ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
доктора физико-математических наук, профессора Исаева Алексея Петровича
о диссертационной работе Целоусова Никиты Сергеевича
«Подходы к исследованию скрытых негрупповых симметрий в квантовой теории поля»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.3.3 – «Теоретическая физика»

В диссертации Целоусова Н.С. исследуются скрытые симметрии, возникающие в различных теориях поля, а также в теориях релятивистских струн. Применение скрытых симметрий является перспективным направлением развития современных теоретических моделей с точки зрения применения методов, разработанных при исследовании квантовых и классических интегрируемых систем. В работе рассматриваются два важных и интересных с точки зрения приложений примера моделей со скрытой симметрией: трехмерная топологическая теория Черна-Саймонса и класс матричных моделей Ван-Лиу-Жанг-Жао. Более конкретно, диссертация посвящена исследованиям корреляционных функций в указанных выше точно решаемых моделях с помощью методов теории квантовых групп и алгебр, которые возникают в данных моделях как алгебраические структуры, генерирующие скрытые симметрии. Работа отличается глубоким синтезом различных направлений современной теоретической и математической физики — топологической квантовой теории поля, теории узлов, теории представлений квантовых групп, теории интегрируемых систем и матричных моделей. Таким образом, актуальность темы данной диссертации не вызывает сомнений.

Диссертация состоит из Введения, четырех глав основного текста, Заключения и одного приложений (А). Объем диссертации составляет 183 страницы, включая 25 рисунков и 21 таблицу. Список литературы содержит 210 ссылок.

Во введении обоснована актуальность темы, подчёркивается центральная роль симметрий в построении физических теорий — как глобальных, так и локальных (калибровочных). Однако в ряде случаев в квантовых теориях возникают структуры, не описываемые группами Ли. Такие структуры проявляются как скрытые симметрии корреляционных функций и часто связаны с интегрируемостью или точной решаемостью модели. Цель работы сформулирована как исследование и описание таких скрытых симметрий на примере конкретных моделей — трехмерной топологической теории Черна–Саймонса и матричных моделей из класса Ван-Лиу-Жанг-Жао. Введение содержит краткий обзор современного состояния области, а также четкую формулировка целей, задач и основных положений, выносимых на защиту. Отдельно приводятся сведения об апробации результатов, публикациях по теме диссертации и общей структуре работы.

Первая глава посвящена анализу трехмерной топологической квантовой теории Черна–Саймонса (ЧС) с калибровочной группой SU(n), в которой корреляционные функции

операторов петель Вильсона соответствуют топологическим инвариантам узлов и зацеплений — полиномам ХОМФЛИ. Происхождение квантовых инвариантов объясняется существованием скрытой симметрии, описываемой квантовой группой U_q(SU(n)) с соответствующей универсальной R-матрицей. Далее обсуждается метод дифференциального разложения (ДР) для цветных полиномов ХОМФЛИ, основанный на теоретико-групповых свойствах квантовых инвариантов, которые наследуются из теории представлений алгебры U_q(SU(n)). В разделе 1.1 выводится общая рекурсивная формула для инвариантов в симметрических представлениях, показывающая, что зависимость от узла содержится исключительно в наборе коэффициентов ДР. В разделе 1.2 вводится ключевое понятие дефекта дифференциального разложения — целого числа, которое характеризует степень факторизации коэффициентов ДР и позволяет классифицировать узлы. Формулируется гипотеза об эволюции дефекта при изменении числа перекрёстков в диаграмме узла и детально обсуждаются примеры нулевого, единичного и высших дефектов в применении к данной гипотезе. В завершении главы приводятся явные аналитические формулы для семейства тройных анти-параллельных крендельных узлов нулевого дефекта. Эти формулы имеют самостоятельную научную ценность, поскольку на их примере можно явно наблюдать, каким образом нарушается факторизация коэффициентов ДР при отклонении от случая узлов двойных кос.

Во вторая главе рассматриваются нульмерные модели, статистические суммы которых определяются конечномерными интегралами по пространству матриц — матричные модели. В качестве основных примеров рассмотрены гауссова эрмитова модель и кубическая модель Концевича, статсуммы которых служат типичными представителями тау-функций интегрируемых иерархий. Данные модели обладают свойством суперинтегрируемости: средние значения наблюдаемых в некотором базисе выражаются через те же базисные функции, что и сами наблюдаемые, но в особой точке пространства параметров. Важным результатом главы является разработка алгоритма построения суперинтегрируемого базиса корреляторов для некоторого класса матричных моделей. Алгоритм состоит из трёх этапов: 1) построение системы диаграмм (аналогов диаграмм Юнга), нумерующих базисные полиномы; 2) определение правил добавления и удаления клеток (правила Пьери); 3) построение диагонального оператора со специальными свойствами. Корректность алгоритма демонстрируется на примере гауссовой модели и модели Концевича в нетривиальной фазе. Кроме того, в главе обсуждается связь между свойством суперинтегрируемости и W-представлением, позволяющим записывать производящую функцию всех корреляторов в виде действия простого экспоненциального оператора на единицу. В работе показано, что W-операторы являются элементами бесконечномерных алгебр типа аффинных Янгианов в некоторой специальной реализации представления Фока, при этом переход от матричной модели к более общему β-ансамблю достигается специальным выбором параметров деформации аффинного Янгиана.

В третьей главе подробно рассматривается алгебра аффинного Янгиана gl_1. В начале главы приводятся базовые определения и коммутационные соотношения Янгиана как в форме соотношений для мод, так и в форме производящих функций генераторов. Особое внимание уделяется обсуждению параметров деформации, определяющих различные физические пределы: в частности, при тривиальных значениях параметров Янгиан вырождается в бесконечномерную алгебру Ли W_{1+∞}, связанную с классической иерархией Кадомцева–

Петвиашвили и моделями двумерной конформной теории поля с операторами высших спинов. Далее описываются представления Фока и МакМахона, векторы гильбертого пространства которых соответствуют двумерным и трёхмерным диаграммам Юнга соответственно. На основе дифференциальной реализации представления Фока строится явная форма генераторов Янгиана в пространстве полиномов от временных переменных. При этом коммутирующие семейства аффинного Янгиана становятся гамильтонианами квантовых интегрируемых систем типа Калоджеро. Одним из основных результатов является построение полиномов 3-Шура, которые возникают как базисные функции в представлении МакМахона по аналогии с классическими полиномами Шура и Джека.

В четвёртой главе рассматривается более сложная алгебра — аффинный Янгиан gl_2 как простейший нетривиальный пример из серии алгебр класса gl_r. В начале главы излагаются основные коммутационные соотношения для старших Янгианов, задаваемые с помощью структурных функций и колчанных диаграмм, после чего подробно обсуждается метод разложения по полиномам Шура, позволяющий систематически строить дифференциальные реализации генераторов. Сначала рассматривается недеформированный случай $\beta=1$, где реализуется структура W-алгебры, а далее общий случай $\beta\neq1$, соответствующий деформированным (β-ансамблевым) матричным моделям. В результате получены явные выражения для порождающих элементов алгебры в терминах разложения по полиномам Шура, в которые входят только диаграммы с одним крюком в терминологии Фробениуса. Особое внимание уделено полиномам Углова, которые являются обобщением классических полиномов Джека в случае представлений аффинных Янгианов gl_r старших рангов. В данной главе также обсуждается связь между построенными представлениями и потенциальными физическими приложениями в области низкоэнергетических БПС-алгебр в теории струн.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В целом, рассматриваемая диссертация выполнена на высоком физико-математическом уровне по современной актуальной тематике и представляет собой законченную научную работу.

По результатам работы хотелось бы сделать следующие замечания:

1. В первом разделе было бы целесообразно привести более подробное пояснение используемых в диссертации и теории узлов терминов. Например, таких как «тройные антипараллельные крендельные узлы» (стр. 30), или «узлы с двумя параллельными и одним антипараллельным «пальцами»» (стр. 35) и т.д.

2. Единственность решений (2.1.15), (2.1.45), для статсумм Z не очевидна. Было бы хорошо, если бы было приведено доказательство этого утверждения, или дана ссылка на работы, где такое доказательство присутствует.

3. В некоторых разделах (особенно 3.5 и 4.4) математическая детализация чрезмерна и затрудняет восприятие физического смысла результатов.

Сделанные замечания, однако, не снижают общей высокой оценки диссертации.

Диссертация написана на высоком научном уровне, хорошим языком, содержит обоснованные, достоверные и оригинальные результаты, опубликованные в шести статьях в ведущих международных рецензируемых журналах первого квартиля. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Автореферат правильно и в полной мере отражает содержание диссертации.

Диссертация Целоусова Н.С. отвечает всем требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Правительством Российской Федерации №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор, Целоусов Никита Сергеевич, бесспорно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 - «Теоретическая физика».

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.
Боголюбова межправительственной
организации Объединенный институт
ядерных исследований
(специальность – 01.04.02)

А.П. Исаев

Дата: 20 ноября 2025 г.

141980, г.Дубна, Московская область,
ул. Жолио-Кюри 6, ОИЯИ, ЛТФ
Тел. +7 496 216-30-24
e-mail: *isaevap@theor.jinr.ru*

Подпись А.П. Исаева заверяю:
Ученый секретарь ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенного института ядерных исследований,
кандидат физико-математических наук

А.В. Андреев