, либо в V существует инвариантное подпространство L размерности 1. Первый случай невозможен, так как это бы означало, что над полем $\overline{\mathbb{F}}_3$ у группы $\mathfrak{D}_4$ существовало бы неприводимое представление размерности 3, что невозможно, так как характеристика не делит размерность неприводимого представления по [La2002, Chapter XVIII, Corollary 4.6]. Предположим, что выполнен второй случай. Тогда по теореме Машке о вполне приводимости (см., например, [La2002, Chapter XVIII, Theorem 1.2] пространство V раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно действия $\mathfrak{D}_4$ подпространств размерности 1. Это бы значило, что группа $\mathfrak{D}_4$ – коммутативна.

Поэтому снова по теореме Машке получаем, что V раскладывается в прямую сумму двух инвариантных относительно действия $\mathfrak{D}_4$ подпространств размерностей 1 и 2, соответственно. Этим мы показали существование и единственность подпространства размерности 2 в пространстве V, инвариантного относительно действия $\mathfrak{D}_4$. Так как $\mathfrak{D}_4$ единственна с точностью до сопряжения в $\mathfrak{S}_4$, мы получаем требуемое.

□

Замечание 4.6.12. *С этого момента под группой* $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$ *мы будем подразумевать подгруппу в группе* $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, *которая единственна с точностью до сопряжения согласно лемме 4.6.11.*

Пример 4.6.13. Пусть дано поле $\mathbf{F}$, не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}^3$ с однородными координатами x, y, z, t. Рассмотрим подгруппу, изоморфную $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ в группе автоморфизмов $\mathbb{P}^3$, которая порождается элементами

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6.14}$$

Рассмотрим группу $\mathfrak{D}_4 \subset \mathrm{PGL}_4(\mathbf{F})$, которая порождается перестановками (12) и (1324) однородных координат x, y, z, t в $\mathbb{P}^3$. Тогда две эти группы, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ и $\mathfrak{D}_4$, вместе порождают группу $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$, которая по построению изоморфна группе, о которой говорится в замечании 4.6.12.

Лемма 4.6.15. *Пусть G – подгруппа в группе $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \subset W(\mathrm{E}_6)$. Предположим, что G не содержит элементов из класса сопряженности A_2^3. Тогда $|G| \leqslant 72$ и равенство выполнено тогда и только тогда, когда*

$$G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4.$$

Более того, в случае равенства группа G с такими свойствами единственна с точностью до сопряжения.

Доказательство. Рассмотрим проективный гомоморфизм

$$\mathrm{pr}\colon (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4.$$

Обозначим за $\mathrm{pr}\,|_G$ ограничение гомоморфизма pr на группу G. Из леммы 4.2.18 следует, что ядро $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}\,|_G)$ лежит в $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Тогда согласно лемме 4.6.1 или гомоморфизм $\mathrm{pr}\,|_G$ инъективен, или порядок группы $\mathrm{pr}(G)$ не больше 8. Это значит, что $|G| \leqslant 72$.

Рассмотрим случай $|G| = 72$. Имеется две возможности для G :

$$1 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to G \xrightarrow{\mathrm{pr}|_G} \mathfrak{S}_4 \to 1, \tag{4.6.16}$$

$$1 \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to G \xrightarrow{\mathrm{pr}|_G} \mathfrak{D}_4 \to 1. \tag{4.6.17}$$

Согласно лемме 4.6.1, случай (4.6.16) не реализуется. Рассмотрим случай (4.6.17). По теореме Шура — Зассенхауса (см. [DF2004, Section 17.4, Theorem 39]) имеем

$$G \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes_\phi \mathfrak{D}_4$$

для некоторого гомоморфизма

$$\phi : \mathfrak{D}_4 \to \mathrm{Aut}\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2\right) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3).$$

По лемме 4.6.11 такая группа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ существует и она единственна с точностью до сопряжения.

□

Лемма 4.6.18. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 5, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$ *такая, что*

$$\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}}) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Тогда $\mathrm{Aut}(S) \subsetneq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из следствия 4.2.12 получаем, что в группе $\mathrm{Aut}(S)$ нет элементов из класса сопряженности A_2^3. Но из [DoDu2019, Table 8] и замечания 1.5.2 следует, что группа $\mathrm{Aut}(S_{\mathbf{F}^{sep}})$ содержит элементы из класса сопряженности A_2^3. Значит, $\mathrm{Aut}(S)$ строго вкладывается в группу $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

□

Следствие 4.6.19. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 5, *не содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$. *Тогда имеет место неравенство* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того, равенство выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4.$$

Доказательство. Из леммы 4.6.3 следует неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. Согласно теореме 1.5.1(iii)$''$, это значит, что $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 108$. Предположим, что

$$\mathrm{Aut}(S) \subset (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4.$$

Значит, из леммы 4.6.15 получаем неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$, причем равенство вы-

полнено тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4.$$

Теперь предположим, что $\mathrm{Aut}(S)$ лежит в следующей наибольшей группе автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем характеристики 5. Согласно теореме 1.5.1(iii)$''$, это значит, что

$$\mathrm{Aut}(S) \subset \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Однако, по лемме 4.6.18 это значит, что порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ не больше 54, что меньше, чем 72. По теореме 1.5.1(iii)$''$ следующей за предыдущей наибольшей группой автоморфизмов гладких кубических поверхностей над алгебраически замкнутым полем характеристики 5 является группа $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ее порядок равен 54, что опять меньше, чем 72.

□

Теперь мы готовы изучить гладкие кубические поверхности с действием группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$.

Лемма 4.6.20. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– поле характеристики, не равной* 2 *и* 3, *которое не содержит нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– такая гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$, *что* $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$. *Тогда* S *изоморфна кубической поверхности, заданной уравнением*

$$2(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - 3(x^2y + xy^2 + z^2t + zt^2) = 0.$$

Доказательство. Напомним, что согласно лемме 4.6.11 и замечанию 4.6.12 группа

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$$

изоморфна группе из примера 4.6.13.

Найдем все инвариантные кубические поверхности, относительно действия группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, которая порождается элементами (4.6.14). Иными словами, найдем все такие однородные полиномы $f(x,y,z,t)$ степени 3, что действие любым элементом $g \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ умножает эти полиномы на скаляры. Так как матрицы (4.6.14) порядка 3 и $\mathbf{F}$ не содержит кубический корень из единицы, все такие скаляры равны 1. Поэтому для начала найдем однородные полиномы степени 3, инвариантные относительно действия

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.6.21}$$

Рассмотрим однородный полином

$$\begin{gathered} f(x,y,z,t) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + \\ +x^2l_1(z,t) + y^2l_2(z,t) + xyl_3(z,t) + xg_1(z,t) + yg_2(z,t) + h(z,t) \end{gathered} \tag{4.6.22}$$

где $a,b,c,d \in \mathbf{F}$, $l_1(z,t), l_2(z,t)$ и $l_3(z,t)$ – однородные линейные полиномы, $g_1(z,t)$ и $g_2(z,t)$ – однородные квадратичные полиномы и $h(z,t)$ – однородный кубический полином. Элемент (4.6.21) преобразует полином $f(x,y,z,t)$ в полином вида

$$\begin{gathered} \widetilde{f}(x,y,z,t) = (-a-b-c-d)x^3 + ay^3 + (3a+2c+d)x^2y - (3a+c)xy^2 + \\ +(l_1(z,t) + l_2(z,t) + l_3(z,t))x^2 + l_1(z,t)y^2 - (2l_1(z,t) + l_3(z,t))xy - \\ -(g_1(z,t) + g_2(z,t))x + g_1(z,t)y + h(z,t). \end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что полином $f(x,y,z,t)$, удовлетворяющий

$$f(x,y,z,t) = \widetilde{f}(x,y,z,t),$$

имеет вид

$$f(x,y,z,t) = a(x^3+y^3-3xy^2) + bxy(x-y) + l(z,t)(x^2+y^2-xy) + h(z,t),$$

где $a, b \in \mathbf{F}$, $l(z,t)$ – однородный линейный полином и $h(z,t)$ – однородный кубический полином. Применяя те же рассуждения к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем однородный полином вида

$$f(x,y,z,t) = a(x^3+y^3-3xy^2) + bxy(x-y) + c(z^3+t^3-3zt^2) + dzt(z-t), \quad (4.6.23)$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. Поэтому все однородные кубические полиномы, инвариантные относительно действия группы $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$, порожденной элементами (4.6.14), имеют вид (4.6.23). Найдем среди полиномов вида (4.6.23) полуинвариантные полиномы относительно действия группы $\mathfrak{D}_4$, порожденной перестановками (12) и (1324) координат x, y, z, t. Рассмотрим перестановку (12). Она преобразует полином (4.6.23) в полином

$$\widehat{f}(x,y,z,t) = a(x^3+y^3-3yx^2) - bxy(x-y) + c(z^3+t^3-3zt^2) + dzt(z-t). \quad (4.6.24)$$

Нетрудно понять, что если $f(x,y,z,t) = -\widehat{f}(x,y,z,t)$, то полином $f(x,y,z,t)$ задает особую кубическую поверхность. Это значит, что инвариантные среди (4.6.23) полиномы относительно действия перестановкой (12), задающие гладкую кубическую поверхность, имеют вид

$$f(x,y,z,t) = a(2(x^3+y^3)-3(x^2y+xy^2)) + c(z^3+t^3-3zt^2) + dzt(z-t), \quad (4.6.25)$$

где $a \in \mathbf{F}^*$ и $c, d \in \mathbf{F}$ – такие коэффициенты, что (4.6.25) задает гладкую кубическую поверхность. Применяя те же рассуждения к перестановке

$$(12)(1324)^2 = (34),$$

мы получаем соответствующий гладкой кубической поверхности полином вида

$$f(x, y, z, t) = a(2(x^3 + y^3) - 3(x^2y + xy^2)) + c(2(z^3 + t^3) - 3(z^2t + zt^2)) \qquad (4.6.26)$$

где $a, c \in \mathbf{F}^*$. Используя полуинвариантность (4.6.26) относительно действия перестановкой (1324), получаем

$$f(x, y, z, t) = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2y + xy^2) \pm (2(z^3 + t^3) - 3(z^2t + zt^2)) \qquad (4.6.27)$$

Однако, с помощью замены координат

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto -z, \quad t \mapsto -t$$

мы получаем, что кубические поверхности (4.6.27) с плюсом и с минусом изоморфны. □

Лемма 4.6.28. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики* 5, *которое не содержит нетривиальный кубический корень из единицы. Пусть* S *– такая гладкая кубическая поверхность над полем* $\mathbf{F}$, *что* $\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$. *Тогда* S *изоморфна кубической поверхности* (0.0.1).

Доказательство. По лемме 4.6.20 получаем, что S изоморфна

$$2(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - 3(x^2y + xy^2 + z^2t + zt^2) = 0. \qquad (4.6.29)$$

Так как в поле $\mathbf{F}$ имеет место равенство $2 = -3$, мы получаем, что кубическая поверхность (4.6.29) задается равенством

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + x^2y + xy^2 + z^2t + zt^2 = 0. \qquad (4.6.30)$$

Заменой координат

$$x \mapsto x + 2y, \quad y \mapsto 2x + y, \quad z \mapsto z + 2t, \quad t \mapsto 2z + t$$

уравнение (4.6.30) преобразуется в уравнение

$$x^2y + xy^2 + z^2t + zt^2 = 0. \tag{4.6.31}$$

Заменой координат $[x : y : z : t] \mapsto [x : t : z : y]$ уравнение (4.6.31) преобразуется в уравнение

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0.$$

□

Сейчас мы покажем, что кубика Ферма не изоморфна кубической поверхности (0.0.1) над полями, не содержащими нетривиальный кубический корень из единицы.

Лемма 4.6.32. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 3, *которое не содержит нетривиальный кубический корень из единицы. Тогда кубика Ферма не изоморфна кубической поверхности* (0.0.1).

Доказательство. Рассмотрим эти гладкие кубические поверхности над полем $\mathbf{F}^{sep}$. Прямые на кубике Ферма над полем $\mathbf{F}^{sep}$ заданы системами уравнений $\mathbb{P}^3_{\mathbf{F}^{sep}}$

$$\begin{cases} x + \omega^i y = 0 \\ z + \omega^j t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + \omega^i z = 0 \\ t + \omega^j y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + \omega^i t = 0 \\ z + \omega^j y = 0, \end{cases} \tag{4.6.33}$$

где $\omega \in \mathbf{F}^{sep}$ – нетривиальный кубический корень из единицы и $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Пусть $\mathbf{L}$ – такое расширение поля $\mathbf{F}$ степени 2, что $\mathbf{L} = \mathbf{F}[t]/(t^2 + t + 1)$. Тогда из (4.6.33) мы получаем, что все прямые на кубике Ферма над полем $\mathbf{F}^{sep}$ определены над полем $\mathbf{L}$. Так как неединичный элемент группы Галуа

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{F}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

отображает ω в ω^2, мы получаем, что на кубике Ферма над полем $\mathbf{F}$ ровно 3 прямые, заданные системами уравнений

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ t+y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+t=0 \\ z+y=0. \end{cases}$$

Однако, на кубической поверхности (0.0.1) над полем $\mathbf{F}$ определено больше прямых, например,

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ t=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z+t=0 \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

Значит, эти кубические поверхности неизоморфны.

□

В связи с этой леммой можно задаться вопросом: изоморфны ли кубика Ферма и кубическая поверхность (0.0.1) над полями с нетривиальными кубическими корнями из единицы? Следующая лемма дает положительный ответ на этот вопрос.

Лемма 4.6.34. *Пусть дано поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 3, *содержащее нетривиальный кубический корень из единицы. Тогда кубика Ферма изоморфна кубической поверхности* (0.0.1).

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathbf{F}$ – нетривиальный кубический корень из единицы. Тогда изоморфизм между кубикой Ферма и гладкой кубической поверхностью (0.0.1) может быть задан проективным преобразованием

$$[x:y:z:t] \mapsto [x+y:\omega x+\omega^2 y:z+t:\omega z+\omega^2 t],$$

который отображает кубическую поверхность (0.0.1) в кубику Ферма.

□

4.7 Доказательство основных результатов

В этом разделе мы собираемся доказать теорему 4.1.1 и утверждение 4.1.3.

Доказательство теоремы 4.1.1. Докажем $(\mathrm{i})_2$. Неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$ следует из теоремы 1.5.1(i)′. Существование равенства следует из [DoDu2019, §5.1]. Подгруппа порядка 25 920 в $W(\mathrm{E}_6)$ изоморфна $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. По лемме 1.3.9 она содержит подгруппу $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_4$. По лемме 4.5.5 гладкая кубическая поверхность S с регулярным действием $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_4$ единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна кубике Ферма.

Утверждение $(\mathrm{ii})_2$ следует из леммы 4.6.10.

Докажем $(\mathrm{i})_3$. Неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$ следует из теоремы 1.5.1(ii)′. Равенство следует из леммы 4.4.3. Группа порядка 216, которая является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности, единственна по теореме 1.5.1(ii)′ и изоморфна $\mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. По лемме 4.4.21 гладкая кубическая поверхность S, чья группа автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},$$

единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.2).

Утверждение $(\mathrm{ii})_3$ непосредственно следует из леммы 4.4.26.

Докажем $(\mathrm{i})_5$ и $(\mathrm{i})_{\neq 2,3,5}$. Неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$ непосредственно вытекает из теоремы 1.5.1(iii)′ и (iv)′. Равенство следует из примера 4.2.14. Группа порядка 648, которая является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности, единственна по теореме 1.5.1(iii)′ и (iv)′ и изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. По лемме 4.5.5 гладкая кубическая поверхность S, чья группа автоморфизмов изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$, единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна кубике Ферма.

Докажем $(\mathrm{ii})_5$. Из следствия 4.6.19 мы получаем неравенство $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$, при этом равенство в этом неравенстве выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S)$ изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$. Согласно лемме 4.6.28, такая гладкая кубическая поверхность S единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

Утверждение $(\mathrm{ii})_{\neq 2,3,5}$ следует из леммы 4.6.9.

□

Перед тем как мы докажем утверждение 4.1.3, сформулируем следующие леммы.

Лемма 4.7.1. *Пусть дано сепарабельно замкнутое поле* $\mathbf{F}$ *характеристики, не равной* 2 *и* 3. *Тогда группа автоморфизмов кубической поверхности* (0.0.2) *над полем* $\mathbf{F}$ *изоморфна* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Доказательство. Для полей характеристики нуль утверждение леммы следует из [Do2012, Theorem 9.5.8]. Для полей положительной характеристики это следует из [DoDu2019, Lemma 12.12] и теоремы 1.2.1(i).

□

Лемма 4.7.2. *Кубическая поверхность* (0.0.2) *не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубике Клебша, ни кубической поверхности* (0.0.1).

Доказательство. Над полем характеристики 2, кубическая поверхность (0.0.2) имеет особенность в точке $[0:0:1:1]$, в то время как все остальные перечисленные кубические поверхности гладкие.

Над полем характеристики 3 кубика Ферма не приведенная, кубическая поверхность (0.0.1) особая, а кубика Клебша и кубическая поверхность (0.0.2) гладкие. Однако, эти две гладкие кубические поверхности не изоморфны, так как по теореме 1.5.1(ii)$'$ и (ii)$''$ у них разная группа автоморфизмов над алгебраически замкнутым полем характеристики 3.

Пусть $\mathbf{F}$ – поле характеристики, не равной 2 и 3. По лемме 4.7.1 группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.2) над полем $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. По теореме 1.5.1(iii)$'$ и (iv)$'$ и замечанию 1.5.2 группа автоморфизмов кубики Ферма над полем $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Из леммы 4.6.34 следует, что кубика Ферма изоморфна кубике (0.0.1) над полем $\mathbf{F}^{sep}$. Значит, группа автоморфизмов кубики (0.0.1) изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Поэтому кубическая поверхность (0.0.2) не изоморфна ни кубике Ферма, ни кубической поверхности (0.0.1).

По теореме 1.5.1(iv)$''$ и замечанию 1.5.2 группа автоморфизмов кубики Клебша над сепарабельно замкнутым полем характеристики, не равной 2, 3 и 5, изоморфна $\mathfrak{S}_5$, а по лемме 4.7.1 группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.2) над

сепарабельно замкнутым полем изоморфна $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Над полем характеристики 5 кубика Клебша особа, а кубическая поверхность (0.0.2) гладкая. Это означает, что кубическая поверхность (0.0.2) не изоморфна кубике Клебша.

□

Доказательство утверждения 4.1.3. Утверждение (**o**) является легким упражнением. Утверждение (i) следует из леммы 4.7.2. Утверждение (ii) следует из следствия 4.3.12(ii).

Докажем (iii). Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то согласно лемме 4.6.34, кубическая поверхность (0.0.1) и кубика Ферма изоморфны. Если $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то, согласно лемме 4.6.32, кубическая поверхность (0.0.1) не изоморфна кубике Ферма.

Докажем (iv). Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 3, то (iv) следует из (**o**). Если $\mathbf{F}$ – поле характеристики 5, то кубика Клебша не изоморфна ни кубической поверхности (0.0.1), ни кубике Ферма, потому что кубика Клебша в этом случае особая, а кубика Ферма и кубическая поверхность (0.0.1) гладкие. Пусть $\mathbf{F}$ – поле характеристики, не равной 5. Тогда по теореме 1.5.1(iv)$''$, замечанию 1.5.2 и примеру 4.3.1 группа автоморфизмов кубики Клебша $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна $\mathfrak{S}_5$. Из теоремы 1.5.1(iv)$'$, замечания 1.5.2 и леммы 4.6.34 мы получаем, что группа автоморфизмов кубической поверхности (0.0.1) и кубики Ферма над полем $\mathbf{F}^{sep}$ изоморфна $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$. Это значит, что над полем $\mathbf{F}$ кубика Клебша не изоморфна ни кубической поверхности (0.0.1), ни кубике Ферма.

□

Заключение

В заключение мы еще раз повторим главные результаты сего труда. **Во второй главе** основной нашей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1.3. *Константа Жордана* $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ *для группы Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ *равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816 & \text{при } q = 8; \\ 60\,480 & \text{при } q = 4; \\ 720 & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

В третьей главе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Пусть* S *– гладкая кубическая поверхность над конечным полем* $\mathbf{F}$ *характеристики* 2.

(i) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{4^k}$ *для* $k \in \mathbb{N}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. *Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$ *и* S *изоморфна кубике Ферма.*

(ii) *Если* $\mathbf{F} = \mathbb{F}_{2^{2k+1}}$ *для* $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. *Более того,*

$$|\mathrm{Aut}(S)| = 720$$

тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$ *и* S *изоморфна гладкой кубической*

поверхности, заданной уравнением

$$x^2t + y^2z + z^2y + t^2x = 0.$$

В четвертой главе мы обобщаем результат третьей главы на произвольные поля.

Теорема 4.1.1. *Пусть дана гладкая кубическая поверхность S над произвольным полем $\mathbf{F}$.*

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 2.*

  (i)$_2$ *Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный корень третьей степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 25\,920$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 25\,920$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$$

  и S изоморфна кубике Ферма.

  (ii)$_2$ *Если $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный корень третьей степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 720$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_6$$

  и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

- *Пусть характеристика поля $\mathbf{F}$ равна 3.*

  (i)$_3$ *Если $\mathbf{F}$ содержит нетривиальный корень четвертой степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 216$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 216$ тогда и только тогда, когда*

  $$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathcal{H}_3(\mathbb{F}_3) \rtimes \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

  и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.2).

  (ii)$_3$ *Если $\mathbf{F}$ не содержит нетривиальный корень четвертой степени из единицы, то $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. Более того, $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ тогда и только*

тогда, когда

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

и S изоморфна кубике Клебша.

- *Пусть характеристика* $\mathbf{F}$ *равна* 5.

(i)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

и S изоморфна кубике Ферма.

(ii)$_5$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 72$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 72$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{D}_4$$

и S изоморфна гладкой кубической поверхности (0.0.1).

- *Пусть характеристика поля* $\mathbf{F}$ *не равна* 2, 3 *и* 5.

(i)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 648$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 648$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$$

и S изоморфна кубике Ферма.

(ii)$_{\neq 2,3,5}$ *Если* $\mathbf{F}$ *не содержит нетривиальный кубический корень из единицы, то* $|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 120$. *Более того,* $|\mathrm{Aut}(S)| = 120$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_5$$

и S изоморфна кубике Клебша.

Приложение А

Краткий исторический очерк

развития алгебраической геометрии

в контексте теории кубических поверхностей

С невольным удивлением проходим мы длинный ряд достославных математиков, которые от древних греков до наших дней участвовали в образовании наук геометрических и сделали свой вклад блистательнейшим в истории всего человечества. Усиленным, совокупным трудом мужей античной и эллинистической эпох геометрия из своего детства быстро двинулась к совершенству, в котором теперь весьма немногие науки могут сравняться с нею. Как пишет в своем труде [Ch1875] геометр и историк математики Мишель Шаль: "La Géométrie prit naissance chez les Chaldéens et les Égyptiens [1]". В сочинении своем Мишель Шаль делит историю развития и становления геометрии на пять эпох, и первую эпоху начинает с Фалеса (ок. 639 – ок. 548 гг. до Р. Х.), благодаря которому, по мнению автора, и было положено начало развитию геометрии. Уже через несколько веков в Александрийской школе в лице Евклида (ок. 325 – ок. 265 гг. до Р. Х.), знаменитого творца элементов геометрии, было дано систематическое изложение начал геометрии и ее строгое логическое описание (см., например, [Eu888]).

Семя же алгебраической геометрии было посажено Менехмом (ок. 380 – ок. 320 гг. до Р. Х.) при попытке решить задачу о удвоении куба. Для решения этой последней

[1] Геометрия получила свое начало у халдеев и египтян. (фр.)

геометрической задачи Менехм применил метод алгебраический: ему понадобилось искать точку пересечения двух конических сечений (труды Менехма до нас не дошли, но первое о нем упоминание можно встретить в труде [Proc1560, 111.2, 72.24, 78.9]; см. также [Буф2024]).

Мы не можем более подробно распространяться о развитии алгебраической геометрии со времен древних греков и до наших дней, ибо нам пришлось бы потратить немало страниц на то, чтобы перечислить всех великих мужей геометрии, коих изыскания в науке споспешествовали усовершенствованию алгебраической геометрии; а такая задача была бы выше наших сил. Поэтому мы перейдем непосредственно к истории развития основных объектов алгебраической геометрии, возникающих в нашем труде.

Протагонистом настоящей диссертации является гладкая кубическая поверхность в проективном пространстве. Иными словами, это гладкая гиперповерхность в проективном пространстве размерности три, заданная однородным полиномом степени три от четырех переменных. Упоминание об однородном кубическом уравнении от четырех переменных можно встретить еще в "Поризмах" Диофанта Александрийского, которые утрачены. Однако, в одном из латинских переводов "Арифметики" Диофанта [Dio1893, Liber quintus, XVI] имеются такие слова:

> Habemus in Porismatîs: Omnium duorum cuborum differentia est summa duorum cuborum.[2]

С позволения читателя возьмем на себя смелость сообщить здесь одно важное замечание по поводу латинского перевода вышеупомянутых строк из "Арифметики" Диофанта Александрийского. В латинском переводе [Dio1575, Liber quintus, XIX] 1575 года эти слова, во-первых, содержатся в другом параграфе, а во-вторых, мы наталкиваемся на очевидную математическую ошибку:

[2]Как сказано в Поризмах, разность двух кубов всегда есть сумма двух кубов. *Перевод с латинского Марии Александровны Степановой.*

> Habemus uerò in porismatis hoc, omnium duorum cuborum interuallum esse cubum.[3]

Что касается до упомянутого поризма Диофанта Александрийского, его истинность была продемонстрирована, например, Франсуа Виетом (см. [Viet1646, Zeteticum XVIII]):

> Sint dati cubi, B^3, D^3; ille major, hic minor. Oportet invenire duos alios cubos, quorum summa aequalis sit $B^3 - D^3$. Latus primi quaerendi cubi, esto $B - A$. Latus secundi, $\frac{B^2A}{D^2} - D$. Et efformentur cubi et comparentur $B^3 - D^3$, invenitur $\frac{3D^3B}{B^3+D^3}$ aequati A. Itaque primi quaesiti cubi latus $\frac{B(B^3-2D^3)}{B^3+D^3}$. Secundi $\frac{D(2B^3-D^3)}{B^3+D^3}$. Et horum cuborum summa aequalis est $B^3 - D^3$. Sic licet invenire quatuor cubos quorum major tribus reliquis erit aequalis. [4]

Одной из первых работ, имеющей главной своей целью изучение алгебро-геометрических аспектов кубических поверхностей, по праву считается труд Артура Кэли "On the triple tangent planes of surfaces of the third order" [Cay1849]. Скажем несколько слов об этой работе. В ней Артур Кэли показывает, что на общей гладкой кубической поверхности имеется ровно 27 прямых. Поводом же к написанию работы Кэли послужила его переписка с Джорджем Сальмоном, в которой последний и дает точное число прямых на общей гладкой кубической поверхности, что с благодарностью и отмечает Артур Кэли на последней странице уже упомянутого труда. В том же выпуске журнала Cambridge and Dublin Mathematical Journal и почти в точности под тем же названием, что и у Артура Кэли, Джордж Сальмон публикует заметку [Sa1849]. В ней Сальмон обобщает основной результат работы [Cay1849], показывая, что на любой гладкой кубической поверхности имеется ровно 27 прямых. Эти две указанные работы главным образом и являются отправной точкой в алгебро-геометрических исследованиях кубических поверхностей.

[3] Как сказано в Поризмах, разница двух кубов есть куб. *Перевод с латинского Марии Александровны Степановой.*

[4] Даны два куба B^3, D^3; первый больше второго. Нужно найти два других числа, сумма кубов которых будет равна $B^3 - D^3$. Пусть первое число равно $B - A$. Пусть второе равно $\frac{D(2B^3-D^3)}{B^3+D^3}$. Приравняв суммы их кубов к $B^3 - D^3$, получаем, что $\frac{3D^3B}{B^3+D^3}$ равно A. Поэтому первое число равно $\frac{B(B^3-2D^3)}{B^3+D^3}$. Второе равно $\frac{D(2B^3-D^3)}{B^3+D^3}$. И сумма их кубов равна $B^3 - D^3$. Итак, можно найти четыре куба, больший из которых будет равен сумме остальных. // *Перевод с латинского автора.*

За замечаниями о дальнейшем развитии теории кубических поверхностей, зачинщиками которой стали Артур Кэли и Джордж Сальмон, мы отсылаем читателя к работам [Pa1922] и [Do2005].

Обратим наше историческое повествование к событиям, связанными с развитием вопроса о регулярных и бирациональных автоморфизмах алгебраических многообразий, ибо основная тема диссертации связана с классификацией групп автоморфизмов кубических поверхностей.

Важность группы автоморфизмов многообразий была обстоятельно показана в Эрлангенской программе Феликсом Клейном (см. [Kl1872], а также перевод на русский [Но1956, стр. 399–434]). В своей программе Феликс Клейн впервые демонстрирует неразрывную связь между геометрией проективного многообразия и группой проективных преобразований, действующей на многообразии. Тем самым он положил начало новому витку развития проективной геометрии. Эли Картан писал о программе Феликса Клейна (см. [Carta1927]) так:

> La Géométrie projective, qui constituait d'abord un simple chapitre de la Géométrie ordinaire et qui était arrivée, par son évolution même, à se constituer en doctrine autonome, est aussi pour Klein l'étude des propriétés des figures invariantes par un certain ensemble de transformations (les transformations homographiques) formant un groupe.

Перевод этой цитаты можно найти в сборнике "Об основаниях геометрии", вышедший в 1956 году в честь столетия со дня смерти Николая Ивановича Лобачевского (см. [Но1956, стр. 486]):

> Проективная геометрия, являвшаяся сначала одной из глав элементарной геометрии и превратившаяся при дальнейшем развитии в самостоятельную научную дисциплину, с точки зрения Клейна есть изучение свойств фигур, инвариантных относительно некоторой совокупности преобразований (проективных преобразований), образующих группу.

Согласно работе Виссариона Григорьевича Алексеева [Ал1901] теория инвариантов получила свое начало в работе [Boo1841] Джорджа Буля, который считается

основателем булевой алгебры. В своей упомянутой работе Джордж Буль рассматривает линейные преобразования, при которых заданный однородный полином инвариантен. Он ставит себе такую задачу: найти такое проективное преобразование, при котором заданные однородные полиномы q и Q переходят, соответственно, в заданные однородные полиномы r и R. Первопричиной же подобных исследований Джорджа Буля является его интерес к изысканиям по механике Жозефа Луи Лагранжа (см. [Lag1788]), в которой возникает надобность в нахождении ортогональных преобразований, при которых однородные квадратичные формы диагонализуются. Труд Джорджа Буля вдохновил Артура Кэли на разработку теории инвариантов, что можно узнать из его писем к Джорджу Булю (см. исследование [Wol2008]). Несмотря на то, что Артур Кэли считает первооткрывателем теории инвариантов Джорджа Буля (что мы можем видеть из писем и из первых строк статьи Артура Кэли [Cay1845]), тем не менее в математическом обществе именно Артура Кэли считают отцом-основателем теории инвариантов. Герман Вейль так видит рождение этой науки:

> The *theory of invariants* came into existence about the middle of the nineteenth century somewhat like Minerva: a grown-up virgin, mailed in the shining armor of algebra, she sprang forth from Cayley's Jovian head. Her Athens over which she ruled and which she served as a tutelary and beneficent goddess was *projective geometry*.[5]

Важным результатом в теории автоморфизмов алгебраических многообразий является теорема Хидеюки Мацумура и Пола Монского 1963 года (см. [MaMu1963]), ставшая уже классической. Она утверждает, что группа автоморфизмов гладкой гиперповерхности степени $d \geqslant 3$ в проективном пространстве размерности n при $(n, d) \neq (3, 4)$ конечна.

Здесь мы останавливаем наше повествование о регулярных автоморфизмах и переходим к бирациональным автоморфизмам, которые также возникают в настоящей

[5][Wey1939] Теория инвариантов зародилась около середины девятнадцатого века подобно Минерве: взрослая дева, облаченная в сияющие доспехи алгебры, вышла из юпитерианской головы Кэли. Ее Афинами, которыми она правила и для которых она была покровительствующей и благодетельной богиней, была проективная геометрия. // *Перевод с английского автора.*

диссертации. В бирациональной геометрии одним из центральных объектов исследования является группа Кремоны. Под ней мы подразумеваем группу всех бирациональных автоморфизмов проективного пространства. Исследования группы Кремоны начались, согласно Хильде Хадсон [Hu1927, Chapter XVII, §1], еще в III веке до Р. Х. Аполлоний Пергский (262 – 190 гг. до Р. Х.) в своем трактате "Τόποι ἐπίπεδοι" (Плоские места), подлинник которого, как и большинство подлинников великих древнегреческих трудов, безвозвратно утрачен, формулирует следующее утверждение, перевод на латынь которого мы взяли из [Fe1679]:

> Si duae lineae agantur, vel ab uno dato puncto, vel a duobus, et vel in rectam lineam, vel parallelae, vel datum continentes angulum, vel inter se datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes spatium: contingat autem terminus unius locum planum positione datum, et alterius terminus locum planum positione datum continget, interdum quidem ejusdem generis, interdum vero diversum, et interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

В русском переводе, взятом из книги [Po2004], утверждение Аполлония формулируется так:

> Если из одной или двух данных точек проведены две прямые линии, параллельные или содержащие данный угол, находящиеся в данном отношении или содержащие данную площадь, и конец одной из этих прямых описывает данное по положению плоское геометрическое место, то конец другой прямой также опишет данное по положению плоское геометрическое место того же или другого рода.

При должном истолковании здесь демонстрируется гомотетия, инверсия относительно обобщенной окружности (то есть либо окружности, либо прямой) и их комбинации с движением плоскости. Иными словами, мы имеем дело с квадратичными преобразованиями проективной плоскости. Изучение трудов Аполлония Пергского было проделано Паппом Александрийским (ок. 290 – ок. 350 гг.) в частично утраченном трактате "Συναγωγή" (Собрание) [Pa10C]. Перевод на латинский язык трактата

Паппа Александрийского был сделан уже в XVI столетии Фредерико Коммандино (см. [Pa1589]). О самом же истолковании, которое доказывает стремление древних греков к изучению бирациональной геометрии, подробно написано в сборнике исследований Пьера Ферма [Fe1679, С. 12–27], опубликованном его сыном, Клеман-Самуэлем Ферма после смерти великого ученого, и в исследовании работ Аполлония Пергского историком математики Борисом Абрамовичем Розенфельдом [Po2004, С. 114].

Современное же понимание преобразования Кремоны появилось спустя 20 столетий после появление трактата Аполлония Пергского в 1822 году в работе Жана-Виктора Понселе “Traité des propriétés projectives des figures” [Po1822], в которой дано описание квадратичной инволюции проективной плоскости. Через 41 год Луиджи Кремона в работе [Cr1863] рассматривает бирациональные преобразования проективной плоскости, заданных многочленами уже произвольной степени. Этот труд и считается отрывной точкой в изучении группы, носящее имя Луиджи Кремоны.

Так как гладкая кубическая поверхность является одной из поверхностей дель Пеццо, а именно поверхностью дель Пеццо степени три, а сами же поверхности дель Пеццо играют ключевую роль в бирациональной геометрии поверхностей, мы не можем здесь не затронуть историческую составляющую данных поверхностей.

Не подлежит сомнению, что работа Паскаля дель Пеццо [dP1887] о поверхностях степени на единицу больше, чем минимально возможная, стала краеугольным камнем в алгебраической геометрии. Достоинство таких поверхностей, носящие ныне имя дель Пеццо, заключается в том, что они повсеместно возникают в теории минимальных моделей, созданной Сигэфуми Мори с утопичной целью классифицировать бирациональные классы алгебраических многообразий. Теория, созданная Мори, имела громадный успех при своем появлении, а ее автор был удостоен Филдсовской премии в 1990 году (обзор работ Сигэфуми Мори можно найти в труде [Fields2016]). Перед тем, как пояснить суть теории минимальных моделей, напомним, что многообразием Фано называется проективное алгебраическое многообразие с обильным антиканоническим классом. В частности, поверхности дель Пеццо являются многообразиями Фано в размерности два. Работы Джино Фано [Fa1931] и [Fa1942], в ко-

торых изучались трехмерные многообразия в проективном пространстве, у которых сечения подпространствами коразмерности два являются каноническими кривыми, и положили начало изучению многообразий Фано.

Идея Мори заключается в том, что с помощью определенных специальных бирациональных преобразований (дивизориальные стягивания и флипы) проективное многообразие перестраивается либо в минимальную модель, то есть в такое многообразие, у которого канонический дивизор является численно эффективным, либо в расслоенное пространство Мори. Расслоенное пространство Мори наделено между прочим тем свойством, что из него существует морфизм в многообразие меньшей размерности, а слой этого морфизма – многообразие Фано, которое является обобщением поверхности дель Пеццо в произвольной размерности. Достаточно подробный обзор программы минимальных моделей и современные достижения в классификации алгебраических многообразий можно найти в трудах [Ko1989] и [Ma2002].

Будет поучительным упомянуть здесь программу минимальных моделей в размерности 2, на разработку которой, благодаря итальянской школе алгебраических геометров, и пришелся апофеоз развития теории алгебраических поверхностей. В том случае, когда нам дана гладкая поверхность, программа минимальных моделей заключается в том, что на данной нам поверхности стягиваются (-1)-кривые до того момента, пока либо канонический класс не станет численно эффективным, либо поверхность не станет изоморфной $\mathbb{P}^1$-расслоению над невырожденной кривой, либо поверхность не станет изоморфной $\mathbb{P}^2$. Важнейшая услуга была оказана в классификации гладких алгебраических поверхностей Федериго Энриквесом. По окончании университетского курса в Высшей нормальной школе в Пизе, в 1891 году, начинается неутомимое служение Федериго Энриквеса интересам итальянской школы алгебраических геометров, развитие которой составляла важнейшую цель его жизни. С этого момента и до конца своей жизни он без устали занимался проективными поверхностями и их классификацией. Лишь только философия вставала поперек избранного им пути. В результате на свет появились два его знаменитых трактата: по теории алгебраических поверхностей “Le superficie algebriche” [En1949], который оказался его лебединой песнью, и по философии науки “Problemi della scienza” [En1906]. В книге

“Le superficie algebriche” Федериго Энриквес дал классификацию гладких проективных комплексных поверхностей. Свои первые попытки в классификации минимальных моделей гладких проективных поверхностей Энриквес предпринял еще в 1914 году в работе [En1914]. В ней он дал классификацию алгебраических поверхностей с нулевым первым классом Чженя. Потом Кунихико Кодаира пополнил классификацию Энриквеса посредством неалгебраических компактных гладких поверхностей (см. [Kod1964, Kod1966, Kod1968a, Kod1968b]). Таким образом на свет появилась классификация гладких компактных комплексных поверхностей, ныне носящее имена Кунихико Кодаиры и Федериго Энриквеса.

Нельзя не упомянуть об исследованиях алгебраических поверхностей над полями произвольной характеристики, главным образом которым мы и посвятили нашу работу. Именно благодаря Дэвиду Мамфорду и Энрико Бомбиери на свет появилась классификация компактных поверхностей над полями положительной характеристики (см. [Mu1970] и [BoMu1977]). Методы, используемые Дэвидом Мамфордом и Энрико Бомбиери, ни малейшего зачатка которых мы не находим в работах итальянских алгебраических геометров в разработке классификации алгебраических поверхностей, используют язык схем и этальные гомологии, неразработанность которых и являлась главным тормозом в изучении поверхностей над полями конечной характеристики до середины XX столетия.

Хотя можно было бы сделать еще много замечаний, относящихся к истории изысканий в теории алгебраических поверхностей и их автоморфизмов, но мы и без того перешли за пределы, указываемые назначением нашего труда. Поэтому здесь мы считаем своевременным прервать исторический обзор сочинений по геометрии и просим снисхождения к нашей отчаянной попытке нахождения первых упоминаний алгеброгеометрических объектов в литературе античной эпохи.

Список работ по теме диссертации

1. Викулова, А. В., *Константа Жордана для группы Кремоны ранга* 2 *над конечным полем* // Матем. заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 607–612.

2. Викулова, А. В., *Самые симметричные кубические поверхности* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – №2. – С. 32–80.

3. Vikulova, A. V., *The most symmetric smooth cubic surface over a finite field of characteristic* 2 // Finite Fields and Their Applications. – 2024. – Т. 98. – Art. 102470.

Литература

[Ал1901] Алексѣев, В. Г., *Основы символической теоріи инваріантовъ (для химиковъ)* // Типографія К. Маттисена. – Юрьевъ. – 1901.

[Буф2024] Буфетов, А. И., *Зодчий Александр* // "Троицкий вариант". – №9(403). – 7 мая 2024 года.

[Вик2023] Викулова, А. В., *Константа Жордана для группы Кремоны ранга* 2 *над конечным полем* // Матем. заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 607–612.

[Вик2024] Викулова, А. В., *Самые симметричные кубические поверхности* // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – №2. – С. 32–80.

[ГоШр2018] Горчинский, С. О., Шрамов, К. А., *Неразветвленная группа Брауэра и ее приложения* // Издательство "МЦНМО". – 2018. – ISBN: 978-5-4439-3271-2.

[Зай2023] Зайцев, А. В., *Формы поверхностей дель Пеццо степеней* 5 *и* 6 // Матем. сб. – 2023. – Т. 214. – №6. – С. 69–86.

[Ма1972] Манин, Ю. И., *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика* // Издательство "Наука". – Главная редакция физико-математической литературы. – 1972.

[Но1956] *Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей* // Редакция и вступительная статья А. П. Нордена. – Государственное издательство технико–теоретической литературы. – Москва. – 1956.

[ПрШр2023] Прохоров, Ю. Г., Шрамов, К. А., *Свойство Жордана для группы Кремоны над конечным полем* // Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина. – Труды МИАН. – 2023. – Т. 320. – МИАН, Москва. – С. 298–310.

[Ро2004] Розенфельд, Б. А., *Аполлоний Пергский* // М.: МЦНМО. – 2004. – ISBN: 5-94057-132-8.

[Am1989] Amrani, A. Al., *Classes d'idéaux et groupe de Picard des fibrés projectifs tordus* // K-Theory. – 1989. – Т. 2. – №5.– С. 559–578.

[Fields2016] *Fields Medallists' lectures* // Edited by Atiyah, M., Iagolnitzer, D. and Chong, Ch. – World Scientific Series in 21st Century Mathematics, 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. – 2016. – ISBN: 978-981-4696-18-0; 978-981-4696-17-3.

[Ar1652] *Ἀριστείδου Κοϊντιλιανοῦ Περὶ μουσικῆς βιβλία 3. Aristidis Quintiliani de Musica libri 3. Marcus Meibomius restituit ac notis explicavit. Volumen II* // Amstelodami : Apud Ludovicum Elzevirium. – 1652.

[BFL2019] Banwait, B., Fité, F., Loughran, D., *Del Pezzo surfaces over finite fields and their Frobenius traces* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 2019. – Т. 167. – №1. – С. 35–60.

[Bea2010] Beauville, A., *Finite subgroups of* $\mathrm{PGL}_2(K)$ // Vector bundles and complex geometry. – Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – Providence, RI. – 2010. – Т. 522. – С. 23–29.

[BlLaZi2021] Blanc, J., Lamy, S., Zimmermann, S., *Quotients of higher-dimensional Cremona groups* // Acta Math. – 2021. – Т. 226. – №2. – С. 211–318.

[BoMu1977] Bombieri, E., Mumford, D., *Enriques' classification of surfaces in char p: II* // Complex analysis and algebraic geometry. – Iwanami Shoten Publishers. – Tokyo. – 1977. – С. 23–42.

[Boo1841] Boole, G., *Exposition of a general theory of linear transformations. Part I* // Cambridge Mathematical Journal. – 1841. – T. 3. – C. 1–20.

[BLR1990] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M., *Néron models* // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – Springer-Verlag, Berlin. – 1990. – T. 21. – ISBN: 3-540-50587-3.

[CaLa2013] Cantat, S., Lamy, S., *Normal subgroups in the Cremona group* // Acta Math. – 2013. – T. 210. – №1. – C. 31–94.

[Ca2013] Cantat, S., *The Cremona group in two variables* // European Congress of Mathematics. – Eur. Math. Soc. – Zürich. – 2013. – C. 211–225.

[Ca2018] Cantat, S., *The Cremona group* // Algebraic geometry: Salt Lake City 2015. – Proc. Sympos. Pure Math.. – T. 97. – №1. – Amer. Math. Soc. – Providence, RI. – 2018. – C. 101–142.

[Carta1927] Cartan, E., *La théorie des groups et la géométrie* // L'Enseignement mathématique. – 1927. – C. 200–225.

[Cart1972] Carter, R. W., *Conjugacy classes in the Weyl group* // Compositio Math. – 1972. – T. 25. – №1. – C. 1–59.

[Cast1901] Castelnuovo, G., *Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano* // Torino Atti. – 1901. – T. 36. – C. 861–874.

[Cay1845] Cayley, A., *On the theory of linear transformations* // Cambridge Mathematical Journal. – 1845. – T. 4. – C. 193–209.

[Cay1849] Cayley, A., *On the triple tangent planes of surfaces of the third order* // Cambridge and Dublin Math. J. – 1849. – №4. – C. 118–138.

[Ch1875] Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne* // Mémoires couronnés par l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles. – 1837. – T. 11. – C. 1–572.

[CheShr2024] Chen, Y., Shramov, C. A., *Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic* // Geom. Topol. – 2024. – T. 28. – №6. – C. 2747–2791.

[Cheng2022] Cheng, R., *Geometry of q-bic hypersurfaces* // Thesis (Ph.D.). – Columbia University. – ProQuest LLC, Ann Arbor, MI. – 2022.

[ATLAS1985] Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. Ph., Parker, R. A., Wilson, R. A., *ATLAS of Finite Groups* // Oxford University Press. – 1985. – ISBN: 0-19-853199-0.

[Cr1863] Cremona, L., *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* // Giornale di matematiche di Battaglini. –1863. – T. 1. – C. 305–311.

[dP1887] Del Pezzo, P., *Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio ad n dimensioni* // Rend. del Circolo Mat. di Palermo 1.– 1887.– T. 1.– C. 241–255.

[Dé2012] Déserti, J., *Some properties of the Cremona group* // Ensaios Matemáticos. – T. 21. – Sociedade Brasileira de Matemática. – Rio de Janeiro. – 2012. C. 1–188.

[Die1954] Dieudonné, J., *Les Isomorphismes Exceptionnels Entre Les Groupes Classiques Finis* // CJM. – 1954. – T. 6. – C. 305–315.

[Dio1575] *Diophanti Alexandrini rerum arithmeticarum libri sex : quoru primi duo adiecta habent Scholia, Maximi (ut coniecta est) planudis* // Basileae Per Eusebium Episcopium, & Nicolai Fr. haeredes. – 1575.

[Dio1893] *Diophanti Alexandrini Opera omnia: cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery* // Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri. –1893.

[DoDu2019] Dolgachev, I. V., Duncan, A., *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic* // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2019. – T. 83. – №3. – C. 15–92.

[DoIsk2009] Dolgachev, I. V., Iskovskikh, V. A., *Finite Subgroups of the Plane Cremona Group* // Y. Tschinkel, Y. Zarhin, (eds). – Algebra, Arithmetic, and Geometry. Progress in Mathematics. – Birkhäuser Boston. – 2009. – T. 269.

[DoMa2022] Dolgachev, I. V., Martin, G., *Automorphisms of del Pezzo surfaces of degree 2 in characteristic 2* // arXiv:2206.08913 [math.AG]. – 2022.

[Do2005] Dolgachev, I. V., *Luigi Cremona and cubic surfaces* // Luigi Cremona (1830–1903) (Italian). – Incontr. Studio. – Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. – Milan. – 2005. – T. 36. – C. 55–70.

[Do2012] Dolgachev, I. V., *Classical algebraic geometry. A modern view* // Cambridge University Press, Cambridge. – 2012. – ISBN: 978-1-107-01765-8.

[DF2004] Dummit, D. S., Foote, R. M., *Abstract algebra* // Third edition. – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ. – 2004. – ISBN: 0-471-43334-9.

[En1906] Enriques, F., *Problemi della scienza* // Bologna. – Nicola Zanichelli editore. – 1906.

[En1914] Enriques, F., *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. *Nota I* // Rendiconti Acc. Naz. Lincei. – V. – XXIII. – 1914. – C. 206–214.

[En1949] Enriques, F., *Le superficie algebriche* // Bologna. – Nicola Zanichelli editore. – 1949.

[Eu888] Euclid, *Elementa*, Books I–XIII // MS. D'Orville 301. – Byzantine. – 888.

[Fa1931] Fano, G., *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli* // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici.– Zanichelli, Bologna. – 1931. – C. 115–121.

[Fa1942] Fano, G., *Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche* // Comment. Math. Helv. – 1942. – T. 14. – C. 202–211.

[Fe1679] *Varia opera mathematica Domini Petri de Fermat, senatoris Tolosani* // Tolosae. – Apud Johannem Pech. – 1679.

[Gor2016] Gorodentsev, A. L., *Algebra. I. Textbook for students of mathematics* // Translated from the 2013 Russian orginal. – Springer, Cham. – 2016. – ISBN: 978-3-319-45284-5.

[Ho1997] Hosoh, T., *Automorphism groups of cubic surfaces* // J. Algebra. – 1997. – T. 192. – №2. – C. 651–677.

[Hu1927] Hudson, H. Ph., *Cremona transformations in plane and space* // The University Press. – 1927.

[Hu2023] Huybrechts, D., *The geometry of cubic hypersurfaces* // Cambridge Studies in Advanced Mathematics. – Cambridge University Press, Cambridge. – 2023. – T. 206. – ISBN: 978-1-009-28000-6.

[Jo1878] Jordan, M. C., *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* // J. Reine Angew. Math. – 1878. – T. 84. – 89–215.

[Ka2021] Karaoğlu, F., *Non-Singular Cubic Surfaces over* $\mathbb{F}_{2^k}$ // Turk. J. Math. – 2021. – T. 45. – C. 2492–2510.

[Kl1872] *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen von Dr. Felix Klein Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen* // Erlangen. – Verlag von Andreas Deichert. – 1872.

[Kod1964] Kodaira, K., *On the structure of compact complex analytic surfaces. I* // American Journal of Mathematics. – 1964. – T.86. – №4. – C. 751–798.

[Kod1966] Kodaira, K., *On the structure of compact complex analytic surfaces. II* // American Journal of Mathematics. – 1966. – T.88. – №3. – C. 682–721.

[Kod1968a] Kodaira, K., *On the structure of compact complex analytic surfaces. III* // American Journal of Mathematics. – 1968. – T.90. – №1.– C. 55–83.

[Kod1968b] Kodaira, K., *On the structure of compact complex analytic surfaces. IV* // American Journal of Mathematics. – 1968. – T.90. – №4. – C. 1048–1066.

[Ko1989] Kollár, J., *Minimal models of algebraic threefolds: Mori's program* // Séminaire Bourbaki. – Vol. 1988/89. – Astérisque. – 1989. – № 177–178. – Exp. No. 712. – C. 303–326.

[Lag1788] Lagrange, J. L., *Mécanique analitique* // Desaint. – Paris. – 1788.

[La2002] Lang, S., *Algebra* // Revised third edition. – Graduate Texts in Mathematics. – Springer-Verlag, New York. – 2002. – T. 211. – ISBN: 0-387-95385-X.

[Li2017] Liedtke, C ., *Morphisms to Brauer–Severi varieties, with applications to del Pezzo surfaces. Geometry over nonclosed fields* // Simons Symp., Springer, Cham. – 2017. – C. 157–196.

[Ma2002] Matsuki, K., *Introduction to the Mori program* // Universitext. Springer-Verlag, New York. – 2002. – ISBN: 0-387-98465-8.

[MaMu1963] Matsumura, H., Monsky, P., *On the automorphisms of hypersurfaces* // J. Math. Kyoto Univ. – 1963/1964. – T. 3. – C. 347–361.

[Mu1970] Mumford, D., *Enriques' classification of surfaces in char p: I* // Global Analysis. – Princeton: Princeton University Press. – 1970. – C. 325–340.

[Noe1870] Noether, M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* // Mathematische Annalen. – 1871. – T. 3. – 161–227.

[Pan1999] Pan, I., *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona* // Bol. Soc. Bras. Mat. – 1999. – T. 30. – 95–98.

[Pa10C] Pappus Alexandrinus, *Synagoge* // X столетие по Р. Х. – Library: Biblioteca Apostolica Vaticana. – Shelfmark:Vat.gr.218.

[Pa1589] *Pappi Alexandrini Mathematicae collectiones. A Federico Commandino Vrbinatae in latinum conuersae, & commentarijs illustratae* // Apud Franciscum de Franciscis Senensem. – 1589.

[Pa1922] Pascal, E., *Repertorium der Höheren Mathematik* // B. G. Teubner. – Leipzig und Berlin. – 1922.

[Po1822] Poncelet, J.-V., *Traité des propriétés projectives des figures* // Paris Gauthier-Villars. – 1822.

[Pop2011] Popov, V. L., *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties* // Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes. – Amer. Math. Soc. – 2011. – T. 54.– C. 289–311.

[Pr2011] Prokhorov, Yu., *p-elementary subgroups of the Cremona group of rank* 3 // Classification of algebraic varieties. – EMS Ser. Congr. Rep. – Eur. Math. Soc. – Zürich. – 2011. – C. 327–338.

[Pr2012] Prokhorov, Yu., *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3 // J. Algebraic Geom. – 2012. – T. 21. – №3. – C. 563–600.

[Pr2014] Prokhorov, Yu., 2*-elementary subgroups of the space Cremona group* // Automorphisms in birational and affine geometry. – Springer Proc. Math. Stat. – T. 79. – Springer, Cham. – 2014. – C. 215–229.

[PrShr2018] Prokhorov, Yu., Shramov, C., *p-subgroups in the space Cremona group* // Math. Nachr. –2018. – T. 291. – №8–9. – C. 1374–1389.

[Proc1560] *Procli Diadochi Lycii philosophi Platonici ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum ad universam mathematicam disciplinam* // Patavii: Excudebat Gratiofus Perchacinus. – 1560.

[Sa1849] Salmon, G., *On the triple tangent planes to a surface of the third order* // Cambridge and Dublin Math. J. – 1849. – №4. – C. 252–260.

[Se1942] Segre, B., *The non-singular cubic surfaces* // Oxford Univ. Press. – London. – 1942.

[Serr2009] Serre, J.-P., *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field* // Mosc. Math. J. – 2009. – T. 9. – №1. – С. 183–198.

[Serr2010] Serre, J.-P., *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis* // Astérisque. – Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. – 2010. – T. 332. – Exp. No. 1000. – С. 75–100.

[ShrVol2018] Shramov, C. A., Vologodsky, V., *Automorphisms of pointless surfaces* // arXiv: 1807.06477 [math:AG]. – 2018.

[Shr2021] Shramov, C. A., *Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces* // European Journal of Mathematics. – 2021. – T. 7. – С. 591–612.

[Sm2024] Smith, J. M., *Groups acting on cubic surfaces in characteristic zero* // arXiv: 2401.15735 [math:AG]. – 2024.

[Swin1967] Swinnerton-Dyer, H. P. F., *The zeta function of a cubic surface over a finite field* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1967. – T. 63. – С. 55–71.

[Viet1646] *Francisci Vietae, Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita, opera atque studio Francisci a Schooten Leydensis, matheseos professoris.* // Ex officina Bonaventurae et Abrahami Elzeviriorum. – 1646.

[Vik2024] Vikulova, A. V., *Birational automorphism groups of Severi–Brauer surfaces over the field of rational numbers* // International Mathematics Research Notices. – Published online: https://doi.org/10.1093/imrn/rnae249 . – 2024.

[Wei1982] Weil, A., *Adeles and algebraic groups* // With appendices by M. Demazure and Takashi Ono. – Progress in Mathematics. – 1982. – T. 23. – Birkhäuser, Boston, MA. – ISBN: 3-7643-3092-9.

[Wey1939] Weyl, H., *Invariants* // Duke Mathematical Journal. – 1939. – Т. 5. – №3. – С. 489–502.

[Wi2009] Wilson, R. A., *The finite simple groups* // Graduate Texts in Mathematics. – 2009. – Т. 251. – Springer-Verlag London, Ltd., London. – ISBN: 978-1-84800-987-5.

[Wol2008] Wolfson, P. R., *George Boole and the origins of invariant theory* // Historia Mathematica. – 2008. Т. 35. – №1. – С. 37–46.

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
119991, ул. Губкина д. 8, Москва, Россия

Лаборатория алгебраической геометрии, НИУ ВШЭ
119048, ул. Усачева, д. 6, Москва, Россия

vikulovaav@gmail.com