Отзыв
официального оппонента Марии Георгиевны Матушко
о диссертационной работе Никиты Сергеевича Целоусова
«Подходы к исследованию скрытых негрупповых симметрий в квантовой теории поля»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.3.3 — Теоретическая физика

В последние десятилетия в современной теоретической и математической физике наблюдается бурное развитие идей, связанных с понятием симметрии — как явной, так и скрытой. Скрытые алгебраические структуры, не заложенные на уровне лагранжиана теории, но проявляющиеся на уровне квантовых корреляторов, оказываются ключевыми для понимания интегрируемости в квантовой теории поля и теории струн. Кандидатская диссертация Н. С. Целоусова посвящена изучению скрытых негрупповых симметрий в точно решаемых моделях, к числу которых относятся трёхмерная топологическая теория Черна–Саймонса и семейство матричных моделей Ван-Лиу-Жанг-Жао.

Кратко проанализируем структуру диссертации. Во **введении** кратко изложена история изучения по данному вопросу, подтверждена актуальность поставленных задач и сформулированы основные достижения диссертации.

В первой главе обсуждается важная задача классификации узлов с помощью топологических инвариантов наследуемых из корреляционных функций в трехмерной топологической теории Черна-Саймонса. На непертурбативном уровне такие корреляционные функции вычисляются с помощью специальных операторов — R-матриц, которые удовлетворяют квантовому уравнению Янга-Бакстера. В работе рассматриваются инварианты узлов, построенные с помощью R-матрицы U_q(su_N) в симметрическом представлении. В этом случае основным инструментом для вычисления инвариантов узлов, а именно, цветных полиномов ХОМФЛИ, является метод дифференциального разложения. Одним из главных результатов этой главы становится сформулированная гипотеза об эволюции дефекта дифференциального разложения для цветных полиномов ХОМФЛИ, что позволило явно вычислить коэффициенты дифференциального разложения для специального класса узлов, называемых тройными антипараллельными крендельными узлами.

Вторая глава посвящена анализу матричных моделей — классических объектов, играющих важную роль в теории квантовых интегрируемых систем.

Вводится интеграл по пространству матриц, обсуждаются тождества Уорда и W-представление, которое выражает статистическую сумму как действие дифференциального оператора W на тривиальную функцию. Главным предметом изучения в данной главе становится явление суперинтегрируемости, при котором корреляторы модели в некотором специальном базисе выражаются через те же базисные функции, вычисленные в некоторой точке. Разработан новый общий алгоритм поиска суперинтегрируемого базиса, применимый к классу матричных моделей с известным набором временных переменных и дифференциальных операторов соответствующих тождествам Уорда. Алгоритм включает в себя описание диаграмм Юнга, параметризующие базисные векторы, описание правил Пьери и построение системы коммутирующих операторов, которые могут рассматриваться как гамильтонианы некоторых квантовых интегрируемых систем. Работа алгоритма продемонстрирована на примерах Гауссова унитарного ансамбля и кубической матричной модели Концевича. С точки зрения теории симметрических функций данные модели связаны с симметрическими функциями Шура и Q-Шура, соответственно. Также установлена связь между W-оператором и свойством суперинтегрируемости.

В третьей главе рассматривается бесконечномерная ассоциативная алгебра — аффинный янгиан $Y(\hat{gl}_1)$, выступающий в роли скрытой симметрии для семейства матричных моделей Ван-Лиу-Жанг-Жао. Дается детальное изложение коммутационных соотношений в терминах мод и в терминах производящих функций на генераторы. Особое место занимает анализ представлений Фока и Макмагона, базисные векторы которых соответствуют двумерным и трёхмерным диаграммам Юнга. Показано, как представление Фока реализуется в терминах дифференциальных операторов от временных переменных, соответствующих степенным суммам Ньютона на языке симметрических функций, и как в этом контексте возникают симметрические функции Шура и Джека. В представлении Фока аффинного янгиана возникают такие известные операторы как "cut-and-join", а также гамильтониан тригонометрической системы Калоджеро в терминах коллективных переменных, что придаёт построениям физический смысл. Главным результатом данной главы является анзац для оператора "cut-and-join" в случае реализации представления Макмагона на пространстве треугольных временных переменных. В качестве проверки корректности данного анзаца были вычислены собственные функции данного оператора — так называемые полиномы 3-Шура, соответствующие трехмерным диаграммам Юнга, вплоть до

степени однородности 5. Собственные значения оператора полностью согласуются с теорией представлений данной алгебры.

В четвёртой главе обсуждаются более сложные аффинные янгианы $Y(\hat{gl}_2)$ и $Y(\hat{gl}_r)$. Описываются коммутационные соотношения и структурные функции. Рассматривается представление аффинного янгиана, действующее на векторах, параметризуемых полиномами Углова, которые являются специальным пределом полиномов Макдональда, и которые непосредственно связаны с квантовыми спиновыми системами Калоджеро. Одним из главных результатов этой главы является найденный метод разложения операторов по полиномам Шура, позволяющий строить в явном виде реализации представлений старших аффинных янгианов. Данная техника полиномиальных реализаций основана на разложении операторов в базисе полиномов Шура и соответствующих им сопряженных операторов, что дает мощный инструмент построения дифференциальных операторов с наперед заданными свойствами. Показано, что при $\beta = 1$ получаются простые выражения генераторов через полиномы Шура, соответствующие специальным диаграммам Юнга с одним крюком.

В **заключении** формулируются основные результаты диссертации.

Диссертация убедительно демонстрирует широкий набор технических методов, которыми овладел автор. Хочется особенно отметить, что диссертация содержит ряд очень нетривиальных и интересных гипотез, а также новых методов, которые интересны и с физической, и с математической точки зрения. Текст диссертации хорошо читается и содержит большое количество поясняющих примеров.

В качестве вопросов, возникших по ходу чтения работы и бесед с автором, могу отметить следующие:

1) В первой главе все явные примеры вычисления коэффициентов дифференциального разложения и цветных полиномов ХОМФЛИ представлены для узлов дефекта ноль, хотелось бы привести примеры и формулы для узлов дефекта больше нуля.

2) Известно, что более простые (не аффинные) янгианы Y(gl_r) содержат в себе коммутирующие подалгебры, связанные с квантовыми интегрируемыми системами типа спиновых цепочек. Было бы хорошо прояснить связь таких интегрируемых систем с теми, которые были упомянуты в диссертации.

Возникшие при чтении диссертации вопросы не умаляют значимости и высокой оценки работы.

Результаты диссертации своевременно и полно опубликованы в международных журналах высокого уровня. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Основные результаты работы являются новыми и были представлены на семинарах и международных конференциях по математической физике.

Диссертация Н. С. Целоусова является актуальной работой высокого научного уровня, соответствующей всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — теоретическая физика.

Дата: 4 декабря 2025 года

Официальный оппонент,
кандидат математических наук,
научный сотрудник отдела
теоретической физики Математического
института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

_____М. Г. Матушко

Подпись М.Г. Матушко заверяю.
Заведующий отделом кадров МИАН О. Г. Усачева