Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича»
Российской академии наук

На правах рукописи

Целоусов Никита Сергеевич

Подходы к исследованию скрытых негрупповых симметрий в квантовой теории поля

Специальность 1.3.3 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Слепцов Алексей Васильевич

Москва — 2025

Оглавление

Введение **4**

1 Теория Черна-Саймонса и квантовые инварианты узлов **19**

1.1 Дифференциальное разложение 21

1.2 Дефект дифференциального разложения 25

1.3 Явные формулы для тройных крендельных узлов 41

1.4 Свойства факторизации в корнях единицы 45

1.5 Новый $\mathcal{C}$-полином для твистованных узлов 50

1.6 Обсуждение 51

2 Матричные модели и суперинтегрируемость **53**

2.1 Гауссова Эрмитова Матричная модель 53

2.2 Построение суперинтегрируемого базиса в матричных моделях 67

2.3 SIB для Гауссовой Эрмитовой модели 69

2.4 SIB для кубической модели Концевича 78

2.5 Обсуждение 91

3 Аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ **93**

3.1 Коммутационные соотношения 93

3.2 Представление Фока 100

3.3 Реализация представления Фока и полиномы Джека 110

3.4 Представление МакМахона 114

3.5 Реализация представления МакМахона и полиномы 3-Шура 116

3.6 Обсуждение 137

4 Аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ **139**

4.1 Полиномы Углова 140

4.2 Коммутационные соотношения 145

4.3 Представление Фока 148
4.4 Реализация представления Фока и полиномы Углова 154
4.5 Обсуждение 160

Заключение **161**

Список литературы **164**

А Древесная техника вычислений ХОМФЛИ **181**

Введение

Актуальность

Симметрии играют ключевую роль в фундаментальной физике, определяя структуру законов природы. В современной картине науки для описания наиболее фундаментальных объектов нашего мира используется язык полей и лагранжианов. Одним из наиболее важных проявлений симметрии на этом языке является принцип инвариантности действия относительно преобразований симметрии. Другим важным принципом для построения фундаментальных лагранжианов является принцип локальности, который закладывается в структуру теории по определению – действие дается интегралом по всему пространству от лагранжиана локальных полей. В случае глобальных симметрий два этих принципа влекут за собой возникновение в теории *законов сохранения*, что является следствием классической теоремы Нётер.

Осознание ключевой роли симметрий в построении физических теорий основывалось на бурном развитии соответствующего математического аппарата – теории групп. На данный момент твердо известно, что симметриям, преобразования которых задаются с помощью набора непрерывных параметров, соответствуют группы Ли.

Несколько неожиданным, но совершенно логичным с современной точки зрения стало открытие *калибровочных симметрий*, которые являются квинтэссенцией принципов симметрии и локальности. Современную квантовую теорию поля – Стандартную Модель – невозможно представить без калибровочной симметрии. Локальная калибровочная инвариантность относительно $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ определяет структуру сильного, слабого и электромагнитного взаимодействия. При этом механизм спонтанного нарушения симметрии, как в случае бозона Хиггса, позволяет объяснить возникновение масс частиц без нарушения исходной симметрии лагранжиана. Заметим, что в случае калибровочных симметрий группы Ли снова возникают как строительный блок физической теории, но уже в роли локальных симметрий, а не глобальных.

Как глобальные, так и локальные симметрии чрезвычайно важны на этапе построения

физической теории, согласно принципу инвариантности, поскольку они во многом задают свойства конечной теории.

В данной работе мы изучаем структуры принципиально иного типа, которые проявляются на уровне квантовых коррелляторов и не были заложены в теорию явным образом на уровне лагранжианов. Мы будем называть такие структуры *скрытыми симметриями*.

Идея поиска скрытых симметрий далеко не нова. Со временем список известных примеров скрытых симметрий неуклонно пополняется [1–8], что дает основания полагать, что явление носит в некотором смысле универсальный характер. Тем не менее, мы используем слово "скрытые" в названии, чтобы подчеркнуть загадочное происхождение этих объектов и отсутствие законченной теории. Точное определение таких явлений и классификация примеров скрытых симметрий на сегодняшний день представляется непростой задачей.

Скрытые симметрии описываются алгебраическими объектами, которые являются *обобщениями* классических алгебр Ли, которые зачастую проявляются в некоторых замечательных свойствах квантовых коррелляторов и оказываются тесно связанными с интегрируемостью самой теории. Другими словами, скрытые симметрии дают правильную точку зрения на построение точного решения в теории.

Исследование скрытых симметрий, возникающих в квантовых теориях поля, является перспективным направлением развития современной теории струн [9] и идей интегрируемости [10]. Алгебраические структуры, найденные в одной из квантовых теорий, зачастую оказываются не специфичными именно для данной теории, а наоборот – представляют некоторую универсальную структуру, которая может иметь отражения в различных областях науки, устанавливая неожиданные соответствия и давая почву для формулировки различных дуальностей. С другой стороны, скрытые симметрии могут послужить одним из способов для определения новых алгебраических объектов, которые могут независимо представлять интерес с математической точки зрения.

В данной работе мы рассматриваем два конкретных примера моделей со скрытой симметрией: трехмерная топологическая теория Черна-Саймонса [1, 11–18] и класс матричных моделей ВЛЖЖ (Ван-Лиу-Жанг-Жао) [19–26]. Такой выбор обусловлен тем, что для поиска и анализа скрытых симметрии полезно иметь развитые методы вычисления всех коррелляторов теории, т.е. для этих целей хорошо подходят точно решаемые модели. Рассмотренные нами теории достаточно просты и не содержат динамических степеней свободы, тем не менее, на их примере можно глубоко погрузиться в изучение скрытых симметрий и связанных с ними структур.

Трехмерная топологическая теория Черна-Саймонса (ЧС) – это калибровочная теория поля, действие которой задается не классическим действием Янга-Миллса, а трехмерной формой Черна-Саймонса [27]. Форма ЧС явным образом не зависит от метрики пространства, что делает теорию ЧС топологической теорией типа Шварца со следующим действием

$$S_{CS}[\mathcal{A}] = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{A}\wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}. \tag{0.0.1}$$

Теория ЧС находится на пересечении множества областей современной теоретической физики и математики, включая квантовую теорию поля [1, 14, 28–30], двумерную конформную теорию поля [31–33], трехмерную гравитацию [34, 35], теорию топологических струн [36–38] и теорию узлов [39].

Выделенным набором наблюдаемых операторов в данной теории являются петли Вильсона вдоль замкнутых контуров $\mathcal{K}$

$$\langle W_R\rangle(\mathcal{K}) = \Big\langle \mathrm{tr}_R\,\mathrm{Pexp}\Big(i\oint_{\mathcal{K}}\mathcal{A}\Big)\Big\rangle_{CS}. \tag{0.0.2}$$

Данные корреляционные функции не изменяют своего значения при непрерывных деформациях[1] контура $\mathcal{K}$, при которых не происходит разрывов или самопересечений контура. Другими словами, квантовые средние от операторов петель Вильсона являются топологическим инвариантом контура $\mathcal{K}$.

В общем случае инвариант $\langle W_R\rangle(\mathcal{K})$ зависит от выбора калибровочной группы и соответствующего представления R. При этом наблюдается закономерность, что при увеличении ранга калибровочной группы и размерности представления инвариант становится сильнее и способен различить большее количество топологических классов контуров. Таким образом, можно рассматривать теорию ЧС как мощный формализм для построения топологических инвариантов контуров, которые представляют значительный интерес с точки зрения теории узлов.

При специальном выборе аргументов инварианты $\langle W_R\rangle(\mathcal{K})$ представляют собой полиномы Лорана, а не бесконечные ряды. А именно, от уровня теории κ и ранга калибровочной группы N следует перейти к переменным q, A. В данном случае удается записать ответ для

[1] Более точно, необходимо рассматривать объемлющие изотопии трехмерного пространства со вложенным контуром.

корреляционных функций как полиномы Лорана от следующих выражений

$$q = e^{\frac{2\pi i}{\kappa+N}}, \qquad\qquad A = e^{\frac{2\pi i N}{\kappa+N}}. \tag{0.0.3}$$

Стоит подчеркнуть, что свойство полиномиальности всех корреляционных функций является крайне специальным и замечательным свойством с точки зрения квантовой теории поля.

Это свойство можно объяснить благодаря существованию скрытой симметрии теории ЧС с калибровочной группой Ли G, которая дается квантовой универсальной обертывающей соответствующей алгебры Ли $U_q(\mathfrak{g})$ [40–43]. Такие объекты, которые в литературе часто называют *квантовые группы* [44,45], обладают структурой алгебры Хопфа и, что более важно для нас сейчас, универсальной $\mathcal{R}$-матрицей. Квантовые группы представляют собой деформацию классических алгебр Ли, при которой соотношения с коммутаторами заменяются более общими соотношениями с параметром деформации, а сама алгебра становится бесконечномерной. Одним из ключевых свойств квантовых групп является квазитреугольная структура, которая обеспечивает существование нетривиальной $\mathcal{R}$-матрицы, удовлетворяющей квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$\mathcal{R}_1\,\mathcal{R}_2\,\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\,\mathcal{R}_1\,\mathcal{R}_2. \tag{0.0.4}$$

Квантовые группы и соответствующие $\mathcal{R}$-матрицы являются естественным языком для описания квантовых средних от операторов Вильсоновских петель в теории ЧС и вычисления соответствующих инвариантов узлов. Например, третье движение Рейдемейстера из теории узлов, представленное в виде соотношения двух кос на Рис. 1, отражает уравнение Янга-Бакстера (0.0.4), если перекрестку первой и второй нити сопоставлена $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes 1$, а перекрестку второй и третьей $\mathcal{R}_2 = 1 \otimes \mathcal{R}$.

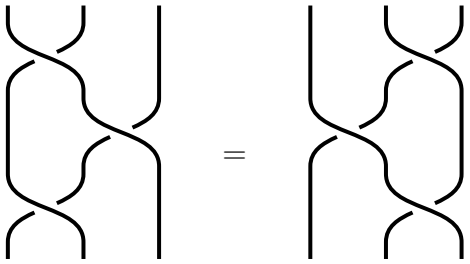


Рис. 1: Третье движение Рейдемейстера, представленное в виде кос.

В данной диссертационной работе мы фокусируемся на поиске новых интересных свойств корреляторов теории ЧС с помощью методов дифференциального разложения (ДР). Метод ДР основан на свойствах инвариантов узлов, которые следуют напрямую из теории пред-

ставлений квантовых групп, и позволяет разложить инвариант в базисе некоторых простых полиномиальных функций. Коэффициенты разложения в таком базисе называются коэффициентами ДР. На сегодняшний день физический смысл коэффициентов ДР остается до конца не ясным. Тем не менее, переход от инвариантов к коэффициентам ДР является существенным техническим упрощением и позволяет получать новые формулы для инвариантов для целых семейств узлов и позволяет изучать некоторые характеристики коэффициентов ДР.

Матричные модели представляют собой простейшие (конечномерные) аналоги функциональных интегралов

$$Z = \int dX \ \exp\Big(- \operatorname{tr} V(X)\Big), \tag{0.0.5}$$

где ведется интегрирование по пространству матриц X с некоторой мерой dX. Матричные модели в первую очередь интересны как точно решаемые модели с богатой фазовой структурой, на примере которых можно изучать такие интересные явления как интегрируемость [10]. С другой стороны, матричные модели играют важную роль в описании статсумм теории струн [46], статсумм двумерной гравитации [47, 48] и статсумм некоторых суперсимметричных теорий, к которым применим метод локализации [49, 50]. Общий обзор приложений матричных моделей к различным вопросам представлен в работе [51].

Одним из главных общих свойств функциональных интегралов является независимость конечного ответа от переменной интегрирования, что на языке квантовой теории поля выражается в существовании специальных соотношений на корреляционные функции теории – тождеств Уорда. На примере матричных моделей можно проследить, как полный набор тождеств Уорда представляется как бесконечное число линейных дифференциальных уравнений на производящую функцию всех корреляторов

$$Z(p_k) = \int dX \ \exp\left(-\operatorname{tr} V(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \operatorname{tr} X^k}{k}\right). \tag{0.0.6}$$

В данном случае полный набор тождеств Уорда может быть представлен как система линейных диффециальных уравнений на функцию $Z(p_k)$. Такой шаг становится возможным из-за простоты модели – всевозможные виды взаимодействий полей описываются с помощью членов $\operatorname{tr} X^k$, что является особенностью и достоинством матричных моделей. Такая система линейных уравнений позволяет многое узнать о модели и существенно ограничить вид производящей функции $Z(p_k)$.

В разных примерах матричных моделей наблюдается достаточно общее свойство суперинтегрируемости [52]

$$\langle\chi\rangle \sim \chi(*), \tag{0.0.7}$$

которое соответствует замечательному свойству корреляторов: при специальном выборе базиса χ в пространстве всех наблюдаемых величин модели, квантовые средние выражаются через те же базисные функции χ в некоторой точке. Свойство суперинтегрируемости в некоторых случаях обобщается на случай строгой суперинтегрируемости [53], а также тесно связано с классической интегрируемостью Кадомцева-Петвиашвили (КП) [54]. Тем не менее, не во всех случаях присутствуют сразу два феномена: существуют примеры, когда классическая КП интегрируемость разрушена, а свойство суперинтегрируемости сохраняется (например, гауссов β-ансамбль [55, 56]). Набор функций χ, который возникает в известных моделях в качестве суперинтегрируемого базиса, на самом деле достаточно узок. В большинстве известных примеров такой базис дается системой полиномов из семейства Шура-Макдональда [57].

Другим важным свойством матричных моделей является W-представление [58], которое позволяет представить полный ответ для производящей функции всех корреляторов как действие некоторого простого оператора $\hat{W}$ на некоторую функцию

$$Z(p_k) = e^{\hat{W}} \cdot 1. \tag{0.0.8}$$

Существуют стандартные методы получения W-представлений для матричных моделей, использующие полный набор тождеств Уорда – линейных уравнений на статсумму [59]. В интегрируемых случаях W-представление является не чем иным, как явным представлением тау-функции – групповой элемент $e^{\hat{W}}$ полной алгебры симметрий интегрируемой иерархии переводит тривиальную тау-функцию в статсумму матричной модели. В частности, поэтому переменные статсуммы p_k часто называют временными переменными, имея в виду времена интегрируемой иерархии.

W-представление в некоторых случаях оказывается очень полезным инструментом для анализа суперинтегрируемых формул, поскольку W-оператор естественным образом взаимодействует с суперинтегрируемым базисом. Это наблюдение является ключевым для поиска скрытой симметрии в матричных моделях. В данной работе мы изучаем случаи, когда W-оператор является элементом некоторой бесконечномерной алгебры в конкретном представлении, действующем на пространстве полиномов временных переменных p_k. С точки зрения алгебры скрытой симметрии суперинтегрируемый базис χ является выделенным базисом об-

щих собственных функций коммутирующей подалгебры, которая является аналогом подалгербы Картана в классических алгебрах Ли. Остальные генераторы алгебры действуют на базис χ некоторым стандартным образом, причем действие W-оператора матричной модели получается комбинацией элементарных действий некоторого набора генераторов алгебры.

Нашим основным примером является семейство матричных моделей ВЛЖЖ [19], скрытой симметрией которого является алгебра аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ [60–62]. Все модели этого семейства устроены похожим образом, а Гауссова Эрмитова модель – это самый простой элемент семейства. Модели ВЛЖЖ, а точнее их W-операторы, соответствуют коммутирующему семейству Янгиана $\hat{H}_n^{(1)}$, определенного следующим образом

$$\hat{H}_n^{(1)} = \frac{1}{(n-1)!}\Big(\mathrm{ad}_{\hat{e}_2}\Big)^{n-1}\hat{e}_1, \tag{0.0.9}$$

для которых выполняется при $n, m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left[\hat{H}_n^{(1)}, \hat{H}_m^{(1)}\right] = 0 \tag{0.0.10}$$

Это коммутирующее семейство порождает семейство 2-матричных моделей ВЛЖЖ, где $\bar{p}_k$ – это произвольные параметры модели

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k\hat{H}_k^{(1)}}{k}\right)\cdot 1 = \int_{N\times N} dXdY\ \exp\left(\mathrm{tr}\,XY + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k\mathrm{tr}\,X^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k\mathrm{tr}\,Y^k}{k}\right) \tag{0.0.11}$$

Коммутационные соотношения аффинного Янгиана явным образом зависят от двух параметров деформации. При тривиальном выборе данных параметров аффинный Янгиан вырождается в алгебру $W_{1+\infty}$ [63, 64], которая является бесконечномерной алгеброй Ли и тесно связана с классической интегрируемостью КП. При произвольном значении параметров деформации аффинный Янгиан является бесконечномерной ассоциативной алгеброй. Параметры деформации аффинного Янгиана несут интересный физический смысл. На уровне матричных моделей они соответствуют переходу от классического матричного интеграла к более общим β-ансамблям, интерполирующими между несколькими ансамблями матриц. Например, модели ВЛЖЖ являются классическими матричными моделями и порождаются операторами аффинного Янгиана с тривиальными параметрами деформации (случай $W_{1+\infty}$). При произвольном значении параметров деформации (случай β-деформации) семейство ВЛЖЖ обобщается до моделей собственных значений β-ВЛЖЖ [19, 22, 23] с сохранением свойства суперинтегрируемости и W-представления. При этом суперинтегрируемые полиномы Шура

для классических моделей ВЛЖЖ деформируются в полиномы Джека, в полном соответствии с теорией представлений аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$.

Более общий класс алгебр колчанных Янгианов появляется в теории струн IIA и суперсимметричных калибровочных теориях поля как БПС алгебры [65–69] для состояний БПС в системах D-бран, намотанных на трехмерные комплексные торические многообразия Калаби-Яу (случай $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ соответствует простейшему Калаби-Яу $\mathbb{C}^3$). В таком случае, БПС алгебры описывают эффективную теорию D-бран и классифицируются с помощью колчанов. Колчанная классификация включает в себя классическую аффинную классификацию с помощью диаграмм Дынкина и даже выходит за ее рамки, что дает надежду на построение новых интегрируемых систем в дополнение к тем, которые основаны на алгебрах Ли.

Аффинный Янгиан имеет богатый набор представлений, среди которых в данной работе нам будут интересны представления Фока и представление МакМахона. В таких представлениях векторы задаются двумерными и трехмерными диаграммами Юнга соответственно. Тем не менее, только информации о представлении недостаточно для того, чтобы установить связь с физическим системами. Для этого необходимо построить реализацию представления в терминах дифференциальных операторов некоторых переменных. В таком случае, векторы представления становятся выделенным базисом и соответствуют суперинтегрируемым полиномам χ в теории матричных моделей и семейству стационарных состояний в теории квантовых интегрируемых систем.

Кратко поясним, что понимается под реализацией представлений алгебры на простом примере $\mathfrak{sl}_2$. Рассмотрим конечномерные представления с базисными векторами $|n\rangle$, где $n = 0, 1, \ldots, \lambda$,

$$\hat{e}\ |n\rangle = n\,|n-1\rangle\,, \qquad \hat{h}\ |n\rangle = (\lambda - 2n)\,|n\rangle\,, \qquad \hat{f}\ |n\rangle = (\lambda - n)\,|n+1\rangle\,. \tag{0.0.12}$$

Тогда одна из возможных реализаций конечномерных представлений задается следующими формулами:

$$|n\rangle = x^n, \qquad \hat{e} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{h} = \lambda - 2x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{f} = \lambda x - x^2\frac{\partial}{\partial x}. \tag{0.0.13}$$

При верном выборе реализации представления алгебры устанавливается связь с физическими системами: коммутирующие семейства операторов аффинного Янгиана в реализации в терминах дифференциальных операторов становятся коммутирующим набором Гамильтонианов некоторых квантовых интегрируемых систем и W-операторами матричных моделей.

В данной работе мы развиваем методы, связывающие алгебраические структуры и физические системы в нескольких направлениях. Во первых, в заданной матричной модели мы анализируем возможность построить суперинтегрируемый базис корреляционных функций. Во вторых, мы поэтапно строим реализацию представления МакМахона для простейшего аффинного Янгиана, которая должна определить новый тип интегрируемых систем, связанный с трехмерными диаграммами Юнга. В третьих, мы развиваем методы построения реализаций представлений Фока для старших аффинных Янгианов, что позволит расширить теорию суперинтегрируемости на некоторые новые классы матричных моделей.

Цели и задачи исследования

Настоящая диссертация посвящена исследованию замечательных свойств корреляционных функций в точно решаемых моделях современной теоретической физики и исследованию алгебраических структур, которые описывают точное решение и отвечают за свойства корреляторов. В качестве примеров таких моделей рассмотрены матричные модели и трехмерная топологическая теория Черна-Саймонса. В исследовании ставились следующие задачи:

1. Исследовать явление суперинтегрируемости в матричных моделях и ее связь с бесконечномерными алгебрами – аффинными Янгианами.

2. Исследовать связь аффинных Янгианов в различных представлениях с квантовыми интегрируемыми системами с помощью реализаций в терминах дифференциальных операторов.

3. Исследовать свойства корреляторов в трехмерной теории Черна-Саймонса (инвариантов ХОМФЛИ) при помощи методов дифференциального разложения.

4. Развить методы получения точных аналитических формул для корреляторов в трехмерной теории Черна-Саймонса для различных представлений калибровочной группы.

Итого, основными объектами исследований являются: *дифференциальное разложение для инвариантов узлов*, основанное на теории представлений квантовых групп $U_q(\mathfrak{sl}_N)$; *полиномиальные представления аффинных Янгианов* $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ и связанные с ними структуры в теории матричных моделей и теории интегрируемых систем.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Построен алгоритм поиска суперинтегрируемого базиса корреляторов в некотором классе матричных моделей.

2. Построена явная реализация представления Фока для аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ в терминах дифференциальных операторов.

3. Вычислены полиномы 3-Шура, соответствующие трехмерным диаграммам Юнга вплоть до пятого уровня.

4. Найдено новое свойство дефекта дифференциального разложения цветных инвариантов ХОМФЛИ по отношению к эволюции в пространстве узлов.

5. Получены явные аналитические формулы для цветных инвариантов ХОМФЛИ для трехпараметрического семейства узлов крендельного типа.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются оригинальными и впервые получены в ходе научной работы автора диссертации. В частности, впервые сформулирован систематический способ поиска суперинтегрируемого базиса корреляторов в матричных моделях [VI]. В работах [III-IV] впервые предложена и проанализирована формула для обобщенного дифференциального оператора разрезания и склейки в случае представления МакМахона и впервые вычислены полиномы 3-Шура для трехмерных диаграмм Юнга, состоящих из 5 кубиков. Впервые найдены простые формулы в терминах полиномов Шура для дифференциальных операторов аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ и предложен алгоритм получения аналогичных формул для старших Янгианов $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ [V]. Впервые найдено и сформулировано свойство эволюции дефекта дифференциального разложения цветных полиномов ХОМФЛИ и впервые получены явные формулы для полиномов ХОМФЛИ в произвольном симметрическом представлении для семейства тройных анти-параллельных крендельных узлов [I-II].

Практическая и научная ценность

Исследования, представленные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Полученные результаты могут иметь применение в будущих исследованиях свойств статсумм матричных моделей и установлении более глубоких связей между статсуммами и бесконечномерными алгебрами. Разработанные в диссертации методы могут помочь в построении

новых квантовых интегрируемых систем. Полученные результаты по тематике топологической квантовой теории поля могут иметь практическую ценность в вопросе развития методов топологических квантовых вычислений. Полученные результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами в этой области, и могут быть применены для дальнейших теоретических исследований.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты, полученные в диссертации, были представлены на научных семинарах в Институте проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Московском физико-технический институте (национальный исследовательский университет), Национальном исследовательском центре «Курчатовский институт», Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Физическом институте имени П. Н. Лебедева РАН и Объединённом институте ядерных исследований.

Результаты были представлены на следующих конференциях:

- Конференция малых научных групп
  Международный Математический институт им. Эйлера, Санкт-Петербург, 2022
- Международная конференция «Fields and strings»
  Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, 2024
- Международный воркшоп «Problems of the Modern Mathematical Physics»
  Объединённом институте ядерных исследований, Дубна, 2024 и 2025
- Конференция по теоретической и экспериментальной физике для молодых ученых МКТЕФ-2024
  Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Протвино, 2024
- Конференция МФТИ
  Московский физико-технический институт, Долгопрудный, 2021,2024

По материалам диссертации опубликовано 6 статей в международных реферируемых журналах, индексируемых в базах Web of Science и Scopus.

Публикации по теме диссертации

- I. Morozov A., Tselousov N. Evolution properties of the knot's defect. // Eur. Phys. J. C 82, 787 (2022)
- II. Morozov A., Tselousov N., Differential Expansion for antiparallel triple pretzels: the way the factorization is deformed // Eur. Phys. J. C 82, 912 (2022)
- III. Morozov A., Tselousov N., Hunt for 3-Schur polynomials // Phys. Lett. B 840 (2023)
- IV. Morozov A., Tselousov N., 3-Schurs from explicit representation of Yangian $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$. Levels 1-5 // JHEP 11 (2023) 165
- V. Galakhov D., Morozov A., Tselousov N., Simple representations of BPS algebras: the case of $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ // Eur. Phys. J. C 84, 604 (2024)
- VI. Azheev B., Tselousov N., Towards construction of superintegrable basis in matrix models // Nucl. Phys. B 1018, (2025)

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Введение), четырех глав основного текста (Главы 1 – 4), заключения (Заключение) и одного приложений (А). Общий объем диссертации составляет 183 страницы, включая 25 рисунков и 21 таблицу. Список литературы содержит 210 ссылок.

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы; сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований; представлены выносимые на защиту научные положения.

В **главе 2** приведены результаты, относящиеся к трехмерной топологической теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ и соответствующим инвариантам узлов ХОМФЛИ. В работе рассматриваются инварианты ХОМФЛИ, раскрашенные симметрическими представлениями, диаграммы Юнга которых состоят из одной сточки $R = [r]$.

В **разделе 2.1** дано краткое определение метода дифференциального разложения, который основан на теоретико-групповых принципах и позволяет разложить инвариант по специальному базису функций. Такое разложение согласовано со всем известными симметриями полиномов ХОМФЛИ и имеет корректные пределы при конкретных значениях N.

В **разделе 2.2** приводится определение дефекта дифференциального разложения – целочисленного параметра, который отвечает за свойство факторизации коэффициентов дифференциального разложения. Приведены примеры лестничных диаграмм, которые описывают

количество дополнительных множителей для каждого уровня. Далее формулируется гипотеза об эволюции дефекта при смене количества перекрестков в диаграмме узла двумя возможными способами. После этого мы обсуждаем связь дефекта с фундаментальным полиномом Александера и анализируем скейн-соотношение. В следующих подразделах обсуждаются аргументы в пользу гипотезы об эволюции и обсуждаются возможные отклонения от гипотезы на конкретных примерах. В конце раздела приводится ряд методов, с помощью которых можно осуществлять проверки гипотезы об эволюции дефекта в различных семействах узлов, включая узлы, выходящие за пределы древесного семейства (одно-петлевые узлы).

В **разделе 2.3** мы обсуждаем семейство узлов нулевого дефекта, которое имеет наиболее простую форму дифференциального разложения. Это семейство крендельных узлов задается тремя целочисленными параметрами. Мы анализируем коэффициенты дифференциального разложения и находим общую формулу для произвольного представления, которая дается суммой факторизованных величин.

В **разделе 2.4** мы производим нетривиальные проверки полученных нами формул с помощью свойства факторизации полиномов ХОМФЛИ в корнях единицы. Рассматривается случай $q = 1$ и $q = i$.

В **разделе 2.5** мы предлагаем интерпретацию полученных формул как нового $\mathcal{C}$-полинома для твистованных узлов, который действует одновременно в пространстве представления и пространстве твистованных накруток.

В **разделе 2.6** мы обсуждаем полученные в данной главе результаты.

В **главе 3** обсуждается свойство суперинтегрируемости корреляционных функций в матричных моделях.

В **разделе 3.1** в деталях разбирается пример Гауссовой Эрмитовой модели, на котором видно, как между собой связаны W-представление, полиномы Шура и свойство суперинтегрируемости. В конце данного раздела мы кратко обсуждаем модели семейства ВЛЖЖ и соответствующие β-ансамбли, которые естественным образом определяются с помощью коммутирующего семейства операторов аффинного Янгиана.

В **разделе 3.2** мы определяем алгоритм, который может определить суперинтегрируемый базис в некотором классе матричных моделей. Алгоритм состоит из трех шагов: поиск подходящей системы диаграмм, которые будут нумеровать базисные полиномы; решение системы уравнений для правила добавления и удаления клеток в диаграмме (правила Пьера); поиск простейшего диагонального оператора для базисных полиномов, который мы называем Гамильтонианом. Мы демонстрируем тонкости нашего алгоритма на примере Гауссовой Эрмитовой модели и далее применяем его к кубической модели Концевича.

В **разделе 3.3** мы кратко обсуждаем полученные в данной главе результаты.

В **главе 4** мы обсуждаем свойства простейшего аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$, который является скрытой симметрией матричных моделей ВЛЖЖ.

В **разделе 4.1** мы приводим базовые определения и обсуждаем коммутационные соотношения аффинного Янгиана в терминах мод и в терминах производящих функций. Далее мы обсуждаем набор из трех образующих и некоторые коммутирующие семейства данной алгебры, которые важны для нашего изложения.

В **разделе 4.2** мы обсуждаем представление Фока аффинного Янгиана, базисные векторы которого находятся в однозначном соответствии с диаграммами Юнга. Мы приводим формулы для производящих функций собственных значений диагональных операторов в этом представлении и обсуждаем соотношения гистерезиса для матричных коэффициентов операторов. В конце раздела мы обсуждаем важный частный случай – реализацию представления Фока при фиксированном значении параметров Янгиана на полиномах Шура, при этом генераторы алгебры являются дифференциальными операторами от бесконечного набора временных переменных.

В **разделе 4.3** мы обсуждаем реализацию представления Фока для произвольного значения параметров алгебры на полиномах Джека, которые являются деформацией полиномов Шура. Мы приводим два различных определения полиномов Джека, различающихся выбором общих нормировочных множителей. В конце раздела мы формулируем связь Фоковского представления аффинного Янгиана и квантовой интегрируемой системы Калоджеро-Сазерленда с тригонометрическим потенциалом.

В **разделе 4.4** мы формулируем определение более сложного представления аффинного Янгиана – представления МакМахона, векторы которого соответствуют трехмерным диаграммам Юнга.

В **разделе 4.5** мы обсуждаем возможность построения полиномиальной реализации представления МакМахона, которая будет соответствовать новой системе ортогональных полиномов 3-Шура. Мы предлагаем анзац для набора образующих генераторов аффинного Янгиана и явно строим представление алгебры вплоть до 6 уровня, что является нетривиальной проверкой нашего анзаца.

В **разделе 4.6** мы кратко обсуждаем полученные в данной главе результаты.

В **главе 5** мы обсуждаем построение полиномиальных реализаций для более сложных аффинных Янгианов $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$, которые будут соответствовать полиномам Углова ранга r. Мы выписываем все формулы для простейшего нетривиального случая $r = 2$, обобщение на случай старших r выполняется аналогично.

В **разделе 5.1** мы кратко напоминаем определение полиномов Углова и разрабатываем наш основной метод работы со старшими Янгианами – технику разложения по полиномам Шура. Мы демонстрируем эту технику на примере простейшего Гамильтониана для полиномов Макдональда.

В **разделе 5.2** мы даем определение коммутационным соотношениям старшего аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ и обсуждаем его набор образующих генераторов.

В **разделе 5.3** мы строим представление Фока для старших аффинных Янгианов $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$, которые будут соответствовать раскрашенным диаграммам Юнга. Во второй части раздела мы анализируем возможность выразить временные переменные через генераторы Янгиана и кратко обсуждаем полученные результаты.

В **разделе 5.4** мы строим полиномиальную реализацию аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ пользуясь техникой разложения в базисе полиномов Шура. Сначала мы анализируем более простой случай $\beta = 1$. В данном случае ответы для генераторов даются суммами только по однокрюковым диаграммам Юнга. Во второй части раздела мы анализируем случай общего β и приводим явные формулы для генераторов из набора образующих.

В **разделе 5.5** мы кратко обсуждаем полученные в данной главе результаты.

В **главе 6** сформулированы основные результаты диссертации.

В **Приложении А** приведены все необходимые формулы для вычисления цветных инвариантов ХОМФЛИ (симметрические представления) для древесных узлов.

Глава 1

Теория Черна-Саймонса и квантовые инварианты узлов

Теория Черна-Саймонса [70] в трехмерном пространстве $\mathcal{M}$ с калибровочной группой Ли G определяется следующим действием

$$S_{CS}[\mathcal{A}] = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{A}\wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}. \tag{1.0.1}$$

Калибровочное поле $\mathcal{A}_\mu$ раскладывается по генератором T^a соответствующей алгебры Ли $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}^a_\mu(x)T^a$. В данной работе рассматривается случай трехмерной сферы $\mathcal{M} = S^3$ и калибровочных групп $G = SU(N)$. На параметр κ, который обычно называют уровнем, накладывается условие целочисленности из условия калибровочной инвариантности амплитуды $e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]}$ в функциональном интеграле.

Данная квантовая теория была впервые предложена как инструмент для изучения топологических инвариантов в работах [71, 72]. Вскоре в 1989 году в своей знаменитой работе [1] Э.Виттен показал, квантовые коррелляторы выделенного класса калибровочно-инвариантных операторов – петель Вильсона

$$W_R(\mathcal{K}) = \mathrm{tr}_R\,\mathrm{Pexp}\Big(i\oint_{\mathcal{K}}\mathcal{A}\Big), \qquad \langle W_R\rangle(\mathcal{K}) = \int [D\mathcal{A}]\; W_R(\mathcal{K})\; e^{iS_{CS}[\mathcal{A}]} \tag{1.0.2}$$

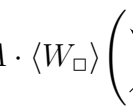
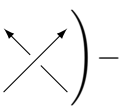
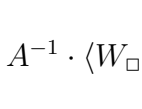
совпадают с полиномиальным топологическим инвариантом контура $\mathcal{K}$, который был открыт В.Джонсом [73]. Более точно, квантовые средние от операторов петель Вильсона в случае калибровочной группы $SU(2)$ и фундаментального представления $R = [1]$ совпадают

с полиномом Джонса в специальной точке, которая зависит от параметра теории κ

$$\langle W_{\square}^{SU(2)} \rangle (\mathcal{K}) = \tilde{J}^{\mathcal{K}} \left(q = e^{\frac{2\pi i}{\kappa+2}} \right). \tag{1.0.3}$$

Важным достижением работы Э.Виттена стало точное непертурбативное вычисление корреляторов с помощью методов конформной теории поля [1]. С тех пор теория ЧС занимает важное место в современной теоретической и математической физике, предоставляя глубокие связи между квантовой теорией поля, геометрией и теорией узлов.

Свойство полиномиальности корреляторов в простейшем случае фундаментального представления легко видеть с помощью скейн-соотношений, которые связывают корреляционные функции относящиеся к разным, но похожим контурам. В самом простом случае фундаментального представления, соответствующего диаграмме Юнга $\square$, калибровочной группы $SU(N)$ (такой более общий инвариант носит название ХОМФЛИ [74]) скейн-соотношение связывает между собой три различных контура, которые отличаются лишь в одной локальной окрестности

$A \cdot \langle W_{\square} \rangle$  $- \ A^{-1} \cdot \langle W_{\square} \rangle$  $= (q - q^{-1}) \cdot \langle W_{\square} \rangle$ 

. (1.0.4)

Коэффициенты при разных контурах выражаются через параметры теории $q = e^{\frac{2\pi i}{\kappa+N}}$, $A = q^N = e^{\frac{2\pi N i}{\kappa+N}}$. С помощью конечного числа применений скейн-соотношения произвольный контур можно связать с тривиальным контуром, который является окружностью $\bigcirc$. Тем самым, легко видеть, что коррелятор произвольного контура является полиномом Лорана двух переменных q, A с точностью до общей нормировки, которая задается значением коррелятора от окружности $\langle W_{\square} \rangle (\bigcirc)$.

В данной работе мы исследуем корреляционные функции в теории с калибровочным группами $SU(N)$ и рассматриваем N как еще один параметр теории наряду с уровнем κ. Тогда квантовое среднее будет выражаться как цветной полиномиальный инвариант ХОМФЛИ $H_R^{\mathcal{K}}(q, A)$ в специальной точке:

$$\frac{\langle W_R^{SU(N)} \rangle (\mathcal{K})}{\langle W_R^{SU(N)} \rangle (\bigcirc)} = H_R^{\mathcal{K}} \left(q = e^{\frac{2\pi i}{\kappa+N}}, A = e^{\frac{2\pi i N}{\kappa+N}} \right) \tag{1.0.5}$$

Мы нормируем коррелятор для узла $\mathcal{K}$ на соответствующий коррелятор тривиального узла $\bigcirc$, чтобы получить редуцированный полином ХОМФЛИ.

На сегодняшний день разработано множество эффективных методов [15, 16, 75–79] вычисления цветных инвариантов ХОМФЛИ, большинство из которых базируются на теории представлений квантовых групп. Для нашей работы будет необходимо вычислять цветные полиномы ХОМФЛИ для симметрических представлений $[r]$. Все необходимые для этого формулы мы приводим в Приложении А.

1.1 Дифференциальное разложение

В теории дифференциального разложения рассматриваются только редуцированные полиномы ХОМФЛИ [1], которые удовлетворяют условию тривиальности ХОМФЛИ для тривиального узла и любого представления R

$$H_R^{\bigcirc}(A, q) = 1. \tag{1.1.1}$$

ХОМФЛИ являются аналитически продолженными матричными элементами или взвешенными следами произведений $\mathcal{R}$-матриц в некотором представлении R квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}_N)$. Соответственно, ХОМФЛИ наследуют свойства из теории представлений квантовых групп. Мы перечислим основные:

- ХОМФЛИ — это аналитическое продолжение квантовых инвариантов $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ по рангу N алгебр. Редукция к конкретным значениям N осуществляется при подстановке

  $$A = q^N. \tag{1.1.2}$$

  Например, если положить $A = q^2$ в выражении для ХОМФЛИ в фундаментальном представлении, мы получим классический полином Джонса

  $$H_{[1]}^{\mathcal{K}}\left(A = q^2, q\right) = J^{\mathcal{K}}(q). \tag{1.1.3}$$

- Для заданного N теория конечномерных представлений $\mathfrak{sl}_N$ и $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ применима только для диаграмм Юнга R с не более чем N строками, т.е. $l_R \leqslant N$. Мы не будем обсуждать детально "нефизическую" область $l_R > N$.

  Тем не менее, отметим, что для ХОМФЛИ такой "нефизический" предел легко взять, если для заданной диаграммы Юнга R рассмотреть $A = q^N$, где $N < l_R$. Для редуци-

[1] Далее мы иногда будем опускать слово "полиномы"для простоты.

рованных ХОМФЛИ такой предел хорошо определен и представляет большой интерес. Например, в этой области обнаружена симметрия перетягивания крюка и свойство стабильности [80–82].

- Транспонирование диаграммы Юнга $R \longrightarrow R^T$ эквивалентно подстановке $q \longrightarrow q^{-1}$ для любого узла

$$H_R^{\mathcal{K}}(A,q) = H_{R^T}^{\mathcal{K}}(A,q^{-1}), \qquad R = \quad \longleftrightarrow \quad = R^T. \tag{1.1.4}$$



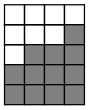


Из этого свойства, например, можно вывести следующее тождество для фундаментального представления

$$H_{[1]}^{\mathcal{K}}(A,q) = H_{[1]}^{\mathcal{K}}\left(A,q^{-1}\right). \tag{1.1.5}$$

- Сопряжение диаграммы Юнга $R \longrightarrow \overline{R}$ является симметрией ХОМФЛИ. Преобразование диаграммы Юнга относительно данной симметрии зависит от ранга N, например $N = 5$

$$H_R^{\mathcal{K}}(A,q) = H_{\overline{R}}^{\mathcal{K}}(A,q), \qquad R = \quad \longleftrightarrow \quad = \overline{R}. \tag{1.1.6}$$





Используя вышеперечисленные теоретико-групповые свойства, мы можем *существенно* ограничить возможную форму ХОМФЛИ для симметрических представлений $[r]$. В дальнейшем мы будем использовать стандартные сокращения [2]:

$$\{x\} := x - x^{-1}, \qquad [k]_q := \frac{\{q^k\}}{\{q\}}. \tag{1.1.7}$$

Случай $N = 1$ является вырожденным, а соответствующая теория представлений тривиальна. В частности, это означает, что для любого узла и любого представления $l_R \leqslant 1$ (т.е. для симметрических представлений $R = [r]$) выполнено

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}}(A = q, q) = 1. \tag{1.1.8}$$

Из этого следует, что полином $H_{[r]}^{\mathcal{K}}(A,q) - 1$ делится на $(A - q)$

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}}(A,q) - 1 \vdots (A - q). \tag{1.1.9}$$

[2] Мы надеемся, что злоупотребление обозначениями для симметрических представлений $[r]$ и квантовых чисел $[k]_q$ не вызовет путаницы.

На самом деле, верно более сильное утверждение

$$H^{\mathcal{K}}_{[r]}(A,q) - 1 \vdots (A-q)(A+q), \tag{1.1.10}$$

что является прямым следствием того, что в наших определениях ХОМФЛИ являются функциями A^2 и q^2, т.е. выполняется

$$H^{\mathcal{K}}_{R}(\pm A, \pm q) = H^{\mathcal{K}}_{R}(A,q). \tag{1.1.11}$$

В результате можно сделать следующее утверждение

$$\boxed{H^{\mathcal{K}}_{[r]}(A,q) - 1 \vdots \{A/q\}.} \tag{1.1.12}$$

В дальнейшем мы не будем повторять данных рассуждений явно и сразу будем писать делимость на множители вида $\{A/q\}$, которые сразу учитывают зависимость ХОМФЛИ только от A^2 и q^2. Далее, используя свойства ХОМФЛИ при транспонировании диаграмм Юнга, можно написать аналогичное утверждение для анти-симметрических представлений $R = \underbrace{[1,\ldots,1]}_{r} = [1^r]$

$$H^{\mathcal{K}}_{[1^r]}(A,q) - 1 \vdots \{Aq\}. \tag{1.1.13}$$

Ограничения для симметрических и анти-симметрических представлений справедливы одновременно для фундаментального представления $R = [1]$, и поэтому мы имеем

$$H^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q) - 1 \vdots \{Aq\}\{A/q\}, \tag{1.1.14}$$

что эквивалентно следующей записи с некоторой функцией $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q)$

$$\boxed{H^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q) = 1 + \mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q)\cdot\{Aq\}\{A/q\}.} \tag{1.1.15}$$

Это простейший пример *дифференциального разложения* (ДР) [82–94] (также известного как циклотомическое разложение [95–103]). Мы подробно разберем случай первого симметрического представления $R = [2]$, далее конструкция обобщается аналогичным образом для любого симметрического представления $R = [r]$.

Для $N = 2$ первое анти-симметрическое представление $R = [1,1]$ тривиально

$$H^{\mathcal{K}}_{[1,1]}(A,q) - 1 \vdots \{A/q^2\} \qquad \Longrightarrow \qquad H^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q) - 1 \vdots \{Aq^2\}. \tag{1.1.16}$$

Объединяя этот результат с (1.1.12), получаем

$$H^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)-1 \vdots \{Aq^2\}\{A/q\} \qquad \Longrightarrow \qquad H^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)=1+\{Aq^2\}\{A/q\}\cdot T^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q) \tag{1.1.17}$$

с некоторой вспомогательной функцией $T^{\mathcal{K}}_{[2]}$. Далее используем соотношение из теории представления $N=3$ (сопряженные представления) $[1,1]\approx[1]$

$$H^{\mathcal{K}}_{[1,1]}(A,q)-H^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q) \vdots \{A/q^3\} \qquad \Longrightarrow \qquad H^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)-H^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q) \vdots \{Aq^3\}. \tag{1.1.18}$$

Объединим условия (1.1.17),(1.1.18) и воспользуемся тождеством $[2]_q\{Aq^2\}=\{Aq\}+\{Aq^3\}$, чтобы получить условие на функцию $T^{\mathcal{K}}_{[2]}$

$$T^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)-[2]_q\cdot\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q) \vdots \{Aq^3\}. \tag{1.1.19}$$

Данное условие позволяет нам выразить ХОМФЛИ для симметрического $R=[2]$ через уже упомянутую функцию $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q)$ и некоторую новую функцию $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)$

$$H^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)=1+[2]_q\cdot\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q)\cdot\{Aq^2\}\{A/q\}+\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)\cdot\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A/q\}. \tag{1.1.20}$$

Для старших симметрических представлений $R=[r]$ мы будем производить аналогичные манипуляции, что и для $R=[2]$. На каждом шаге мы будем пользоваться свойствами теории представлений для анти-симметрических представлений (сопряженные представления) $[1^r]\approx[1^{N-r}]$, записывая условия на делимость для ХОМФЛИ и затем разрешая получившуюся систему. Следуя этому методу, по индукции можно доказать формулу дифференциального разложения (ДР) для общего симметрического представления $R=[r]$ [92]

$$H^{\mathcal{K}}_{[r]}(A,q)=1+\sum_{s=1}^{r}\frac{[r]_q!}{[s]_q![r-s]_q!}\cdot\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[s]}(A,q)\cdot\{A/q\}\prod_{i=0}^{s-1}\{Aq^{r+i}\}. \tag{1.1.21}$$

За пределами симметрического семейства представлений структура дифференциального разложения становится более сложной, см. [84–88, 93, 94, 97]. Из формулы ДР (1.1.21) видно, что зависимость от узла – топологическую информацию – несут только коэффициенты ДР $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[s]}(A,q)$, тогда как другие составляющие ХОМФЛИ не помогают различать узлы.

Интересно, что для каждого симметрического представления $[r]$ существует ровно r коэффициентов ДР, большинство из которых $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[s]}(A,q)$ $s=1,\ldots,r-1$ могут быть вычислены в меньших представлениях, и только одно $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[r]}(A,q)$ является новым. Другими словами

$\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[1]}(A,q)$ характеризует фундаментальное представление [1], $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[2]}(A,q)$ характеризует первое симметрическое [2] и так далее.

1.2 Дефект дифференциального разложения

Для узлов $\mathcal{K}$ общего вида формула ДР (1.1.21) — это наибольшее упрощение, которое можно получить из наивных групповых рассуждений. Однако иногда, например, для узла восьмерка 4_1 или трилистника 3_1, наблюдается дальнейшее упрощение формулы

$$H^{\mathcal{K}_0}_{[r]}(A,q) = 1 + \sum_{s=1}^{r} \frac{[r]_q!}{[s]_q![r-s]_q!} \cdot \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[s]}(A,q) \cdot \prod_{i=0}^{s-1} \{Aq^{r+i}\}\{Aq^{i-1}\}. \tag{1.2.1}$$

Другими словами, коэффициенты ДР $\mathbf{F}^{\mathcal{K}_0}_{[s]}$ упрощаются (факторизуются) для конкретных узлов

$$\mathbf{F}^{\mathcal{K}_0}_{[s]} = \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[s]} \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \{Aq^{i-1}\}. \tag{1.2.2}$$

Мы будем говорить, что узлы $\mathcal{K}_0$, удовлетворяющие свойству (1.2.2), имеют *дефект ДР равный нулю* $\delta^{\mathcal{K}} = 0$ [82]. Для более общего (сложного) узла факторизация $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}$ является лишь частичной

$$\mathbf{F}^{\mathcal{K}_\delta}_{[s]}(A,q) = \mathcal{F}^{\mathcal{K}_\delta}_{[s]}(A,q) \cdot \prod_{i=1}^{\nu^\delta_s} \{Aq^{i-1}\}, \tag{1.2.3}$$

и *дефект* δ может принимать любое неотрицательное целое значение [82]. В данной формуле произведение ведется до некоторого значения ν^δ_s, определяемого с помощью дефекта δ следующим образом

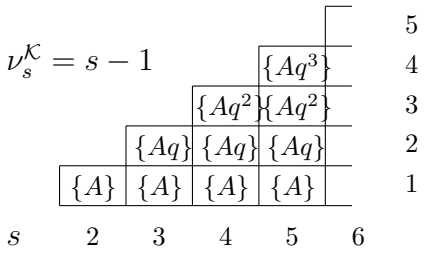
$$\nu^\delta_s = \mathrm{IntPart}\left(\frac{s-1}{\delta+1}\right), \tag{1.2.4}$$

где IntPart обозначает целую часть. Формулы (1.2.3) и (1.2.4) иллюстрируют гипотезу, что *для узла $\mathcal{K}$ можно определить одно неотрицательное число $\delta^{\mathcal{K}}$, измеряющее факторизацию коэффициентов ДР*. Несмотря на то, что данная гипотеза оказывается верной в многочисленных примерах, мы наблюдаем определенные аномалии для узлов с единичным полиномом Александера и обсуждаем это в разделе 1.2.2.

Число дополнительных скобок можно представить в виде своеобразной лестничной диа-

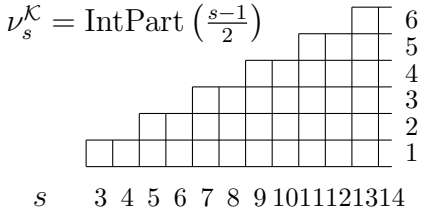
граммы

$\delta^{\mathcal{K}} = 0$:



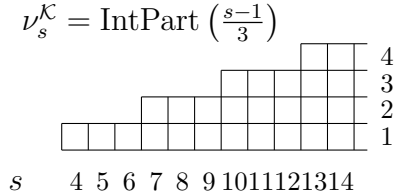
(1.2.5)

$\delta^{\mathcal{K}} = 1$:



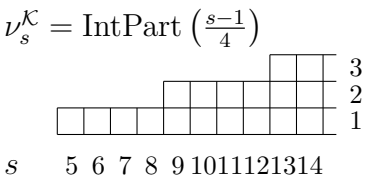
(1.2.6)

$\delta^{\mathcal{K}} = 2$:



(1.2.7)

$\delta^{\mathcal{K}} = 3$:



(1.2.8)

...

Каждый блок в диаграмме соответствует определенным скобкам вида $\{Aq^k\}$, как детально указано в примере нулевого дефекта (1.2.5). Мы приводим значения дефекта для нескольких простых семейств узлов. Для анти-параллельных[3] крендельных узлов $(\overline{N_1}, \ldots, \overline{N_k})$ для нечетных N_i и нечетных k, где N_i – это количество пересечений в каждой двухнитевой косе

$$\delta^{(\overline{N_1},\ldots,\overline{N_k})} = \frac{k-3}{2}. \tag{1.2.9}$$

Это семейство крендельных узлов содержит все твистованные узлы $(\overline{N_1}, \overline{1}, \overline{1})$ и двойные косы $(\overline{N_1}, \overline{N_2}, \overline{1})$, для которых дефект равен нулю. Семейство торических узлов $T[M, N]$ для

[3]Числа с чертой сверху $\overline{N}$ означают анти-параллельную косу длины N в нашей нотации крендельных узлов.

$M, N > 0$ имеет следующие дефекты

$$\delta^{T[M,N]} = \frac{MN - M - N - 1}{2}. \tag{1.2.10}$$

Более сложные примеры обсуждаются в разделе 1.2.5.

Каждый конкретный узел $\mathcal{K}$ имеет определенное значение дефекта, и это означает, что его формула ДР упрощается по сравнению с базовой теоретико-групповой формулой (1.1.21). Под упрощением мы подразумеваем факторизацию коэффициентов ДР. Например, для узла восьмерка 4_1 коэффициенты ДР полностью факторизуются:

$$\mathbf{F}^{4_1}_{[s]} = \prod_{i=1}^{s-1} \{Aq^{i-1}\} \tag{1.2.11}$$

Однако существуют узлы с произвольно большими дефектами, и дополнительная факторизация $\mathbf{F}^{\mathcal{K}}_{[s]}$ происходит только для больших значений s, начиная с $s_{\min} = \delta + 2$.

Для тривиального узла дефект не определен: все коэффициенты $\mathbf{F}^{\text{unknot}}_{[s]} = 0$, т. е. им можно задать любую степень факторизации. Поскольку (1.2.4) имеет очевидную сингулярность при $\delta = -1$, то выглядит естественным положить

$$\delta^{\bigcirc} \stackrel{?}{=} -1. \tag{1.2.12}$$

1.2.1 Гипотеза об эволюции дефекта

Анализ различных примеров, которые будут частично описаны в тексте ниже, приводит нас к следующей гипотезе, которую мы называем *гипотезой об эволюции дефекта*:

- **Дефект не меняется, когда любой перекресток в диаграмме узла заменяется анти-параллельной 2-косой любой нечетной длины**.
- **Когда длина любой параллельной 2-косы увеличивается на два, дефект изменяется на единицу**.

Другими словами, мы можем взять любой перекресток в диаграмме узла и заменить его тройным перекрестком двумя возможными способами. Тогда гипотеза иллюстрируется следующим Рис. 1.1.

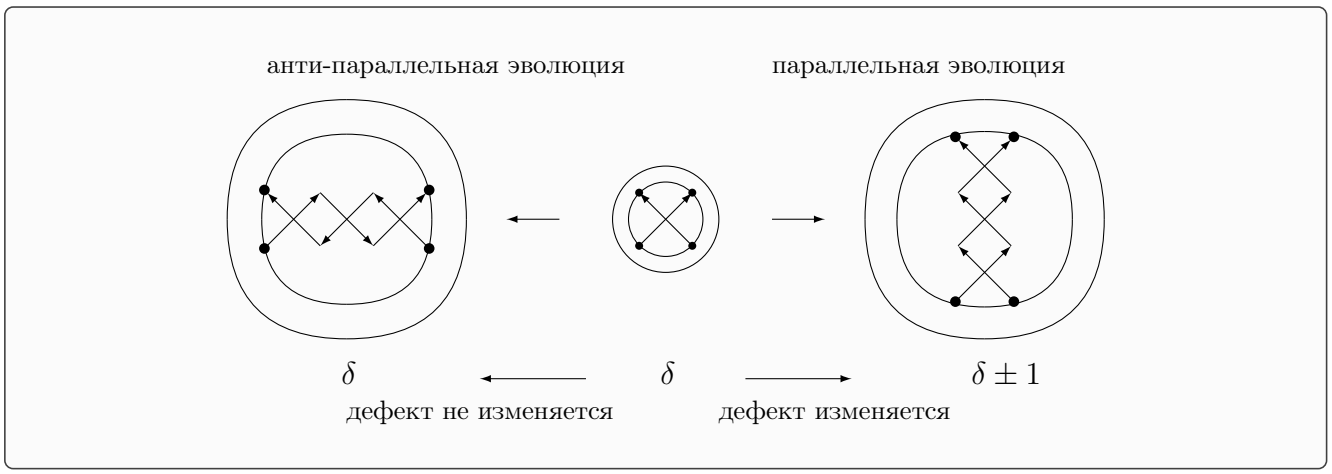


Рис. 1.1: Анти-параллельная и параллельная эволюция в пространстве узлов.

Замена одного перекрестка на два, а не на три, превращает узел в зацепление и в данной работе не рассматривается (напоминаем, что мы имеем дело с *редуцированными* ХОМФЛИ, которые для узлов и зацеплений определяются по-разному). Термин "эволюция" используется нами, чтобы подчеркнуть, что в результате операции наращивания 2-косы в общем случае получается отличный от исходного (более сложный) узел.

Два дополнительных комментария делают утверждение более точным:

- Заметим, что длина 2-косы является модулем параметра эволюции, поэтому при изменении знака параметра возникает неаналитичность дефекта. Мы разберем это явление на конкретных примерах в разделах 1.2.3 и 1.2.5.

- В случае анти-параллельной эволюции иногда возникает похожая неаналитичность, которая отражается в снижении дефекта на единицу для *одной* конкретной длины анти-параллельной косы, см. раздел 1.2.5.

1.2.2 Дефект и полином Александера

Как предполагалось в оригинальной статье [82] и позднее было доказано в [104], дефект $\delta_{\mathcal{K}}$ связан со степенью фундаментального полинома Александера

$$\mathrm{Al}^{\mathcal{K}}_{[1]}(q) = 1 + \{q\}^2 \cdot \mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_\delta}(q^2, q^{-2}), \tag{1.2.13}$$

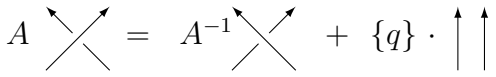
где $\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_\delta}$ — полином Лорана в переменных q^2 *степени* $\delta^{\mathcal{K}}$, симметричный относительно замены $q^2 \leftrightarrow q^{-2}$. Это наблюдение можно использовать как «альтернативное определение» дефекта. В частности, при $\delta^{\mathcal{K}} = 0$ коэффициент при $\{q\}^2$ в фундаментальном полиноме Александера сводится к константе. В общем случае

$$\delta^{\mathcal{K}} = \deg_{q^2}(\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_\delta}(q^2, q^{-2})). \tag{1.2.14}$$

Функция $\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_\delta}$ зависит от узла, и для узлов с тривиальным полиномом Александера $\mathrm{Al}_{[1]} = 1$ она зануляется. В [82] было предложено рассматривать такую ситуацию как дефект $\delta = -1$, но это оказывается *неправильной идеей*. Мы предлагаем заменить ее более жизнеспособной альтернативой: дефект является свойством *эволюционного семейства*, и некоторые коэффициенты $\mathbf{F}_{[s]}$ могут "случайно" иметь более сильную факторизацию при некоторых конкретных значениях параметров эволюции.

Примечательно, что во всех примерах дополнительная факторизация (1.2.24) не нарушает лестничные структуры (1.2.5) – (1.2.7), а просто расширяет список разрешенных лестничных структур сверх той, что в разделе 1.2. Что касается $\delta = -1$, то теперь мы резервируем это значение только для тривиального узла в соответствии с (1.2.12).

Поскольку соотношение (1.2.13) включает только фундаментальное представление, то мы можем применить скейн-соотношение ХОМФЛИ для анализа гипотезы об эволюции дефекта (1.1)



(1.2.15)

в конкретной точке $A = 1$, тем самым сводя ХОМФЛИ к полиному Александера

$$H^{\mathcal{K}}_{[1]}(A = 1, q) = \mathrm{Al}^{\mathcal{K}}_{[1]}(q). \tag{1.2.16}$$

Мы можем применить скейн соотношение таким образом, что оно свяжет полиномы Александера для узлов, которые получаются друг из друга при помощи эволюции (см. Рис. 1.2 и Рис. 1.3).

Скейн соотношения для полинома Александера полезны при проверке гипотезы об эволюции дефекта ДР. Для анти-параллельной эволюции гипотеза верна, если второй член (он соответствует некоторому зацеплению из 2 компонент) имеет меньшую или равную степень, чем первый член в правой части. Аналогично, для параллельной эволюции второй член должен иметь большую степень, чем первый член в правой части. Для практических вычислений дефекта мы часто пользовались именно полиномом Александера.

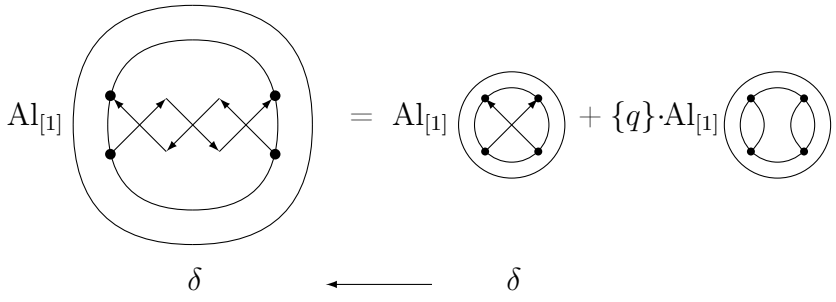


Рис. 1.2: Анти-параллельная эволюция не изменяет значение дефекта.

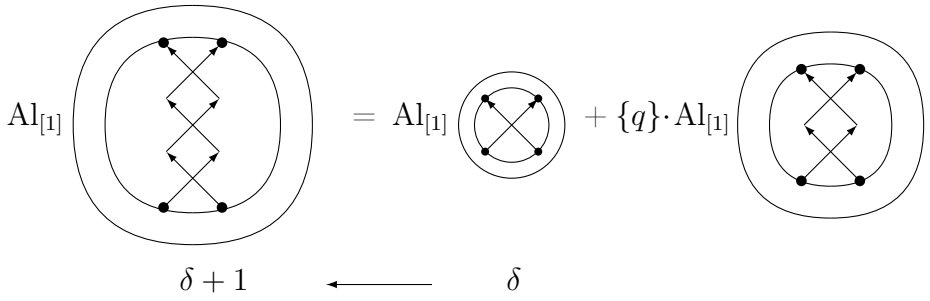


Рис. 1.3: Параллельная эволюция изменяет значение дефекта на единицу.

1.2.3 Базовые примеры

Тройные анти-параллельные крендельные узлы имеют нулевой дефект

В этом разделе мы рассматриваем семейство тройных анти-параллельных крендельных узлов $\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})$ (обозначение Pr от английского слова pretzel - крендель). Чтобы получить узел (а не зацепление), все три параметра N, M, L должны быть нечетными. Семейство содержит ранее изученные твистованные узлы и двойные косы как частные случаи $\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{1},\overline{1})$ и $\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{1})$. Все семейство можно рассматривать как тройную анти-параллельную эволюцию трилистника: каждая из трех матриц $\mathcal{R}$ заменяется анти-параллельной косой из 2 нитей.

Согласно древесной технике [15], ХОМФЛИ для анти-параллельных крендельных узлов в симметрических представлениях $R = [r]$ можно вычислить по следующей формуле

$$H_R^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}(A,q) = d_R^2 \sum_{X\in R\otimes R} \frac{\left(\bar{S}\bar{T}^N S\right)_{1X}\left(\bar{S}\bar{T}^M S\right)_{1X}\left(\bar{S}\bar{T}^L S\right)_{1X}}{\sqrt{d_X}} = d_R^2 \sum_{X\in R\otimes\bar{R}} \frac{\mathcal{A}^{\mathrm{ea}}_{1X}(\overline{N})\mathcal{A}^{\mathrm{ea}}_{1X}(\overline{M})\mathcal{A}^{\mathrm{ea}}_{1X}(\overline{L})}{\sqrt{d_X}}, \tag{1.2.17}$$

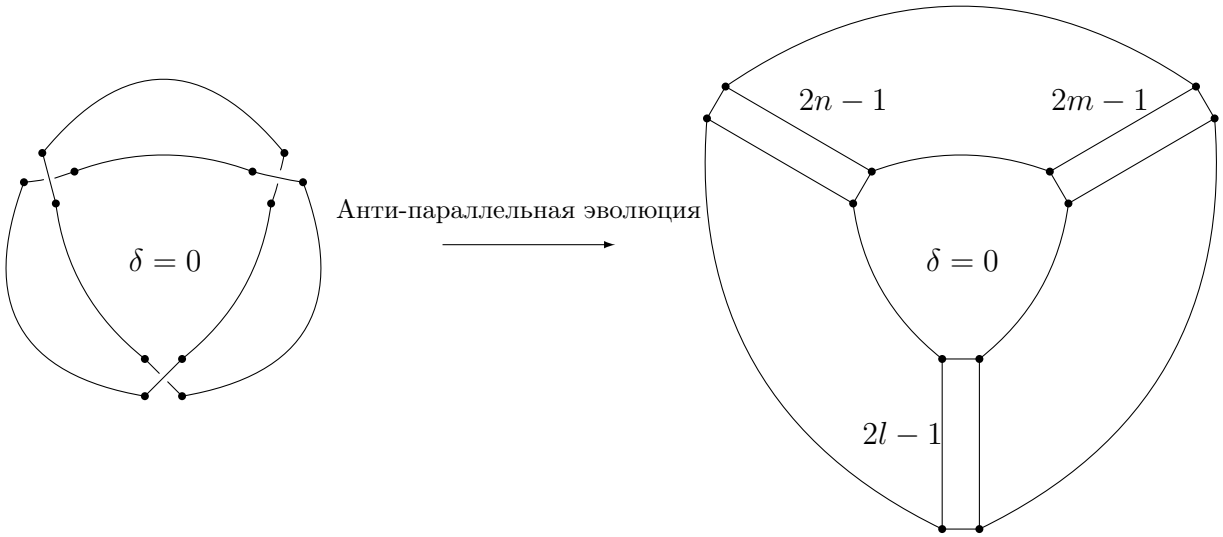


Рис. 1.4: Анти-параллельная эволюция из узла трилистник в тройной крендельный узел.

где d_X – это квантовые размерности представлений X. В последнем выражении мы использовали общепринятую нотацию для "пальцев" крендельного узла из раздела А.

Узлы этого семейства имеют нулевой дефект, в чем можно убедиться на конкретных примерах, вычислив формулы для ДР

$$
\begin{aligned}
&H^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[1]}(A,q) = 1 + \mathcal{F}^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[1]}(A)\cdot\{Aq\}\{A/q\},\\
&H^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[2]}(A,q) = 1 + [2]\cdot\mathcal{F}^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[1]}(A)\cdot\{Aq^2\}\{A/q\} + \mathcal{F}^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[2]}(A,q)\cdot\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A\}\{A/q\},\\
&\qquad\qquad\ldots\\
&H^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[r]}(A,q) = 1 + \sum_{s=1}^{r}\frac{[r]!}{[s]![r-s]!}\cdot\mathcal{F}^{\mathrm{Pr}(\overline{N},\overline{M},\overline{L})}_{[s]}(A,q)\cdot\prod_{j=0}^{s-1}\{Aq^{r+j}\}\{Aq^{j-1}\}.
\end{aligned}
\tag{1.2.18}
$$

Это простейшая иллюстрация и, по сути, источник нашей гипотезы о том, что *дефект не меняется при анти-параллельной эволюции.* Дополнительные комментарии о связи с «альтернативным определением» дефекта через степень полинома Александера представлены в разделе 1.2.2.

Анти-параллельные крендельные узлы как потомки 2-нитевых торических узлов

ХОМФЛИ для двунитевых торических узлов – это просто следы $\mathcal{R}$-матриц для параллельной 2- косы

$$H_{[r]}^{T[2n-1,2]} = d_{[r]} \cdot \left(ST^{2n-1}S^{\dagger}\right)_{11}. \tag{1.2.19}$$

Легко проверить, что значения дефектов удовлетворяют следующим формулам для узлов этого семейства

$$\delta^{T[2n-1,2]} = \begin{cases} n-2 & \text{for} \quad n \geq 2 \\ -n-1 & \text{for} \quad n \leq -1 \end{cases} = \left|n - \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2} = \frac{|2n-1|-3}{2}. \tag{1.2.20}$$

Специальные случаи $n = 0, 1$ соответствуют тривиальному узлу, и получается $\delta = -1$, что согласованно с нашей гипотезой (1.2.12). Трилистник соответствует значениям $n = -1, 2$ и имеет нулевой дефект. В предыдущем подразделе мы рассматривали трилистник как начальную точку для тройной анти-параллельной эволюции, теперь же он является начальной точкой параллельной эволюции.

Формула (1.2.20) является хорошей иллюстрацией "параллельной" части нашей гипотезы: *параллельная эволюция увеличивает дефект на единицу за каждую пару добавленных перекрестков*. Она также отражает основную тонкость этой формулировки: нарушение аналитичности дефекта как функции n через появление абсолютного значения (модуля) и наличие "слепой зоны" при $n = 0, 1$. Структура этих "слепых зон" станет более сложной в более общих примерах. Похожее явление нарушения аналитичности имеет место в эволюции для полиномов Хованова и суперполиномов [105–107], было бы интересно установить более четкую связь между этими случаями.

Этот пример (1.2.20) также хорошо объясняет дефекты нечетных анти-параллельных крендельных узлов (1.2.9): они получаются анти-параллельной эволюцией из 2-нитевых торических узлов. Другими словами, семейство анти-параллельных k-крендельных узлов имеет тот же дефект, что и торический узел $T[2n-1, 2]$ при условии $k = |2n-1|$

$$\delta^{T[2n-1,2]} = \delta^{\left(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \ldots, \overline{N}_{|2n-1|}\right)}. \tag{1.2.21}$$

Для наглядности мы приводим картину эволюции от $T[2,5]$ до $\left(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3, \overline{N}_4, \overline{N}_5\right)$ (см. Рис. 1.2.3).

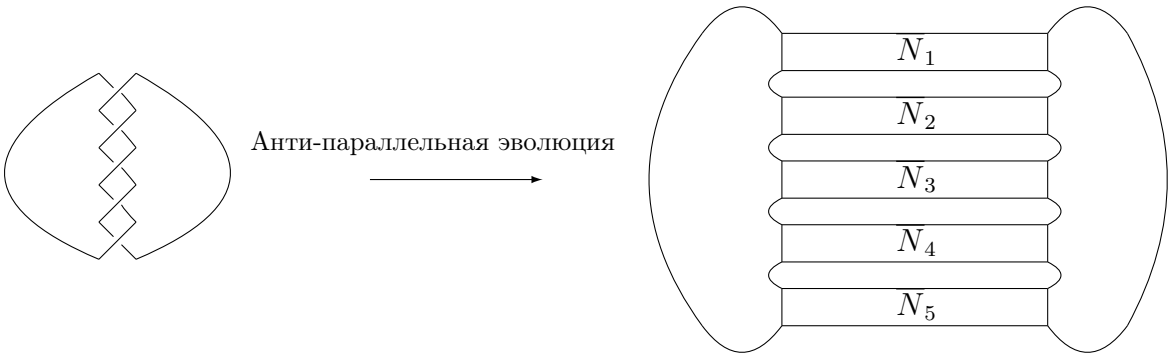


Рис. 1.5: Анти-параллельная эволюция двухнитевого торического узла.

1.2.4 Комментарии касательно полинома Александера

Вычисление дефекта ДР значительно упрощается, если использовать «альтернативное определение» дефекта 1.2.2 : для этого требуется вычислить только полином Александера в фундаментальном представлении. Этот метод действительно очень полезен в большинстве случаев [104], за исключением некоторых специальных случаев. Иногда дефект, «измеренный» этим методом, на самом деле меньше истинного, т.е. полином Александера имеет меньшую степень. Мы проиллюстрируем это явление на примере тройных крендельных узлов. Более сложные примеры будут приведены в разделе 1.2.5.

Нам потребуется фундаментальное представление ХОМФЛИ для тройных крендельных узлов, для которого коэффициент ДР дается следующей формулой

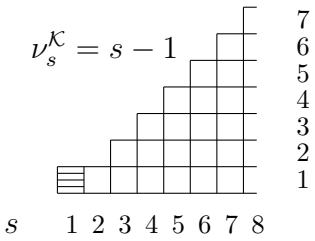
$$\mathcal{F}_{[1]}^{\Pr(\overline{2n-1},\overline{2m-1},\overline{2l-1})}(A) = -\frac{A^{2(n+m+l-1)} + A^{2(n+m+l-2)} - A^{2(n+m-1)} - A^{2(n+l-1)} - A^{2(m+l-1)} + 1}{\{A\}^2}. \tag{1.2.22}$$

Следовательно, полином Александера (предел $A \to 1$) имеет следующий простой вид

$$\mathrm{Al}_{[1]}^{\Pr(\overline{2n-1},\overline{2m-1},\overline{2l-1})} = 1 + (nm + nl + ml - m - n - l + 1) \cdot \{q\}^2. \tag{1.2.23}$$

Для общего случая параметров (n, m, l) полином Александера имеет вторую степень по q, следовательно $\delta^{\mathcal{K}} = 0$. Однако, можно настроить параметры узла (n, m, l) так, чтобы занулить коэффициент при втором члене. Например, это происходит для $\Pr(\overline{N}, \overline{M}, \overline{L}) = \Pr(-\overline{3}, \overline{5}, \overline{7})$, которому соответствует набор $(n, m, l) = (-1, 3, 4)$, т. е. $\mathbf{F}_{[1]}^{\Pr(-\overline{3},\overline{5},\overline{7})} \sim \{A\}$. Однако для других $\mathbf{F}_{[s]}^{\Pr(-\overline{3},\overline{5},\overline{7})}$ с $s > 1$ дополнительная факторизация не происходит, а остальная часть шаблона следует стандартному для дефекта ноль (1.2.5)

$\delta^{\mathcal{K}} = 0$:



(1.2.24)

В этом смысле дополнительная клетка на лестничной диаграмме в $s = 1$ просто *случайная*. Однако такие *случайности* делают технически удобное "альтернативное определение"дефекта через полином Александера 1.2.2 несколько ограниченным : ему нельзя полностью доверять, может потребоваться более тщательный анализ, включающий более высокие представления. В то же время, мы видим, что естественный способ борьбы с такими неоднозначностями для отдельных узлов заключается в рассмотрении целых эволюционных семейств.

Возвращаясь к крендельному узлу $\mathrm{Pr}(-\overline{3}, \overline{5}, \overline{7})$, отметим, что для этого узла в высших представлениях возникают некоторые дополнительные упрощения

$$\mathbf{F}_{[s]}^{\mathrm{Pr}(-\overline{3},\overline{5},\overline{7})}(A = 1) \sim \{q\}, \qquad\qquad s \geqslant 2. \tag{1.2.25}$$

Однако это не особо интересно — это прямое следствие факторизационного свойства *специального* полинома при $q = 1$ [108]

$$H_R(q = 1, A) = \Big(1 + \mathbf{F}_{[1]}(q = 1, A) \cdot \{A\}^2\Big)^{|R|}. \tag{1.2.26}$$

В этом случае зануление $\mathbf{F}_{[1]}(A = 1, q)$ подразумевает, что все $\mathbf{F}_{[s]}(A = 1, q) \sim \{q\}$.

На самом деле, $\mathrm{Pr}(-\overline{3}, \overline{5}, \overline{7})$ не является уникальной "случайностью" в семействе тройных кренделей. Существует много других решений для $l = -\frac{(m-1)(n-1)}{m+n-1} \in \mathbb{Z}$, например: $\mathrm{Pr}(-\overline{5}, \overline{9}, \overline{11})$, $\mathrm{Pr}(-\overline{5}, \overline{7}, \overline{17})$, $\mathrm{Pr}(-\overline{7}, \overline{9}, \overline{31})$, ... Однако дополнительные вырождения $\mathcal{F}_{[s]}$ с $s \geqslant 2$ никогда не встречаются в этой серии случайных нулей $\mathcal{F}_{[1]}(A = 1)$: лестничная диаграмма ДР всегда похожа на (1.2.24).[4] Однако, для некоторых других серий узлов могут происходить множественные вырождения, и лестничная диаграмма меняется существенно, как мы увидим в следующем разделе.

В поисках аномалий мы проверили дефекты для всех узлов до 11 пересечений с *квад-*

[4]Есть одно исключение — вся серия $\mathrm{Pr}(-\overline{1}, \overline{1}, \overline{2l-1})$ состоит из тривиальных узлов и все $F_{[s]}^{\mathrm{Pr}(-\overline{1},\overline{1},\overline{2l-1})} = 0$

ратичными полиномами Александера. Данные для узлов были взяты из замечательного источника [109] и собраны в таблице 1.1.

Узел $\mathcal{K}$	Крендельное обозн.	$\delta^{\mathcal{K}}$	$\mathrm{Al}^{\mathcal{K}}$	Узел $\mathcal{K}$	Крендельное обозн.	$\delta^{\mathcal{K}}$	$\mathrm{Al}^{\mathcal{K}}$
3_1	$\mathrm{Pr}\left(\overline{1},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1+\{q\}^2$	9_{46}	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{3},\overline{3},\overline{3}\right)$	0	$1-2\{q\}^2$
4_1	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{3},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1-\{q\}^2$	10_1	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{9},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1-4\{q\}^2$
5_2	$\mathrm{Pr}\left(\overline{3},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1+2\{q\}^2$	10_3	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{7},\overline{3},\overline{1}\right)$	0	$1-6\{q\}^2$
6_1	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{5},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1-2\{q\}^2$	$11a247$	$\mathrm{Pr}\left(\overline{9},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1+5\{q\}^2$
7_2	$\mathrm{Pr}\left(\overline{5},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1+3\{q\}^2$	$11a343$	$\mathrm{Pr}\left(\overline{7},\overline{3},\overline{1}\right)$	0	$1+8\{q\}^2$
7_4	$\mathrm{Pr}\left(\overline{3},\overline{3},\overline{1}\right)$	0	$1+4\{q\}^2$	$11a362$	$\mathrm{Pr}\left(\overline{5},\overline{3},\overline{3}\right)$	0	$1+10\{q\}^2$
8_1	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{7},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1-3\{q\}^2$	$11a363$	$\mathrm{Pr}\left(\overline{5},\overline{5},\overline{1}\right)$	0	$1+9\{q\}^2$
8_3	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{5},\overline{3},\overline{1}\right)$	0	$1-4\{q\}^2$	$11n67$	не 3-кренд. узел	0	$1-2\{q\}^2$
9_2	$\mathrm{Pr}\left(\overline{7},\overline{1},\overline{1}\right)$	0	$1+4\{q\}^2$	$11n97$	не 3-кренд. узел	0	$1-2\{q\}^2$
9_5	$\mathrm{Pr}\left(\overline{5},\overline{3},\overline{1}\right)$	0	$1+6\{q\}^2$	$11n139$	$\mathrm{Pr}\left(\overline{5},\overline{3},-\overline{3}\right)$	0	$1-2\{q\}^2$
9_{35}	$\mathrm{Pr}\left(\overline{3},\overline{3},\overline{3}\right)$	0	$1+7\{q\}^2$	$11n141$	$\mathrm{Pr}\left(-\overline{5},\overline{3},\overline{3}\right)$	0	$1-5\{q\}^2$

Таблица 1.1: В таблице приведены данные для узлов с квадратичными полиномами Александера.

1.2.5 Более сложные примеры

Крендельные узлы типа $\mathbf{Pr}\left(N,M,\overline{K}\right)$

Однопараметрическое семейство узлов $\mathrm{Pr}(3,3,\overline{2k})$ с двумя параллельными и одним антипараллельным "пальцами" описывается формулой

$$H_R^{\mathrm{Pr}(3,3,\overline{2k})}=d_R^2\sum_{X\in R\otimes\bar{R}}\frac{\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{par}}(3)\,\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{par}}(3)\,\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{ea}}(\overline{2k})}{\sqrt{d_X}} \tag{1.2.27}$$

и имеет дефект $\delta^{\mathrm{Pr}(3,3,\overline{2k})}=2$ для всех значений k, кроме $k=0$. Это иллюстрирует *антипараллельную инвариантность дефекта.*

В случае $k=0$ получается композитный узел, являющийся прямой суммой двух трилистников. Дефект композитного узла существенно отличается от дефекта составляющих его узлов. Явное выражение мы можем получить вычислив полином Александера. Поскольку редуцированный ХОМФЛИ для композитного узла является произведением ХОМФЛИ

для двух составляющих его узлов, то же самое верно для полиномов Александера

$$\begin{aligned}\mathrm{Al}^{\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} = \mathrm{Al}^{\mathcal{K}_1}\cdot\mathrm{Al}^{\mathcal{K}_2} \overset{(1.2.13)}{=} \left(1+\{q\}^2\cdot\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_1}}\right)\left(1+\{q\}^2\cdot\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_2}}\right) = \\ = 1+\{q\}^2\cdot\left(\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_1}}+\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_2}}+\{q\}^2\cdot\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_1}}\cdot\mathrm{Pol}^{\mathcal{K}_{\delta_2}}\right),\end{aligned} \tag{1.2.28}$$

следовательно мы получаем закон сложения дефектов

$$\delta^{\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} = \delta^{\mathcal{K}_1}+\delta^{\mathcal{K}_2}+1. \tag{1.2.29}$$

Для нашего конкретного примера $\mathrm{Pr}(3,3,0)$ это означает, что $\delta^{\mathrm{Pr}(3,3,0)}=1$, т. е. дефект *случайно* падает с 2 до 1 для конкретного члена семейства $k=0$. Для произвольного узла из семейства $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,\overline{2k})$ верна следующая формула

$$H_R^{\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,\overline{2k})} = d_R^2\sum_{X\in R\otimes\bar{R}}\frac{\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{par}}(2n-1)\,\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{par}}(2m-1)\,\mathcal{A}_{1X}^{\mathrm{ea}}(\overline{2k})}{\sqrt{d_X}}. \tag{1.2.30}$$

В этом случае дефект равен следующему значению

$$\delta^{\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,\overline{2k})} = n+m-2, \qquad\qquad n,m\geqslant 1, \tag{1.2.31}$$

т.е. *не зависит от анти-параллельной эволюции и линейно зависит от параллельной*. Это полностью соответствует нашему общей гипотезе об эволюции дефекта.

Для более общего члена семейства в случае $k=0$ мы снова получаем прямую сумму двух 2-нитевых торических узлов $T[2n-1,2]$ и $T[2m-1,2]$, а из (1.2.29) и (1.2.20) дефект равен $n+m-3$ (для $n,m\geqslant 1$), т.е. при $k=0$ происходит случайное уменьшение дефекта на единицу. В частном случае $\mathrm{Pr}(1,1,\overline{2k})$ при $k=0$ прямая сумма двух тривиальных узлов является тривиальным узлом, и наша формула согласуется с гипотезой $\delta^{\mathrm{unknot}}=-1$, предложенной в (1.2.12).

Если параметры n или m не являются положительными числами, то формула (1.2.31) становится немного сложнее

$$\delta^{\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,\overline{2k})} = \left|n-\frac{1}{2}\right|+\left|m-\frac{1}{2}\right|+\frac{\mathrm{sign}\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\mathrm{sign}\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2}.-\frac{3}{2} \tag{1.2.32}$$

Данная формула симметрична относительно перестановки n и m и одновременной смены знака $2n-1$ и $2m-1$. Это выражение согласованно с двумя определениями дефекта (1.2.3) и (1.2.13) и демонстрирует относительно сложную структуру переходной области между

положительными и отрицательными параметрами параллельной эволюции.

Снижение дефекта на единицу происходит при $k = 0$, когда $2n-1$ и $2m-1$ имеют одинаковый знак. В противном случае это происходит при $2k = 2$, когда $2n-1 > 0$ и $2m-1 = -1$ или $2n-1 = -1$ и $2m-1 > 0$ и при $2k = -2$, когда $2n-1 < 0$ и $2m-1 = 1$ или $2n-1 = 1$ и $2m-1 < 0$. В областях разных знаков $2n-1$ и $2m-1$ явления снижения дефекта не наблюдается ни при каких значениях k. Тривиальные узлы также появляются при $2n-1 = -(2m-1) = \pm 1$.

$2m-1$ \ $2n-1$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
-7	6	5	4	3	2	3	4	5
-5	5	4	3	2	1	2	3	4
-3	4	3	2	1	0	1	2	3
-1	3	2	1	0	$\emptyset$	0	1	2
1	2	1	0	$\emptyset$	0	1	2	3
3	3	2	1	0	1	2	3	4
5	4	3	2	1	2	3	4	5
7	5	4	3	2	3	4	5	6

$2m-1$ \ $2n-1$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
-7	0	0	0	0	-1			
-5	0	0	0	0	-1			
-3	0	0	0	0	-1			
-1	0	0	0	0	$\emptyset$	1	1	1
1	-1	-1	-1	$\emptyset$	0	0	0	0
3				1	0	0	0	0
5				1	0	0	0	0
7				1	0	0	0	0

Таблица 1.2: В левой таблице перечислены дефекты $\delta^{\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,\overline{2k})}$. В правой таблице показаны критические значения k, при которых дефект уменьшается на единицу. Пустой квадрат означает, что дефект *не* уменьшается для этих значений n и m для любых k. Элемент $\emptyset$ означает тривиальный узел.

Левая таблица 1.2 симметрична относительно главной диагонали, поскольку крендельные узлы $\mathrm{Pr}(2n-1, 2m-1, \overline{2k})$ и $\mathrm{Pr}(2m-1, 2n-1, \overline{2k})$ топологически эквивалентны. Более того, эта таблица симметрична относительно *побочной* диагонали. Этот факт следует из соотношения

$$\delta^{(2n-1,2m-1,\overline{2k})} = \delta^{(-2n+1,-2m+1,-\overline{2k})}. \tag{1.2.33}$$

Это простое следствие двух наблюдений:

1. Зеркальный узел $\bar{\mathcal{K}}$ имеет полином ХОМФЛИ $H_R^{\bar{\mathcal{K}}}(A,q) = H_R^{\mathcal{K}}(A^{-1},q^{-1})$, тогда как отображение $A \to A^{-1}, q \to q^{-1}$ изменяет дифференциалы $\{Aq^k\}$ только знаком. Поэтому зеркальный узел имеет тот же дефект.
2. $\delta^{(-2n+1,-2m+1,-\overline{2k})} = \delta^{(-2n+1,-2m+1,\overline{2k})}$ из-за гипотезы анти-параллельной эволюции.

КТС узлы мутанты и родственные с ними узлы

Мутанты КТС (Киношита-Теросака-Конвей) – это знаменитая пара узлов $11n34$ и $11n42$. Мутантные узлы не могут быть различены с помощью ХОМФЛИ в прямоугольных представлениях. В частности, все симметрические представления ХОМФЛИ не могут различать

мутантов [110, 111]. Пара КТС может быть представлена через древесные "пальцы" как $(3,-2|\bar{2}|-3,2)$, $(3,-2|\bar{2}|2,-3)$ (см. Рис.1.6). С точки зрения нашей работы, КТС мутанты представляют интерес, так как их ДР имеет аномальный вид. В фундаментальном представлении ХОМФЛИ записывается следующей формулой

$$H_{[1]}^{[11n34]} = H_{[1]}^{[11n42]} := 1 - \frac{[6][4]}{[2]^2[3]A}\{Aq\}\underline{\{A\}}\{A/q\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Al}_{[1]}^{[11n34]} = 1, \tag{1.2.34}$$

т.е. у коэффициентов ДР есть один дополнительный множитель, $\{A\}$ в выражении для $\mathbf{F}_{[1]}^{[11n34]}$.

Отличие в инвариантах ХОМФЛИ для этих двух мутантов проявляется уже для первого непрямоугольного представления $H_{[21]}$, но для произвольно больших симметрических и даже прямоугольных представлений ХОМФЛИ совпадают. В данной работе мы не заинтересованы в *мутантном* свойстве [110–113], мы акцентируем наше внимание на тривиальном полиноме Александера (это хорошо известный факт, что он равен единице для пары КТС). Поэтому мы сосредоточимся на симметрических представлениях. Из-за свойства [108] $\mathrm{Al}_{[r]}(q) = \mathrm{Al}_{[1]}(q^r)$, которое выполняется для всех однокрюковых представлений, полином Александера равен единице для всех симметрических представлений.

Мутанты КТС – это древесные узлы типа $(p, q|\overline{2k}|s, r)$ (см. Рис. 1.6), но не крендельные узлы, они содержат «пропагатор» между двумя "пальцами" и описываются формулой (57) из работы [15].

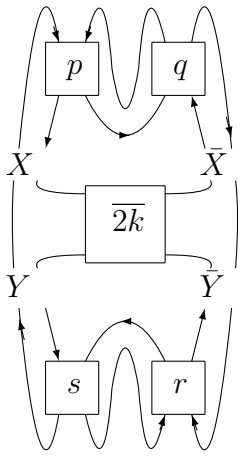


Рис. 1.6: Древесные узлы типа $(p, q|\overline{2k}|s, r)$.

Следовательно, редуцированный полином ХОМФЛИ для диаграммы (1.6) равен

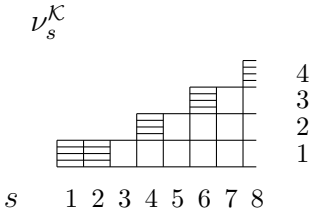
$$H_R^{(p,q|\overline{2k}|s,r)} = d_R^2 \sum_{Z\in R\otimes\bar{R}} \frac{\mathcal{A}_Z^{ppS}(p,q)\,\mathcal{A}_{1Z}^{\mathrm{ea}}(\overline{2k})\,\mathcal{A}_Z^{ppS}(r,s)}{\sqrt{d_Z}}, \tag{1.2.35}$$

где мы обозначаем

$$\mathcal{A}_Z^{ppS}(N,M) = d_R \sum_{X\in R\otimes\bar{R}} \frac{\mathcal{A}_{1X}^{\rm par}(N)\,\bar{S}_{XZ}\,\mathcal{A}_{1X}^{\rm par}(M)}{\sqrt{d_X}}. \tag{1.2.36}$$

Выражения $\mathcal{A}$ для параллельных и анти-параллельных "пальцев" приведены в Приложении А. Четыре внешних "пальца" содержат параллельные косы, однако коса длины $2k$ в пропагаторе анти-параллельна. Эволюция вдоль анти-параллельной косы в диаграмме мутанта КТС порождает семейство $(3, -2|\overline{2k}| - 3, 2)$ со следующей структурой коэффициентов ДР

$\delta^{\mathcal{K}} =$ "1":



(1.2.37)

В данном случае лестничная диаграмма имеет длину ступени равную двум, что характерно для $\delta^{\mathcal{K}} = 1$, но вся структура сдвинута влево на один ящик относительно обычной диаграммы (1.2.6). Мы интерпретируем это как дополнительные "случайные"ящики, но теперь это "случайность которая появляется одновременно для всех членов одно-параметрического семейства. Если выполнить анти-параллельную эволюцию из любого другого пересечении, кроме анти-параллельной косы $\overline{2k}$, все дополнительные ящики *исчезают*, и дефект становится $\delta^{\mathcal{K}} = 1$. Поэтому мы рассматриваем закрашенные ящики как "случайность" , появляющуюся в высокосимметричной точке в пространстве узлов - мутантах КТС.

Анти-параллельная эволюция для древесных узлов

Замечательно, что анти-параллельная эволюция *не выводит* из семейства древесных узлов. Это легко видеть на Рис. 1.7.

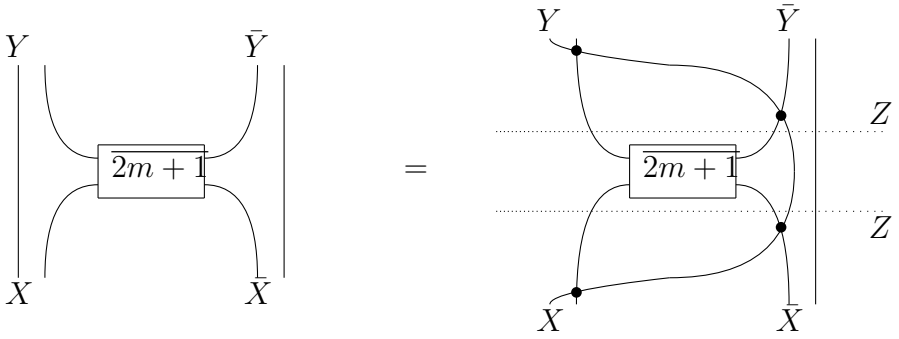


Рис. 1.7: Анти-параллельная эволюция из любого перекрестка в пропагаторе не выводит из семейства древесных узлов.

При $m = 0$ левая картинка отвечает одному перекрестку в параллельной косе, если мы применим анти-параллельную эволюцию для произвольного параметра m, то получим левую картинку. Если мы перебросим самую левую вертикальную нить на левой картинке, так чтобы она проходила правее анти-параллельной косы, то у нас явным образом выделится анти-параллельный "палец". Другими словами, правая картинка представляет собой корректный строительный блок для древесного семейства узлов

$$d_R^2 \sum_{Z \in R \otimes R} \frac{\left(\bar{T}\bar{S}\bar{T}S\right)_{YZ} \mathcal{A}^{\text{oa}}\left(\overline{2m+1}\right)_{1Z} \left(S^\dagger \bar{T}^{-1} \bar{S} \bar{T}^{-1}\right)_{ZX}}{\sqrt{d_Z}}. \tag{1.2.38}$$

Используя такой блок, мы можем проверить гипотезу эволюции дефекта для любых древесных узлов, причем применять эволюцию можно к любому перекрестку в любом "пальце". Аналогичным образом можно записать ответ для параллельной эволюции из анти-параллельного "пальца".

Однопетлевое семейство как пример недревесных узлов

Чтобы проверить гипотезу эволюции дефекта вне древесного семейства узлов, мы использовали метод, разработанный в работах [15, 114]. Метод позволяет вставить любой древесный пропагатор вместо любой $\mathcal{R}$-матрицы в косу. Этот класс узлов называется *однопетлевое семейство*, и он существенно богаче древесных узлов. Простейшие недревесные примеры появляются уже в 3-нитевой косе. Например, мы приводим простейший недревесный узел 8_{19}, который входит в 8-параметрическое анти-параллельное семейство $(\overline{n_0}, \overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, \overline{n_4}, \overline{n_5}, \overline{n_6}, \overline{n_7}) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1)$ дефекта $\delta = 2$ (см. Рис. 1.8).

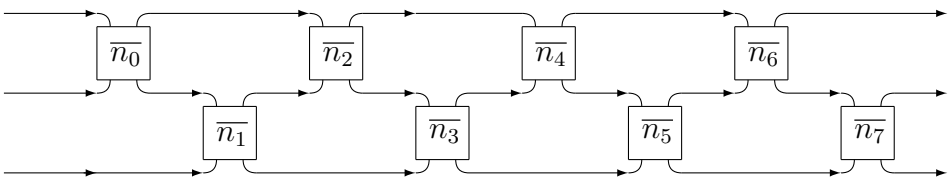


Рис. 1.8: Однопетлевое семейство узлов $(\overline{n_0}, \overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}, \overline{n_4}, \overline{n_5}, \overline{n_6}, \overline{n_7})$.

1.3 Явные формулы для тройных крендельных узлов

Семейство тройных анти-параллельных крендельных узлов $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,2l-1)$ имеет такую же простую форму ДР (1.1.21) (множественная факторизация коэффициентов ДР), что и узел трилистник 3_1. Как обсуждалось в прошлых разделах, это можно объяснить с помощью гипотезы об эволюции дефекта (1.1), поскольку это семейство можно рассматривать как множество потомков трилистника при анти-параллельной эволюции (см. рис.1.2.3)

$$3_1 = \mathrm{Pr}(1,1,1) \xrightarrow{\text{Анти-парал. эволюция}} \mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,2l-1). \tag{1.3.1}$$

Семейство узлов двойных кос включено в семейство тройных крендельных узлов как $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,1)$ и обладает удивительно простым (полная факторизация) поведением коэффициентов ДР

$$\boxed{\mathcal{F}^{(n,m,1)}_{[s]} = \frac{F^{(n)}_{[s]} \cdot F^{(m)}_{[s]}}{F^{(1)}_{[s]}}.} \tag{1.3.2}$$

Мы используем сокращенную запись (n,m,l) для элементов крендельного семейства $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,2l-1)$, а $F^{(n)}_{[s]}$ – это коэффициенты ДР твистованных узлов

$$F^{(n)}_{[s]} := \mathcal{F}^{(n,1,1)}_{[s]}, \tag{1.3.3}$$

где мы использовали факт, что твистованные узлы включены в семейство тройных крендельных узлов как $\mathrm{Pr}(2n-1,1,1)$.

Свойство факторизации коэффициентов ДР двойных кос (1.3.2) на коэффициенты ДР для твистованных узлов является очень интересным и загадочным. Более того, это свойство сохраняется за пределами симметрических и даже прямоугольных представлений [86, 87]. Чтобы понять природу и происхождение этого свойства, мы рассматриваем семейство двойных кос как часть большего семейства $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,2l-1)$ и исследуем, как деформируется факторизация (см. итоговую формулу (1.3.21) для произвольного узла семейства $\mathrm{Pr}(2n-1,2m-1,2l-1)$.)

Узел восьмерка 4_1 ($n=-1$), трилистник 3_1 ($n=1$) и тривиальный узел 0_1 ($n=0$) имеют простейшие коэффициенты ДР

$$F^{(-1)}_{[s]} = 1, \qquad F^{(0)}_{[s]} = 0, \qquad F^{(1)}_{[s]} = (-)^s A^{2s} q^{s(s-1)}. \tag{1.3.4}$$

Для старших твистованных узлов существует общая формула для коэффициентов ДР [91]

$$F^{(n)}_{[s]} = q^{\frac{s(s-1)}{2}} A^s \cdot \sum_{j=0}^{s} (-)^j \cdot \frac{[s]!}{[j]![s-j]!} \cdot \frac{(Aq^{j-1})^{2jn}\{Aq^{2j-1}\}}{\prod_{i=j-1}^{s+j-1}\{Aq^i\}}. \tag{1.3.5}$$

Оказывается, что все коэффициенты ДР твистованных узлов можно представить с помощью *одной* бесконечной нижнетреугольной матрицы $\mathcal{B}$, которую мы называем матрицей КНТЗ [84, 87, 97]

$$F^{(n)}_{[s]} = \sum_{j=0}^{s} \left(\mathcal{B}^{n+1}\right)_{s,j}. \tag{1.3.6}$$

Эволюция в пространстве твистованных узлов отвечает возведению матрицы $\mathcal{B}$ в степень. Можно выписать явный вид матричных элементов $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{B}_{i,j} = (-)^{i-j} A^{2i} q^{(i+j)(i-1)} \frac{[i]_q!}{[j]_q![i-j]_q!}, \qquad j \leqslant i, \tag{1.3.7}$$

$$\mathcal{B}_{i,j} = 0, \qquad j > i. \tag{1.3.8}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -A^2 & A^2 & 0 & 0 & \ldots \\ A^4q^2 & -[2]_qA^4q^3 & A^4q^4 & 0 & \ldots \\ -A^6q^6 & [3]_qA^6q^8 & -[3]_qA^6q^{10} & A^6q^{12} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \tag{1.3.9}$$

Описание коэффициентов ДР твистованных узлов через матрицу КНТЗ оказывается чрезвычайно продуктивным: данная структура обобщается на высшие представления [86] и суперполиномиальную T-деформацию [87].

1.3.1 Младший коэффициент $\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[1]}$

Работая с коэффициентами ДР тройных крендельных узлов, мы следуем следующему плану: мы рассматриваем коэффициенты ДР твистованного узла $F^{(n)}_{[s]}$ как «строительные блоки» и выражаем полученные ответы через них, по аналогии с семейством двойных кос (1.3.2).

Первый коэффициент ДР как явная функций параметров q, A равен следующему выражению

$$\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[1]} = -\frac{A^{2(n+m+l-1)} + A^{2(n+m+l-2)} - A^{2(n+m-1)} - A^{2(n+l-1)} - A^{2(m+l-1)} + 1}{\{A\}^2}. \tag{1.3.10}$$

С другой стороны, если выразить его через коэффициенты ДР твистованных узлов, то по-

лучается следующий изящный ответ

$$\boxed{\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[1]} = \frac{F^{(n)}_{[1]}F^{(m)}_{[1]}F^{(l)}_{[1]}}{\left(F^{(1)}_{[1]}\right)^2} + \frac{F^{(n-1)}_{[1]}F^{(m-1)}_{[1]}F^{(l-1)}_{[1]}}{F^{(1)}_{[1]}}} \tag{1.3.11}$$

т.е. имеет простое выражение через первый коэффициент ДР твистованного узла (1.3.5)

$$F^{(n)}_{[1]} = -\frac{A^2(A^{2n}-1)}{A^2-1} = A\cdot\frac{1-A^{2n}}{\{A\}}. \tag{1.3.12}$$

Поскольку $F^{(0)}_{[s]} = 0$, эта формула воспроизводит свойство факторизации (1.3.2) для всех двойных кос с $(n,m,l) = (n,m,1)$. Также (1.3.11) воспроизводит чисто топологическое утверждение $(n,m,0) = (n-1,m-1,1)$, поскольку $F^{(-1)}_{[s]} = 1$.

На примере самого первого коэффициента ДР видно, как деформируется формула (1.3.2) при переходе к тройным крендельным узлам: теперь наблюдается не полностью факторизованный ответ, а сумма двух факторизованных слагаемых. Как и в случае двойных кос, ответ обладает явной симметрией по перестановке параметров узла n, m, l.

1.3.2 Второй коэффициент $\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2]}$

Второй коэффициент ДР $\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2]}$ имеет аналогичные первый и второй члены как в (1.3.11), но и дополнительное слагаемое

$$\boxed{\begin{aligned} F^{(n,m,l)}_{[2]} = {} & \frac{F^{(n)}_{[2]}F^{(m)}_{[2]}F^{(l)}_{[2]}}{\left(F^{(1)}_{[2]}\right)^2} + \frac{F^{(n-1)}_{[2]}F^{(m-1)}_{[2]}F^{(l-1)}_{[2]}}{F^{(1)}_{[2]}} - \\ & - q^3[2]\left(F^{(n-1)}_{[2]} - F^{(n-1)}_{[1]}\right)\left(F^{(m-1)}_{[2]} - F^{(m-1)}_{[1]}\right)\left(F^{(l-1)}_{[2]} - F^{(l-1)}_{[1]}\right), \end{aligned}} \tag{1.3.13}$$

где используется второй коэффициент ДР твистованного узла

$$F^{(n)}_{[2]} = qA^2\cdot\left(\frac{1}{\{Aq\}\{A\}} - \frac{[2]A^{2n}}{\{Aq^2\}\{A\}} + \frac{q^{4n}A^{4n}}{\{Aq^2\}\{Aq\}}\right). \tag{1.3.14}$$

1.3.3 Общее симметрическое представление $\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[s]}$

Разобрав несколько примеров, нам удалось записать следующую гипотетическую формулу для произвольного симметрического представления

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}^{(n,m,k)}_{[r]} = &\frac{F^{(n)}_{[r]}F^{(m)}_{[r]}F^{(k)}_{[r]}}{\left(F^{(1)}_{[r]}\right)^2} + \frac{F^{(n-1)}_{[r]}F^{(m-1)}_{[r]}F^{(l-1)}_{[r]}}{F^{(1)}_{[r]}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1}(-)^i\left(A^2q^{r-1}\right)^{2i}\cdot\frac{[r]!}{[i]![r-i]!}\cdot\frac{G^{(n)}_{[r],i}G^{(m)}_{[r],i}G^{(k)}_{[r],i}}{F^{(1)}_{[r]}},\end{aligned}} \tag{1.3.15}$$

где мы определяем новые функции $G^{(n)}_{[r],i}$, описывающие "добавочные" члены

$$G^{(n)}_{[r],i} := q^{i(r-1)}\cdot\sum_{j=0}^{i}(-)^j q^{-j(i-1)}\cdot\frac{[i]_q!}{[j]_q![i-j]_q!}\cdot F^{(n-1)}_{[r-j]}. \tag{1.3.16}$$

Удивительно, но первый и второй члены в (1.3.15) соответствуют граничным "добавочным" слагаемым для $i=0$ и $i=r$

$$\frac{F^{(n-1)}_{[r]}F^{(m-1)}_{[r]}F^{(l-1)}_{[r]}}{F^{(1)}_{[r]}} = \frac{G^{(n)}_{[r],0}G^{(m)}_{[r],0}G^{(k)}_{[r],0}}{F^{(1)}_{[r]}}, \tag{1.3.17}$$

$$\frac{F^{(n)}_{[r]}F^{(m)}_{[r]}F^{(k)}_{[r]}}{\left(F^{(1)}_{[r]}\right)^2} = (-)^r\left(A^{2r}q^{r(r-1)}\right)^2\cdot\frac{G^{(n)}_{[r],r}G^{(m)}_{[r],r}G^{(k)}_{[r],r}}{F^{(1)}_{[r]}}. \tag{1.3.18}$$

В этих формулах мы воспользовались $F^{(1)}_{[r]} = (-)^r A^{2r}q^{r(r-1)}$ и следующими простыми соотношениями

$$G^{(n-1)}_{[r],0} = F^{(n-1)}_{[r]}, \tag{1.3.19}$$

$$(-)^r G^{(n)}_{[r],r} = \frac{F^{(n)}_{[r]}}{F^{(1)}_{[r]}}. \tag{1.3.20}$$

Первое соотношение следует непосредственно из определения (1.3.16), тогда как второе менее тривиально, и мы обсудим его в разделе 1.5. Наконец, полученный ответ можно представить в виде расширенной тридиагональной суммы

$$\boxed{\mathcal{F}^{(n,m,k)}_{[r]} = \sum_{i=0}^{r}(-)^{i-r}\left(A^2q^{r-1}\right)^{2i-r}\cdot\frac{[r]!}{[i]![r-i]!}\cdot G^{(n)}_{[r],i}\cdot G^{(m)}_{[r],i}\cdot G^{(k)}_{[r],i}.} \tag{1.3.21}$$

1.4 Свойства факторизации в корнях единицы

Общие положения

На первый взгляд может показаться, что при $q = 1$ теория ЧС становится тривиальной, поскольку нет параметра квантования и все $\mathcal{R}$-матрицы упрощаются до матриц перестановок. Однако это не совсем верно для *редуцированных* полиномов ХОМФЛИ, поскольку они чувствительны к следующему порядку разложения $1/N$, согласно правилу $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N+g}\right) = 1 + \frac{2\pi i}{N} + \ldots$ и $A = q^N$. На самом деле в случае $q = 1$ все редуцированные корреляторы факторизуются, и *цветные* ХОМФЛИ являются просто степенями фундаментальных полиномов (которые иногда называют *специальными* полиномами [108]) при $q = 1$

$$H_R^{\mathcal{K}} \Big|_{q=1} = \left(H_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^{|R|} \Big|_{q=1}. \tag{1.4.1}$$

Это свойство накладывает некоторое условие факторизации коэффициентов ДР для симметрического ХОМФЛИ. А именно, подставляя $q = 1$ в дифференциальное разложение для узлов с нулевым дефектом (1.1.21) (учитывая что квантовое число переходит в обычное $[s]_{q=1} = s$)

$$H_R^{\mathcal{K}} \Big|_{q=1} = 1 + \sum_{s=1}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!} \cdot \{A\}^{2s} \cdot \mathcal{F}_{[s]}^{\mathcal{K}}\Big|_{q=1} = \left(1 + \{A\}^2 \cdot \mathcal{F}_{[1]}^{\mathcal{K}}\Big|_{q=1}\right)^r = \left(H_{[1]}^{\mathcal{K}}\right)^r \Big|_{q=1}, \tag{1.4.2}$$

можно сделать вывод о степенном законе для коэффициентов ДР для узлов с нулевым дефектом в пределе $q = 1$

$$\mathcal{F}_{[s]}^{\mathcal{K}_0} \Big|_{q=1} = \left(\mathcal{F}_{[1]}^{\mathcal{K}_0}\right)^s \Big|_{q=1}. \tag{1.4.3}$$

Более того, аналогичные явления факторизации происходят при других корнях единицы $q = e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{m}}$ [115]

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}} \Big|_{q=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{m}}} = H_{[\mathrm{Rem}(r/m)]}^{\mathcal{K}} \cdot \left(H_{[m]}^{\mathcal{K}}\right)^{\mathrm{IntPart}(r/m)} \Big|_{q=e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{m}}}, \tag{1.4.4}$$

где $r = m \cdot \mathrm{IntPart}(r/m) + \mathrm{Rem}(r/m)$. IntPart, Rem – это соответственно целая часть и остаток. В этой статье мы анализируем первый нетривиальный корень из единицы $q = \sqrt{-1}$ ($m = 2$).

Теперь мы можем проверить, что данные свойства факторизации в корнях единицы действительно уважаются формулами для тройных крендельных узлов (1.3.21), полученные в прошлом разделе.

Проверка при $q = 1$

Цветные ХОМФЛИ подчиняются свойству специальных полиномов (1.4.1), которое справедливо для произвольного представления R и произвольного узла $\mathcal{K}$. Это свойство доказано [116] и может служить нетривиальной проверкой нашей гипотетической формулы (1.3.21).

Чтобы проверить степенной закон для коэффициентов ДР в нашей формуле (1.3.21), мы сначала вычисляем ее основные блоки $F^{(n)}_{[r]}\Big|_{q=1}$ и $G^{(n)}_{[r],i}\Big|_{q=1}$. Во-первых, твистованные узлы являются членами анти-параллельного семейства крендельных узлов, а соответствующие коэффициенты ДР $\mathcal{F}^{(n,1,1)}_{[r]} = F^{(n)}_{[r]}$ подчиняются степенному закону (1.4.3)

$$F^{(n)}_{[r]}\Big|_{q=1} = A^r \cdot \sum_{j=0}^{r} (-)^j \frac{r!}{j!(r-j)!} \cdot A^{2jn}\{A\}^{-r} = \left(\frac{A}{\{A\}}\left(A^{2n}-1\right)\right)^r = \left(F^{(n)}_{[1]}\right)^r\Big|_{q=1}. \qquad (1.4.5)$$

Во-вторых, мы используем этот результат для вычисления (1.3.16) в точке $q = 1$

$$G^{(n)}_{[r],i}\Big|_{q=1} = \sum_{j=0}^{i} (-)^j \frac{i!}{j!(i-j)!}\left(F^{(n-1)}_{[1]}\right)^{r-j}\Big|_{q=1} = \left(F^{(n-1)}_{[1]}\right)^{r-i}\left(F^{(n-1)}_{[1]}-1\right)^i\Big|_{q=1}. \qquad (1.4.6)$$

Мы перепишем это в форме, пригодной для дальнейшего анализа

$$G^{(n)}_{[r],i}\Big|_{q=1} = \left(G^{(n)}_{[1],0}\right)^{r-i}\left(G^{(n)}_{[1],1}\right)^i\Big|_{q=1}, \qquad (1.4.7)$$

где мы использовали соотношения $G^{(n)}_{[1],1}\Big|_{q=1} = F^{(n-1)}_{[1]} - 1\Big|_{q=1}$ и $G^{(n)}_{[1],0}\Big|_{q=1} = F^{(n-1)}_{[1]}\Big|_{q=1}$. Применяя формулы (1.4.5) и (1.4.7) к ДР коэффициентам (1.3.21) в точке $q = 1$, мы получаем степенное поведение (1.4.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[r]}\Big|_{q=1} &= \left(-A^{-2}\cdot G^{(n,m,l)}_{[1],0}\right)^r \cdot \sum_{i=0}^{r}(-)^i A^{4i}\cdot\frac{r!}{i!(r-i)!}\cdot\left(\frac{G^{(n,m,l)}_{[1],1}}{G^{(n,m,l)}_{[1],0}}\right)^i\Bigg|_{q=1} = \\ &= \left(-A^{-2}\cdot G^{(n,m,l)}_{[1],0} + A^2\cdot G^{(n,m,l)}_{[1],1}\right)^r\Big|_{q=1} = \left(\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[1]}\right)^r\Big|_{q=1},\end{aligned} \qquad (1.4.8)$$

где мы для удобства ввели новое обозначение $G^{(n,m,l)}_{[r],i} := G^{(n)}_{[r],i}\cdot G^{(m)}_{[r],i}\cdot G^{(l)}_{[r],i}$.

Проверка при $q = \sqrt{-1}$

q-биномиальные коэффициенты в корнях единицы

Данный случай менее тривиален, чем случай $q = 1$, поскольку q-биномиальные коэффициенты даются следующим выражением [117]

$$\left.\frac{[M]_q!}{[M-N]_q![N]_q!}\right|_{q=\sqrt{-1}} = (-)^{\frac{1}{2}\mathrm{Rem}(\frac{M+N-2}{4})\cdot\mathrm{Rem}(\frac{N}{4})} \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot \binom{r_m}{r_n} \tag{1.4.9}$$

где $M = 2 \cdot m + r_m$, $N = 2 \cdot n + r_n$. Другими словами, $m := \mathrm{IntPart}(M/2), n := \mathrm{IntPart}(N/2)$ и $r_m := \mathrm{Rem}(M/2), r_n := \mathrm{Rem}(N/2)$. Символ определен $\binom{r_m}{r_n} := \frac{r_m!}{r_n!(r_m-r_n)!}$ для $r_m \geqslant r_n$ и $\binom{r_m}{r_n} := 0$ для $r_m < r_n$. Для наглядности мы приводим простейшую часть треугольника Паскаля q-биномиальных коэффициентов в точке $q = \sqrt{-1}$ "Дифференциалы" дифференциального

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 0 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & -1 & & -1 & & 1 & & & \\
1 & & 0 & & 2 & & 0 & & 1 & & \\
1 & & 1 & & -2 & & -2 & & 1 & & 1 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Рис. 1.9: Пример биномиальных коэффициентов при $q = \sqrt{-1}$.

разложения подчиняются следующей формуле при $q = \sqrt{-1}$

$$\{Aq^n\}|_{q=\sqrt{-1}} = \left(\sqrt{-1}\right)^n \left(A - (-)^n A^{-1}\right) = \left(\sqrt{-1}\right)^n \cdot \begin{cases} \{A\}, & \text{четное } n; \\ \{A\}_+, & \text{нечетное } n; \end{cases} \tag{1.4.10}$$

где $\{A\}_+ := A + A^{-1}$.

Простейшие примеры

Свойство факторизации можно наблюдать на простых примерах

$$\left.H^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\right|_{q=\sqrt{-1}} = 1 + \left.\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[1]} \cdot \{A\}^2_+\right|_{q=\sqrt{-1}}, \tag{1.4.11}$$

$$\left.H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\right|_{q=\sqrt{-1}} = 1 + \left.\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]} \cdot \{A\}^2\{A\}^2_+\right|_{q=\sqrt{-1}}. \tag{1.4.12}$$

Для представления $[r]=[3]$

$$\begin{aligned} H^{\mathcal{K}_0}_{[3]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= 1+\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\cdot\{A\}^2_+ + \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\cdot\{A\}^2\{A\}^2_+ + \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[3]}\cdot\{A\}^2\{A\}^4_+\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \\ H^{\mathcal{K}_0}_{[3]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= H^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\cdot H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[3]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\cdot\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Для представления $[r]=[4]$

$$\begin{aligned} H^{\mathcal{K}_0}_{[4]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= 1+\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\cdot\{A\}^2\{A\}^2_+ + \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[4]}\cdot\{A\}^4\{A\}^4_+\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \\ H^{\mathcal{K}_0}_{[4]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\cdot H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[4]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\cdot\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Произвольное представление $[r]$

Для произвольного представления четной длины $[r]=[2n]$

$$H^{\mathcal{K}_0}_{[2n]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}\cdot\{A\}^{2s}\{A\}^{2s}_+\cdot\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2s]}\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \tag{1.4.15}$$

где все q-биномиальные коэффициенты вычисляются в точке $q=\sqrt{-1}$ по формуле (1.4.9). Из свойства факторизации (1.4.4) и последней формулы следует соответствующая факторизация коэффициентов ДР

$$H^{\mathcal{K}_0}_{[2n]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \left(H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\right)^n\Big|_{q=\sqrt{-1}} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2n]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \left(\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\right)^n\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \tag{1.4.16}$$

Для представлений нечетной длины $[r]=[2n+1]$ ситуация немного сложнее

$$H^{\mathcal{K}_0}_{[2n+1]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!(n-s)!}\cdot\{A\}^{2s}\{A\}^{2s}_+\cdot\left(\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2s]}+\{A\}^2_+\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2s+1]}\right)\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \tag{1.4.17}$$

где при вычислении мы использовали следующие соотношения, которые следуют из (1.4.9)

$$(-)^{\frac{1}{2}\mathrm{Rem}\left(\frac{2n+2s-1}{4}\right)\cdot\mathrm{Rem}\left(\frac{2s}{4}\right)} = (-)^s, \tag{1.4.18}$$

$$(-)^{\frac{1}{2}\mathrm{Rem}\left(\frac{2n+2s}{4}\right)\cdot\mathrm{Rem}\left(\frac{2s+1}{4}\right)} = (-)^{s+n}. \tag{1.4.19}$$

Мы делаем следующий вывод о свойстве факторизации для коэффициентов ДР для узлов с нулевым дефектом

$$H^{\mathcal{K}_0}_{[2n+1]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = H^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\cdot\left(H^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\right)^n\Big|_{q=\sqrt{-1}} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2n+1]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[1]}\cdot\left(\mathcal{F}^{\mathcal{K}_0}_{[2]}\right)^n\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \tag{1.4.20}$$

Прямая проверка (1.3.21)

Теперь мы вычислим основные "строительные блоки" $F^{(n)}_{[r]}\Big|_{q=\sqrt{-1}}$ и $G^{(n)}_{[r],i}\Big|_{q=\sqrt{-1}}$ в точке $q=\sqrt{-1}$. Из явного вида (1.3.5) и (1.4.9) для четной длины представлений мы получаем

$$F^{(n)}_{[2s]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = A^{2s}\cdot\sum_{j=0}^{s}(-)^j\cdot\frac{s!}{j!(s-j)!}\cdot\frac{A^{4jn}}{\{A\}^s\{A\}_+^s} = \left(\frac{A^2}{\{A\}\{A\}_+}\right)^s\left(1-A^{4n}\right)^s = \left(F^{(n)}_{[2]}\right)^s\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \tag{1.4.21}$$

Для нечетной длины представлений $[2s+1]$

$$\begin{aligned} F^{(n)}_{[2s+1]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= A^{2s+1}\cdot\sum_{j=0}^{s}(-)^j\cdot\frac{s!}{j!(s-j)!}\cdot\left(\frac{A^{4jn}}{\{A\}^{s+1}\{A\}_+^s}-\frac{A^{4jn+2n}}{\{A\}^{s+1}\{A\}_+^s}\right) = \\ &= \frac{A}{\{A\}}\left(1-A^{2n}\right)\cdot\left(\frac{A^2}{\{A\}\{A\}_+}\right)^s\left(1-A^{4n}\right)^s = F^{(n)}_{[1]}\cdot\left(F^{(n)}_{[2]}\right)^s\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

$$\begin{aligned} G^{(n)}_{[2r],2i}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= \left(G^{(n)}_{[2],0}\right)^{r-i}\cdot\left(G^{(n)}_{[2],2}\right)^i\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \\ G^{(n)}_{[2r+1],2i}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= (-)^i\cdot G^{(n)}_{[1],0}\cdot G^{(n)}_{[2r],2i}\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \\ G^{(n)}_{[2r+2],2i+1}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= (-)^r\cdot G^{(n)}_{[2],1}\cdot G^{(n)}_{[2r],2i}\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \\ G^{(n)}_{[2r+1],2i+1}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= (-)^{i+r}\cdot G^{(n)}_{[1],1}\cdot G^{(n)}_{[2r],2i}\Big|_{q=\sqrt{-1}}. \end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что свойство (1.4.4) выполнено для коэффициентов ДР (1.3.21) для представлений четной длины $[2r]$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2r]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} &= \left(-A^{-4}\cdot G^{(n,m,l)}_{[2],0}\right)^r\cdot\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\cdot A^{8i}\cdot\left(\frac{G^{(n,m,l)}_{[2],2}}{G^{(n,m,l)}_{[2],0}}\right)^i\Bigg|_{q=\sqrt{-1}} = \\ &= \left(-A^{-4}\cdot G^{(n,m,l)}_{[2],0}-A^4\cdot G^{(n,m,l)}_{[2],2}\right)^r\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \left(\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2]}\right)^r\Big|_{q=\sqrt{-1}} \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

и представлений нечетной длины $[2r+1]$

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2r+1]}\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \\ &= \left(-A^{-2}G^{(n,m,l)}_{[1],0}+A^2G^{(n,m,l)}_{[1],1}\right)\left(-A^{-4}G^{(n,m,l)}_{[2],0}\right)^r\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\cdot A^{8i}\cdot\left(\frac{G^{(n,m,l)}_{[2],2}}{G^{(n,m,l)}_{[2],0}}\right)^i\Bigg|_{q=\sqrt{-1}} = \\ &= \left(-A^{-2}\cdot G^{(n,m,l)}_{[1],0}+A^2\cdot G^{(n,m,l)}_{[1],1}\right)\left(-A^{-4}\cdot G^{(n,m,l)}_{[2],0}-A^4\cdot G^{(n,m,l)}_{[2],2}\right)^r\Big|_{q=\sqrt{-1}} = \\ &= \left(\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[1]}\right)\cdot\left(\mathcal{F}^{(n,m,l)}_{[2]}\right)^r\Big|_{q=\sqrt{-1}}, \end{aligned} \tag{1.4.25}$$

где определено $G^{(n,m,l)}_{[r],i} := G^{(n)}_{[r],i} \cdot G^{(m)}_{[r],i} \cdot G^{(l)}_{[r],i}$.

1.5 Новый $\mathcal{C}$-полином для твистованных узлов

Хорошо известно, что цветные полиномы ХОМФЛИ удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям относительно представления [118–121], которые называются квантовые А-полиномы. Например, простейшее соотношение для симметрических представлений для узла трилистник имеет следующий вид

$$H^{3_1}_{[r]} + w_1(r) \cdot H^{3_1}_{[r-1]} + w_2(r) \cdot H^{3_1}_{[r-2]} = 0, \tag{1.5.1}$$

$$\begin{aligned} w_1(r) &= -\frac{A\left(Aq^{2r}-q^2\right)\left(Aq^{2r}+q^2\right)\left(A^4q^{8r}-A^2q^{4r+2}-A^2q^{4r+6}-A^2q^{6r+4}-q^{2r+8}+q^{4r+6}+q^{4r+8}+q^8\right)}{q^7\left(q^r-1\right)\left(q^r+1\right)\left(q^3-Aq^{2r}\right)\left(Aq^{2r}+q^3\right)}, \\ w_2(r) &= \frac{A^2q^{6r-6}\left(Aq^r-q^2\right)\left(Aq^r+q^2\right)\left(Aq^{2r}-q\right)\left(Aq^{2r}+q\right)}{\left(q^r-1\right)\left(q^r+1\right)\left(q^3-Aq^{2r}\right)\left(Aq^{2r}+q^3\right)}, \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

с "начальными условиями" $H^{3_1}_{[0]} = 1$ и $H^{3_1}_{[1]} = -A^4 + A^2q^2 + \frac{A^2}{q^2}$.

В рамках дифференциального разложения (1.1.21) можно изучать рекуррентные соотношения для коэффициентов ДР, которые известны как $\mathcal{C}$-полиномы [122, 123]. Для трилистника это соотношение имеет следующий вид

$$\mathcal{F}^{3_1}_{[s]} + A^2q^{2(s-1)} \cdot \mathcal{F}^{3_1}_{[s-1]} = 0, \tag{1.5.3}$$

что намного проще исходного квантового А-полинома. Одно из возможных объяснений такой простой формулы для $\mathcal{C}$-полинома заключается в том, что квантовый А-полином описывает в том числе весьма нетривиальные (независимые от узлов) множители в формуле ДР (1.1.21), в то время как $\mathcal{C}$-полином описывает непосредственно (на порядок более простые, чем сам ХОМФЛИ) коэффициенты ДР.

В недавней работе [123] было предложено рассмотреть уравнения для коэффициентов ДР в направлении A-эволюции

$$\sum_{i=0} t_i(A,q) \cdot \mathcal{F}^{\mathcal{K}}_{[s]}(Aq^i, q) = 0, \tag{1.5.4}$$

где различные члены в сумме подвергаются замене $A \to Aq^i$ в коэффициентах ДР, причем представление остается неизменным.

Мы предлагаем рассмотреть еще одно направление эволюции – в пространстве узлов. Мы

утверждаем, что существует простой $\mathcal{C}$-полином смешанной эволюции "представление-узел" для семейства твистованных узлов. Напомним соотношения (1.3.20) из раздела 1.3.3

$$(-)^r G^{(n)}_{[r],r} = \frac{F^{(n)}_{[r]}}{F^{(1)}_{[r]}}, \tag{1.5.5}$$

которые позволяют получить простую форму результирующей формулы (1.3.21). Используя явный вид функций $G^{(n)}_{[r],r}$ (1.3.16) мы можем представить ответ в следующей формулой

$$F^{(n)}_{[r]} = A^{2r} q^{2r(r-1)} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{j+1} q^{-j(r-1)} \cdot \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} \cdot F^{(n-1)}_{[r-j]}, \tag{1.5.6}$$

которая имеет форму нетривиального соотношения, связывающего коэффициенты ДР для различных представлений двух твистованных узлов. Примечательно, что это соотношение есть не что иное, как следствие формулы (1.3.6), включающей КНТЗ матрицу $\mathcal{B}_{i,j}$(1.3.7)

$$F^{(n)}_{[r]} = \sum_{j=0}^{i} \mathcal{B}_{r,j} \cdot F^{(n-1)}_{[j]}. \tag{1.5.7}$$

Мы рассматриваем это соотношение как $\mathcal{C}$-полином *смешанной* эволюции вдоль представления $[r]$ и вдоль направления в пространстве узлов вдоль линии твистованных узлов (n). Этот смешанный $\mathcal{C}$-полином имеет гораздо более простую форму по сравнению с чистой эволюцией вдоль представления $[r]$ (см. (59) в [123]). Более того, это уравнение обладает замечательным свойством: если известны все коэффициенты ДР $F_{[r]}$ для конкретного твистованного узла, то можно найти коэффициенты ДР для *всех* других твистованных узлов

$$F^{(-1)}_{[r]} = 1 \quad \Longrightarrow \quad F^{(n)}_{[r]} = \sum_{j=0}^{r} \left(\mathcal{B}^{n+1}\right)_{r,j}, \tag{1.5.8}$$

что полностью воспроизводит (1.3.6).

1.6 Обсуждение

Данная глава посвящена изучению свойств коррелляторов в трехмерной топологической теории Черна-Саймонса, которые совпадают с квантовыми инвариантами узлов ХОМФЛИ в случае калибровочных групп $SU(N)$. Мы ограничились рассмотрением самого простого класса представлений, диаграммы Юнга которых содержат только одну строку (либо один столбец). В этом случае для полиномов ХОМФЛИ возможно применить метод дифференци-

ального разложения (ДР), который явным образом выделяет в инвариантах части, явно не зависящие от узла. С другой стороны, коэффициенты ДР, которые несут в себе топологическую информацию и различают узлы, имеют существенно более простой вид по сравнению с самими полиномами ХОМФЛИ.

Мы обнаружили интересное свойство целочисленного параметра дефекта дифференциального разложения, который регулирует степень дополнительной факторизации коэффициентов ДР. А именно, мы наблюдаем на большой серии примеров следующее поведение дефекта при эволюции в пространстве узлов: при анти-параллельной эволюции дефект не изменятся, а при эволюции в параллельном направлении дефект изменятся на единицу на каждый такт эволюции. Мы продемонстрировали на конкретных примерах, что свойство эволюции дефекта содержит в себе некоторые тонкости. Например, при рассмотрении целого семейства узлов, полученного анти-параллельной эволюцией, дефект остается постоянным для всех членов семейства за исключением, может быть, одного выделенного узла, для которого значение дефекта падает на единицу.

Мы показали, что анти-параллельная эволюция из произвольного перекрестка в диаграмме древесного узла не выводит из данного семейства. Пользуясь этим, можно очень эффективно проверять гипотезу об эволюции дефекта в древесном семействе узлов. Однако, нам удалось проверить гипотезу также и для узлов, которые выходят за рамки древесного семейства, с помощью техники вычислений в 1-петлевом семействе.

Другим важным результатом данной главы является получение точных аналитических формул для семейства тройных анти-параллельных крендельных узлов, которые являются потомками узла трилистник при анти-параллельной эволюции. Все узлы данного семейства имеют нулевой дефект ДР и нам удалось найти формулы коэффициентов ДР в случае произвольного симметрического представления. Полученные формулы обладают интересной структурой: в каждом члене суммы выделяется три множителя, соответствующих одной из трех анти-параллельных кос, что является прямым обобщением полностью факторизованной формулы для коэффициентов ДР в случае узлов двойных кос. Мы проверили корректность полученных нами формул с помощью свойств факторизации ХОМФЛИ в корнях единицы.

Глава 2

Матричные модели и суперинтегрируемость

2.1 Гауссова Эрмитова Матричная модель

Гауссова Эрмитова модель (ГЭМ) представляет собой простой пример модели, где корреляторы задаются интегралами по $N \times N$ эрмитовым матрицам X

$$\mathrm{Corr}_{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \int dX \ \mathrm{tr}\, X^{a_1} \mathrm{tr}\, X^{a_2} \ldots \mathrm{tr}\, X^{a_k} \ e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, X^2} \tag{2.1.1}$$

Калибровочная симметрия $U(N)$ данной модели действует на матрицах сопряжением $X \to U^\dagger X U$, и мы рассматриваем только калибровочно-инвариантные корреляционные функции. Произвольный коррелятор калибровочно-инвариантных величин $\mathrm{Corr}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ в гауссовой теории можно вычислить как функцию параметра N – размера матриц. В наших обозначениях коррелятор единицы $\mathrm{Corr}_\varnothing = 1$. Для наглядности приведем конкретные примеры корреляторов, для случая когда $\sum_i a_i = 6$ (см. Таб. 2.1).

Некоторые простые закономерности в Таб. 2.1 видны сразу (например, сумма чисел каждой строки равна 15), но описать общее правило заполнения такой таблицы кажется достаточно сложной задачей на первый взгляд. Верный шаг на пути к скрытой симметрии ГЭМ – это смена базиса корреляторов с $\mathrm{Corr}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$ на специальные линейные комбинации, которые

$\mathrm{Corr}_{a_1,a_2,\ldots,a_k}$	N^1	N^2	N^3	N^4	N^5	N^6
Corr_6		10		5		
$\mathrm{Corr}_{5,1}$	5		10			
$\mathrm{Corr}_{4,2}$	4		9		2	
$\mathrm{Corr}_{3,3}$	3		12			
$\mathrm{Corr}_{4,1,1}$		13		2		
$\mathrm{Corr}_{3,2,1}$		12		3		
$\mathrm{Corr}_{2,2,2}$		8		6		1
$\mathrm{Corr}_{3,1,1,1}$	6		9			
$\mathrm{Corr}_{2,2,1,1}$	8		6		1	
$\mathrm{Corr}_{2,1,1,1,1}$		12		3		
$\mathrm{Corr}_{1,1,1,1,1,1}$			15			

Таблица 2.1: Явные примеры коррелляторов для уровня 6.

будут отвечать *полностью факторизованным* выражениям

$$\frac{\mathrm{Corr}_6}{6}+\frac{\mathrm{Corr}_{5,1}}{5}+\frac{\mathrm{Corr}_{4,2}}{8}+\frac{\mathrm{Corr}_{3,3}}{18}+\frac{\mathrm{Corr}_{4,1,1}}{8}+\frac{\mathrm{Corr}_{3,2,1}}{6}+\frac{\mathrm{Corr}_{2,2,2}}{48}+\frac{\mathrm{Corr}_{3,1,1,1}}{18}+$$
$$+\frac{\mathrm{Corr}_{2,2,1,1}}{16}+\frac{\mathrm{Corr}_{2,1,1,1,1}}{48}+\frac{\mathrm{Corr}_{1,1,1,1,1,1}}{720}=\frac{1}{48}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5). \tag{2.1.2}$$

Коэффициенты такого разложения взяты из полинома Шура

$$S_{[6]}=\frac{p_6}{6}+\frac{p_5p_1}{5}+\frac{p_4p_2}{8}+\frac{p_3^2}{18}+\frac{p_4p_1^2}{8}+\frac{p_3p_2p_1}{6}+\frac{p_2^3}{48}+\frac{p_3p_1^3}{18}+\frac{p_1^2p_2^2}{16}+\frac{p_2p_1^4}{48}+\frac{p_1^6}{720}. \tag{2.1.3}$$

Полиномы Шура – это хорошо известное семейство специальных функций [57], элементы которого индексируются разбиениями натуральных чисел или диаграммами Юнга $\lambda=[a_1,a_2,\ldots,a_k]$, где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_k$. Графическое изображение диаграмм Юнга понятно из примера на Рис. 2.1, где числа a_i отвечают длинам строк.

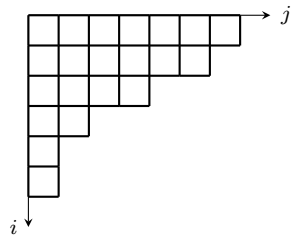


Рис. 2.1: Пример диаграммы Юнга $\lambda=[7,6,4,2,1,1]$.

Рассматривая корреляционные функции в базисе полиномов Шура

$$\langle S_\lambda\rangle=\langle S_\lambda(p_k=\mathrm{tr}\,X^k)\rangle, \tag{2.1.4}$$

можно наблюдать замечательное свойство – *полную факторизацию*:

$$\begin{aligned}
\langle S_{\square\square\square\square\square\square}\rangle &= +\frac{1}{48}N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5),\\
\langle S_{\begin{smallmatrix}\square\\ \square\square\square\square\square\end{smallmatrix}}\rangle &= -\frac{1}{48}N(N-1)(N+1)(N+2)(N+3)(N+4),\\
\langle S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\square\\ \square\\ \square\end{smallmatrix}}\rangle &= -\frac{1}{24}N(N-1)(N-2)(N+1)(N+2)(N+3),\\
\langle S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\ \square\square\square\end{smallmatrix}}\rangle &= -\frac{1}{16}N^2(N-1)(N+1)^2(N+2),\\
\langle S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\ \square\square\\ \square\end{smallmatrix}}\rangle &= 0,\\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Более того, можно заметить, что количество множителей всегда равно количеству клеток соответствующей диаграммы Юнга, причем каждый множитель соответствует своей клетке по формуле $N + j_\square - i_\square$, где j, i горизонтальная и вертикальная координата клетки соответственно. Общая формула для коррелятора в базисе полиномов Шура имеет следующий элегантный вид

$$\langle S_\lambda\rangle = S_\lambda(\delta_{k,2}) \cdot \prod_{\square\in\lambda}(N + j_\square - i_\square), \tag{2.1.6}$$

где $S_\lambda(\delta_{k,2}) := S_\lambda(p_k = \delta_{k,2})$ отвечает численному коэффициенту. Формула (2.1.6) это и есть замечательное свойство корреляторов, которое является проявлением скрытой симметрии модели. Это свойство дает правильный взгляд на корреляционные функции и, что немаловажно, позволяет мгновенно вычислить любое квантовое среднее. Главный ингредиент формулы (2.1.6) – это полиномы Шура, загадочное появление которых в контексте этой задачи объясняется тем, что скрытая симметрия ГЭМ – это аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$. Однако перед детальным обсуждением скрытой симметрии будет полезно напомнить некоторые базовые свойства корреляторов в ГЭМ.

2.1.1 Условия Вирасоро и W-представление статсуммы

В этом разделе мы выстроим цепочку рассуждений, связывающую ГЭМ и аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ (мы вернемся к более подробному описанию аффинного Янгиана в следующем разделе

3.1). Рассмотрим полную статсумму $Z(p_k)$ – производящую функцию всех корреляторов

$$Z(p_k) = \int dX \ \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, X^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k\,\mathrm{tr}\, X^k}{k}\right). \tag{2.1.7}$$

Полная статсумма $Z(p_k)$ как функция временных переменных p_k удовлетворяет билинейным уравнениям интегрируемой иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП) [54] и, что важно для нас сейчас, линейным уравнениям Вирасоро/тождествам Уорда. В общем случае квантовой теории поля тождества Уорда – это некоторые соотношения на корреляционные функции, которые отвечают независимости полного функционального интеграла от замены переменной интегрирования. В нашем случае тождества Уорда переписываются как действия некоторых дифференциальных операторов L_n на статсумму

$$\hat{L}_n\, Z(p_k) = (n+2)\frac{\partial Z(p_k)}{\partial p_{n+2}}, \qquad\qquad n = -1, 0, 1, 2, \dots\,, \tag{2.1.8}$$

и могут быть выписаны явным образом как дифференциальные операторы по переменным p_k в следующем виде

$$\hat{L}_n = \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a)\,\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_{n-a}} + \sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,p_k\frac{\partial}{\partial p_{n+k}} + 2Nn\,\frac{\partial}{\partial p_n} + N^2\,\delta_{n,0} + N\,p_1\,\delta_{n+1,0}. \tag{2.1.9}$$

Операторы L_n носят имя Вирасоро, потому что удовлетворяют соотношениям одноименной алгебры:

$$\left[\hat{L}_n, \hat{L}_m\right] = (n-m)\hat{L}_{n+m}, \qquad\qquad n, m \geqslant -1. \tag{2.1.10}$$

Согласно общим методам в теории матричных моделей [59], из семейства уравнений (2.1.8) можно собрать единственное уравнение, которое позволить явно вычислить полную статсумму. Для этого нужно просуммировать все уравнения, предварительно домножив каждое из них на p_{n+2}:

$$2\cdot\hat{W}Z(p_k) = \sum_{n=-1}^{\infty} p_{n+2}\hat{L}_n\, Z(p_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n\frac{\partial Z(p_k)}{\partial p_n} = \hat{D}Z(p_k). \tag{2.1.11}$$

Благодаря этому трюку, в правой части уравнения собирается оператор градуировки

$$\hat{D} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n\frac{\partial}{\partial p_n}. \tag{2.1.12}$$

В левой части получается некоторый оператор $\hat{W}$, который имеет положительную градуировку

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\infty}(a+b-2)\,p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b-2}} + ab\,p_{a+b+2}\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_b} + N\sum_{a=1}^{\infty} a\,p_{a+2}\frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{N^2 p_2}{2} + \frac{N p_1^2}{2}, \quad (2.1.13)$$

$$\left[\hat{D}, \hat{W}\right] = 2\hat{W}. \quad (2.1.14)$$

В результате уравнение $2 \cdot \hat{W}Z = \hat{D}Z$ имеет единственное решение

$$Z(p_k) = e^{\hat{W}} \cdot 1. \quad (2.1.15)$$

Оператор $\hat{W}$ играет двойную роль для ГЭМ: он задает W-представление статсуммы и устанавливает связь с аффинным Янгианом $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$.

2.1.2 Суперинтегрируемость и W-представление

Проанализируем операторы, которые уже возникали в данной работе. Во первых, можно рассмотреть операторы умножения на переменные p_n и соответствующие производные $\frac{\partial}{\partial p_n}$. Совокупность таких операторов образует замкнутую алгебры Гейзенберга

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_m}, p_n\right] = \delta_{n,m}. \quad (2.1.16)$$

При добавлении к алгебре Гейзенберга операторов из алгебры Вирасоро $\hat{L}_n$ снова получается замкнутая алгебра, так как коммутатор операторов $\hat{L}_n$ и переменных p_k равен тем же переменным p_k. Например,

$$\left[\hat{L}_n, p_m\right] = m \cdot p_{m-n}. \quad (2.1.17)$$

Для дальнейших рассуждений будет удобно ввести понятие спина оператора. Спин оператора определяется как максимальное количество временных переменных и их производных в нормально упорядоченном виде оператора. Операторы временных переменных и их производных имеют спин 1, операторы Вирасоро $\hat{L}_n$ спин 2. Коммутатор операторов спина s_1 и s_2 будет иметь спин $s_1 + s_2 - 2$ из-за взаимного сокращения одной производной и одной переменной. Как мы уже видели, коммутируя только операторы Гейзенберга и Вирасоро мы не сможем получить новых операторов, так как их спины не превосходят 2. Если мы добавим к алгебре хотя бы один оператор спина 3 (или выше), мы сможем получить операторы произвольно большого спина. При этом итоговая алгебра, включающая все спины, будет зависеть

от выбора начального оператора спина 3.

В случае ГЭМ выделенным оператором спина 3 является оператор $\hat{W}$, порождающий полную статсумму. При добавлении оператора $\hat{W}$ к алгебре Гейзенберг + Вирасоро, итоговая алгебра расширяется до произвольно большого спина, но наиболее интересным оператором является оператор $\hat{W}_0$ спина 3 и градуировки ноль [1]

$$\hat{W}_0 = \left[\hat{L}_1, \left[\hat{L}_1, \hat{W}\right]\right] = 6\sum_{a,b=1}^{\infty}(a+b)\,p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab\,p_{a+b}\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_b} + 18N\sum_{a=1}^{\infty} a\,p_a\frac{\partial}{\partial p_a} + 6N^3. \quad (2.1.18)$$

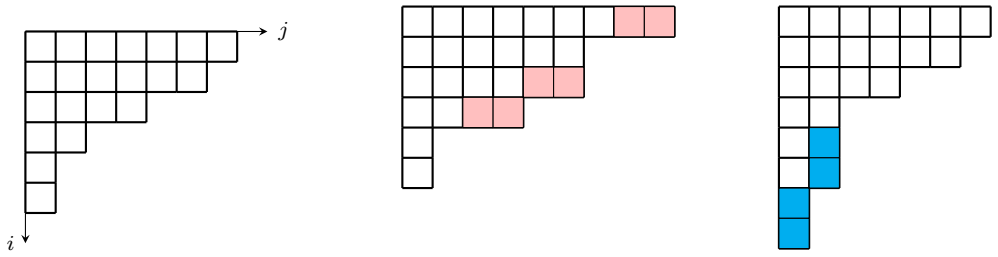
Данный оператор выделяет базис полиномов Шура среди всех однородных полиномов от временных переменных как базис собственных функций

$$\hat{W}_0\,S_\lambda = \left(6N^3 + 6\sum_{\square\in\lambda}(2j_\square - 2i_\square + 3N)\right) S_\lambda. \quad (2.1.19)$$

В терминах выделенного базиса действие оператора $\hat{W}$ имеет очень естественный смысл *добавления клеток в диаграмму Юнга*

$$\hat{W}\,S_\lambda = \frac{1}{2}\cdot \sum_{\square\square\in \mathrm{Add}_{[2]}(\lambda)} \omega_{\square_1}\omega_{\square_2}\,S_{\lambda+\square\square} - \frac{1}{2}\cdot \sum_{\square\atop\square\in \mathrm{Add}_{[1,1]}(\lambda)} \omega_{\square_1}\omega_{\square_2}\,S_{\lambda+\square\atop\square}. \quad (2.1.20)$$

Другими словами, в правой части уравнения появляются только те полиномы Шура, диаграмма Юнга которых получена добавлением двух клеток к исходной диаграмме Юнга λ. Определения множеств $\mathrm{Add}_{[2]}(\lambda)$ и $\mathrm{Add}_{[1,1]}(\lambda)$ ясны из Рис. 2.2.



(a) λ (b) $\mathrm{Add}_{[2]}(\lambda)$ (c) $\mathrm{Add}_{[1,1]}(\lambda)$

Рис. 2.2: Пример множеств $\mathrm{Add}_{[2]}(\lambda)$ и $\mathrm{Add}_{[2]}(\lambda)$.

Величины $\omega_\square$ в формуле (2.1.20) являются содержанием добавленных клеток

$$\omega_\square := N + j_\square - i_\square. \quad (2.1.21)$$

[1] Градуировка временной переменной p_k равна k, соответствующая производная $\frac{\partial}{\partial p_k}$ имеет градуировку $-k$.

Приведем явный пример действия данного оператора

$$\hat{W}\, S_{\square\square} = \frac{1}{2}\,(N+2)(N+3)\, S_{\square\square\square\square} + \frac{1}{2}\,(N-1)(N)\, S_{\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{smallmatrix}} - \frac{1}{2}\,(N-1)(N-2)\, S_{\begin{smallmatrix}\square&\square\\\square&\\\square&\end{smallmatrix}}. \tag{2.1.22}$$

Ортогональные свойства полиномов Шура элегантно выражаются через тождество Коши [57]

$$\sum_{\lambda} S_\lambda(p_a)\, S_\lambda(\bar{p}_a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k\, \bar{p}_k}{k}\right). \tag{2.1.23}$$

Приведенное выше соотношение позволяет выразить статсумму ГЭМ в следующем виде

$$\begin{aligned} Z(p_k) = \left\langle \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} \mathrm{tr}\, H^k\right) \right\rangle = \sum_{\lambda} S_\lambda(p_k) \left\langle S_\lambda\left(\bar{p}_k = \mathrm{tr}\, H^k\right) \right\rangle = \\ = \sum_{\lambda} S_\lambda(p_k)\, S_\lambda\left(\delta_{k,2}\right) \prod_{\square\in\lambda} (N + j_\square - i_\square). \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Из формулы (2.1.15) видно, что экспонента оператора $\hat{W}$ генерирует статсумму, а $\hat{W}$ оператор действует на полиномы Шура, добавляя две смежные клетки (плитки домино). Детально это можно наблюдать, если разделить статсумму на градуированные компоненты

$$Z(p_k) = Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)} + \ldots, \tag{2.1.25}$$

$$Z^{(2k)} = \frac{1}{k!}\left(\hat{W}\right)^k \cdot 1, \tag{2.1.26}$$

$$Z^{(2k+1)} = 0. \tag{2.1.27}$$

Вычислим первые уровни статсуммы с помощью действия оператора $\hat{W}$ явным образом

$$Z^{(0)} = 1, \tag{2.1.28}$$

$$Z^{(2)} = \hat{W}\cdot 1 = \underbrace{\frac{1}{2}\,(N)(N+1)}_{\langle S_{\square\square}\rangle}\, S_{\square\square} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\,(N)(N-1)}_{\langle S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\rangle}\, S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}, \tag{2.1.29}$$

$$Z^{(4)} = \frac{1}{2}\hat{W}\cdot Z^{(2)}_{GH} = \underbrace{\frac{1}{8}(N)(N+1)(N+2)(N+3)}_{\langle S_{\square\square\square\square}\rangle} S_{\square\square\square\square} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)(N)(N-1)(N+1)(N+2)}_{\langle S_{\square\square\square}\rangle} S_{\square\square\square} +$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)(N)^2(N-1)(N+1)}_{\langle S_{\square\square}\rangle} S_{\square\square} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}\right)N(N+1)(N-1)(N-2)}_{\langle S_{\square}\rangle} S_{\square} +$$
$$\underbrace{\frac{1}{8}(N)(N-1)(N-2)(N-3)}_{\langle S_{\varnothing}\rangle} S_{\varnothing}. \tag{2.1.30}$$

Суперинтегрируемое свойство (2.1.6) становится более понятным благодаря следующим следствиям из приведенных выше формул:

- Общее произведение по содержанию клеток $\omega_\square = N + j_\square - i_\square$ в формуле (2.1.6) генерируется шаг за шагом из-за множителей в правой части действие оператора $\hat{W}$ [2] на полином Шура (2.1.20).

- Коррелятор полинома Шура $\langle S_\lambda\rangle$ имеет ненулевое значение тогда и только тогда, когда диаграмма λ может быть построена только с помощью плиток домино $\square\!\square$ и $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$, начиная с пустой диаграммы $\varnothing$. Более точно, взвешенное количество способов построить диаграмму λ из плиток домино (обратите внимание, что вертикальная плитка имеет вес (-1)) равно $2^{\frac{|\lambda|}{2}}\cdot(\frac{|\lambda|}{2})!\cdot S_\lambda(\delta_{k,2})$.

Теперь становится ясно, что ГЭМ естественно связана с алгеброй вырожденного аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ в случае параметров $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$ в представлении Фока со спектральным сдвигом N (более подробно об этом в следующей главе в разделах 3.2.5 и 3.2.2). Для наглядности мы отметили члены, соответствующие спектральному сдвигу цветом

$$\hat{e}_0 = p_1, \qquad \hat{f}_0 = -\frac{\partial}{\partial p_1}, \tag{2.1.31}$$

$$\hat{\psi}_3 = 3\sum_{a,b=1}^{\infty}(a+b)\,p_a p_b\frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab\,p_{a+b}\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_b} + 6N\sum_{a=1}^{\infty}a\,p_a\frac{\partial}{\partial p_a} + N^3, \tag{2.1.32}$$

где оператор $\hat{\psi}_3$ построен простым способом из $\hat{W}_0$

$$\hat{\psi}_3 = \frac{1}{2}\hat{W}_0 - 3N\hat{L}_0 + N^3. \tag{2.1.33}$$

[2] Обратите внимание, что оператор $\hat{W}$ может действовать на полином Шура произвольной диаграммы Юнга, однако для ГЭМ актуальны только диаграммы четного размера.

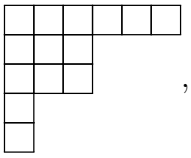
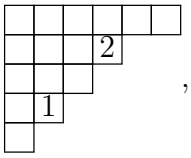
Оператор $\hat{W}$, порождающий статсумму ГЭМ, выражается через старшие операторы $\hat{e}_k$ (см. раздел 3.1.1) следующей простой формулой

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\Big[\hat{e}_2, \hat{e}_1\Big]. \tag{2.1.34}$$

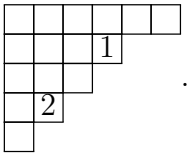
Действие $\hat{W}$-оператора на полиномы Шура (2.1.20) прямо следует из формул для старших операторов $\hat{e}_k$ из теории представлений аффинного Янгиана (3.2.40). Напишем явно действие коммутатора на полином Шура

$$\begin{aligned}\Big[\hat{e}_2, \hat{e}_1\Big] S_\lambda = \hat{e}_2 \left(\sum_{\square_1 \in \mathrm{Add}(\lambda)} (\omega_{\square_1}) \cdot S_{\lambda+\square_1} \right) - \hat{e}_1 \left(\sum_{\square_1 \in \mathrm{Add}(\lambda)} (\omega_{\square_1})^2 \cdot S_{\lambda+\square_1} \right) = \\ = \sum_{\square_1 \in \mathrm{Add}(\lambda)} \sum_{\square_2 \in \mathrm{Add}(\lambda+\square_1)} \omega_{\square_1}\omega_{\square_2} \left(\omega_{\square_2} - \omega_{\square_1}\right) \cdot S_{\lambda+\square_1+\square_2}.\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

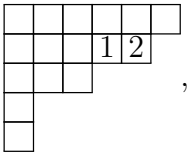
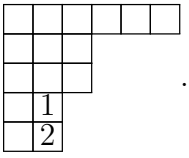
Другими словами, две суммы по клеткам $\square_1$ и $\square_2$ пробегают по всем способам последовательно добавить две клетки к диаграмме λ. Когда клетки располагаются далеко друг от друга

$\lambda =$  , $\lambda' = \lambda + \square_1 + \square_2 =$  , (2.1.36)

всегда найдется способ λ'' поставить коробки $\square_1, \square_2$, когда они оказываются поменяны местами относительно λ'

$\lambda'' = \lambda + \square_1 + \square_2 =$  . (2.1.37)

Поэтому вклады диаграмм λ' и λ'' в общий ответ всегда сократятся из-за множителя $(\omega_{\square_1} - \omega_{\square_2})$. Ненулевой вклад в сумму дадут только те способы добавить клетки, когда $\square_1, \square_2$ соприкасаются

$\lambda''' = \lambda + \square_1 + \square_2 =$  , $\lambda'''' = \lambda + \square_1 + \square_2 =$  . (2.1.38)

Когда клетки $\square_1, \square_2$ соприкасаются, множителя $(\omega_{\square_1} - \omega_{\square_2})$ нет, так как вакантное место для $\square_2$ создается только после добавления $\square_1$. Поэтому в результирующей формуле (2.1.20) сумма ведется по способам добавить плитки домино $\square\!\square$ (для которой $\omega_{\square_1} - \omega_{\square_2} = 1$) и $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ (для которой $\omega_{\square_1} - \omega_{\square_2} = -1$). Поэтому суперинтегрируемая формула (2.1.6) приобретает

естественную интерпретацию в терминах аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$.

2.1.3 β-ансамбль

Примечательно, что все компоненты приведенной выше конструкции для ГЭМ *одновременно* допускают однопараметрическую β-деформацию. При этом матричный интеграл становится β-ансамблем – кратным интегралом по собственным значениям x_i изначальных матриц X, интерполирующим между несколькими ансамблями матриц. В случае квадратичного потенциала полная статсумма задается следующим выражением [55, 56, 124]

$$Z^{\beta}\left(p_k\right) = \int \prod_{i=1}^{N} \left\{ dx_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta p_k\, x_i^k}{k} \right) \right\} \prod_{i<j}^{N} (x_i - x_j)^{2\beta}. \tag{2.1.39}$$

При этом, как обычно, интегралы нормированы таким образом, что $\langle 1 \rangle = 1$.

Свойство суперинтегрируемости сохраняется при β-деформации, однако полиномы Шура S_λ заменяются на классические полиномы Джека J_λ [57], которые являются β-деформацией полиномов Шура. При значении $\beta = 1$ полиномы Джека вырождаются в полиномы Шура. Средние значения в базисе полиномов Джека полностью факторизуются, аналогично формуле (2.1.6),

$$\langle J_\lambda(x) \rangle = \beta^{-|\lambda|/2} \cdot \prod_{\square \in \lambda} (N\beta + 1 \cdot j_\square - \beta \cdot i_\square) \cdot J_\lambda(\delta_{k,2}). \tag{2.1.40}$$

При этом, произведение по клеткам может быть записано через полиномы Джека в специальных точках

$$\prod_{\square \in \lambda} (N\beta + 1 \cdot j_\square - \beta \cdot i_\square) = \beta^{|\lambda|} \cdot \frac{J_\lambda(p_k = N)}{J_\lambda(p_k = \delta_{k,1})}. \tag{2.1.41}$$

Полная статсумма такой теории может быть компактным образом переписана с помощью тождества Коши [57] для полиномов Джека

$$Z^{\beta}(p_k) = \left\langle \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta p_k (\sum_{i=1}^{N} x_i^k)}{k} \right) \right\rangle = \sum_{\lambda} \frac{\langle J_\lambda(x) \rangle \cdot J_\lambda(p_k)}{||J_\lambda||^2}. \tag{2.1.42}$$

Для того, чтобы проследить связь с алгеброй скрытой симметрии, рассмотрим уравнения на полную статсумму – тождества Уорда, аналогично разделу 2.1.1,

$$\hat{L}_n^{\beta}\, Z^{\beta}(p_k) = (n+2) \frac{\partial Z^{\beta}(p_k)}{\partial p_{n+2}} \qquad n = -1, 0, 1, \ldots. \tag{2.1.43}$$

Явный вид операторов $\hat{L}_n^\beta$ как дифференциальный операторов по временным переменным выражается следующим образом [55, 56]

$$\hat{L}_n^\beta = \sum_{a=1}^{n-1} a(n-a)\,\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_{n-a}} + \beta\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,p_k\frac{\partial}{\partial p_{n+k}} + \big[2N\beta + (1-\beta)(n+1)\big]\,n\frac{\partial}{\partial p_n} + \\ + N\beta(N\beta+1-\beta)\,\delta_{n,0} + N\beta^2\,p_1\,\delta_{n+1,0}. \tag{2.1.44}$$

Согласно общей методике [59] W-представление полной статсуммы

$$Z^\beta(p_k) = e^{\hat{W}^\beta}\cdot 1, \tag{2.1.45}$$

достигается путем суммирования всех операторов $\hat{L}_n^\beta$ со специальными коэффициентами

$$\hat{W}^\beta = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\,\hat{L}_{n-2}^\beta. \tag{2.1.46}$$

Явный вид оператора $\hat{W}^\beta$ дается следующим выражением

$$\hat{W}^\beta = \frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{\infty}\beta(a+b-2)\,p_a p_b\frac{\partial}{\partial p_{a+b-2}} + ab\,p_{a+b+2}\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_b} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\infty}\Big[2N\beta + (1-\beta)(a+1)\Big]a\,p_{a+2}\frac{\partial}{\partial p_a} + \\ + \frac{N\beta(N\beta+1-\beta)p_2}{2} + \frac{N\beta^2 p_1^2}{2}. \tag{2.1.47}$$

Оператор $\hat{W}^\beta$ естественным образом возникает в представлении Фока аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ при значении параметров $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -\beta$ и спектральном сдвиге $N\beta$. Приведем явные формулы для данной реализации:

$$\hat{\psi}_3 = 3\sum_{a,b=1}^{\infty} ab\cdot p_{a+b}\frac{\partial^2}{\partial p_a\partial p_b} + \beta(a+b)\cdot p_a p_b\frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + (1-\beta)\sum_{a=1}^{\infty}(3a-1+6N\beta)ap_a\frac{\partial}{\partial p_a} + N^3\beta^2 \tag{2.1.48}$$

Члены, соответствующие спектральному сдвигу, выделены цветом аналогично формуле (2.1.32). Операторы $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ вычисляются согласно общим правилам (3.1.27) :

$$\hat{e}_0 = p_1 \tag{2.1.49}$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{6}\Big[\hat{\psi}_3, \hat{e}_0\Big] - \frac{(1-\beta)}{3}\hat{e}_0 \tag{2.1.50}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{6}\Big[\hat{\psi}_3, \hat{e}_1\Big] - \frac{(1-\beta)}{3}\hat{e}_1 \tag{2.1.51}$$

W-представление β-ансамбля задается тем же оператором аффинного Янгиана, что и в классическом $\beta = 1$ случае ГЭМ (2.1.34):

$$\hat{W}^{\beta} = \frac{1}{2}\left[\hat{e}_2, \hat{e}_1\right] \tag{2.1.52}$$

	ГЭМ	β-ансамбль
Параметры $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$	$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$	$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -\beta$
Представление $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$	Фок	Фок
Спектральный сдвиг	N	$N\beta$
Суперинтегрируемый базис	Полиномы Шура S_λ	Полиномы Джека J_λ
W-представление	$\frac{1}{2}\left[\hat{e}_2, \hat{e}_1\right]$	$\frac{1}{2}\left[\hat{e}_2, \hat{e}_1\right]$

Таблица 2.2: Сводная таблица для ГЭМ и β-ансамбля.

Как видно из Таблицы 2.2, процедура β-деформации статсуммы ГЭМ может быть описана как простая смена параметров ϵ_1, ϵ_2 аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ в Фоковском представлении для статсуммы

$$Z = e^{\frac{1}{2}\left[\hat{e}_2, \hat{e}_1\right]} \cdot 1 \tag{2.1.53}$$

при соответствующей замене спектрального сдвига $N \to N\beta$. Кроме того, теория представлений аффинного Янгиана задает форму суперинтегрируемого базиса в данных моделях, так как соответствующие системы полиномов являются общей системой собственных функций коммутирующего семейства $\hat{\psi}_n$.

2.1.4 Матричные модели ВЛЖЖ

В предыдущих разделах мы в деталях обсудили ГЭМ, которая является простейшим членом целого класса матричных моделей ВЛЖЖ [19]. Все модели этого семейства обладают схожими свойствами, а W-представление задается операторами коммутирующих семейств аффинного Янгиана, которые будут обсуждаться в разделе 3.1.2. Семейство моделей ВЛЖЖ разделяется на два подмножества (отрицательная и положительная ветвь), соответствующих повышающим и понижающим операторам соответственно. Далее мы приводим формулы для W-операторов данных моделей, которые следует рассматривать в Фоковском представлении (см. раздел 3.2.5) при значении параметров $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$ и спектральном сдвиге N (см. раздел 3.2.2). Аналогом алгебры Вирасоро для ВЛЖЖ моделей являются $\widetilde{W}$ алгебры [26].

Отрицательная ветвь семейства ВЛЖЖ соответствует коммутирующему семейству Янгиана $\hat{H}_n^{(1)}$

$$\left[\hat{H}_n^{(1)}, \hat{H}_m^{(1)}\right] = 0, \tag{2.1.54}$$

определенного следующим образом

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1^{(1)} &= \hat{e}_1,\\
\hat{H}_2^{(1)} &= \Big[\hat{e}_2, \hat{e}_1\Big] = 2\hat{W},\\
\hat{H}_3^{(1)} &= \frac{1}{2}\Big[\hat{e}_2, \Big[\hat{e}_2, \hat{e}_1\Big]\Big],\\
\hat{H}_4^{(1)} &= \frac{1}{6}\Big[\hat{e}_2, \Big[\hat{e}_2, \Big[\hat{e}_2, \hat{e}_1\Big]\Big]\Big],\\
&\dots\\
\hat{H}_n^{(1)} &= \frac{1}{(n-1)!}\Big(\mathrm{ad}_{\hat{e}_2}\Big)^{n-1}\hat{e}_1,
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

причем W-оператор ГЭМ соответствует второму элементу этого семейства. Это коммутирующее семейство порождает ВЛЖЖ семейство 2-матричных моделей, где $\bar{p}_k$ – это произвольные параметры модели

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k\hat{H}_k^{(1)}}{k}\right)\cdot 1 = \int_{N\times N} dXdY\ \exp\left(\mathrm{tr}\, XY + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k \mathrm{tr}\, X^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k \mathrm{tr}\, Y^k}{k}\right). \tag{2.1.56}$$

Здесь все операторы $\hat{H}_k^{(1)}$ действуют на пространстве временных переменных p_k.

Положительная ветвь семейства ВЛЖЖ генерируется дуальным коммутирующим семейством операторов аффинного Янгиана $\hat{H}_m^{*(k)}$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1^{*(1)} &= \hat{f}_1,\\
\hat{H}_2^{*(1)} &= \Big[\hat{f}_2, \hat{f}_1\Big],\\
\hat{H}_3^{*(1)} &= \frac{1}{2}\Big[\hat{f}_2, \Big[\hat{f}_2, \hat{f}_1\Big]\Big],\\
\hat{H}_4^{*(1)} &= \frac{1}{6}\Big[\hat{f}_2, \Big[\hat{f}_2, \Big[\hat{f}_2, \hat{f}_1\Big]\Big]\Big],\\
&\dots\\
\hat{H}_n^{*(1)} &= \frac{1}{(n-1)!}\Big(\mathrm{ad}_{\hat{f}_2}\Big)^{n-1}\hat{f}_1.
\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

Статсуммы моделей положительной ветви имеют более сложное W-представление, в котором действие происходит не на единицу, а на тривиальную тау-функцию $\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k g_k}{k}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k\hat{H}_k^{*(1)}[g]}{k}\right)\cdot\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k g_k}{k}\right) =\\
&= \int_{N\times N} dXdY\ \exp\left(\mathrm{tr}\, XY - \mathrm{tr}\, Y\Phi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k \mathrm{tr}\, X^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k \mathrm{tr}\, Y^k}{k}\right).
\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

При этом операторы $\hat{H}_k^{*(1)}[g]$ действуют в пространстве вспомогательных временных переменных g_k. Данные временные переменные в правой части равенства представлены неявным образом через матрицу Λ "внешнего поля" $g_k = \mathrm{tr}\,\Phi^k$. Статсумма моделей положительной ветви [21]

$$Z(N;\bar{p},p,g) = \int_{N\times N} dXdY\ \exp\left(\mathrm{tr}\,XY - \mathrm{tr}\,Y\Phi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k \mathrm{tr}\,X^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{p}_k \mathrm{tr}\,Y^k}{k}\right) \qquad (2.1.59)$$

оказывается наиболее общей моделью, которая включает в себя также и модели отрицательной ветви при $\Phi = 0$. Такая общая статсумма обладает свойством суперинтегрируемости и является тау-функцией иерархии КП косо-гипергеометрического типа [21] (которая отличается от тау-функций обычного гипергеометрического типа [125, 126] дополнительным полиномом Шура от косой диаграммы Юнга), что явным образом видно из разложения в базисе полиномов Шура

$$Z(N;\bar{p},p,g) = \sum_{\lambda,\mu}\left(\prod_{\square\in\lambda/\mu}(N + j_\square - i_\square)\right) S_{\lambda/\mu}(\bar{p}_k)\, S_\lambda(p_k)\, S_\mu(g_k). \qquad (2.1.60)$$

Легко видеть, что при $\Phi = 0$ (т.е. $g_k = 0$) и $\bar{p}_k = \delta_{k,2}$ данная статсумма вырождается в статсумму ГЭМ (2.1.24).

В случае старших коммутирующих семейств из раздела 3.1.2 известно представление некоторых статсумм как мульти-матричных моделей [127], однако соответствующие β-ансамбли на данный момент плохо изучены.

До этого момента в нашем изложении теории моделей ВЛЖЖ фигурировали только классические статсуммы, которые естественным образом раскладываются по полиномам Шура и соответствуют вырожденному аффинному Янгиану $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ при $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$, т.е. случаю бесконечномерной алгебры Ли $W_{1+\infty}$ [64,128]. Как было показано в прошлом разделе 2.1.3, теория аффинного Янгиана раскрывает свой потенциал в случае β-деформации. При этом W-представление и суперинтегрируемое свойство полностью контролируются теорией представлений аффинного Янгиана. Все результаты о β-ВЛЖЖ моделях представлены в серии недавних работ [22, 23].

2.2 Построение суперинтегрируемого базиса в матричных моделях

Мотивированные тесной связью суперинтегрируемого свойства ГЭМ и вырожденного аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ (т.е. алгебры $W_{1+\infty}$ [64, 128]), мы выдвигаем гипотезу: суперинтегрируемость в общем случае является проявлением скрытой симметрии модели. Однако для моделей, для которых еще не известна формула суперинтегрируемости, достаточно сложно определить какая алгебра скрытой симметрии ей соответствует (и существует ли она). Основываясь на вышеупомянутом примере семейства моделей ВЛЖЖ, мы предлагаем трехступенчатый алгоритм для построения выделенного базиса для некоторой матричной модели $\mathcal{M}$. Такой базис далее мы будем обозначать SIB (superintegrable basis). Алгоритм формулируется следующим образом:

- *Диаграммы.*

  В ГЭМ суперинтегрируемый базис индексируется диаграммами Юнга, в частности, число градуированных полиномов $P(n)$ на уровне n временных переменных p_a совпадает с числом диаграмм Юнга с n клетками.

  Мы предполагаем, что набор временных переменных T_a известен для данной матричной модели $\mathcal{M}$. Далее мы анализируем число градуированных полиномов соответствующих временных переменных и выбираем подходящий набор диаграмм Λ. Этот шаг алгоритма на данный момент плохо определен, потому что у нас нет дополнительных общих аргументов для систематического извлечения формы диаграмм из данной матричной модели. Однако в каждом конкретном случае можно стараться найти больше аргументов, которые будут специфическими для данной модели $\mathcal{M}$. Обычно в качестве диаграмм Λ возникают некоторые подмножества диаграмм Юнга.

  Поэтому, суперинтегрируемый базис $\mathrm{SIB}_\Lambda(T_a)$ перечисляется диаграммами Λ.

- *Правила добавления/удаления клеток.*

  Обычно первая (наименьшая) временная переменная T_1, соответствует первому суперинтегрируемому полиному, обозначенному простейшей диаграммой $\square$, которая соответствует минимальному строительному блоку для диаграмм. Поэтому мы накладываем ограничение на полиномы $\mathrm{SIB}_\Lambda(T_a)$, что первая временная переменная T_1 и ее

производная добавляют и удаляют клетки в диаграммах Λ

$$\begin{aligned} T_1 \cdot \mathrm{SIB}_\Lambda &= \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\Lambda)} C_{\Lambda,\Lambda+\square}\, \mathrm{SIB}_{\Lambda+\square}, \\ \frac{\partial}{\partial T_1}\, \mathrm{SIB}_\Lambda &= \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\Lambda)} \tilde{C}_{\Lambda,\Lambda-\square}\, \mathrm{SIB}_{\Lambda-\square}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Мы не накладываем никаких ограничений на коэффициенты $C_{\Lambda,\Lambda+\square}, \tilde{C}_{\Lambda,\Lambda-\square}$ и рассматриваем их как некоторые неизвестные константы. Основная идея заключается в том, что сумма в правой части уравнений пробегает только по ограниченным подмножествам Add(Λ),Rem(Λ) диаграмм размером $|\Lambda|+1$ и $|\Lambda|-1$ соответственно. Эти предположения являются довольно сильными ограничениями на форму полиномов SIB_Λ.

Высшие временные переменные и операторы типа Вирасоро для матричной модели $\mathcal{M}$ могут действовать на суперинтегрируемые полиномы с помощью правил добавления и удаления клеток. Однако для неминимальной градуировки в общем случае существует несколько различных правил добавления/удаления, которые нельзя определить изначально. Тем не менее, в конце процедуры это свойство может быть проверено отдельно.

Примечательно, что если набор диаграмм Λ содержит линейные (однострочные или одностолбцовые) диаграммы, то этот набор замкнут относительно операции удаления клеток. Мы используем этот факт для определения линейной системы уравнений для однострочных полиномов.

- *Гамильтониан для* SIB_Λ *полиномов.*

  Правила добавления/удаления клеток в диаграмму накладывают строгие ограничения на полиномы SIB_Λ, однако они не могут полностью зафиксировать их форму. Основываясь на примере ГЭМ, мы постулируем, что полиномы SIB_Λ должны быть собственными функциями некоторого оператора $\hat{H}$ нулевой градуировки, который мы будем называть для краткости Гамильтонианом[3]

$$\hat{H}\, \mathrm{SIB}_\Lambda = \kappa_\Lambda \cdot \mathrm{SIB}_\Lambda \tag{2.2.2}$$

  с неизвестными собственными значениями κ_Λ. Единственным предположением для данного оператора является *ограничение конечного спина.* Где под *спином* мы подразуме-

[3]Мы используем такой термин, потому что в случае β-ансамбля соответствующий оператор действительно является квантовым Гамильтонианом системы Калоджеро-Сазерленда с тригонометрическим потенциалом см. раздел 3.3.3

ваем максимальное число временных переменных T_a и производных $\frac{\partial}{\partial T_a}$ в некотором члене, который входит в состав оператора в нормально упорядоченном виде. Например, оператор (2.1.32) имеет спин 3. В нашем алгоритме мы будем рассматривать Гамильтонианы минимально возможного спина.

2.3 SIB для Гауссовой Эрмитовой модели

В этом разделе мы иллюстрируем шаги нашего алгоритма в простом случае ГЭМ без прямых ссылок на полиномы Шура, т.е. предполагая, что явный вид суперинтегрируемых полиномов в данной модели неизвестен. Мы будем пользоваться только временными переменными p_k данной модели и операторами Вирасоро $\hat{L}_0$ (2.1.9).

Шаг 1. Диаграммы

Переменные p_k имеют градуировки $[p_k]$, которые закодированы в виде коэффициентов в операторе Вирасоро $\hat{L}_0$ нулевой градуировки

$$\hat{L}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + N^2, \tag{2.3.1}$$

$$[p_k] = k. \tag{2.3.2}$$

В случае временных переменных p_a с градуировками $[p_a] = a$ набор диаграмм задается диаграммами Юнга, что видно по форме производящей функции количества диаграмм (см. Таб. 2.3)

$$\prod_{k=1} \frac{1}{1-q^k} = \sum_{n=0} q^n P^{YD}(n) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + \dots \tag{2.3.3}$$

Шаг 2. Система уравнений для однострочных полиномов

Согласно списку предположений (перечисленных в конце раздела 2.2), мы наблюдаем следующее свойство подмножества однострочных диаграмм Юнга. Если мы действуем на полином $\mathrm{SIB}_{[n]}$, соответствующий однострочной диаграммой $[n]$ длины n, оператором $\mathcal{O}_m$ отрицательной градуировки $[\mathcal{O}_m] = -m$, мы получаем $\mathrm{SIB}_{[n-m]}$ без каких-либо вариантов, так как существует только *один способ* удалить m ячеек из однострочной диаграммы, чтобы результирующая диаграмма осталась диаграммой Юнга. Наглядно это утверждение выглядит

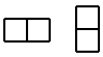
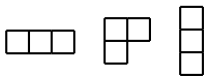
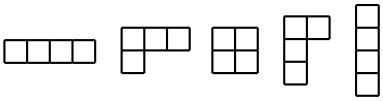
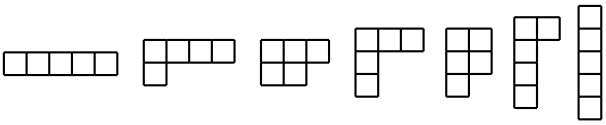
Уровень	Диаграммы Юнга	Базисные мономы
1		p_1
2		p_2, p_1^2
3		p_3, p_2p_1, p_1^3
4		$p_4, p_3p_1, p_2^2, p_2p_1^2, p_1^4$
5		$p_5, p_4p_1, p_3p_2, p_3p_1^2, p_2^2p_1, p_2p_1^3, p_1^5$

Таблица 2.3: Диаграммы Юнга и градуированные полиномы на малых уровнях 1-5. Диаграммы Юнга находятся во взаимно однозначном соответствии с градуированными полиномами по временным переменным p_a.

Градуировки	...	3	2	1	0	−1	−2	−3	...
Переменные	...	p_3	p_2	p_1	1	$\frac{\partial}{\partial p_1}$	$\frac{\partial}{\partial p_2}$	$\frac{\partial}{\partial p_3}$	...
Операторы Вирасоро				L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	...

Таблица 2.4: Сводная таблица градуировок для временных переменных и операторов Вирасоро для ГЭМ.

следующим образом в конкретном примере $n = 8, m = 3$

$$\hat{\mathcal{O}}_3 \,\mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\blacksquare\blacksquare\blacksquare} \sim \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square}. \tag{2.3.4}$$

В формуле выше мы раскрасили клетки диаграммы, которые удаляются после действия оператора. Наш подход основан на удалении клеток, поскольку добавление клеток немедленно выводит из однострочного подмножества. Например, оператор положительной градуировки 1 добавляет клетку во вторую строку

$$\hat{\mathcal{O}}_{-1} \,\mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square} \sim \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\square} + \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\atop\square}. \tag{2.3.5}$$

Далее мы рассматриваем следующую систему уравнений (см. Таблицу 2.4)

$$\frac{\partial \,\mathrm{SIB}_{[n]}}{\partial p_k} = u_{n,k}\,\mathrm{SIB}_{[n-k]}, \tag{2.3.6}$$

$$\hat{L}_k\,\mathrm{SIB}_{[n]} = v_{n,k}\,\mathrm{SIB}_{[n-k]}. \tag{2.3.7}$$

Эта система кажется сильно переопределенной, однако она самосогласована и имеет единственное решение. Мы рассматриваем следующую общую форму анзаца для полиномов SIB

$$\begin{aligned}
\mathrm{SIB}_{[0]} &= 1,\\
\mathrm{SIB}_{[1]} &= p_1,\\
\mathrm{SIB}_{[2]} &= \frac{p_1^2}{2} + a_{2,1}\,p_2,\\
\mathrm{SIB}_{[3]} &= \frac{p_1^3}{6} + a_{3,1}\,p_2p_1 + a_{3,2}\,p_3,\\
\mathrm{SIB}_{[4]} &= \frac{p_1^4}{24} + a_{4,1}\,p_2p_1^2 + a_{4,2}\,p_2^2 + a_{4,3}\,p_3p_1 + a_{4,4}\,p_4,\\
\mathrm{SIB}_{[5]} &= \frac{p_1^5}{120} + a_{5,1}\,p_2p_1^3 + a_{5,2}\,p_2^2p_1 + a_{5,3}\,p_3p_1^2 + a_{5,4}\,p_4p_1 + a_{5,5}\,p_3p_2 + a_{5,6}\,p_5,\\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Общая нормировка полиномов фиксируется первым коэффициентом, который мы выбираем равным $1/n!$. Этот выбор делает коэффициенты $u_{n,1} = 1$ тривиальными. Решение системы (2.3.6) единственно и параметризовано одним параметром x

$$\begin{aligned}
\mathrm{SIB}_{[0]} &= 1,\\
\mathrm{SIB}_{[1]} &= p_1,\\
\mathrm{SIB}_{[2]} &= \frac{p_1^2}{2} + x\,\frac{p_2}{2},\\
\mathrm{SIB}_{[3]} &= \frac{p_1^3}{6} + x\,\frac{p_1p_2}{2} + x^2\,\frac{p_3}{3},\\
\mathrm{SIB}_{[4]} &= \frac{p_1^4}{24} + x\,\frac{p_1^2p_2}{4} + x^2\,\frac{p_2^2}{8} + x^2\,\frac{p_1p_3}{3} + x^3\,\frac{p_4}{4},\\
\mathrm{SIB}_{[5]} &= \frac{p_1^5}{120} + x\,\frac{p_1^3p_2}{12} + x^2\,\frac{p_1p_2^2}{8} + x^2\,\frac{p_1^2p_3}{6} + x^3\,\frac{p_2p_3}{6} + x^3\,\frac{p_1p_4}{4} + x^4\,\frac{p_5}{5},\\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Формулы для коэффициентов $u_{n,k}, v_{n,k}$ имеют следующий вид

$$u_{n,k} = x^{k-1}, \tag{2.3.10}$$

$$v_{n,k} = x^{k-2}\left(k - 1 + 2xN + (n-k)x^2\right). \tag{2.3.11}$$

Заметим, что свободный параметр x есть не что иное, как масштабный параметр временных переменных $p_k \to x^{k-1}\, p_k$. Однако операторы Вирасоро (2.1.9) имеют фиксированную нормировку временных переменных. Нормировка, согласованная с операторами Вирасоро, восстанавливается, когда коэффициенты $u_{n,k}, v_{n,k}$ не имеют степенной зависимости от k, что соответствует значению $\boxed{x = 1}$.

Шаг 3. Гамильтониан для SIB-полиномов

Чтобы дополнить полиномы $\mathrm{SIB}_{[n]}$ до полного базиса, мы используем дополнительные предположения. Первое из них – это существование Гамильтониана конечного спина $\hat{H}$, имеющего SIB-полиномы в качестве набора собственных функций

$$\hat{H}\,\mathrm{SIB}_\lambda = \kappa_\lambda\,\mathrm{SIB}_\lambda. \tag{2.3.12}$$

Мы используем предположение, что $\hat{H}$ имеет наименьший возможный спин, т.е. максимальное число временных переменных и производных. В данном случае можно построить нетривиальный оператор спина 3 нулевой градуировки следующего вида

$$\hat{H} = \sum_{a,b=1}^{\infty} A_{a,b}\cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + B_{a,b}\cdot p_{a+b}\frac{\partial}{\partial p_a}\frac{\partial}{\partial p_b}, \tag{2.3.13}$$

где $A_{a,b} = A_{b,a}$ и $B_{a,b} = B_{b,a}$ – это некоторые неизвестные коэффициенты. Похожие формулы рассматривались в работе [129]. Решая уравнение (2.3.12) для уже найденных однострочных функций (2.3.9)

$$\hat{H}\,\mathrm{SIB}_{[n]} = \kappa_{[n]}\,\mathrm{SIB}_{[n]}, \tag{2.3.14}$$

мы можем ограничить форму коэффициентов $A_{a,b}, B_{a,b}$. Мы выбираем общую нормировку Гамильтониана условием $B_{1,1} = 1$. Тогда собственные значения восстанавливаются незамедлительно. Полученная формула для собственных значений имеет вид

$$\kappa_\lambda = n(n-1). \tag{2.3.15}$$

Коэффициенты $A_{a,b}$ *полностью* фиксируются условием (2.3.14). Итоговая формула имеет следующий простой вид

$$\boxed{A_{a,b} = a + b.} \tag{2.3.16}$$

Ситуация с коэффициентами $B_{a,b}$ устроена сложнее – их нельзя полностью определить из приведенных выше рассуждений, однако на них есть линейные уравнения. По одному уравнению для каждого уровня

$$B_{1,1} = 1, \tag{2.3.17}$$

$$\frac{1}{2}\,B_{1,2} + \frac{1}{2}\,B_{2,1} = 2, \tag{2.3.18}$$

$$\frac{1}{3}\,B_{1,3} + \frac{1}{4}\,B_{2,2} + \frac{1}{3}\,B_{3,1} = 3, \tag{2.3.19}$$

$$\frac{1}{4}\,B_{1,4} + \frac{1}{6}\,B_{2,3} + \frac{1}{6}\,B_{3,2} + \frac{1}{4}\,B_{4,1} = 4, \tag{2.3.20}$$

$$\frac{1}{5}\,B_{1,5} + \frac{1}{8}\,B_{2,4} + \frac{1}{9}\,B_{3,3} + \frac{1}{8}\,B_{4,2} + \frac{1}{5}\,B_{5,1} = 5, \tag{2.3.21}$$

$$\dots \tag{2.3.22}$$

Мы намеренно не используем свойство $B_{a,b} = B_{b,a}$ для того, чтобы представить эту систему в симметричной форме. В общем случае эти уравнения имеют следующий вид

$$\sum_{a=1}^{n-1} \frac{1}{a(n-a)} \cdot B_{a,n-a} = n. \tag{2.3.23}$$

Шаг 4. Правила добавления и удаления клеток

На данный момент мы рассмотрели:

- Подмножество однострочных $\mathrm{SIB}_{[n]}$ полиномов (2.3.9),
- Анзац спина 3 для простейшего Гамильтониана (2.3.13),

которые, конечно, не могут полностью определить полиномы SIB, однако, они позволяют нам *полностью* определить полный базис на 2 и 3 уровнях, поскольку соответствующие коэффициенты $B_{1,1} = 1$ и $B_{1,2} = B_{2,1} = 2$ уже известны.

2 уровень:

$$\mathrm{SIB}_{\square\square} = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2}{2}, \qquad \kappa_{\square\square} = 2, \tag{2.3.24}$$

$$\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{p_1^2}{2} - \frac{p_2}{2}, \qquad \kappa_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = -2. \tag{2.3.25}$$

3 уровень:

$$\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3}} = \frac{p_1^3}{6} + \frac{p_1 p_2}{2} + \frac{p_3}{3}, \qquad \kappa_{\ydiagram{3}} = 6, \tag{2.3.26}$$

$$\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}} = \frac{p_1^3}{3} - \frac{p_3}{3}, \qquad \kappa_{\ydiagram{2,1}} = 0, \tag{2.3.27}$$

$$\mathrm{SIB}_{\ydiagram{1,1,1}} = \frac{p_1^3}{6} - \frac{p_1 p_2}{2} + \frac{p_3}{3}, \qquad \kappa_{\ydiagram{1,1,1}} = -6. \tag{2.3.28}$$

Данные результаты полностью согласуются с правилами добавления и удаления клеток

$$p_1 \cdot \mathrm{SIB}_{\ydiagram{2}} = \mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} + \mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,2}}, \tag{2.3.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}} = \mathrm{SIB}_{\ydiagram{2}} + \mathrm{SIB}_{\ydiagram{1,1}}. \tag{2.3.30}$$

Можно продолжить вычисление полиномов SIB с помощью правил добавления клеток. Умножение на p_1 увеличивает градуировку на единицу, поэтому мы записываем следующий анзац для добавления клетки

$$p_1 \cdot \mathrm{SIB}_{\ydiagram{3}} = \alpha_1 \cdot \mathrm{SIB}_{\ydiagram{4}} + \alpha_2 \cdot \mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}}, \tag{2.3.31}$$

с некоторыми константами α_1, α_2 и следующей общей формулой для нового полинома

$$\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} = \frac{p_1^4}{8} + b_1 \cdot p_1^2 p_2 + b_2 \cdot p_2^2 + b_3 \cdot p_1 p_3 + b_4 \cdot p_4. \tag{2.3.32}$$

Решение представляется в следующем виде

$$\alpha_1 = 4 - 3\alpha_2, \qquad b_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\alpha_2}, \qquad b_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2\alpha_2}, \qquad b_3 = 1 - \frac{1}{\alpha_2}, \qquad b_4 = \frac{3}{4} - \frac{1}{\alpha_2}, \tag{2.3.33}$$

где остался только один неизвестный параметр α_2. Его можно найти с помощью Гамильтониана

$$\hat{H}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} = \kappa_{\ydiagram{3,1}}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}}. \tag{2.3.34}$$

Оставшийся параметр α_2 фиксируется из приведенного выше уравнения, более того, неизвестный коэффициент $B_{1,3}$ Гамильтониана также фиксируется

$$\alpha_2 = 1, \qquad B_{1,3} = 3. \tag{2.3.35}$$

Теперь все коэффициенты Гамильтониана 4-го уровня фиксированы, и базис 4-го уровня

известен в полной общности

$$\mathrm{SIB}_{\square\square\square\square} = \frac{p_1^4}{24} + \frac{p_1^2 p_2}{4} + \frac{p_2^2}{8} + \frac{p_1 p_3}{3} + \frac{p_4}{4}, \qquad \kappa_{\square\square\square\square} = 12, \tag{2.3.36}$$

$$\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\square\square} = \frac{p_1^4}{8} + \frac{p_1^2 p_2}{4} - \frac{p_2^2}{8} - \frac{p_4}{4}, \qquad \kappa_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\square\square} = 4, \tag{2.3.37}$$

$$\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}} = \frac{p_1^4}{12} + \frac{p_2^2}{4} - \frac{p_1 p_3}{3}, \qquad \kappa_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}} = 0, \tag{2.3.38}$$

$$\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\square} = \frac{p_1^4}{8} - \frac{p_1^2 p_2}{4} - \frac{p_2^2}{8} + \frac{p_4}{4}, \qquad \kappa_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}\square} = -4, \tag{2.3.39}$$

$$\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\square} = \frac{p_1^4}{24} - \frac{p_1^2 p_2}{4} + \frac{p_2^2}{8} + \frac{p_1 p_3}{3} - \frac{p_4}{4}, \qquad \kappa_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}\square} = -12. \tag{2.3.40}$$

Можно продолжить данную процедуру, используя правила добавления клеток и уравнения для Гамильтониана, чтобы вычислять уровень за уровнем полиномы SIB. В частности, находим оставшиеся коэффициенты Гамильтониана

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= 1, \\ \frac{1}{2}B_{1,2} = \frac{1}{2}B_{2,1} &= 1, \\ \frac{1}{3}B_{1,3} = \frac{1}{4}B_{2,2} = \frac{1}{3}B_{3,1} &= 1, \\ \frac{1}{4}B_{1,4} = \frac{1}{6}B_{2,3} = \frac{1}{6}B_{3,2} = \frac{1}{4}B_{4,1} &= 1, \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Тогда общее решение для системы уравнений (2.3.23) имеет следующий простой вид

$$\boxed{B_{a,b} = a \cdot b}. \tag{2.3.42}$$

На этом шаге мы полностью определили Гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_{a,b=1}^{\infty} (a+b) \cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab \cdot p_{a+b} \frac{\partial}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial p_b}, \tag{2.3.43}$$

собственные значения которого выражаются простой формулой

$$\kappa_\lambda = 2 \cdot \sum_{\square \in \lambda} j_\square - i_\square. \tag{2.3.44}$$

Все собственные значения являются целыми числами, что является довольно нетривиальным свойством. Полная форма Гамильтониана не позволяет определить полиномы SIB

полностью, поскольку его спектр вырожден: собственные значения начинают совпадать с 6-го уровня. Однако условие на собственную функцию Гамильтониана, снабженное правилами добавления/удаления клеток в диаграмме Юнга *определяет* SIB_λ *полностью*.

Действие операторов Вирасоро на полиномы SIB_λ

Общие нормировки полиномов SIB_λ можно выбрать таким образом, чтобы следующие уравнения имели единичные коэффициенты перед полиномами в правой части (правила Пьери)

$$p_1 \cdot \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} \mathrm{SIB}_{\lambda+\square}, \tag{2.3.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\lambda)} \mathrm{SIB}_{\lambda-\square}. \tag{2.3.46}$$

Другим интересным свойством итоговых SIB_λ полиномов является то, что операторы Вирасоро добавляют и удаляют клетки в диаграммах Юнга. Мы продемонстрируем это утверждение на нескольких примерах

$$\hat{L}_{-1} \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} (N + j_\square - i_\square) \cdot \mathrm{SIB}_{\lambda+\square}, \tag{2.3.47}$$

$$\hat{L}_{1} \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\lambda)} (2N + j_\square - i_\square) \cdot \mathrm{SIB}_{\lambda-\square}. \tag{2.3.48}$$

Операторы $\hat{L}_{-1}$, $\hat{L}_1$ имеют градуировки 1 и -1 соответственно, поэтому они добавляют и удаляют одну клетку. Старшие операторы Вирасоро и старшие производные по временным переменным устроены более сложным образом: они удаляют из диаграммы Юнга косые диаграммы, которые называются *граничными полосами*. Полезно рассмотреть аналогичные формулы для старших временных переменных

$$k \frac{\partial}{\partial p_k} \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\substack{\mathrm{bs} \in \mathrm{BS}(\lambda) \\ |\mathrm{bs}|=k}} (-)^{h(\mathrm{bs})+1} \mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}}. \tag{2.3.49}$$

Обозначим как $\mathrm{BS}(\lambda)$ множество граничных полос диаграммы λ. Полоса (также называемая лентой или крюком-ободком) — это косая диаграмма, которая связна и имеет единичную ширину (см. Рис. 2.3).

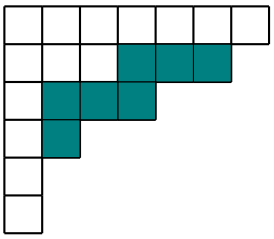


Рис. 2.3: Пример граничной полосы $\mathrm{bs} \in \mathrm{BS}([7,6,4,2,1,1])$ размера $|\mathrm{bs}| = 7$ и высоты $h(\mathrm{bs}) = 3$.

Формула для действия оператора Вирасоро L_2 выглядит следующим образом

$$\hat{L}_2\,\mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\substack{\mathrm{bs}\in\mathrm{BS}(\lambda)\\|\mathrm{bs}|=2}} (-)^{h(\mathrm{bs})+1}\,(2N + j_{\blacksquare_{\mathrm{bs}}} - i_{\blacksquare_{\mathrm{bs}}})\,\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}} + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{bs},\mathrm{bs}'\in\mathrm{BS}(\lambda)\\|\mathrm{bs}|+|\mathrm{bs}'|=2}} (-)^{h(\mathrm{bs})+h(\mathrm{bs}')}\,\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}-\mathrm{bs}'}. \tag{2.3.50}$$

В приведенной выше формуле есть две суммы: первая сумма пробегает по граничным полосам размера 2, а вторая сумма пробегает по парам (непустых) полос общего размера 2. В данном конкретном случае это означает, что вторая сумма пробегает по парам (несмежных) клеток из множества $\mathrm{Rem}(\lambda)$. В первой сумме приведенной выше формулы функция содержания $j_\square - i_\square$ вычисляется в особой точке $\blacksquare_{\mathrm{bs}}$, которая зависит от формы граничной полосы. Существует только 2^{k-1} возможных граничных полос размера k, и мы приводим их явно для $k = 2$



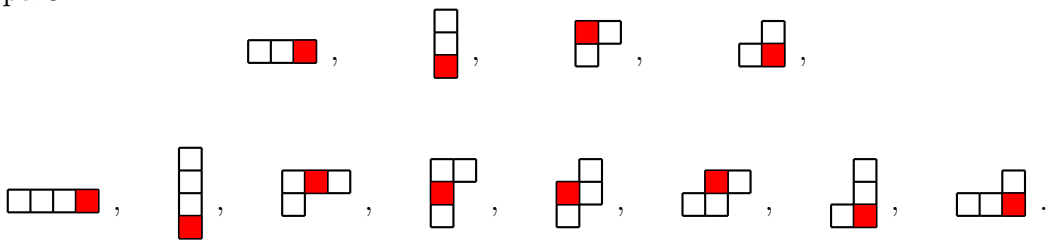
Детали приведенной выше формулы ясны из явного примера

$$\hat{L}_2\,\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}} = (-1)(2N-2)\mathrm{SIB}_{\square\square\square} + (2N+2)\mathrm{SIB}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} + \mathrm{SIB}_{\square\square}. \tag{2.3.51}$$

Общая формула действия оператора $\hat{L}_k$ имеет следующий вид

$$\hat{L}_k\,\mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\substack{\mathrm{bs}\in\mathrm{BS}(\lambda)\\|\mathrm{bs}|=k}} (-)^{h(\mathrm{bs})+1}\,(2N + j_{\blacksquare_{\mathrm{bs}}} - i_{\blacksquare_{\mathrm{bs}}})\,\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}} + \\ + \sum_{\substack{\mathrm{bs},\mathrm{bs}'\in\mathrm{BS}(\lambda)\\|\mathrm{bs}|+|\mathrm{bs}'|=k}} (-)^{h(\mathrm{bs})+h(\mathrm{bs}')}\,\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}-\mathrm{bs}'}. \tag{2.3.52}$$

Оставшийся элемент общей формулы, который пока не имеет описания, — это положение специальной клетки $\blacksquare_{\mathrm{bs}}$. Мы приводим явно все граничные полосы с отмеченными клетками для размера 3 и 4



Вышеприведенные общие формулы демонстрирует важное свойство: операторы Вирасоро действуют на суперинтегрируемые полиномы, удаляя клетки из соответствующих диаграмм. Аналогичные формулы рассматривались в [130].

2.4 SIB для кубической модели Концевича

В этом разделе мы применим наш метод и построим суперинтегрируемый базис для матричной модели Концевича [131] в *фазе Концевича*. Согласно работам [132, 133], суперинтегрируемый базис для данной модели задается полиномами Q-Шура [57], которые тесно связаны с B-КП интегрируемостью [134, 135]. Наш подход будет в точности повторять алгоритм прошлого раздела.

Сначала мы определим модель Концевича и запишем операторы Вирасоро, которые реализуют тождества Уорда. Затем мы обсудим временные переменные модели и проанализируем возможные семейства диаграмм, которые являются комбинаторными объектами, нумерующими базисные градуированные полиномы.

Мы начинаем построение суперинтегрируемого базиса SIB_λ [4] с однострочного сектора, который замкнут относительно действия операторов удаления клеток. Далее мы рассматриваем анзац минимального спина для Гамильтониана (в этом случае минимальный спин равен 4), для которого полиномы SIB являются собственными функциями. Чтобы дополнить однострочное подмножество до полного базиса, мы накладываем правила добавления/удаления клеток для минимальной временной переменной. Эти предположения позволяют нам полностью зафиксировать форму полиномов SIB. Примечательно, что полученный Гамильтониан имеет только целые собственные значения, а старшие операторы Вирасоро действуют на полиномы SIB, удаляя клетки из диаграмм. Руководствуясь правилами удаления клеток для старших операторов Вирасоро мы предлагаем альтернативную формулировку диаграмм в

[4] Мы обозначаем суперинтегрируемый базис модели Концевича тем же именем SIB_λ, однако они отличаются от суперинтегрируемого базиса Гауссовой Эрмитовой модели.

виде лестничных диаграмм.

Статсумма матричного интеграла Концевича в фазе Концевича определяется следующим интегралом по эрмитовым $N \times N$ матрицам H с внешней матрицей Φ

$$\mathcal{Z}_K(\Phi) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\Phi)} \int dH \exp\left(-\frac{1}{3!}\mathrm{tr}\, H^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, H^2\Phi\right), \tag{2.4.1}$$

где нормировочный коэффициент $\mathcal{Z}(\Phi)$ определяется следующим образом

$$\mathcal{Z}(\Phi) = \int dH \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, H^2\Phi\right). \tag{2.4.2}$$

Статсумма Концевича является функцией внешней матрицы Φ, и в фазе Концевича она становится степенным рядом по переменным $\mathrm{tr}\,\Phi^{-k}$ [132, 136, 137]. Что более важно, она зависит только от нечетных отрицательных степеней внешней матрицы, которые мы рассматриваем (в пределе $N \to \infty$) как независимые временные переменные τ_k

$$\tau_k = \frac{\mathrm{tr}\,\Phi^{-2k-1}}{2k+1}, \qquad\qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2.4.3}$$

Как функция временных переменных, статсумма $\mathcal{Z}_K(\tau_k)$ удовлетворяет бесконечному числу линейных уравнений - соотношений Вирасоро [138, 139]

$$\hat{\mathcal{L}}_n \mathcal{Z}_K = \frac{\partial \mathcal{Z}_K}{\partial \tau_{n+1}}, \qquad\qquad n = -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4.4}$$

Операторы Вирасоро этой модели имеют следующую явную форму [140]

$$\hat{\mathcal{L}}_n = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \tau_k}\frac{\partial}{\partial \tau_{n-k-1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_{n+k}} + \frac{\delta_{n,0}}{16} + \delta_{n+1,0}\,\frac{\tau_0^2}{2} \tag{2.4.5}$$

и коммутируют согласно соотношениям алгебры Вирасоро

$$\left[\hat{\mathcal{L}}_n, \hat{\mathcal{L}}_m\right] = (n-m)\hat{\mathcal{L}}_{n+m}, \qquad\qquad n, m \geqslant -1. \tag{2.4.6}$$

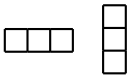
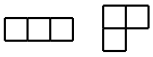
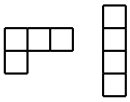
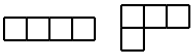
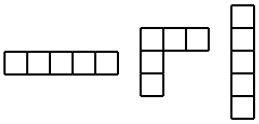
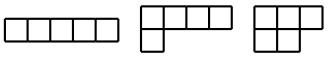
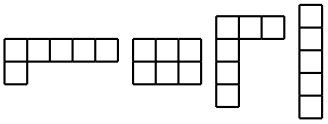
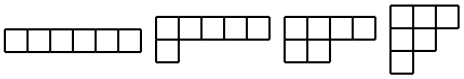
Ур.	Нечетные разбиения (HP)	Строгие разбиения (CP)	Базисные мономы
1			τ_0
2			τ_0^2
3			τ_1, τ_0^3
4			$\tau_1\tau_0, \tau_0^4$
5			$\tau_2, \tau_1\tau_0^2, \tau_0^5$
6			$\tau_2\tau_0, \tau_1^2, \tau_1\tau_0^3, \tau_0^6$

Таблица 2.5: Нечетные разбиения, строгие (distinct) разбиения и градуированные полиномы временных переменных τ_k для малых уровней 1-6. Нечетные разбиения (HP) имеют очевидное отображение на градуированные полиномы временных переменных τ_k. Строгие разбиения (CP) не имеют явной связи с базисными мономами, однако их размерности действительно совпадают для каждого уровня.

Шаг 1. Диаграммы

Временные переменные τ_k имеют естественные градуировки, которые закодированы нулевым оператором Вирасоро

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) \tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} + \frac{1}{16}, \tag{2.4.7}$$

$$[\tau_k] = 2\left(k + \frac{1}{2}\right) = 2k + 1, \tag{2.4.8}$$

где для простоты мы умножили все градуировки на 2.

Аналогичный набор временных переменных может быть получен путем сведения $p_{2k} \to 0$ временных переменных p_a ГЭМ из предыдущего раздела. Набор временных переменных τ_k может быть описан диаграммами по крайней мере двумя способами. Первый вариант – это диаграммы Юнга с нечетными длинами строк – *нечетные разбиения* (HP). Второй вариант – это диаграммы Юнга с разными длинами строк – *строгие разбиения* (CP). Примеры этих диаграмм собраны в таблице 2.5.

Производящая функция числа нечетных и строгих разбиений $P^{\mathrm{HP}}(n) = P^{\mathrm{CP}}(n)$ [5] на уровне n имеет следующий вид

$$\prod_{k=1} \frac{1}{1-q^{2k-1}} = \sum_{n=0} q^n P^{\mathrm{CP}}(n) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + \dots . \tag{2.4.9}$$

Нечетные разбиения *не подходят* для нашего метода по следующим причинам. Нечетные разбиения содержат подмножество одностолбцовых диаграмм $[1^n]$. Согласно нашим предположениям (см. раздел 2.2) первая временная переменная τ_0 и ее производная $\frac{\partial}{\partial \tau_0}$ действуют путем добавления и удаления клетки к соответствующим диаграммам. В частности, подмножество одностолбцовых диаграмм HP замкнуто относительно операции удаления клетки, поэтому для соответствующих многочленов выполняется следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau_0} \mathrm{SIB}^{\mathrm{HP}}_{[1^n]} = c_n \, \mathrm{SIB}^{\mathrm{HP}}_{[1^{n-1}]} \tag{2.4.10}$$

с некоторыми коэффициентами c_n. С другой стороны, операция добавления клеток также не выводит из подмножества диаграмм с одним столбцом

$$\tau_0 \, \mathrm{SIB}^{\mathrm{HP}}_{[1^n]} = c'_n \, \mathrm{SIB}^{\mathrm{HP}}_{[1^{n+1}]}, \tag{2.4.11}$$

так как единственная возможная диаграмма $[2, 1^{n-1}]$ содержит четное число и, следовательно, не включена в семейство HP. Поэтому для семейства HP существует только тривиальное решение

$$\mathrm{SIB}^{\mathrm{HP}}_{[1^n]} \sim \tau_0^n. \tag{2.4.12}$$

Мы не рассматриваем диаграммы HP в этой работе и далее фокусируемся на строгих разбиениях CP.

Шаг 2. Система уравнений для однострочных полиномов

Градуировки	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...
Переменные	...	τ_1	$-$	τ_0	1	$\frac{\partial}{\partial \tau_0}$	$-$	$\frac{\partial}{\partial \tau_1}$	...
Операторы Вирасоро			$\hat{\mathcal{L}}_{-1}$	$-$	$\hat{\mathcal{L}}_0$	$-$	$\hat{\mathcal{L}}_1$	$-$	...

Таблица 2.6: Сводная таблица градуировок для временных переменных и операторов Вирасоро для модели Концевича.

[5] Идея доказательства $P^{\mathrm{HP}}(n) = P^{\mathrm{CP}}(n)$ заключается в том, что каждое натуральное число может быть выражено единственным образом как степень числа 2, умноженная на нечетное число.

Однострочное подмножество $\mathrm{SIB}_{[n]}$ замкнуто относительно действия операторов Вирасоро и производных (см. Таб. 2.6), поэтому мы рассмотрим следующую систему уравнений, аналогичную (2.3.6),

$$\frac{\partial\,\mathrm{SIB}_{[n]}}{\partial\tau_k} = u_{n,k}\,\mathrm{SIB}_{[n-2k-1]}, \tag{2.4.13}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_k\,\mathrm{SIB}_{[n]} = v_{n,k}\,\mathrm{SIB}_{[n-2k]}. \tag{2.4.14}$$

Судя по наивному подсчету уравнений и переменных, система получается переопределенной, однако на самом деле она самосогласована и имеет единственное решение. Мы рассматриваем общую форму анзаца для полиномов SIB:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SIB}_{[0]} &= 1,\\
\mathrm{SIB}_{[1]} &= \tau_0,\\
\mathrm{SIB}_{[2]} &= \tau_0^2,\\
\mathrm{SIB}_{[3]} &= \frac{2\tau_0^3}{3} + a_{3,1}\,\tau_1,\\
\mathrm{SIB}_{[4]} &= \frac{\tau_0^4}{3} + a_{4,1}\,\tau_1\tau_0,\\
\mathrm{SIB}_{[5]} &= \frac{2\tau_0^5}{15} + a_{5,1}\,\tau_1\tau_0^2 + a_{5,2}\,\tau_2,\\
\mathrm{SIB}_{[6]} &= \frac{2\tau_0^6}{45} + a_{6,1}\,\tau_0^3\tau_1 + a_{6,2}\,\tau_1^2 + a_{6,3}\,\tau_0\tau_2,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Мы кладем первый коэффициент как $2^{n-1}/n!$, чтобы зафиксировать общую нормировку для удобства. Решение указанной выше системы единственно и параметризовано одним парамет-

ром x

$$\begin{aligned}
&\mathrm{SIB}_{[0]} = 1,\\
&\mathrm{SIB}_{[1]} = \tau_0,\\
&\mathrm{SIB}_{[2]} = \tau_0^2,\\
&\mathrm{SIB}_{[3]} = \frac{2\tau_0^3}{3} + 4x\,\tau_1,\\
&\mathrm{SIB}_{[4]} = \frac{\tau_0^4}{3} + 8x\,\tau_1\tau_0,\\
&\mathrm{SIB}_{[5]} = \frac{2\tau_0^5}{15} + 8x\,\tau_0^2\tau_1 + 16x^2\,\tau_2,\\
&\mathrm{SIB}_{[6]} = \frac{2\tau_0^6}{45} + \frac{16}{3}x\,\tau_0^3\tau_1 + 16x^2\,\tau_1^2 + 32x^2\,\tau_0\tau_2,\\
&\quad\ldots
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Из приведенных выше формул видно, что параметр x является тривиальным масштабированием временных переменных $\tau_k \to x^k\tau_k$. Явная формула для коэффициентов $u_{n,k}, v_{n,k}$

$$u_{n,k} = 2\cdot(4x)^k, \tag{2.4.17}$$

$$v_{n,k} = \frac{1}{2}\cdot(4x)^{k-1}\left(k + 4x(n-2k)\right). \tag{2.4.18}$$

Согласно нашим наблюдениям после формулы (2.3.10) правильная нормировка временных переменных, согласованная с операторами Вирасоро, восстанавливается, когда из коэффициентов $u_{n,k}, v_{n,k}$ исключается степенная зависимость от k. В этом частном случае существует только одно решение $\boxed{x = \frac{1}{4}}$.

Шаг 3. Гамильтониан для полиномов SIB

Для завершения построения полного базиса рассмотрим простейший Гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ для полиномов SIB_λ

$$\hat{\mathcal{H}}\,\mathrm{SIB}_\lambda = \varepsilon_\lambda\,\mathrm{SIB}_\lambda. \tag{2.4.19}$$

В случае временных переменных τ_k простейший нетривиальный Гамильтониан имеет спин 4

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} = \sum_{a,b,c=0}^{\infty} A_{a,b,c}\,\tau_{a+b+c+1}\frac{\partial^3}{\partial\tau_a\partial\tau_b\partial\tau_c} + B_{a,b,c}\,\tau_a\tau_b\tau_c\frac{\partial}{\partial\tau_{a+b+c+1}} +\\
+ \sum_{a+b=c+d} C_{a,b|c,d}\,\tau_a\tau_b\frac{\partial^2}{\partial\tau_c\partial\tau_d} + \sum_{a=0}^{\infty} G_a\,\tau_a\frac{\partial}{\partial\tau_a}.
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Коэффициенты $A_{a,b,c}$ и $B_{a,b,c}$ абсолютно симметричны относительно перестановок индексов a, b, c, тогда как коэффициенты $C_{a,b|c,d}$ имеют симметрию $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$. Полезно проанализировать оператор градуировки

$$\hat{D} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k}. \tag{2.4.21}$$

Среди операторов нулевой градуировки и спина не более 4 имеются два тривиальных Гамильтониана $\hat{D}$ и $\hat{D}^2$. Собственные значения этих операторов на однострочных полиномах задаются следующими выражениями

$$\hat{D}\,\mathrm{SIB}_{[n]} = n \cdot \mathrm{SIB}_{[n]}, \tag{2.4.22}$$

$$\hat{D}^2\,\mathrm{SIB}_{[n]} = n^2 \cdot \mathrm{SIB}_{[n]}. \tag{2.4.23}$$

Далее мы накладываем условие собственных функции для однострочных полиномов

$$\hat{\mathcal{H}}\,\mathrm{SIB}_{[n]} = \varepsilon_{[n]} \cdot \mathrm{SIB}_{[n]} \tag{2.4.24}$$

и решаем соответствующие уравнения. В результате мы вычисляем собственные значения $\varepsilon_{[n]}$ и представляем их как функции первых трех собственных значений $\varepsilon_{[1]}, \varepsilon_{[2]}, \varepsilon_{[3]}$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{[4]} &= 4\varepsilon_{[1]} - 6\varepsilon_{[2]} + 4\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[5]} &= 15\varepsilon_{[1]} - 20\varepsilon_{[2]} + 10\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[6]} &= 36\varepsilon_{[1]} - 45\varepsilon_{[2]} + 20\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[7]} &= 70\varepsilon_{[1]} - 84\varepsilon_{[2]} + 35\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[8]} &= 120\varepsilon_{[1]} - 140\varepsilon_{[2]} + 56\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[9]} &= 189\varepsilon_{[1]} - 216\varepsilon_{[2]} + 84\varepsilon_{[3]}, \\
\varepsilon_{[10]} &= 280\varepsilon_{[1]} - 315\varepsilon_{[2]} + 120\varepsilon_{[3]}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

$$\varepsilon_{[n]} = \frac{n(n-2)(n-3)}{2}\varepsilon_{[1]} - \frac{n(n-1)(n-3)}{2}\varepsilon_{[2]} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\varepsilon_{[3]}. \tag{2.4.26}$$

Три параметра $\varepsilon_{[1]}, \varepsilon_{[3]}, \varepsilon_{[3]}$ позволяют варьировать форму однострочных собственных значений $\varepsilon_{[n]}$. Мы используем специальные значения параметров, мотивированные собственными

значениями (2.4.22). А именно, мы накладываем следующее условие

$$\boxed{\varepsilon_{[n]} = n^3.} \tag{2.4.27}$$

Примечательно, что это условие выполняется, когда параметры имеют следующие $\varepsilon_{[1]} = 1, \varepsilon_{[2]} = 2^3, \varepsilon_{[3]} = 3^3$, что полностью согласуется с нашей гипотезой. Из приведенных выше уравнений для однострочных полиномов находим коэффициенты $B_{a,b,c}$

$$\begin{aligned} &B_{0,0,0} = 4, \quad B_{0,0,1} = 4 \cdot 3, \quad B_{0,0,2} = 4 \cdot 5, \quad B_{0,1,1} = 4 \cdot 3^2, \\ &B_{0,0,3} = 4 \cdot 7, \quad B_{0,1,2} = 4 \cdot 3 \cdot 5, \quad B_{1,1,1} = 4 \cdot 3^3, \\ &\quad \dots \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

откуда заключаем следующую общую формулу

$$B_{a,b,c} = 4 \cdot (2a+1)(2b+1)(2c+1). \tag{2.4.29}$$

Мы не приводим явно все остальные ограничения на коэффициенты $A_{a,b,c}$, $C_{a,b|c,d}$, G_a, но приведем несколько примеров

$$\begin{aligned} C_{0,0|0,0} &= 3, & G_0 &= 1, \\ C_{0,1|0,1} &= 9, & A_{0,0,0} &= \frac{1}{4}(27 - G_1), \\ 2C_{1,1|0,2} + C_{1,1|1,1} &= 81, & A_{0,0,1} &= \frac{1}{12}(125 - G_2), \\ C_{0,2|1,1} + 2C_{0,2|0,2} &= 45, & A_{0,0,2} + A_{0,1,1} &= \frac{1}{12}(343 - G_3), \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

Шаг 4. Правила добавления и удаления клеток

На следующем шаге мы накладываем правила добавления/удаления клеток вместе с уравнениями на Гамильтониан (2.4.19) для полиномов SIB до 5 уровня. Правила добавления клеток выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} &\tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_{\square\square} = c_1\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square} + c_2\, \mathrm{SIB}_{\square\square}, && \tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_{\square\square\square} = c_3\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square} + c_4\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square}, \\ &\tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square} = c_6\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square} + c_7\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square}, && \tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_{\square\square\square} = c_8\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square} + c_9\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square}, \\ &\tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_{\square\square} = c_5\, \mathrm{SIB}_{\square\square\square}. \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

Правила удаления клеток (мы не упоминаем здесь однострочные полиномы, поскольку они были проанализированы ранее) записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}} = d_1\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2}}, && \frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} = d_2\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3}} + d_3\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}},\\
&\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,1}} = d_4\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4}} + d_5\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}}, && \frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,2,1}} = d_6\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}}.
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Здесь c_i, d_i – это некоторые константы. Решая приведенные выше уравнения и уравнения на собственные функций Гамильтониана (2.4.19) относительно коэффициентов полиномов, получаем следующее решение

$$\begin{aligned}
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}} &= \frac{\tau_0^3}{3} + (\gamma-27)\frac{\tau_1}{12},\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} &= \frac{\tau_0^4}{3} + (\gamma-27)\frac{\tau_0\tau_1}{12},\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,1}} &= \frac{\tau_0^5}{5} + (\gamma-15)\frac{\tau_0^2\tau_1}{20} + (\gamma-39)\frac{\tau_2}{24},\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,2,1}} &= \frac{2\tau_0^5}{15} + (\gamma-27)\frac{\tau_0^2\tau_1}{12} + (\gamma-39)(\gamma-27)\frac{\tau_2}{288},
\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

где $\gamma := G_1$ – это свободный параметр, который не фиксируется из приведенных выше уравнений. Однако, если мы рассмотрим уравнения следующего уровня 6

$$\begin{aligned}
\tau_0\cdot\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5,1}} &= c_{10}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{6,1}} + c_{11}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5}},\\
\tau_0\cdot\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,2}} &= c_{12}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5,2}} + c_{13}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,1}},\\
\tau_0\cdot\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,3}} &= c_{13}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,3}} + c_{14}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,2}},\\
\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,2}} &= d_7\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5,2}} + d_8\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,1}},\\
\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,3}} &= d_9\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,2}} + d_{10}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,3}},\\
\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,2,1}} &= d_{11}\,\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,3}},
\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

параметр γ фиксируется однозначно $\boxed{\gamma = 15}$. Мы приводим явные формулы для полиномов SIB до 6 уровня:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{1}} &= \tau_0, & \varepsilon_{\ydiagram{1}} &= 1,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2}} &= \tau_0^2, & \varepsilon_{\ydiagram{2}} &= 8,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3}} &= \frac{2\tau_0^3}{3} + \tau_1, & \varepsilon_{\ydiagram{3}} &= 27,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{2,1}} &= \frac{\tau_0^3}{3} - \tau_1, & \varepsilon_{\ydiagram{2,1}} &= 9,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4}} &= \frac{\tau_0^4}{3} + 2\tau_0\tau_1, & \varepsilon_{\ydiagram{4}} &= 64,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,1}} &= \frac{\tau_0^4}{3} - \tau_0\tau_1, & \varepsilon_{\ydiagram{3,1}} &= 28,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5}} &= \frac{2\tau_0^5}{15} + 2\tau_0^2\tau_1 + \tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{5}} &= 125,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,1}} &= \frac{\tau_0^5}{5} - \tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{4,1}} &= 64,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,2}} &= \frac{2\tau_0^5}{15} - \tau_0^2\tau_1 + \tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{3,2}} &= 35,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{6}} &= \frac{2\tau_0^6}{45} + \frac{4}{3}\tau_0^3\tau_1 + \tau_1^2 + 2\tau_0\tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{6}} &= 216,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{5,1}} &= \frac{4\tau_0^6}{45} + \frac{2}{3}\tau_0^3\tau_1 - \tau_1^2 - \tau_0\tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{5,1}} &= 126,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{4,2}} &= \frac{\tau_0^6}{9} - \frac{2}{3}\tau_0^3\tau_1 + \tau_1^2, & \varepsilon_{\ydiagram{4,2}} &= 72,\\
\mathrm{SIB}_{\ydiagram{3,2,1}} &= \frac{\tau_0^6}{45} - \frac{1}{3}\tau_0^3\tau_1 - \tau_1^2 + \tau_0\tau_2, & \varepsilon_{\ydiagram{3,2,1}} &= 36.
\end{aligned}
\tag{2.4.35}
$$

Теперь можно заметить, что полиномы SIB – это не что иное, как хорошо известные полиномы Q-Шура [57]. На этом ограниченном наборе примеров мы наблюдаем замечательное свойство «суммы по клеткам» собственных значений

$$
\varepsilon_\lambda = \sum_{\square\in\lambda} j_\square^3 - (j_\square - 1)^3 = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i^3. \tag{2.4.36}
$$

Мы обозначаем через $j_\square$ горизонтальную координату клетки $\square$, а первая клетка имеет координату 1. Решая уравнения типа (2.4.31), (2.4.32), (2.4.33) для правил добавления/удаления клеток и уравнений (2.4.19) можно вычислять уровень за уровнем полиномы SIB. С другой стороны, условия собственных функций (2.4.19) фиксируют коэффициенты Гамильтониана

$$
\begin{aligned}
&A_{0,0,0} = 3, && && G_0 = 1,\\
&A_{0,0,1} = 5, && C_{0,0|0,0} = 3, && G_1 = 15,\\
&A_{0,0,2} = 7, && C_{0,1|0,1} = 3\cdot 3, && G_2 = 65,\\
&A_{0,1,1} = 7, && C_{0,2|0,2} = 3\cdot 5, && G_3 = 175,\\
&A_{0,0,3} = 9, && C_{0,2|1,1} = 3\cdot 5, && G_4 = 369,\\
&A_{0,1,2} = 9, && C_{1,1|0,2} = 3\cdot 3^2, && G_5 = 671,\\
&A_{1,1,1} = 9, && C_{1,1|1,1} = 3\cdot 3^2, && \\
&\dots && && \dots
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&C_{0,3|0,3} = 3\cdot 7,\\
&C_{0,3|1,2} = 3\cdot 7,\\
&C_{1,2|0,3} = 3\cdot 3\cdot 5,\\
&C_{1,2|1,2} = 3\cdot 3\cdot 5,\\
&\dots
\end{aligned}
\tag{2.4.37}
$$

Данных значений коэффициентов достаточно для того, чтобы выписать полный ответ

$$
\begin{aligned}
A_{a,b,c} &= 2(a+b+c)+3,\\
C_{a,b|c,d} &= 3(2a+1)(2b+1),\\
G_a &= (2a+1)(2a^2+2a+1).
\end{aligned}
\tag{2.4.38}
$$

Гамильтониан для полиномов SIB имеют следующий простой вид

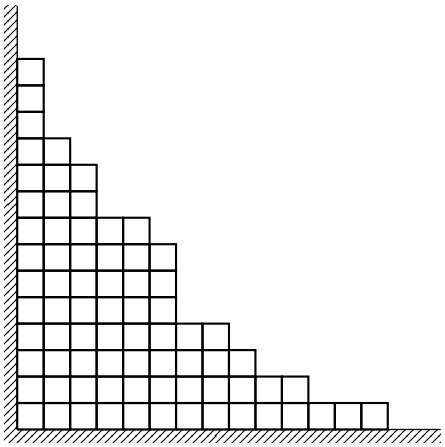
$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} = &\sum_{a,b,c=0}^{\infty} (2(a+b+c)+3)\tau_{a+b+c+1}\frac{\partial^3}{\partial\tau_a\partial\tau_b\partial\tau_c} + \sum_{a+b=c+d} 3(2a+1)(2b+1)\tau_a\tau_b\frac{\partial^2}{\partial\tau_c\partial\tau_d}\\
&\sum_{a,b,c=0}^{\infty} 4(2a+1)(2b+1)(2c+1)\tau_a\tau_b\tau_c\frac{\partial}{\partial\tau_{a+b+c+1}} + \sum_{a=0}^{\infty}(2a+1)\left(2a^2+2a+1\right)\tau_a\frac{\partial}{\partial\tau_a}.
\end{aligned}
\tag{2.4.39}
$$

Собственные значения данного Гамильтониана являются положительными целыми числами и подчиняются формуле (2.4.36). Данный оператор не способен полностью зафиксировать базис SIB из-за вырожденного спектра, например $\varepsilon_{[8,7]} = 8^3 + 7^3 = 855 = 9^3 + 5^3 + 1^3 = \varepsilon_{[9,5,1]}$. Однако вкупе с правилами добавления/удаления клеток базис полностью фиксируется.

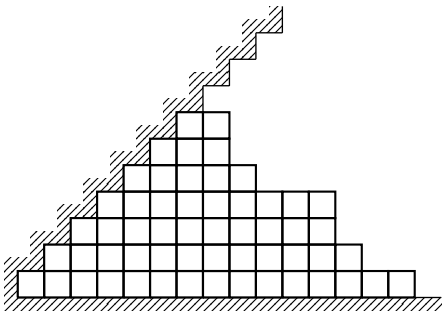
Действие операторов Вирасоро на полиномы $\mathbf{SIB}_\lambda$

Мотивируясь действием временных переменных и операторов Вирасоро на полиномы SIB, которые мы обсуждаем в этом разделе, полезно немного изменить обозначение строгих раз-

биений. Для этого представим диаграмму Юнга (перевернутую вверх ногами) как способ плотной упаковки квадратных коробок в углу комнаты. В такой постановке строгие разбиения (СР) находятся во взаимно однозначном соответствии с возможными способами плотной упаковки квадратных коробок под лестницей (с единичным шагом). Примеры таких диаграмм приведены на Рис. 2.4.



(a) Обычное разбиение - диаграмма Юнга



(a) Строгое разбиение

Рис. 2.4: Примеры обычных диаграмм Юнга и строгих разбиений, представленных в упаковок коробок. Левая картинка соответствует обычной диаграмме Юнга, правая – строгому разбиению.

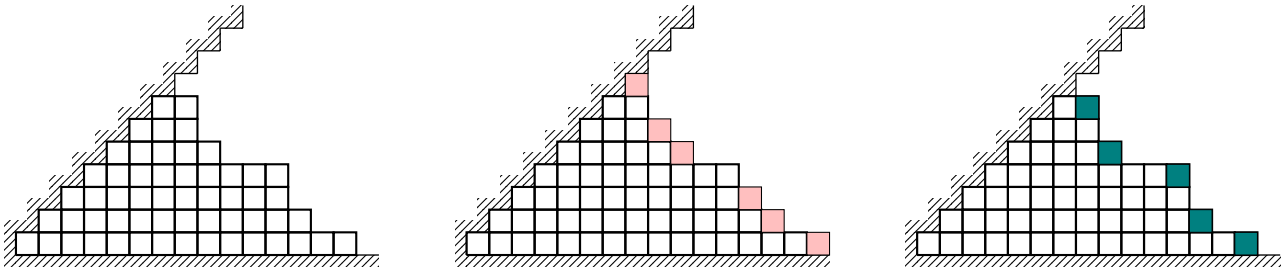
С этого момента мы будем представлять строгие разбиения как диаграммы Юнга под лестницей. С этими обозначениями действие операторов τ_0 и $\frac{\partial}{\partial\tau_0}$ имеет следующей вид

$$\tau_0 \cdot \mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square\in \mathrm{AddDP}(\lambda)} \mathrm{SIB}_{\lambda+\square}, \tag{2.4.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_0}\,\mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\square\in \mathrm{RemDP}(\lambda)} (2-\delta_{i_\square,j_\square})\cdot \mathrm{SIB}_{\lambda-\square}. \tag{2.4.41}$$

Заметим, что коэффициенты в правой части уравнения почти всегда являются единицами, за исключением диагонали $i_\square = j_\square$. Множества $\mathrm{AddDP}(\lambda)$ и $\mathrm{RemDP}(\lambda)$ определяются так же, как в предыдущем разделе (3.1). Приведем явный пример $\mathrm{AddDP}(\lambda)$ и $\mathrm{RemDP}(\lambda)$ (см. Рис. 2.5).

Производные по старшим временным переменным τ_k действуют на полиномы по следую-



(a) λ (a) $\mathrm{AddDP}(\lambda)$ (a) $\mathrm{RemDP}(\lambda)$

Рис. 2.5: Примеры множеств $\mathrm{AddDP}(\lambda)$ и $\mathrm{RemDP}(\lambda)$.

щим правилам

$$\frac{\partial}{\partial\tau_k}\mathrm{SIB}_\lambda = \sum_{\substack{\mathrm{bs}\in\mathrm{BS}^*(\lambda)\\ |\mathrm{bs}|=2k+1}} (-1)^{\frac{|\mathrm{bs}^{(2)}|}{2}+h(\mathrm{bs}^{(1)})+1}\cdot(2-\delta_{i_{\square_{\mathrm{bs}}},j_{\square_{\mathrm{bs}}}})\cdot\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}}, \tag{2.4.42}$$

где $\mathrm{BS}^*(\lambda)$ — это множество *двойных (граничных) полос* [57]. Двойная полоса – это косая диаграмма (т. е. ее можно представить как λ/μ, где $\mu\subset\lambda$, λ,μ — различные строгие разбиения), которая связна и имеет ширину один или два (см. Рис. 2.6).

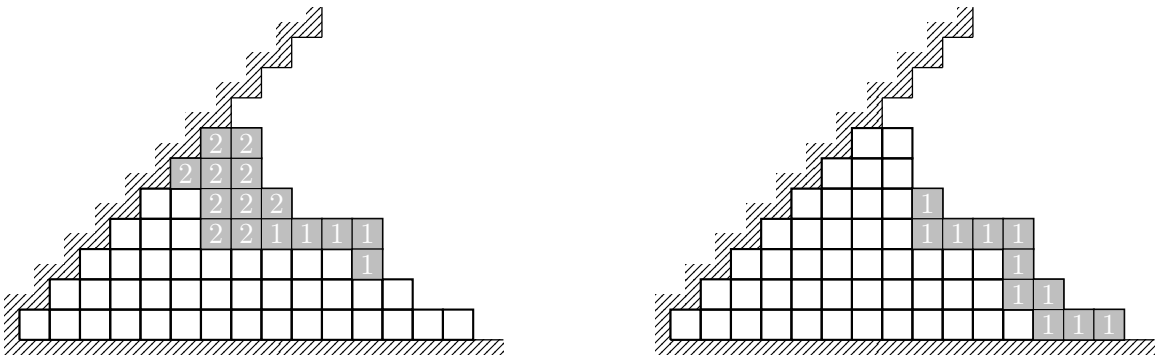


Рис. 2.6: Примеры двойных полос. Полоса ширины два всегда касается левой границы лестницы. Двойная полоса может быть обычной граничной полосой, если она имеет ширину один везде.

На приведенных на Рис.2.6 диаграммах мы явно помечаем клетки подмножества единичной ширины $\mathrm{bs}^{(1)}$ как 1 и клетки подмножества $\mathrm{bs}^{(2)}$ (ширины 2) как 2. Мы обозначаем $|\mathrm{bs}^{(2)}|$ количество клеток в подмножестве ширины 2. В то время как $h(\mathrm{bs}^{(1)})$ является высотой подмножества единичной ширины. В наших обозначениях $i_{\square_{\mathrm{bs}}}, j_{\square_{\mathrm{bs}}}$ – это координаты начала полосы, т.е. клетки, для которого $j_\square - i_\square$ имеет минимальное значение (для двойной полосы таких клеток две, однако неоднозначности нет, поскольку для обоих $\delta_{i_{\square_{\mathrm{bs}}},j_{\square_{\mathrm{bs}}}}=1$). Приведем репрезентативный пример действия оператора $\frac{\partial}{\partial\tau_2}$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_2}\mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\square\square\square\square} = \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\square\square\square} + \mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\square\square\square} - 2\cdot\mathrm{SIB}_{\square\square\square\square\square\square\square\square\square}\,. \tag{2.4.43}$$

Операторы Вирасоро $\hat{\mathcal{L}}_n$ $(n>0)$ действуют удалением двойных полос из диаграмм так же как старшие производные (2.4.42), с единственной разницей, что коэффициенты в правой части больше не являются константами

$$\hat{\mathcal{L}}_n\,\mathrm{SIB}_\lambda = \frac{1}{4}\cdot\sum_{\substack{\mathrm{bs}\in\mathrm{BS}^*(\lambda)\\|\mathrm{bs}|=2k+1}}(-1)^{\frac{|\mathrm{bs}^{(2)}|}{2}+h(\mathrm{bs}^{(1)})+1}\cdot(2-\delta_{i_{\square_{\mathrm{bs}}},j_{\square_{\mathrm{bs}}}})\cdot\left(k+j_{\square_{\mathrm{bs}}}-i_{\square_{\mathrm{bs}}}-\frac{|\mathrm{bs}^{(2)}|}{2}\right)\cdot\mathrm{SIB}_{\lambda-\mathrm{bs}}. \tag{2.4.44}$$

Заметим, что правила удаления клеток для приведенных выше операторов Вирасоро и соответствующих производных по временным переменным (2.4.42) совпадают. В то время как в случае ГЭМ правила удаления клеток различны для производных по времени (2.3.49) и операторов Вирасоро (2.3.52) (в случае операторов Вирасоро есть дополнительная сумма по двум различным граничным полосам).

2.5 Обсуждение

В этой главе мы описали связь между матричными моделями и аффинными Янгианами и предприняли попытку систематического построения суперинтегрируемого базиса (SIB) в матричных моделях для конкретных примеров гауссовых эрмитовых и кубических моделей Концевича. Наша процедура построения основана на основной гипотезе: *суперинтегрируемые формулы являются проявлениями алгебр скрытой симметрии.*

Мотивированные примером моделей ВЛЖЖ [19], чья алгебра симметрии совпадает с вырожденным аффинным Янгианом $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ (т.е. $W_{1+\infty}$), мы формулируем набор предположений, которые могут позволить реконструировать суперинтегрируемые полиномы в других моделях. Эти предположения касаются: формы диаграмм типа Юнга, которые перечисляют многочлены SIB; правил Пьери для добавления и удаления клеток в этих диаграммах; существования оператора нулевой градуировки, который кодирует полиномы SIB как собственные функции.

Мы применили метод для моделей, где полиномы SIB уже были известны, однако настоящий успех метода наступит после открытия полиномов SIB в более сложных моделях (например, обобщенных моделях Концевича [136,141,142] или моделях собственных значений

в суперпространстве [29, 143–146]), где полиномы SIB на данный момент не известны.

Здесь мы перечислим недостатки нашего метода и возможные модификации:

- В нашем методе мы использовали правила добавления/удаления клеток только для простейших временных переменных, а операторы старшей градуировки использовались *только для однострочного сектора*. Однако в результате мы наблюдаем, что *все* производные по временным переменным (2.3.49), (2.4.42) и операторы Вирасоро (2.3.52), (2.4.44) обладают свойством удаления клеток (с помощью специальных правил граничных полос).

  В случае более сложных моделей приведенные выше простые рассуждения могут не позволить полностью зафиксировать форму полиномов SIB. Может быть полезно наложить правила удаления клеток для всех производных по временным переменным и операторов Вирасоро с самого начала.

- В нашем методе мы накладываем очень специальное условие конечного спина для оператора нулевой градуировки (2.3.13), (2.4.20). Это может быть неверным для других случаев, и условие конечного спина может быть заменено более универсальным (например, самосопряженным свойством относительно некоторого скалярного произведения, свойством «суммы по клеткам» для собственных значений и т. д.). На примере операторов из аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ мы знаем, что бывают разумные Гамильтонианы бесконечного спина (см. раздел 4.4).

Глава 3

Аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$

3.1 Коммутационные соотношения

Аффинный Янгиан [1] это бесконечномерная ассоциативная алгебра. Мы будем использовать базис генераторов $\hat{e}_n, \hat{\psi}_n, \hat{f}_n$, который схож по структуре с базисом Шевалле в обычных алгебрах Ли. [2] Операторы $\hat{e}_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются повышающими операторами, $\hat{f}_m$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ в свою очередь называются понижающими. Коммутатор повышающих и понижающих операторов равен Картановскому оператору $\hat{\psi}_k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left[\hat{e}_n, \hat{f}_m\right] = \hat{\psi}_{n+m}. \tag{3.1.1}$$

Между собой Картановские операторы коммутируют

$$\left[\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m\right] = 0. \tag{3.1.2}$$

Повышающие операторы $\hat{e}_n$ между собой не коммутируют и удовлетворяют следующим квадратичным соотношениям

$$\begin{aligned}\left[\hat{e}_{n+3}, \hat{e}_m\right] - 3\left[\hat{e}_{n+2}, \hat{e}_{m+1}\right] + 3\left[\hat{e}_{n+1}, \hat{e}_{m+2}\right] - \left[\hat{e}_n, \hat{e}_{m+3}\right] = \\ = -\sigma_2\left(\left[\hat{e}_{n+1}, \hat{e}_m\right] - \left[\hat{e}_n, \hat{e}_{m+1}\right]\right) + \sigma_3\left\{\hat{e}_n, \hat{e}_m\right\}.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

На примере данных соотношений можно пронаблюдать особенности аффинного Янгиана:

- Аффинный Янгиан не является алгеброй Ли [60, 153], что в частности выражается в

[1] Для краткости в этой главе мы будем называть аффинным Янгианом $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$, опуская обозначение.

[2] Подход к определению Янгианов [2, 147–151] в терминах генераторов такого типа был разработан в работах В.Дринфельда и сейчас носит название "вторая реализация Дринфельда" [152].

том, что в соотношения явно входит член с антикоммутатором $\{x, y\} = xy + yx$. Причем в данном случае появление антикоммутаторов в соотношениях не несет структуры супералгебры (и соответственно $\mathbb{Z}_2$-градуировки).

- Соотношения аффинного Янгиана явным образом зависят от двух комплексных параметров σ_2, σ_3. В дальнейшем нам также будет удобно использовать другую параметризацию в терминах трех параметров $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ по модулю соотношения $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 = 0$. Тогда формулы перехода от одной параметризации к другой выглядят следующим образом

$$\sigma_2 = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3, \tag{3.1.4}$$

$$\sigma_3 = \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3. \tag{3.1.5}$$

  Коммутационные соотношения инвариантны под действием перестановок трех параметров ϵ_i. Однако векторы в представлении аффинного Янгиана будут переходит друг в друга под действием перестановок.

Вернемся к соотношению (3.1.3). Правильный и компактный способ записи такого соотношения осуществляется через производящие функции повышающих операторов

$$\hat{e}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{e}_n}{z^{n+1}} \tag{3.1.6}$$

и *структурную функцию* аффинного Янгиана

$$\phi(z) = \frac{(z+\epsilon_1)(z+\epsilon_2)(z+\epsilon_3)}{(z-\epsilon_1)(z-\epsilon_2)(z-\epsilon_3)}. \tag{3.1.7}$$

Схематично можно записать соотношение (3.1.3) следующим образом

$$\hat{e}(z)\,\hat{e}(w) \;\sim\; \phi(z-w)\,\hat{e}(w)\,\hat{e}(z). \tag{3.1.8}$$

Для того, чтобы привести такое соотношение в виду (3.1.3) нужно перенести знаменатель структурной функции в другую часть и выписать разложение по модам

$$\big((z-w)^3 + \sigma_2(z-w) - \sigma_3\big) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\hat{e}_n}{z^{n+1}} \frac{\hat{e}_m}{w^{n+1}} \sim \big((z-w)^3 + \sigma_2(z-w) + \sigma_3\big) \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\hat{e}_m}{w^{n+1}} \frac{\hat{e}_n}{z^{n+1}}. \tag{3.1.9}$$

Приводя общие слагаемые при $z^n w^m$, где $n < 0, m < 0$ мы будем получать соотношения (3.1.3). Соотношения при $z^n w^m$, где $n \geqslant 0$ или $m \geqslant 0$ следует игнорировать.

$$
\begin{aligned}
&\checkmark \quad \frac{1}{z^{n-1}w^{m-1}} \; n>1, m>1 \;:\; \text{соотношения (3.1.3)} \\
&\times \quad \frac{z^2}{w^{m+1}} \; m>1 \;:\; \left[\hat{e}_m, \hat{e}_0\right] = 0 \\
&\times \quad \frac{z^1}{w^{m+1}} \; m>1 \;:\; \left[\hat{e}_m, \hat{e}_1\right] - 3\left[\hat{e}_{m+1}, \hat{e}_0\right] = 0 \\
&\times \quad \frac{1}{w^{m+1}} \; m>1 \;:\; \left[\hat{e}_m, \hat{e}_2\right] - 3\left[\hat{e}_{m+1}, \hat{e}_1\right] + \left[\hat{e}_{m+2}, \hat{e}_0\right] + \sigma_2\left[\hat{e}_m, \hat{e}_0\right] = 0
\end{aligned}
\tag{3.1.10}
$$

Из-за частичного выбрасывания из рассмотрения некоторых соотношений, используется значок $\sim$ вместо обычного знака равенства.

Коммутационные соотношения Картановских $\hat{\psi}_n$ и повышающих $\hat{e}_n$ операторов похожи на соотношения повышающих операторов (3.1.8)

$$\hat{\psi}(z)\,\hat{e}(w) \;\sim\; \phi(z-w)\,\hat{e}(w)\,\hat{\psi}(z). \tag{3.1.11}$$

Коммутационные соотношения понижающих операторов получаются из (3.1.8) при простой замене структурной функции

$$\hat{f}(z)\,\hat{f}(w) \;\sim\; \phi^{-1}(z-w)\,\hat{f}(w)\,\hat{f}(z). \tag{3.1.12}$$

Благодаря следующему свойству структурной функции

$$\frac{1}{\phi(z)} = \phi(-z), \tag{3.1.13}$$

коммутационное соотношение может быть переписано в виде

$$\hat{f}(z)\,\hat{f}(w) \;\sim\; \phi(w-z)\,\hat{f}(w)\,\hat{f}(z). \tag{3.1.14}$$

Как и в случае повышающих операторов соотношения с Картановскими операторами имеют тот же вид

$$\hat{\psi}(z)\,\hat{f}(w) \;\sim\; \phi(w-z)\,\hat{f}(w)\,\hat{\psi}(z). \tag{3.1.15}$$

Итого подмножество квадратичных соотношений аффинного Янгиана записывается следу-

ющим компактным образом

$$\begin{aligned}
\hat{e}(z)\,\hat{e}(w) &\sim \phi(z-w)\,\hat{e}(w)\,\hat{e}(z),\\
\hat{\psi}(z)\,\hat{e}(w) &\sim \phi(z-w)\,\hat{e}(w)\,\hat{\psi}(z),\\
\hat{f}(z)\,\hat{f}(w) &\sim \phi(w-z)\,\hat{f}(w)\,\hat{f}(z),\\
\hat{\psi}(z)\,\hat{f}(w) &\sim \phi(w-z)\,\hat{f}(w)\,\hat{\psi}(z),
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

где мы использовали производящие функции

$$\hat{\psi}(z) = 1 + \sigma_3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n}{z^{n+1}}, \tag{3.1.17}$$

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n}{z^{n+1}}. \tag{3.1.18}$$

Тогда соотношения (3.1.1) записываются в компактном виде

$$\Big[\hat{e}(z), \hat{f}(w)\Big] = -\frac{1}{\sigma_3}\frac{\hat{\psi}(z) - \hat{\psi}(w)}{z-w}. \tag{3.1.19}$$

Явный вид квадратичных соотношений через генераторы

$$\begin{aligned}
\Big[\hat{\psi}_{n+3}, \hat{e}_m\Big] - 3\Big[\hat{\psi}_{n+2}, \hat{e}_{m+1}\Big] + 3\Big[\hat{\psi}_{n+1}, \hat{e}_{m+2}\Big] - \Big[\hat{\psi}_n, \hat{e}_{m+3}\Big] =\\
= -\sigma_2\left(\Big[\hat{\psi}_{n+1}, \hat{e}_m\Big] - \Big[\hat{\psi}_n, \hat{e}_{m+1}\Big]\right) + \sigma_3\Big\{\hat{\psi}_n, \hat{e}_m\Big\},
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\hat{f}_{n+3}, \hat{f}_m\Big] - 3\Big[\hat{f}_{n+2}, \hat{f}_{m+1}\Big] + 3\Big[\hat{f}_{n+1}, \hat{f}_{m+2}\Big] - \Big[\hat{f}_n, \hat{f}_{m+3}\Big] =\\
= -\sigma_2\left(\Big[\hat{f}_{n+1}, \hat{f}_m\Big] - \Big[\hat{f}_n, \hat{f}_{m+1}\Big]\right) - \sigma_3\Big\{\hat{f}_n, \hat{f}_m\Big\},
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\hat{\psi}_{n+3}, \hat{f}_m\Big] - 3\Big[\hat{\psi}_{n+2}, \hat{f}_{m+1}\Big] + 3\Big[\hat{\psi}_{n+1}, \hat{f}_{m+2}\Big] - \Big[\hat{\psi}_n, \hat{f}_{m+3}\Big] =\\
= -\sigma_2\left(\Big[\hat{\psi}_{n+1}, \hat{f}_m\Big] - \Big[\hat{\psi}_n, \hat{f}_{m+1}\Big]\right) - \sigma_3\Big\{\hat{\psi}_n, \hat{f}_m\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Среди квадратичных соотношений остается еще шесть соотношений, которые в литера-

туре часто называется "граничные условия" [60, 153]

$$\begin{aligned} \Big[\hat{\psi}_0, \hat{e}_n\Big] &= 0, & \Big[\hat{\psi}_0, \hat{f}_n\Big] &= 0, \\ \Big[\hat{\psi}_1, \hat{e}_n\Big] &= 0, & \Big[\hat{\psi}_1, \hat{f}_n\Big] &= 0, \\ \Big[\hat{\psi}_2, \hat{e}_n\Big] &= 2\hat{e}_n, & \Big[\hat{\psi}_2, \hat{f}_n\Big] &= -2\hat{f}_n. \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Вышеперечисленные "граничные" соотношения не следуют из набора (3.1.23), их необходимо постулировать отдельно. Как видно, операторы $\hat{\psi}_0, \hat{\psi}_1$ коммутируют со всеми генераторами. Оператор $\frac{1}{2}\hat{\psi}_2$ является оператором градуировки, причем градуировки элементов алгебры

$$[\hat{e}_n] = 1, \qquad [\hat{\psi}_n] = 0, \qquad [\hat{f}_n] = -1. \tag{3.1.24}$$

Кроме квадратичных соотношений в определение аффинного Янгиана включают кубические соотношения Серра [60, 153], которые не зависят от параметров алгебры ϵ_i

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_{i,j,k}\Big[\hat{e}_i, \Big[\hat{e}_j, \hat{e}_{k+1}\Big]\Big] = \Big[\hat{e}_i, \Big[\hat{e}_j, \hat{e}_{k+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{e}_i, \Big[\hat{e}_k, \hat{e}_{j+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{e}_j, \Big[\hat{e}_i, \hat{e}_{k+1}\Big]\Big] + \\ + \Big[\hat{e}_j, \Big[\hat{e}_k, \hat{e}_{i+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{e}_k, \Big[\hat{e}_i, \hat{e}_{j+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{e}_k, \Big[\hat{e}_j, \hat{e}_{i+1}\Big]\Big] = 0, \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_{i,j,k}\Big[\hat{f}_i, \Big[\hat{f}_j, \hat{f}_{k+1}\Big]\Big] = \Big[\hat{f}_i, \Big[\hat{f}_j, \hat{f}_{k+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{f}_i, \Big[\hat{f}_k, \hat{f}_{j+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{f}_j, \Big[\hat{f}_i, \hat{f}_{k+1}\Big]\Big] + \\ + \Big[\hat{f}_j, \Big[\hat{f}_k, \hat{f}_{i+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{f}_k, \Big[\hat{f}_i, \hat{f}_{j+1}\Big]\Big] + \Big[\hat{f}_k, \Big[\hat{f}_j, \hat{f}_{i+1}\Big]\Big] = 0. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Соотношения Серра исследуются для каждой алгебры отдельно, см. последние продвижения в этом направлении [].

Подводя итог, аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ – это ассоциативная алгебра порожденная генераторами $\hat{e}_n, \hat{\psi}_n, \hat{f}_n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ с соотношениями: (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.20), (3.1.21), (3.1.22), (3.1.23), (3.1.25), (3.1.26).

3.1.1 Набор образующих

Замечательно, что все генераторы аффинного Янгиана можно выразить лишь через три выделенных $\hat{e}_0, \hat{\psi}_3, \hat{f}_0$. Сделать это можно рекурсивным образом. Рассмотрим соотношение (3.1.20) для $n = 0$ и воспользуемся "граничными" соотношениями (3.1.23)

$$\hat{e}_{m+1} = \frac{1}{6}\Big[\hat{\psi}_3, \hat{e}_m\Big] - \frac{1}{3}\sigma_3\hat{\psi}_0\ \hat{e}_m. \tag{3.1.27}$$

Такая формула позволяет выразить $\hat{e}_{m+1}$ через $\hat{e}_m$, что в итоге приведет к тому, что все $\hat{e}_m$ будут выражены через повышающий оператор с минимальным номером $\hat{e}_0$ и Картановский оператор $\hat{\psi}_3$. Аналогичные формулы можно получить для понижающих операторов $\hat{f}_m$ из соотношений (3.1.22)

$$\hat{f}_{m+1} = -\frac{1}{6}\Big[\hat{\psi}_3, \hat{f}_m\Big] - \frac{1}{3}\sigma_3\hat{\psi}_0\ \hat{f}_m. \tag{3.1.28}$$

Далее, все Картановские генераторы $\hat{\psi}_n$ могут быть выражены как коммутаторы повышающих и понижающих операторов (3.1.1)

$$\hat{\psi}_{n+m} = \Big[\hat{e}_n, \hat{f}_m\Big]. \tag{3.1.29}$$

Такой набор образующих очень удобен для построения представлений аффинного Янгиана. Чтобы полностью определить представление достаточно задать (корректное и самосогласованное) действие лишь трех операторов $\hat{e}_0, \hat{\psi}_3, \hat{f}_0$ на векторы представления.

3.1.2 Коммутирующие семейства аффинного Янгиана

Аффинный Янгиан содержит в себе коммутирующие семейства операторов, которые в конкретных представлениях отвечают квантовым интегрируемым системам. Самое простое коммутирующее семейство дается Картановскими операторами $\hat{\psi}_n$

$$\Big[\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_m\Big] = 0. \tag{3.1.30}$$

В следующих разделах мы увидим, что, будучи реализованными в представлении, операторы $\hat{\psi}_n$ будут эквивалентны семейству Гамильтонианов квантовой N-частичной системы Калоджеро-Сазерленда с тригонометрическим потенциалом взаимодействия 3.3.3.

Борелевские подалгебры алгебры Гейзенберга

Следующее коммутирующее семейство представлено операторами $\hat{p}_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\hat{p}_n := \frac{(\mathrm{ad}_{\hat{e}_1})^{n-1}\,\hat{e}_0}{(n-1)!}. \tag{3.1.31}$$

Из соотношений Серра аффинного Янгиана можно показать [154], что в любом представлении будет выполнено равенство

$$\left[\hat{p}_n, \hat{p}_m\right] = 0. \tag{3.1.32}$$

Например, $\hat{p}_1 = \hat{e}_0$, $\hat{p}_2 = \left[\hat{e}_1, \hat{e}_0\right]$. Условие коммутации

$$\left[\hat{p}_1, \hat{p}_2\right] = \left[\hat{e}_0, \left[\hat{e}_1, \hat{e}_0\right]\right] = 0 \tag{3.1.33}$$

эквивалентно соотношению Серра (3.1.25) при $i = j = k = 0$. Семейство операторов $\hat{p}_n$ в Фоковском представлении становится операторами умножения на временные переменные p_n. Мы вернемся к более подробному обсуждению временных переменных и полиномах Шура, Джека в следующих разделах. Аналогично можно определить дуальное коммутирующее семейство

$$\hat{p}^*_n := -\frac{\left(\mathrm{ad}_{\hat{f}_1}\right)^{n-1} \hat{f}_0}{(n-1)!}, \tag{3.1.34}$$

для которого выполнено

$$\left[\hat{p}^*_n, \hat{p}^*_m\right] = 0. \tag{3.1.35}$$

Семейства $\hat{p}_n$ и $\hat{p}^*_n$ вместе образуют алгебру Гейзенберга

$$\left[\hat{p}_n, \hat{p}^*_m\right] = n\,\hat{\psi}_0\,\delta_{n,m}. \tag{3.1.36}$$

Целочисленные лучи

Кроме коммутирующих серий $\hat{p}_n$ и $\hat{p}^*_n$ в аффинном Янгиане существует серия коммутирующих семейств, занумерованные целыми положительными числами. Мы опишем серию отвечающую повышающим операторам, серия для понижающих операторов получается аналогично. Чтобы построить коммутирующую серию $\hat{H}^{(k)}_n$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$, а число k обозначает номер серии), необходимо взять в качестве начального оператора $\hat{e}_k$ и последовательно дей-

ствовать на него с помощью $\hat{e}_{k+1}$ присоединенным образом

$$\hat{H}_1^{(k)} = \hat{e}_k, \tag{3.1.37}$$

$$\hat{H}_2^{(k)} = \left[\hat{e}_{k+1}, \hat{e}_k\right], \tag{3.1.38}$$

$$\hat{H}_3^{(k)} = \left[\hat{e}_{k+1}, \left[\hat{e}_{k+1}, \hat{e}_k\right]\right], \tag{3.1.39}$$

$$\dots \tag{3.1.40}$$

$$\hat{H}_n^{(k)} = \left(\mathrm{ad}_{\hat{e}_{k+1}}\right)^{n-1} \hat{e}_k. \tag{3.1.41}$$

Соотношений Серра (3.1.25) оказывается достаточно, чтобы соотношения коммутативности

$$\left[\hat{H}_n^{(k)}, \hat{H}_m^{(k)}\right] = 0 \tag{3.1.42}$$

выполнялось в любом представлении аффинного Янгиана [154]. Целочисленные лучи соответствуют целой серии родственных квантовых интегрируемых систем [155], самой простой из которых является квантовая многочастичная модель Калоджеро-Мозера рациональным потенциалом взаимодействия.

Дуальные семейства коммутирующих операторов $\hat{H}_m^{*(k)}$ строятся аналогичным образом из понижающих операторов $\hat{f}_k$.

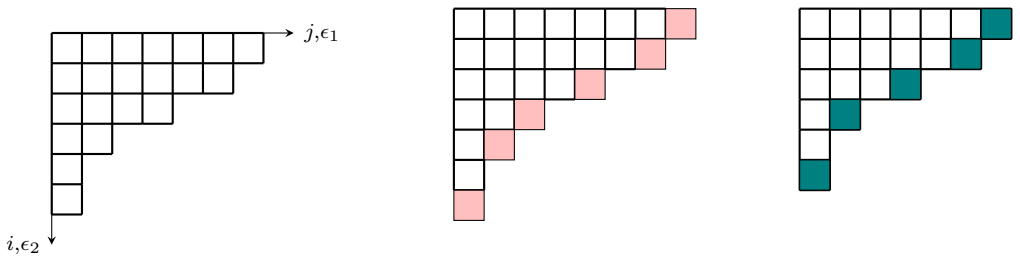
3.2 Представление Фока

В Фоковском представлении аффинного Янгиана векторы представления $|\lambda\rangle$ индексируются с помощью диаграмм Юнга λ. Действие операторов аффинного Янгиана дается следующими формулами

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_k\ |\lambda\rangle &= \psi_{\lambda,k} \cdot |\lambda\rangle\,, \\
\hat{e}_k\ |\lambda\rangle &= \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} E_{\lambda,\lambda+\square} \cdot (\omega_{\square})^k\ |\lambda + \square\rangle\,, \\
\hat{f}_k\ |\lambda\rangle &= \sum_{\blacksquare \in \mathrm{Rem}(\lambda)} F_{\lambda,\lambda-\blacksquare} \cdot (\omega_{\blacksquare})^k\ |\lambda - \blacksquare\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Картановские операторы $\hat{\psi}_k$ действуют диагонально в данном базисе. При действии операторов $\hat{e}_k$ количество клеток в диаграмме Юнга увеличивается, поэтому мы называем такие операторы повышающими. При действии операторов $\hat{f}_k$ количество клеток наоборот уменьшается.

В формулах (3.2.1) суммы ведутся по множеству клеток, которые можно добавить к диаграмме Юнга $\mathrm{Add}(\lambda)$, и множеству клеток, которые можно удалить $\mathrm{Rem}(\lambda)$ (см. Рис. 3.1).



(a) λ (b) $\mathrm{Add}(\lambda)$ (c) $\mathrm{Rem}(\lambda)$

Рис. 3.1: Примеры множеств $\mathrm{Add}(\lambda)$, $\mathrm{Rem}(\lambda)$ для диаграммы $[7,6,4,2,1,1]$.

Зависимость от номера k операторов $\hat{e}_k, \hat{f}_k$ при действии на векторы представления выражается только в степени функции содержания $\omega_\square$

$$\omega_\square := \epsilon_1 \cdot j + \epsilon_2 \cdot i, \tag{3.2.2}$$

что является характерной особенностью Янгианов. Коэффициенты $E_{\lambda,\lambda+\square}$ и $F_{\lambda,\lambda-\square}$ в общем случае являются функциями параметров ϵ_1, ϵ_2. Например, при действии на диаграмму $\square$

$$\hat{e}_k \ |\square\rangle = E_{[1],[2]} \cdot (\epsilon_1)^k \ |\square\!\square\rangle + E_{[1],[1,1]} \cdot (\epsilon_2)^k \ |\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}\rangle \,. \tag{3.2.3}$$

Для дальнейшего анализа будет удобно переписать действие на векторы представления полных производящих функций $\hat{e}(z), \hat{f}(z), \hat{\psi}(z)$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(z) \ |\lambda\rangle &= \psi_\lambda(z) \cdot |\lambda\rangle \,, \\
\hat{e}(z) \ |\lambda\rangle &= \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} \frac{E_{\lambda,\lambda+\square}}{z - \omega_\square} \ |\lambda + \square\rangle \,, \\
\hat{f}(z) \ |\lambda\rangle &= \sum_{\blacksquare \in \mathrm{Rem}(\lambda)} \frac{F_{\lambda,\lambda-\blacksquare}}{z - \omega_\blacksquare} \ |\lambda - \blacksquare\rangle \,.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

3.2.1 Производящая функция собственных значений $\psi_\lambda(z)$

Используя соотношение

$$\hat{\psi}(z)\, \hat{e}(w) \ \sim \ \phi(z-w)\, \hat{e}(w)\, \hat{\psi}(z), \tag{3.2.5}$$

можно получить (проделав вычисления [60], которые мы опустим) следующее выражение для производящей функции собственных значений $\psi_\lambda(z)$

$$\boxed{\psi_{\lambda+\square}(z) = \phi(z-\omega_\square)\cdot\psi_\lambda(z).} \tag{3.2.6}$$

Данное соотношение является аналогом простого факта из классических алгебр Ли: повышающий оператор увеличивает собственное значение (вес) на фиксированную величину. Соотношение (3.2.6) очень важно, поскольку позволяет получить собственные значения для любого вектора $|\lambda\rangle$ через произведения нескольких функций ϕ в разных точках и вакуумную функцию $\psi_\varnothing(z)$

$$\psi_\lambda(z) = \psi_\varnothing(z)\cdot\prod_{\square\in\lambda}\phi(z-\omega_\square). \tag{3.2.7}$$

Раскладывая производящую функцию, можно получить любое собственное число $\psi_{\lambda,k}$

$$\psi_\lambda(z) = 1+\sigma_3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_{\lambda,k}}{z^{k+1}}. \tag{3.2.8}$$

Приведем несколько простейших собственных значений (напомним, что $\omega_\square = \epsilon_1\cdot j_\square+\epsilon_2\cdot i_\square$, и отсчет ведется с нулевых значений координат $j_\square, i_\square$)

$$\psi_{0,\lambda} = -\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}, \tag{3.2.9}$$

$$\psi_{1,\lambda} = 0, \tag{3.2.10}$$

$$\psi_{2,\lambda} = \sum_{\square\in\lambda}2 = 2|\lambda|, \tag{3.2.11}$$

$$\psi_{3,\lambda} = \sum_{\square\in\lambda}\Big(6\omega_\square+2(\epsilon_1+\epsilon_2)\Big), \tag{3.2.12}$$

$$\psi_{4,\lambda} = \sum_{\square\in\lambda}\Big(12\omega_\square^2+6(\epsilon_1+\epsilon_2)\omega_\square+2(\epsilon_1^2+\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_2^2)\Big), \tag{3.2.13}$$

$$\begin{aligned}\psi_{5,\lambda} = &\sum_{\square\in\lambda}\Big(20\omega_\square^3+12(\epsilon_1+\epsilon_2)\omega_\square^2+10(\epsilon_1^2+\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_2^2)\omega_\square+2(\epsilon_1+\epsilon_2)(\epsilon_1^2+\epsilon_2^2)\Big)+\\ &+\sum_{\square\neq\square'}\Big(-4\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_1+\epsilon_2)\Big).\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Можно заметить, что первые собственные значения обладают свойством "суммы по клеткам и на $\psi_{5,\lambda}$ это свойство разрушается : в формулу входит сумма по парам неэквивалентных коробок. Приведем некоторые явные примеры собственных значений в Таб. 3.1.

λ	$\varnothing$	$\ydiagram{1}$	$\ydiagram{2}$	$\ydiagram{1,1}$	$\ydiagram{3}$	$\ydiagram{2,1}$	$\ydiagram{1,1,1}$	...
$\psi_{2,\lambda}$	0	2	4	4	6	6	6	...
$\psi_{3,\lambda}$	0	$2\epsilon_1 + 2\epsilon_2$	$10\epsilon_1 + 4\epsilon_2$	$4\epsilon_1 + 10\epsilon_2$	$24\epsilon_1 + 6\epsilon_2$	$12\epsilon_1 + 12\epsilon_2$	$6\epsilon_1 + 24\epsilon_2$	...

Таблица 3.1: Явные примеры собственных значений для второго и третьего генератора $\hat{\psi}_k$ в представлении Фока.

3.2.2 Спектральный сдвиг

Аффинный Янгиан допускает автоморфизм зависящий от комплексного числа c, который называется спектральным сдвигом [60]. Спектральный сдвиг возникает естественным образом в приложениях аффинного Янгиана к задачам квантовых интегрируемых систем и матричных моделей. Определяется спектральный сдвиг следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{e}(z) &\to \hat{e}(z-c), \\ \hat{f}(z) &\to \hat{f}(z-c), \\ \hat{\psi}(z) &\to \hat{\psi}(z-c). \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Легко видеть из соотношений в компактной форме 3.1, что такое преобразование является автоморфизмом, т.е. переводит алгебру саму в себя. Соотношения Серра тоже сохраняются, однако это утверждение сложнее для проверки. Единственное, что подвергается изменению в конкретном представлении это собственные значения Картановских операторов $\psi_{n,\lambda}$

$$\psi_\lambda(z) \to \psi_\lambda(z-c). \tag{3.2.16}$$

На уровне производящих функций это преобразование выглядит тривиально, но моды изменяются более сложным образом

$$\psi_{0,\lambda} = -\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}, \tag{3.2.17}$$

$$\psi_{1,\lambda} \to -\frac{c}{\epsilon_1\epsilon_2}, \tag{3.2.18}$$

$$\psi_{2,\lambda} \to -\frac{c^2}{\epsilon_1\epsilon_2} + \sum_{\square\in\lambda} 2, \tag{3.2.19}$$

$$\psi_{3,\lambda} \to -\frac{c^3}{\epsilon_1\epsilon_2} + \sum_{\square\in\lambda} \Big(6\omega_\square + 2(\epsilon_1+\epsilon_2) + 6c\Big), \dots \tag{3.2.20}$$

Из последней формулы видно, что спектральный сдвиг сдвигает функцию содержания $\omega_\square \to \omega_\square + c$, т.е. к содержимому каждой клетки добавляется общее слагаемое c. Например, в случае Гауссовой матричной модели значение спектрального сдвига будет соответствовать размеру

матриц $c = N$.

3.2.3 Соотношения гистерезиса для коэффициентов $E_{\lambda,\lambda+\square}$

Из соотношения на производящие функции генераторов

$$\hat{e}(z)\,\hat{e}(w) \;\sim\; \phi(z-w)\,\hat{e}(w)\,\hat{e}(z) \tag{3.2.21}$$

напрямую следуют [60] соотношения на коэффициенты $E_{\lambda,\lambda+\square}$

$$E_{\lambda,\,\lambda+\blacksquare}\cdot E_{\lambda+\blacksquare,\,\lambda+\blacksquare+\blacksquare} = \phi(\omega_{\blacksquare}-\omega_{\blacksquare})\cdot E_{\lambda,\,\lambda+\blacksquare}\cdot E_{\lambda+\blacksquare,\,\lambda+\blacksquare+\blacksquare}. \tag{3.2.22}$$

Мы выделили разными цветами клетки для наглядности. Это соотношение можно интерпретировать как явление "гистерезиса" при движении в пространстве диаграмм (см. Рис. 3.2). Итоговая диаграмма не зависит от порядка добавления клеток $\lambda + \blacksquare + \blacksquare = \lambda + \blacksquare + \blacksquare$.

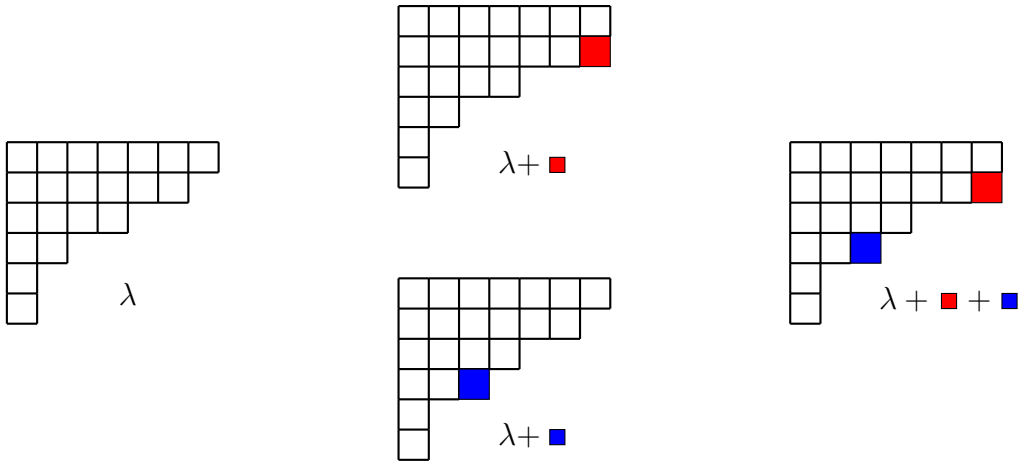


Рис. 3.2: Два неэквивалентных способа добавить две клетки к диаграмме Юнга λ.

При действии оператора $\hat{e}_k$ на вектор $|\lambda\rangle$ получаются векторы $|\lambda+\square\rangle$, в которых на одну клетку больше, с коэффициентом $E_{\lambda,\lambda+\square}\cdot(\omega_{\square})^k$. Отношение коэффициентов перехода из начальной диаграммы в итоговую для двух разных путей (через красную клетку и через синюю клетку) задаются структурной функцией $\phi(z)$ в специальной точке (разнице функций содержания для синей и красной клетки).

Для коэффициентов понижающих операторов $F_{\lambda,\lambda-\square}$ соотношения гистерезиса получаются аналогичным образом.

3.2.4 Полюсная структура $\psi_\lambda(z)$

При подстановке формулы действия операторов (3.2.4) на векторы λ в соотношение (3.1.19) получается следующая формула [60]

$$\psi_\lambda(z) = 1 + \sigma_3 \cdot \left(\sum_{\blacksquare \in \mathrm{Rem}(\lambda)} \frac{F_{\lambda,\,\lambda-\blacksquare} \cdot E_{\lambda-\blacksquare,\,\lambda}}{z - \omega_{\blacksquare}} - \sum_{\blacksquare \in \mathrm{Add}(\lambda)} \frac{E_{\lambda,\,\lambda+\blacksquare} \cdot F_{\lambda+\blacksquare,\,\lambda}}{z - \omega_{\blacksquare}} \right). \tag{3.2.23}$$

Отсюда можно заключить следующее важное правило: *полюса функции $\psi_\lambda(z)$ соответствуют клеткам, которые можно добавить к диаграмме λ и удалить из диаграммы λ.*

Примеры

Синим цветом покрашены полюса, которые отвечают местам, откуда можно удалить клетку, а красным цветом будут покрашены полюса, которые отвечают местам, куда можно добавить клетку. Далее мы будем для простоты называть функцию содержания $\omega_\square = i\cdot\epsilon_1 + j\cdot\epsilon_2$ простой координатой клетки.

- Уровень 0

  $$\psi_\varnothing(z) = \frac{z - \epsilon_3}{(z)} \tag{3.2.24}$$

  Для пустой (вакуумной) диаграммы Юнга нельзя ничего удалить, но можно добавить клетку в место с координатой 0.

- Уровень 1

  $$\psi_\square(z) = \psi_\varnothing(z)\phi(z) = \frac{(z+\epsilon_1)(z+\epsilon_2)(z+\epsilon_3)}{(z)(z-\epsilon_1)(z-\epsilon_2)} \tag{3.2.25}$$

  На первом уровне из диаграммы [1] можно удалить единственную клетку из координаты 0 и добавить клетки в координаты ϵ_1, ϵ_2.

- Уровень 2

  $$\psi_{\square\square}(z) = \psi_\varnothing(z)\phi(z)\phi(z-\epsilon_1) = \frac{(z+\epsilon_1)(z+\epsilon_2-\epsilon_1)(z-2\epsilon_1-\epsilon_2)}{(z-\epsilon_1)(z-\epsilon_2)(z-2\epsilon_1)} \tag{3.2.26}$$

  На втором уровне из диаграммы [2] можно удалить клетку только из координаты ϵ_1, а добавить клетку можно в две координаты ϵ_2 и $2\epsilon_1$.

Нули функции ϕ будут сокращать "ненужные" полюса на каждом новом уровне, а полюса будут появляться в местах, куда можно добавить клетку в соответствующей диаграмме

Юнга. Заметим, что в нашей постановке задачи для выполнения такого замечательного свойства полюсов сошлось несколько обстоятельств. Во первых, очень важен вид структурной функции (3.1.7). Во вторых, важен вид вакуумной функции. Конкретно в нашем случае представления Фока (двумерные диаграммы Юнга), у вакуумной функции необходим ноль первого порядка в точке ϵ_3.

3.2.5 Реализация представления Фока в случае $\epsilon_1+\epsilon_2 = 0$ и полиномы Шура

Коммутационные соотношения аффинного Янгиана упрощаются в случае $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$. Для простоты мы выберем $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$. При этом остальные параметры приобретают следующие значения

$$\epsilon_3 = 0, \qquad \sigma_2 = -1, \qquad \sigma_3 = 0. \tag{3.2.27}$$

Для того чтобы получить произвольную нормировку $\epsilon_1 = -a, \epsilon_2 = a$ требуется переопределить операторы $\hat{e}_k \to a^k \hat{e}_k,\ \hat{f}_k \to a^k \hat{f}_k$.

Мы будем реализовывать представление Фока на пространстве полиномов от переменных p_a, где $a = 1, 2, 3, \ldots$. Такие переменные в литературе часто называют *временные* переменные из-за связи с теорией интегрируемых иерархий КП/Тоды [54]. Пространство однородных полиномов от временных переменных p_a (градуировка $[p_a] = a$) имеет такую же размерность что и количество диаграмм Юнга с фиксированным числом клеток. Это утверждение очевидно, мы приводим простейшие примеры для наглядности в Таблице 2.3.

Чтобы задать представление аффинного Янгиана достаточно определить (корректным образом) лишь три оператора $\hat{e}_0, \hat{\psi}_3, \hat{f}_0$ (см. раздел 3.1.1). В данном случае формулы устроены исключительно просто

$$\hat{e}_0 = p_1, \qquad \hat{f}_0 = -\frac{\partial}{\partial p_1}, \tag{3.2.28}$$

$$\hat{\psi}_3 = 3 \sum_{a,b=1}^{\infty} ab \cdot p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + (a+b) \cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}}. \tag{3.2.29}$$

Самый сложный оператор $\hat{\psi}_3$ из этого набора имеет вид простейшего оператора разрезания и склейки [156]. Он играет ключевую роль в теории представлений аффинного Янгиана. Можно убедиться прямой проверкой соотношений из раздела 3.1, что такой набор операторов отвечает корректному представлению аффинного Янгиана при $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = 1$. Векторы представления $|\lambda\rangle$ в такой реализации отвечают выделенному базису однородных полиномов

– это известные полиномы Шура $S_\lambda(p_a)$.

Роль полиномов Шура S_λ в современной теоретической и математической физике разнообразна, они появляются в следующих разделах (список не может считаться полным):

- S_λ обеспечивают явное описание двойственности Шура-Вейля между группами перестановок S_N и линейными SL_N группами;
- S_λ являются характерами неприводимых представлений;
- S_λ являются главными элементами в описании интегрируемости КП/Тоды — которая является универсальной чертой непертурбативных статсумм в некотором классе моделей [10, 21, 157–162];
- S_λ используются в различных разложениях по характерам [16, 163, 164];
- S_λ и их деформации являются собственными функциями коммутирующего набора Гамильтонианов квантовых интегрируемых многочастичных систем [155, 165–168];
- S_λ обеспечивают *суперинтегрируемый* базис [8, 19, 53, 56, 124, 133, 169–173] в некотором классе матричных моделей.

В различных приложениях S_λ возникают либо как симметрические функции $S_\lambda[x]$ от N переменных x_i, которые также можно рассматривать как собственные значения $N \times N$ матриц $X_{i,j}$. С другой стороны, их можно рассматривать как функции бесконечного числа временных переменных p_a, которые образуют базис разложения для τ-функций иерархий КП/Тоды, уравнения которых можно описать как билинейные соотношения Плюккера для коэффициентов разложения. Эти два проявления связаны преобразованием Мивы

$$p_a = \operatorname{tr} X^a = \sum_{i=1}^{N} x_i^a. \tag{3.2.30}$$

Существуют две основные детерминантные формулы для вычисления полиномов Шура. Формула Вейля через переменные x_i

$$S_\lambda[x] = \frac{\det_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left(x_j^{\lambda_i+N-i}\right)}{\det_{1\leqslant i,j\leqslant N}\left(x_j^{N-i}\right)} \tag{3.2.31}$$

и формула Якоби-Труди в терминах временных переменных

$$S_\lambda[p] = \det_{1\leqslant i,j\leqslant l_\lambda}\left(S_{[\lambda_i+j-i]}\right), \tag{3.2.32}$$

где однострочные полиномы Шура $S_{[k]}$ вычисляются из производящей функции

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_{[k]} \cdot z^k = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \cdot z^k}{k}\right\}. \tag{3.2.33}$$

Полиномы Шура образуют полный набор с условиями ортогональности, которые можно записать изящным образом как тождество Коши [57, 174]

$$\sum_{\lambda} S_\lambda[p] \cdot S_\lambda[p'] = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k \cdot p'_k}{k}\right\}. \tag{3.2.34}$$

Сумма в левой части пробегает все диаграммы Юнга, а p_k, p'_k – это два независимых набора временных переменных.

Вернемся к обсуждению полиномов Шура как векторов представления аффинного Янгиана. Действие простейших повышающих и понижающих операторов $\hat{e}_0, \hat{f}_0$ на полиномы Шура эквивалентны правилам Пьери [57]

$$p_1\, S_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} S_{\lambda+\square}, \tag{3.2.35}$$

$$-\frac{\partial}{\partial p_1}\, S_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\lambda)} (-1) \cdot S_{\lambda-\square}. \tag{3.2.36}$$

Это означает, что в случае $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1$ все коэффициенты $E_{\lambda,\lambda+\square}$ могут быть выбраны 1, а коэффициенты $F_{\lambda,\lambda-\square}$ соответственно (-1)

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\lambda+\square} &= 1, \\ F_{\lambda,\lambda-\square} &= -1. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Из этого следует, что правила гистерезиса из раздела 3.2.3 в этом пределе пропадают, все пути в пространстве диаграмм становятся эквивалентны. Оператор $\hat{\psi}_3$ действует на полиномы Шура диагонально

$$\hat{\psi}_3\, S_\lambda = \psi_{3,\lambda} \cdot S_\lambda, \tag{3.2.38}$$

где собственные значения обладают замечательным свойством "суммы по клеткам"в диаграмме Юнга

$$\psi_{3,\lambda} = 6 \cdot \sum_{\square \in \lambda} (j_\square - i_\square). \tag{3.2.39}$$

Действие старших операторов повышения и понижения выглядит следующим образом

$$\hat{e}_k\, S_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\lambda)} (j_\square - i_\square)^k S_{\lambda+\square}, \tag{3.2.40}$$

$$\hat{f}_k\, S_\lambda = \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\lambda)} (-1)(j_\square - i_\square)^k \cdot S_{\lambda-\square}. \tag{3.2.41}$$

Помимо общий детерминантных формул для полиномов Шура существует изящное определение для них с помощью структуры аффинного Янгиана. Для этого мы воспользуемся формулами для коммутирующих семейств $\hat{p}_a$ из раздела 3.1.2

$$\hat{p}_a \,|\varnothing\rangle = p_a \cdot 1, \tag{3.2.42}$$

т.е. действие оператора $\hat{p}_a$ на вакуумный вектор равно временной переменной p_a. С помощью этого условия можно вычислить все полиномы Шура. Например,

- Уровень 1

  По формуле (3.2.37)

  $$\hat{e}_0 \,|\varnothing\rangle = |\ydiagram{1}\rangle \tag{3.2.43}$$

  С другой стороны по формуле (3.1.31)

  $$\hat{p}_1 = \hat{e}_0 = p_1. \tag{3.2.44}$$

  Поэтому получаем

  $$S_{\ydiagram{1}} = p_1. \tag{3.2.45}$$

- Уровень 2

  Мы можем возвести оператор $\hat{p}_1$ в квадрат

  $$p_1^2 = \hat{p}_1^2 \,|\varnothing\rangle = \hat{e}_0 \,|\ydiagram{1}\rangle = |\ydiagram{2}\rangle + |\ydiagram{1,1}\rangle = S_{\ydiagram{2}} + S_{\ydiagram{1,1}} \tag{3.2.46}$$

  С другой стороны мы воспользуемся уравнениями для $\hat{p}_2$ (3.1.31)

  $$p_2 = \hat{p}_2 \,|\varnothing\rangle = \Big[\hat{e}_1, \hat{e}_0\Big] \,|\varnothing\rangle = \hat{e}_1 \,|\ydiagram{1}\rangle = |\ydiagram{2}\rangle - |\ydiagram{1,1}\rangle = S_{\ydiagram{2}} - S_{\ydiagram{1,1}}. \tag{3.2.47}$$

Теперь мы можем разрешить уравнения относительно полиномов Шура и получить

$$\begin{aligned} S_{\square\square} &= \frac{p_1^2 + p_2}{2}, \\ S_{\square} &= \frac{p_1^2 - p_2}{2}. \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Таким образом, мы можем вычислить полиномы Шура пользуясь только определением коммутирующего семейства (3.1.31). Примеры полиномов Шура на первых нескольких уровнях доступны в разделе 2.3.

3.3 Реализация представления Фока и полиномы Джека

В наиболее общем случае произвольных параметров ϵ_1, ϵ_2 все формулы из прошлого раздела претерпевают деформацию. Мы будем работать в нормировке $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -\beta$, где β произвольное комплексное число. Возврат в произвольной нормировке возможен по формулам $\hat{e}_k \to a^k \hat{e}_k, \hat{f}_k \to a^k \hat{f}_k$. При нашем выборе параметров в качестве векторов представления возникнут классические *полиномы Джека* $J_\lambda^\beta(p_a)$ [57].

Набор порождающих операторов в терминах временных переменных имеет следующий простой вид

$$\hat{e}_0 = p_1, \qquad \hat{f}_0 = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial p_1}, \tag{3.3.1}$$

$$\hat{\psi}_3 = 3\sum_{a,b=1}^{\infty} ab \cdot p_{a+b}\frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \beta(a+b)\cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + (1-\beta)\sum_{a=1}^{\infty}(3a-1)a p_a \frac{\partial}{\partial p_a}. \tag{3.3.2}$$

Собственные значения операторов $\hat{\psi}_k$, порождаемые таким набором операторов, полностью согласованны с формулами из раздела 3.2.1.

3.3.1 Каноническая нормировка

Полиномы Джека могут определяться различными способами, которые приводят к разным нормировочным коэффициентам. Мы начнем с классического определения [57]. Данное определение полиномов Джека базируется на двух главных принципах: треугольность и ортогональность. Треугольность означает, что в правильном базисе возникает суммирование только

по "треугольному" сектору диаграмм Юнга

$$J^{\beta}_{\lambda}(p_k) = S_{\lambda}(p_k) + \sum_{\mu<\lambda} K^{\beta}_{\mu,\lambda}\, S_{\mu}(p_k), \tag{3.3.3}$$

где $\mu < \lambda$ означает сравнение диаграмм Юнга в лексикографическом порядке по строкам. Такое определение не разрушает симметрии по отношению к транспонированию (строчки не более выделены чем столбцы) благодаря специальным свойствам полиномов Джека (это свойство также присуще полиномам Макдональда [57, 175]). В данном подходе коэффициенты $K^{\beta}_{\mu,\lambda}$ восстанавливаются из требования ортогональности, которое изящным образом формулируется с помощью обобщенного тождества Коши [57]

$$\sum_{\lambda} \frac{J^{\beta}_{\lambda}(p_k)\, J^{\beta}_{\lambda}(\bar{p}_k)}{||J^{\beta}_{\lambda}||^2} = \exp\left(\sum_{k=1} \frac{\beta p_k\, \bar{p}_k}{k}\right). \tag{3.3.4}$$

Явные примеры полиномов Джека для малых уровней

$$J^{\beta}_{\square} = p_1, \qquad J^{\beta}_{\square\square} = \frac{\beta p_1^2 + p_2}{1+\beta}, \qquad J^{\beta}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{1}{2}\left(p_1^2 - p_2\right), \qquad J^{\beta}_{\square\square\square} = \frac{\beta^2 p_1^3 + 3\beta p_1 p_2 + 2p_3}{(1+\beta)(2+\beta)}, \qquad J^{\beta}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{\beta p_1^3 + p_1 p_2 - \beta p_1 p_2 - p_3}{1+2\beta}, \qquad J^{\beta}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{1}{6}\left(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3\right). \tag{3.3.5}$$

Полиномы Джека в канонической нормировке удовлетворяют свойству

$$J^{\beta=1}_{\lambda}(p_k) = S_{\lambda}(p_k). \tag{3.3.6}$$

3.3.2 Нормировка из теории представлений колчанов



Рис. 3.3: Вертикальные, горизонтальные полосы, ноги и руки крюков в диаграмме Юнга

Пользуясь эквивариантными техниками в теории представлений колчанов [66, 67, 176], можно построить представление Фока аффинного Янгиана и вычислить все матричные элементы (мы оставили зависимость от ϵ_i для симметрии, далее мы снова положим $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 =$

$-\beta$)

$$\tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square} = \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2} \cdot \prod_{\square\in\mathcal{H}_\lambda} \frac{h_\square - \epsilon_1}{h_\square} \cdot \prod_{\square\in\mathcal{V}_\lambda} \frac{h_\square + \epsilon_2}{h_\square}, \tag{3.3.7}$$

$$\tilde{F}_{\lambda,\lambda-\square} = \prod_{\square\in\mathcal{H}_\lambda} \frac{h_\square + \epsilon_2}{h_\square - \epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \prod_{\square\in\mathcal{V}_\lambda} \frac{h_\square - \epsilon_1}{h_\square - \epsilon_1 + \epsilon_2}, \tag{3.3.8}$$

где мы используем обозначения для крюков $h_\square$. Крюки $h_\square$ не следует путать с крюками в обозначении Фробениуса для диаграмм Юнга, которые мы используем в других разделах. Явная формула для крюков $h_\square$ имеет следующий вид

$$h_\square = \epsilon_1(\mathrm{arm}_\square + 1) - \epsilon_2(\mathrm{leg}_\square + 1), \tag{3.3.9}$$

где вертикальные $\mathcal{V}$ и горизонтальные $\mathcal{H}$ полосы для добавленной/удаленной клетки, как и длины рук и ног крюка в диаграмме определены обычным образом (см. [177] и Рис. 3.3). В этой нормировке выполняются следующие полезные свойства

$$\sum_{\square\in\mathrm{Add}(\lambda)} \tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square} = \frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}, \tag{3.3.10}$$

$$\sum_{\square\in\mathrm{Rem}(\lambda)} \tilde{F}_{\lambda,\lambda-\square} = |\lambda|. \tag{3.3.11}$$

В такой нормировке явно можно наблюдать соотношения гистерезиса описанные в разделе 3.2.3.

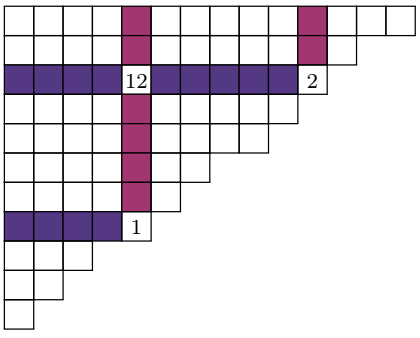


Рис. 3.4: При добавлении двух разных клеток $\square_1, \square_2$ к диаграмме Юнга, то соответствующие горизонтальные и вертикальные полосы имеют ровно одну общую клетку $\square_{12}$.

Выпишем явно коэффициенты прибавления клетки в случае $\lambda \to \lambda + \square_1 \to \lambda + \square_1 + \square_2$

$$\tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square_1}\tilde{E}_{\lambda+\square_1,\lambda+\square_1+\square_2} = (\ldots) \cdot \frac{h_{\square_{12}} + \epsilon_2}{h_{\square_{12}}} \cdot \frac{h_{\square_{12}} - \epsilon_2 - \epsilon_1}{h_{\square_{12}} - \epsilon_2}. \tag{3.3.12}$$

В скобках мы опустили общие множители, которые сократятся после рассмотрения отноше-

ния коэффициентов. Важным для нас являются множители от клетки $\square_{12}$, которая лежит на *пересечении вертикальных* $\mathcal{V}$ *и горизонтальных* $\mathcal{H}$ *полос* клеток $\square_1$ и $\square_2$. Такая клетка $\square_{12}$ в диаграмме для любой пары далеких друг от друга клеток $\square_1, \square_2$ найдется всегда одна (см. Рис. 3.4). Заметим, что во последнем множителе данного выражения происходит общая сдвижка на $(-\epsilon_2)$ из-за удлинения ноги крюка при уже добавленной клетке $\square_1$. Аналогичная формула для другого пути добавления клеток $\lambda \to \lambda + \square_2 \to \lambda + \square_1 + \square_2$

$$\tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square_2}\tilde{E}_{\lambda+\square_1,\lambda+\square_1+\square_2} = (\dots)\cdot\frac{h_{\square_{12}}-\epsilon_1}{h_{\square_{12}}}\cdot\frac{h_{\square_{12}}+\epsilon_1+\epsilon_2}{h_{\square_{12}}+\epsilon_1}. \tag{3.3.13}$$

Итого получаем, что отношение коэффициентов выражается через структурную функцию

$$\frac{\tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square_1}\tilde{E}_{\lambda+\square_1,\lambda+\square_1+\square_2}}{\tilde{E}_{\lambda,\lambda+\square_2}\tilde{E}_{\lambda+\square_1,\lambda+\square_1+\square_2}} = \frac{(h_{\square_{12}}+\epsilon_1)(h_{\square_{12}}+\epsilon_2)(h_{\square_{12}}-\epsilon_1-\epsilon_2)}{(h_{\square_{12}}-\epsilon_1)(h_{\square_{12}}-\epsilon_2)(h_{\square_{12}}+\epsilon_1+\epsilon_2)} = \phi(h_{\square_{12}}). \tag{3.3.14}$$

Последнее замечание заключается в том, что крюк от клетки $\square_{12}$ совпадает с разностью функций содержания для клеток $\square_1, \square_2$

$$h_{\square_{12}} = \epsilon_1(j_{\square_2}-j_{\square_1}) - \epsilon_2(i_{\square_1}-i_{\square_2}) = \omega_{\square_2}-\omega_{\square_1}. \tag{3.3.15}$$

Соотношения гистерезиса *не зависят от нормировки*, поэтому выполняются для произвольного выбора нормировки полиномов Джека.

Теперь мы вернемся к случаю $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -\beta$ чтобы явно сравнить нормировки полиномов Джека. Приведем несколько примеров

$$\tilde{J}^\beta_{\square} = p_1, \qquad \begin{aligned}\tilde{J}^\beta_{\square\square} &= \beta p_1^2 + p_2,\\ \tilde{J}^\beta_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \beta\left(p_1^2 - p_2\right),\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\tilde{J}^\beta_{\square\square\square} &= \beta^2 p_1^3 + 3\beta p_1 p_2 + 2p_3,\\ \tilde{J}^\beta_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \beta\left(\beta p_1^3 - (-1+\beta)p_1p_2 - p_3\right),\\ \tilde{J}^\beta_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \beta^2\left(p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_3\right).\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

В такой нормировке тождество Коши выполняется с нормировочными коэффициентами $||\tilde{J}^\beta_\lambda||^2$

$$\sum_\lambda \frac{\tilde{J}^\beta_\lambda(p_k)\,\tilde{J}^\beta_\lambda(\bar{p}_k)}{||\tilde{J}^\beta_\lambda||^2} = \exp\left(\sum_{k=1}\frac{(-\epsilon_1\epsilon_2)p_k\,\bar{p}_k}{k}\right), \tag{3.3.17}$$

которые выражаются формулой крюков

$$||\tilde{J}^\beta_\lambda||^2 = \frac{1}{\epsilon_1^2\epsilon_2^2}\cdot\prod_{\square\in\lambda}(h_\square-\epsilon_1)(h_\square+\epsilon_2). \tag{3.3.18}$$

3.3.3 Квантовая система Калоджеро-Сазерленда

Оператор $\hat{\psi}_3$ в Фоковском представлении (3.3) тесно связан с квантовой интегрируемой системой Калоджеро-Сазерленда с тригонометрическим потенциалом взаимодействия (см. обзор [166])

$$\hat{H}_{CMS} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \sum_{i<j} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{q_i-q_j}{2}\right)}. \tag{3.3.19}$$

Основным состоянием такой системы является тригонометрический детерминант Вандермонда

$$\Delta = \prod_{i<j} \sin^{\beta}\left(\frac{q_i-q_j}{2}\right). \tag{3.3.20}$$

После сопряжения на детерминант Вандермонда и замены переменных к коллективным координатам $p_k = \sum_{a=1}^{N} e^{ikq_a}$, получается оператор $\hat{H}_2 = \Delta^{-1}\hat{H}_{CMS}\Delta - \varepsilon_0$, который имеет следующий вид

$$\hat{H}_2 = \sum_{a,b=1}^{\infty} ab \cdot p_{a+b}\frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \beta(a+b)\cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + \sum_{a=1}^{\infty}((1-\beta)a+\beta N)ap_a\frac{\partial}{\partial p_a}, \tag{3.3.21}$$

Данный оператор отличается от рассматриваемого нами $\hat{\psi}_3$ лишь тривиальными преобразованиями, которые не влияют на собственные функции

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{3}\hat{\psi}_3 + \left(\frac{1-\beta}{3} + N\beta\right) \times \underbrace{\sum_{a=1}^{\infty} ap_a\frac{\partial}{\partial p_a}}_{\text{оператор градуировки}}. \tag{3.3.22}$$

3.4 Представление МакМахона

Аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ обладает представлением, в котором векторы $|\pi\rangle$ индексируются трехмерными диаграммами Юнга π. Такое представление в литературе часто называют представлением МакМахона [60, 178]. Далее для краткости мы иногда будем называть представление Фока $2d$ случаем, а представление МакМахона $3d$ случаем.

Трехмерные диаграммы Юнга можно определять как множество способов плотной упаковки одинаковых кубических коробок в углу бесконечной комнаты в трехмерном пространстве (см. Рис. 3.5). Для примера мы приводим трехмерную диаграмму Юнга на Рис.3.5 в следующих удобных обозначениях

5	4	3	3	2	1
3	3	2	1		
2	1				

,

где вписанные числа отвечают высотам. Одна и та же трехмерная диаграмма может быть

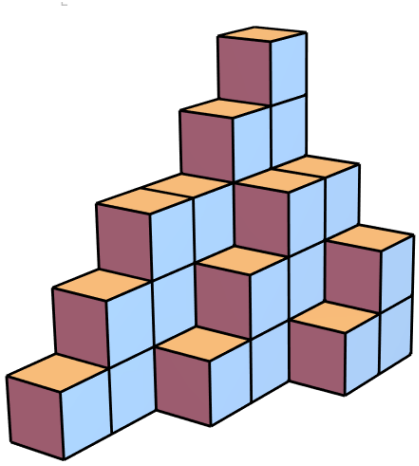


Рис. 3.5: Трехмерная диаграмма Юнга

представлена в подобном виде тремя способами, в зависимость от проекции на одну из трех плоскостей. Действие операторов аффинного Янгиана на векторы $|\pi\rangle$ определяются аналогичным образом как в случае представления Фока

$$\hat{e}(z)\,|\pi\rangle = \sum_{\square \in \mathrm{Add}(\pi)} \frac{\mathfrak{E}_{\pi,\pi+\square}}{z-\Omega_{\square}}\,|\pi+\square\rangle\,, \tag{3.4.1}$$

$$\hat{f}(z)\,|\pi\rangle = \sum_{\square \in \mathrm{Rem}(\pi)} \frac{\mathfrak{F}_{\pi,\pi-\square}}{z-\Omega_{\square}}\,|\pi-\square\rangle\,, \tag{3.4.2}$$

$$\hat{\psi}(z)\,|\pi\rangle = \psi_{\pi}(z)\,|\pi\rangle\,. \tag{3.4.3}$$

Трехмерная функция содержания определяется следующим образом

$$\Omega_{\square} = j_{\square}\cdot\epsilon_1 + i_{\square}\cdot\epsilon_2 + k_{\square}\cdot\epsilon_3, \tag{3.4.4}$$

где $k_{\square}$ это третья координата - высота кубика $\square$ в трехмерной диаграмме Юнга, а $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 = 0$. В представлении МакМахона собственные значения вычисляются по следующей формуле

$$\psi_{\pi}(z) = \psi_{\varnothing}(z)\cdot\prod_{\square\in\pi}\phi\left(z-\Omega_{\square}\right) \qquad\qquad \psi_{\varnothing}(z) = 1+\sigma_3\frac{\psi_0}{z}. \tag{3.4.5}$$

Согласно общей логике, описанной в разделе 3.2.4, полюса собственных значений $\psi_{\pi}(z)$ соответствуют местам куда можно добавить или откуда можно удалить кубик $\square$. Поэтому вычет в полюсах соответствует амплитудам (3.2.23)

$$\mathfrak{E}_{\pi,\pi+\square}\,\mathfrak{F}_{\pi+\square,\pi} = -\frac{1}{\sigma_3}\cdot\mathrm{Res}_{z=\Omega_{\square}}\,\psi_{\pi}(z), \tag{3.4.6}$$

$$\mathfrak{F}_{\pi,\pi-\square\!\square\!\square}\,\mathfrak{E}_{\pi-\square\!\square\!\square,\pi}=\frac{1}{\sigma_3}\cdot\mathrm{Res}_{z=\Omega_{\square\!\square\!\square}}\,\psi_\pi(z). \tag{3.4.7}$$

Оказывается, что самосогласованное представление получается если наложить условие равенство амплитуд [60]

$$\mathfrak{E}_{\pi,\pi+\square\!\square\!\square}=\mathfrak{F}_{\pi+\square\!\square\!\square,\pi}. \tag{3.4.8}$$

В таком случае, можно вычислить все амплитуды из формул для вычетов

$$\mathfrak{E}_{\pi,\pi+\square\!\square\!\square}=\mathfrak{F}_{\pi+\square\!\square\!\square,\pi}=\sqrt{-\frac{1}{\sigma_3}\cdot\mathrm{Res}_{z=\Omega_{\square\!\square\!\square}}\,\psi_\pi(z)}. \tag{3.4.9}$$

Аналогичный подход мог быть применен в случае представления Фока, однако некоторой перенормировкой векторов можно добиться исчезновения всех квадратных корней. В случае представления МакМахона одновременно избавиться от корней и написать общую формулу для амплитуд на данный момент не представляется возможным.

3.5 Реализация представления МакМахона и полиномы 3-Шура

Главная задача этого раздела это построить реализацию представления МакМахона в терминах некоторых дифференциальных операторов и тем самым определить новые полиномы 3-Шура, которые будут перечисляться трехмерными диаграммами Юнга. Как мы уже видели в других разделах, реализация представления Фока на переменных p_a позволяет установить связь аффинного Янгиана с квантовыми интегрируемыми системами и матричными моделями. Мы надеемся, что данный проект по построению полиномов 3-Шура в итоге увенчается открытием новых интегрируемых систем.

Первая проблема в построении реализации представления МакМахона это выбор новых временных переменных. Основываясь на производящей функции количества $p^{\square\!\square\!\square}(n)$ трехмерных диаграмм Юнга состоящих из n кубиков

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^{\square\!\square\!\square}(n)\cdot q^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^k)^k}=1+q+3q^2+6q^3+13q^4+24q^5+48q^6+\ldots, \tag{3.5.1}$$

которая обобщает известную производящую функцию количества $p^{\square}(n)$ обычных диаграмм Юнга,

$$\sum_{n=0}^{\infty}p^{\square}(n)\cdot q^n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^k}=1+q+2q^2+3q^3+5q^4+7q^5+11q^6+\ldots \tag{3.5.2}$$

мы будем пользоваться *треугольными временными переменными* $\mathbf{P}_{k,i}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$. Другими словами, каждый множитель $\frac{1}{1-q^k}$ в производящей функции соответствует временной переменной градуировки k. В трехмерном случае в формуле МакМахона k таких одинаковых множителей, которые должны быть отождествлены с k временными переменными одинаковой градуировки k. В наших обозначениях $3d$ переменные — это $\mathbf{P}_{k,i}$, где k — градуировка, а i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — номер по порядку (см. Таб. 3.2).

1	$\mathbf{P}_{1,1}$	
2	$\mathbf{P}_{2,1},\ \mathbf{P}_{2,2},\ (\mathbf{P}_{1,1})^2$	
3	$\mathbf{P}_{3,1},\ \mathbf{P}_{3,2},\ \mathbf{P}_{3,3},\ \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1},\ \mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1},\ (\mathbf{P}_{1,1})^3$	
4	$\mathbf{P}_{4,1}, \mathbf{P}_{4,2}, \mathbf{P}_{4,3}, \mathbf{P}_{4,4}, (\mathbf{P}_{2,1})^2, \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2}, (\mathbf{P}_{2,2})^2,$ $\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{2,1}(\mathbf{P}_{1,1})^2, \mathbf{P}_{2,2}(\mathbf{P}_{1,1})^2, (\mathbf{P}_{1,1})^4$	

Таблица 3.2: Число $3d$ диаграмм Юнга с n кубиками равно числу однородных мономов от переменных $\mathbf{P}_{a,i}$, где градуировка переменной $\mathbf{P}_{a,i}$ равна a. Наши обозначения $3d$ диаграмм Юнга следующие: числа в клетках обозначают высоту, а пустая клетка означает единичную высоту. Обратите внимание, что в $3d$ случае нет естественного соответствия между мономами и диаграммами.

Наш алгоритм построения реализации основан на следующей особенности аффинного Янгиана: его представление может быть полностью зафиксировано самосогласованными операторами из набора образующих 3.1.1. Напомним, структура оператора разрезания и склейки для $2d$ случая

$$\hat{\psi}_3^{2d} = \sum_a U^a \cdot p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \sum_{a,b} X^{a,b} \cdot p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + Y^{a,b} \cdot p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}}. \tag{3.5.3}$$

Мы специально не уточняем явный вид коэффициентов $U^a, X^{a,b}, Y^{a,b}$, чтобы привлечь внимание к структуре этих операторов. А именно, сумма индексов, которые "разрезаются" производными, всегда равна сумме индексов, которые "приклеиваются" умножением на временные переменные, т.е. оператор имеет нулевую общую градуировку. С другой стороны, такой оператор имеет спин 3, т.е. (максимальное) количество переменных и производных в нормально упорядоченном виде равно трем. Нашей отправной точкой для треугольного представления является следующий анзац для $3d$ оператора разрезания и склейки, то есть прямое обобщение (3.5.3) по правилу $p_a \to \mathbf{P}_{a,i}$

$$\hat{\psi}_3^{3d} = \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{a} U_{i,j}^{a} \cdot \mathbf{P}_{a,i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{a,j}} + \\ + \sum_{a,b=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{a+b} \left(X_{i,j|k}^{a,b} \cdot \mathbf{P}_{a+b,k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{P}_{a,i} \partial \mathbf{P}_{b,j}} + Y_{i,j|k}^{a,b} \cdot \mathbf{P}_{a,i} \mathbf{P}_{b,j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{a+b,k}} \right). \tag{3.5.4}$$

Далее мы опускаем верхний индекс $3d$ для краткости. Функции $U_{i,j}^{a}$, $X_{i,j|k}^{a,b}$, $Y_{i,j|k}^{a,b}$ получают дополнительные индексы, соответствующие вторым индексам времен $\mathbf{P}_{a,i}$, и имеют очевидные симметрии

$$X_{i,j|k}^{a,b} = X_{j,i|k}^{b,a}, \qquad Y_{i,j|k}^{a,b} = Y_{j,i|k}^{b,a}. \tag{3.5.5}$$

Операторы $\hat{e}_0, \hat{f}_0$ обобщаются по тому же простому правилу

$$\hat{e}_0 = \psi_0 \, \mathbf{P}_{1,1}, \qquad \hat{f}_0 \ = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{1,1}}. \tag{3.5.6}$$

Для такого обобщения простейших повышающих и понижающих операторов есть дополнительные аргументы. Размерность пространства векторов градуировки 1 равна 1, поэтому мы знаем чему равен простейший полином 3-Шура, соответствующий диаграмме с единственным кубиком. Поэтому оператор добавления одного кубика должен быть равен $\mathbf{P}_{1,1}$. Аналогично с оператором удаления одного кубика.

Здесь ψ_0 — комплексное число, характеризующее представление. Напомним, что все генераторы Янгиана могут быть получены из специального набора образующих 3.1.1 с помощью соотношений (3.1.27), (3.1.28), (3.1.29). Для нашего анзаца генераторы Янгиана являются функциями коэффициентов $U_{i,j}^{a}, X_{i,j|k}^{a,b}, Y_{i,j|k}^{a,b}$. Коммутационные соотношения алгебры не выполняются для произвольных значений $U_{i,j}^{a}, X_{i,j|k}^{a,b}, Y_{i,j|k}^{a,b}$, но накладывают на них специальные условия. Далее мы объясним, как находить решение для этих уравнений, однако следует подчеркнуть один важный момент.

Важно, что анзац (3.5.4) *является нетривиальной гипотезой*, поскольку не гарантируется, что операторы более высокого спина, например, такие как $\mathbf{P}_{a,i}\mathbf{P}_{b,j}\mathbf{P}_{c,k}\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{a+b+c,l}}$, не потребуются для решения коммутационных соотношений из раздела 3.1.

Мы ищем решения коммутационных соотношений Янгиана уровень за уровнем, а затем находим полиномы 3-Шура на соответствующем уровне как собственные функции оператора $\hat{\psi}_3$. Для каждого уровня n мы следуем следующей схеме:

1. Сначала мы фиксируем базис в подпространстве времен $\mathbf{P}_{n,i}$ для $i = 1, \ldots, n$. Все эти времена имеют одинаковую градуировку и, следовательно, могут быть смешаны между собой с помощью линейных преобразований. Мы используем эту свободу, чтобы наложить следующие условия:

$$Y^{1,b}_{1,j|k} \sim \delta_{j,k}, \qquad\qquad X^{1,b}_{1,j|k} \sim \delta_{j,k}. \tag{3.5.7}$$

Другими словами, коэффициенты $Y^{1,b}_{1,j|k}, X^{1,b}_{i,j|k}$ равны нулю, если только $k = j$. Значения $Y^{1,b}_{1,j|j}, X^{1,b}_{i,j|j}$ определяются из следующих шагов алгоритма. Эти условия мотивированы случаем $2d$, где все коэффициенты $X^{a,b}_{i,j|k}, Y^{a,b}_{i,j|k}$ подчиняются правилу $k = i + j - 1$, поскольку второй индекс временных переменных всегда равен единице, т. е. $i = j = k = 1$. Поэтому мы выбираем условие $k = i + j - 1$ в качестве определяющего свойства нашего алгоритма. Это не означает, что нет лучшего выбора. Более того, как мы увидим позже такой выбор базиса в подпространстве временных переменных немного разрушает ортогональное свойство.

Мы могли бы держать данные коэффициенты свободными параметрами, чтобы наложить впоследствии условия ортогональности, но это является сложной технической задачей.

2. Далее мы накладываем следующее соотношение Янгиана

$$[\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3] = 0, \tag{3.5.8}$$

которое эквивалентно уравнениям

$$X^{1,b}_{1,j|j}\, Y^{1,b}_{1,j|j} = \frac{3(b - j + 1)}{\psi_0} \cdot 3(b + j). \tag{3.5.9}$$

Мы разрешаем эти соотношения с помощью следующего выбора

$$X^{1,b}_{1,j|j} = \frac{3(b - j + 1)}{\psi_0}, \qquad\qquad Y^{1,b}_{1,j|j} = 3(b + j). \tag{3.5.10}$$

Этот выбор соответствует конкретному выбору скалярных произведений временных переменных в тождестве Коши (3.2.34).

3. Далее мы накладываем более сложные коммутационные соотношения, чтобы зафикси-

ровать оставшиеся коэффициенты $U^a_{i,j}, X^{a,b}_{i,j|k}, Y^{a,b}_{i,j|k}$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_3 - [\hat{e}_2, \hat{f}_1] &= 0,\\ \mathrm{YRel}_{j,k} := [\hat{e}_{j+3}, \hat{e}_k] - 3[\hat{e}_{j+2}, \hat{e}_{k+1}] + 3[\hat{e}_{j+1}, \hat{e}_{k+2}] - [\hat{e}_j, \hat{e}_{k+3}] -&\\ -\sigma_2\Big([\hat{e}_j, \hat{e}_{k+1}] - [\hat{e}_{j+1}, \hat{e}_k]\Big) - \sigma_3\{\hat{e}_j, \hat{e}_k\} &= 0,\\ \mathrm{Sym}_{j_1,j_2,j_3}\,[\hat{e}_{j_1}, [\hat{e}_{j_2}, \hat{e}_{j_3+1}]] &= 0.\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

4. Когда все коэффициенты $U^a_{i,j}, X^{a,b}_{i,j|k}, Y^{a,b}_{i,j|k}$ зафиксированы на некотором уровне n, можно вычислить полиномы 3-Шура $\mathbf{S}_\pi$ как его собственные функции

$$\hat{\psi}_3\,\mathbf{S}_\pi = \psi_{3,\pi}\mathbf{S}_\pi. \tag{3.5.12}$$

Собственные функции различаются собственными значениями λ_π, которые должны подчиняться следующей формуле согласно теории представлений аффинного Янгиана (3.4.5)

$$\psi_{3,\pi} = \sum_{\square \in \pi} 6\Omega_{\square} + 2\sigma_3\psi_0. \tag{3.5.13}$$

Функция содержания $\Omega_{\square}$ определяется как в (3.4.4).

Сделаем несколько замечаний по выбору комплексного параметра ψ_0. Можно выполнять вычисления для произвольного значения ψ_0, однако выражения быстро становятся слишком большими. Различные варианты, такие как $\psi_0 = 1$, представлены в литературе [60, 179]. Мы будем использовать следующее значение

$$\boxed{\psi_0 = -\frac{1}{\sigma_2},} \tag{3.5.14}$$

которое имеет два основных преимущества: формулы значительно упрощаются и восстанавливается однородность формул. Под восстановлением однородности мы подразумеваем появление дополнительной градуировки

$$\begin{aligned}&[\epsilon_i] = 1, && [\sigma_2] = 2, && [\sigma_3] = 3,\\ &[\mathbf{P}_{a,i}] = 1, && \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_{a,i}}\right] = -1, &&\\ &[\hat{e}_i] = i-1, && \left[\hat{\psi}_i\right] = i-2, && \left[\hat{f}_i\right] = i-1.\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Для первых нескольких уровней мы приводим обе формулы: для произвольного значения ψ_0

и $\psi_0 = -1/\sigma_2$, а для более высоких уровней мы приводим только упрощенную версию для $\psi_0 = -1/\sigma_2$.

Уровень 0

На этом уровне есть только один вектор, соответствующий пустой диаграмме, и мы выбираем его как единицу

$$\mathbf{S}_{\varnothing} = 1. \tag{3.5.16}$$

Согласно общим правилам можно вычислить $\hat{e}_1, \hat{f}_1$, а затем вычислить комплексное число ψ_1

$$\psi_1 = U^1_{1,1} - 2\sigma_3\psi_0. \tag{3.5.17}$$

В качестве альтернативы значение ψ_1 можно зафиксировать с помощью следующих соображений. Вычисляется $\hat{e}_2$ и подставляется в следующее отношение Янгиана, действующее на единицу

$$\hat{\psi_3} \cdot 1 = [\hat{e}_2, \hat{f}_1] \cdot 1. \tag{3.5.18}$$

Левая часть исчезает из (3.5.4), в то время как правая часть может быть вычислена

$$0 = \frac{\psi_0}{36} \left(U^1_{1,1} - 2\sigma_3\psi_0\right)^2, \tag{3.5.19}$$

откуда мы заключаем

$$U^1_{1,1} = 2\sigma_3\psi_0, \qquad\qquad \psi_1 = 0. \tag{3.5.20}$$

Уровень 1

На первом уровне находится одна диаграмма $\square$ и один базисный моном $\mathbf{P}_{1,1}$. Наша нормировка выглядит следующим образом

$$\mathbf{S}_{\square} = \mathbf{P}_{1,1}. \tag{3.5.21}$$

Оператор $\hat{\psi_3}$ (3.5.4) действует на первом уровне согласно следующей Таблиц 3.3. Можно проверить формулу (3.5.13) для собственных значений

$$\psi_{3,\square} = 2\sigma_3\psi_0. \tag{3.5.22}$$

$\hat{\psi}_3$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}_{1,1}$
$\mathbf{P}_{1,1}$	$U^1_{1,1} = 2\sigma_3\psi_0$

Таблица 3.3: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 1 уровня.

Уровень 2

На втором уровне есть три базисных монома $(\mathbf{P}_{1,1})^2, \mathbf{P}_{2,1}, \mathbf{P}_{2,2}$ и набор диаграмм Юнга содержит три элемента

$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \square\square, \boxed{2}. \tag{3.5.23}$$

Чтобы полностью зафиксировать форму полиномов 3-Шура на втором уровне, следует вычислить коэффициенты, представленные в Таблице 3.4. которая представляет действие опе-

$\hat{\psi}_3$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}^2_{1,1}$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}_{2,1}$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}_{2,2}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	$2U^1_{1,1}$	$Y^{1,1}_{1,1\|1}$	$Y^{1,1}_{1,1\|2}$
$\mathbf{P}_{2,1}$	$2X^{1,1}_{1,1\|1}$	$U^2_{1,1}$	$U^2_{1,2}$
$\mathbf{P}_{2,2}$	$2X^{1,1}_{1,1\|2}$	$U^2_{2,1}$	$U^2_{2,2}$

Таблица 3.4: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 2 уровня.

ратора $\hat{\psi}_3$ на базисные мономы в первой строке. Свобода выбора базиса в переменных $\mathbf{P}_{2,1}$ и $\mathbf{P}_{2,2}$ позволяет наложить ограничения

$$X^{1,1}_{1,1|2} = 0, \qquad Y^{1,1}_{1,1|2} = 0. \tag{3.5.24}$$

Далее, соотношение Янгиана

$$[\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3] = 0 \tag{3.5.25}$$

не может дать ценной информации на этом низком уровне, поэтому мы используем более сложное соотношение, действующее на базисный моном $\mathbf{P}^2_{1,1}$

$$(\hat{\psi}_3 - [\hat{e}_2, \hat{f}_1]) \cdot \mathbf{P}^2_{1,1} = 0. \tag{3.5.26}$$

Решая приведенное выше соотношение, получаем

$$X^{1,1}_{1,1|1} = \frac{3}{\psi_0}, \qquad Y^{1,1}_{1,1|1} = 6, \qquad U^2_{1,1} = 10\sigma_3\psi_0, \tag{3.5.27}$$

где мы выбираем нормировку $\mathbf{P}_{2,1}$ согласно (3.5.10). Далее используем следующее соотношение Янгиана, действующее на 1

$$\Big([\hat{e}_3,\hat{e}_0]-3[\hat{e}_2,\hat{e}_1]+3[\hat{e}_1,\hat{e}_2]-[\hat{e}_0,\hat{e}_3]-\sigma_2\Big([\hat{e}_0,\hat{e}_1]-[\hat{e}_1,\hat{e}_0]\Big)-\sigma_3\{\hat{e}_0,\hat{e}_0\}\Big)\cdot 1=0 \qquad (3.5.28)$$

и получаем следующий ответ

$$U^2_{2,2}=-2\sigma_3\psi_0, \qquad U^2_{2,1}U^2_{1,2}=-\frac{36}{\psi_0}\left(1+\sigma_2\psi_0+\sigma_3^2\psi_0^3\right). \qquad (3.5.29)$$

Два коэффициента $U^2_{1,2}$ и $U^2_{2,1}$ всегда входят в соотношения Янгиана парой, и их значения по отдельности найти нельзя. Напротив, отношение $U^2_{1,2}/U^2_{2,1}$ является свободным параметром, соответствующим нормировке переменной $\mathbf{P}_{2,2}$. Мы выбираем следующую нормировку

$$U^2_{1,2}=-6\sqrt{\frac{1}{\psi_0}+\sigma_2+\sigma_3^2\psi_0^2}, \qquad U^2_{2,1}=6\sqrt{\frac{1}{\psi_0}+\sigma_2+\sigma_3^2\psi_0^2} \qquad (3.5.30)$$

На этом этапе мы полностью зафиксировали вид оператора $\hat{\psi}_3$ на втором уровне (см. Таб. 3.5).

$\hat{\psi}_3$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}^2_{1,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{2,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{2,2}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	$4\sigma_3\psi_0$	6	0
$\mathbf{P}_{2,1}$	$\frac{6}{\psi_0}$	$10\sigma_3\psi_0$	$-6\sqrt{\frac{1}{\psi_0}+\sigma_2+\sigma_3^2\psi_0^2}$
$\mathbf{P}_{2,2}$	0	$6\sqrt{\frac{1}{\psi_0}+\sigma_2+\sigma_3^2\psi_0^2}$	$-2\sigma_3\psi_0$

Таблица 3.5: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 2 уровня после решения уравнений.

и мы можем вычислить полиномы 3-Шура как собственные функции

$$\begin{aligned}
\psi_{3,\ydiagram{2,1}}&=6\epsilon_1+4\sigma_3\psi_0, & \mathbf{S}_{\ydiagram{2,1}}&=\mathbf{P}^2_{1,1}+\epsilon_1\,\mathbf{P}_{2,1}+\sqrt{\frac{(1+\epsilon_1\epsilon_2\psi_0)(1+\epsilon_1\epsilon_3\psi_0)}{\psi_0(1+\epsilon_2\epsilon_3\psi_0)}}\,\mathbf{P}_{2,2},\\
\psi_{3,\ydiagram{1,1}}&=6\epsilon_2+4\sigma_3\psi_0, & \mathbf{S}_{\ydiagram{1,1}}&=\mathbf{P}^2_{1,1}+\epsilon_2\,\mathbf{P}_{2,1}+\sqrt{\frac{(1+\epsilon_2\epsilon_1\psi_0)(1+\epsilon_2\epsilon_3\psi_0)}{\psi_0(1+\epsilon_1\epsilon_3\psi_0)}}\,\mathbf{P}_{2,2},\\
\psi_{3,\ydiagram{3}}&=6\epsilon_3+4\sigma_3\psi_0, & \mathbf{S}_{\ydiagram{3}}&=\mathbf{P}^2_{1,1}+\epsilon_3\,\mathbf{P}_{2,1}+\sqrt{\frac{(1+\epsilon_3\epsilon_2\psi_0)(1+\epsilon_3\epsilon_1\psi_0)}{\psi_0(1+\epsilon_1\epsilon_2\psi_0)}}\,\mathbf{P}_{2,2}.
\end{aligned} \qquad (3.5.31)$$

В нашей нормировке полиномов коэффициент базисного монома $\mathbf{P}^2_{1,1}$ равен единице. При

таком выборе тождество Коши (3.2.34) для уровня 2 имеет следующий вид

$$\sum_{|\pi|=2} \frac{\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{S}_\pi(\mathbf{P}')}{||\mathbf{S}_\pi||^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{P}_{1,1} \cdot \mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{1,1}||^2}\right)^2 + \frac{\mathbf{P}_{2,1} \cdot \mathbf{P}'_{2,1}}{||\mathbf{P}_{2,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{2,2} \cdot \mathbf{P}'_{2,2}}{||\mathbf{P}_{2,2}||^2}, \tag{3.5.32}$$

$$\begin{aligned}
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{2\psi_0\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)}{(1+\epsilon_1\epsilon_3\psi_0)}, & ||\mathbf{P}_{1,1}||^2 &= 1,\\
||\mathbf{S}_{\square\square}||^2 &= \frac{2\psi_0\,(\epsilon_1-\epsilon_2)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)}{(1+\epsilon_2\epsilon_3\psi_0)}, & ||\mathbf{P}_{2,1}||^2 &= 2\psi_0,\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{2\psi_0\,(\epsilon_3-\epsilon_1)\,(\epsilon_3-\epsilon_2)}{(1+\epsilon_1\epsilon_2\psi_0)}, & ||\mathbf{P}_{2,2}||^2 &= -2\psi_0.
\end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Правило умножения и коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона имеют следующий вид

$$\mathbf{S}_\square \cdot \mathbf{S}_\square = \mathfrak{C}_{\square,\square}\,\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} + \mathfrak{C}_{\square,\square\square}\,\mathbf{S}_{\square\square} + \mathfrak{C}_{\square,\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\,\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}, \tag{3.5.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{\square,\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \frac{1+\epsilon_1\epsilon_3\psi_0}{\psi_0\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)},\\
\mathfrak{C}_{\square,\square\square} &= \frac{1+\epsilon_2\epsilon_3\psi_0}{\psi_0\,(\epsilon_1-\epsilon_2)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)},\\
\mathfrak{C}_{\square,\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} &= \frac{1+\epsilon_2\epsilon_1\psi_0}{\psi_0\,(\epsilon_3-\epsilon_2)\,(\epsilon_3-\epsilon_1)}.
\end{aligned} \tag{3.5.35}$$

Далее мы приводим явную форму оператора $\hat{\psi}_3$ и полиномов 3-Шура для случаев $\psi_0 = 1$ и $\psi_0 = -\frac{1}{\sigma_2}$. Мы сравниваем эти два подхода и обсуждаем преимущества и недостатки.

$\psi_0 = 1$

В этом случае формулы более громоздкие см. Таб. 3.6 и Таб. 3.7.

ψ_3	$\psi_3 \cdot \mathbf{P}^2_{1,1}$	$\psi_3 \cdot \mathbf{P}_{2,1}$	$\psi_3 \cdot \mathbf{P}_{2,2}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	$4\sigma_3$	6	0
$\mathbf{P}_{2,1}$	6	$10\sigma_3$	$-6\sqrt{1+\sigma_2+\sigma_3^2}$
$\mathbf{P}_{2,2}$	0	$6\sqrt{1+\sigma_2+\sigma_3^2}$	$-2\sigma_3$

Таблица 3.6: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 2 уровня после решения уравнений при $\psi_0 = 1$.

В случае $\psi_0 = 1$ есть хорошая процедура редукции к случаю $2d$ Джека и обычных поли-

	$\mathbf{S}_{\square}$	$\mathbf{S}_{\square\square}$	$\mathbf{S}_{\square\!\!\square}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	1	1	1
$\mathbf{P}_{2,1}$	ϵ_2	ϵ_1	ϵ_3
$\mathbf{P}_{2,2}$	$\sqrt{\frac{(1+\epsilon_2\epsilon_1)(1+\epsilon_2\epsilon_3)}{(1+\epsilon_1\epsilon_3)}}$	$\sqrt{\frac{(1+\epsilon_2\epsilon_1)(1+\epsilon_1\epsilon_3)}{(1+\epsilon_2\epsilon_3)}}$	$\sqrt{\frac{(1+\epsilon_3\epsilon_1)(1+\epsilon_2\epsilon_3)}{(1+\epsilon_1\epsilon_2)}}$

Таблица 3.7: Таблица коэффициентов 3-Шура второго уровня (2 кубика) в случае $\psi_0 = 1$.

номов Шура. А именно, условие редукции $2d$ выглядит так [60]

$$\epsilon_3 + \sigma_3\psi_0 = 0. \tag{3.5.36}$$

Для случая $\psi_0 = 1$ это условие допускает однопараметрическое семейство решений, соответствующее полиномам Джека:

$$\epsilon_2 = -\sqrt{\beta}, \qquad \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \qquad \epsilon_3 = \sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{3.5.37}$$

где $\sqrt{\beta}$ - комплексный параметр, а случай обычных полиномов Шура соответствует $\beta = 1$. Мы приводим явную форму полиномов Джека и Шура, чтобы продемонстрировать, что полиномы 3-Шура совпадают с ними с точностью до общей нормировки и идентификации временных переменных $\mathbf{P}_{a,i} \to \sqrt{\beta}p_a$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{\square}\Big|_{\substack{\epsilon_2=-\sqrt{\beta}\\ \epsilon_1=1/\sqrt{\beta}\\ \epsilon_3=\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}}} = \mathbf{P}^2_{1,1} - \sqrt{\beta}\,\mathbf{P}_{2,1}, \qquad J_{\square} = \beta(p_1^2 - p_2), \qquad \propto (\beta = 1) \qquad S_{\square} = \frac{1}{2}\left(p_1^2 - p_2\right),\\
&\mathbf{S}_{\square\square}\Big|_{\substack{\epsilon_2=-\sqrt{\beta}\\ \epsilon_1=1/\sqrt{\beta}\\ \epsilon_3=\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}}} = \mathbf{P}^2_{1,1} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,\mathbf{P}_{2,1}, \qquad J_{\square\square} = \beta p_1^2 + p_2, \qquad \propto (\beta = 1) \qquad S_{\square\square} = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2\right).
\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

В этом пределе сектор полиномов 3-Шура неплоских диаграмм Юнга отщепляется, т.е. соответствующие коэффициенты Литтлвуда-Ричардсона (3.5.35) обращаются в ноль

$$\mathfrak{C}_{\square,\square\!\!\square}\Big|_{\substack{\epsilon_2=-\sqrt{\beta}\\ \epsilon_1=1/\sqrt{\beta}\\ \epsilon_3=\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}}} = 0. \tag{3.5.39}$$

Это также видно из того факта, что их нормы расходятся и они исчезают из тождества Коши

$$\frac{1}{||\mathbf{S}_{\ydiagram{2}}||^2}\Big|_{\substack{\epsilon_2=-\sqrt{\beta}\\ \epsilon_1=1/\sqrt{\beta}\\ \epsilon_3=\sqrt{\beta}-1/\sqrt{\beta}}} = 0. \tag{3.5.40}$$

$\psi_0 = -\frac{1}{\sigma_2}$

В этом случае формулы для оператора $\hat{\psi}_3$ и полиномов 3-Шура проще и имеют следующий вид (см. Таб.3.8).

$\hat{\psi}_3$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}^2_{1,1}$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}_{2,1}$	$\hat{\psi}_3 \cdot \mathbf{P}_{2,2}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	$-4\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	6	0
$\mathbf{P}_{2,1}$	$-6\,\sigma_2$	$-10\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$
$\mathbf{P}_{2,2}$	0	$6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$2\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$

3-Schurs	$\mathbf{S}_{\ydiagram{1}}$	$\mathbf{S}_{\ydiagram{2}}$	$\mathbf{S}_{\ydiagram{2}}$
$\mathbf{P}^2_{1,1}$	1	1	1
$\mathbf{P}_{2,1}$	ϵ_2	ϵ_1	ϵ_3
$\mathbf{P}_{2,2}$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_2^2}$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_1^2}$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3^2}$

Таблица 3.8: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 2 уровня после решения уравнений (слева) и таблица коэффициентов полиномов 3-Шура (справа) при $\psi_0 = -1/\sigma_2$.

$$\begin{aligned}
\psi_{3,\ydiagram{1}} &= 6\epsilon_2 - 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & \mathbf{S}_{\ydiagram{1}} &= \mathbf{P}^2_{1,1} + \epsilon_2\,\mathbf{P}_{2,1} + \frac{\sigma_3}{(\epsilon_2)^2}\,\mathbf{P}_{2,2},\\
\psi_{3,\ydiagram{2}} &= 6\epsilon_1 - 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & \mathbf{S}_{\ydiagram{2}} &= \mathbf{P}^2_{1,1} + \epsilon_1\,\mathbf{P}_{2,1} + \frac{\sigma_3}{(\epsilon_1)^2}\,\mathbf{P}_{2,2},\\
\psi_{3,\ydiagram{2}} &= 6\epsilon_3 - 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & \mathbf{S}_{\ydiagram{2}} &= \mathbf{P}^2_{1,1} + \epsilon_3\,\mathbf{P}_{2,1} + \frac{\sigma_3}{(\epsilon_3)^2}\,\mathbf{P}_{2,2}.
\end{aligned} \tag{3.5.41}$$

Еще одним интересным свойством этих формул является то, что они могут быть представлены универсальным образом. А именно, любой собственный вектор оператора $\hat{\psi}_3$ на уровне 2 имеет следующий вид

$$\mathbf{S}_{|\pi|=2} = \mathbf{P}^2_{1,1} + u\cdot\mathbf{P}_{2,1} + \frac{\sigma_3}{u^2}\cdot\mathbf{P}_{2,2}, \tag{3.5.42}$$

где u это корень характеристического уравнения

$$\boxed{0 = \det\left(\psi_3 - 6u + 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \quad \propto \quad u^3 + u\,\sigma_2 - \sigma_3 = (u-\epsilon_2)(u-\epsilon_1)(u-\epsilon_3).} \tag{3.5.43}$$

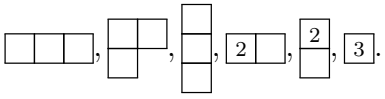
Как можно видеть, в этом случае происходят существенные упрощения формул. Далее мы фиксируем значение ψ_0

$$\boxed{\psi_0 = -\frac{1}{\sigma_2}.} \tag{3.5.44}$$

Однако у такого выбора значения ψ_0 есть один недостаток: в пределе $2d$ нельзя получить полиномы Джека, есть только обычные полиномы Шура. А именно, если решить условие редукции $2d$ для $\psi_0 = -\frac{1}{\sigma_2}$, то получим результат $\epsilon_3 = 0$, соответствующий полиномам Шура. Напомним, в случае полиномов Джека σ_3 имеет ненулевое значение (см. раздел 3.3), тогда как при $\epsilon_3 = 0$ он равен нулю.

Уровень 3

Существует шесть базисных мономов: $\mathbf{P}_{1,1}^3, \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}, \mathbf{P}_{3,1}, \mathbf{P}_{3,2}, \mathbf{P}_{3,3}$ и шесть $3d$ диаграмм Юнга



(3.5.45)

Во-первых, фиксируем свободу выбора новых временных переменных $\mathbf{P}_{3,i}$, накладываем следующие условия:

$$\begin{aligned} Y^{1,2}_{1,1|2} &= 0, & Y^{1,2}_{1,1|3} &= 0, & Y^{1,2}_{1,2|1} &= 0, & Y^{1,2}_{1,2|3} &= 0, \\ X^{1,2}_{1,1|2} &= 0, & X^{1,2}_{1,1|3} &= 0, & X^{1,2}_{1,2|1} &= 0, & X^{1,2}_{1,2|3} &= 0. \end{aligned} \tag{3.5.46}$$

Далее накладываем соотношение Янгиана

$$[\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3] \cdot \mathbf{P}_{2,1} = 0. \tag{3.5.47}$$

Объединяя его с правилом нормировки (3.5.10), получаем

$$Y^{1,2}_{1,1|1} = 9, \qquad Y^{1,2}_{1,2|2} = 12, \tag{3.5.48}$$

$$X^{1,2}_{1,1|1} = -6\sigma_2, \qquad X^{1,2}_{1,2|2} = -3\sigma_2. \tag{3.5.49}$$

Затем используем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \left(\hat{\psi}_3 - [\hat{e}_2, \hat{f}_1]\right) \cdot \mathbf{P}_{2,1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad U^3_{1,1} = -24\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \quad U^3_{2,1} = -9\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \\ \left(\hat{\psi}_3 - [\hat{e}_2, \hat{f}_1]\right) \cdot \mathbf{P}_{2,2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad U^3_{1,2} = 24\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \quad U^3_{2,2} = 3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \end{aligned} \tag{3.5.50}$$

Далее мы используем

$$\mathrm{YRel}_{0,1} \cdot \mathbf{P}_{1,1} = 0, \qquad \mathrm{YRel}_{1,1} \cdot \mathbf{P}_{1,1} = 0 \tag{3.5.51}$$

и получаем следующий набор ограничений

$$U^3_{1,3}=0, \qquad U^3_{3,1}=0, \qquad U^3_{3,3}=3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \qquad U^3_{2,3}\,U^3_{3,2}=27\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^2\left(4\,\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}-1\right). \tag{3.5.52}$$

Как и на втором уровне, отношение $U^3_{2,3}/U^3_{3,2}$ не фиксируется из соотношений Янгиана и соответствует нормировке переменной $\mathbf{P}_{3,3}$. В нашем случае

$$U^3_{2,3}=9\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \qquad U^3_{3,2}=3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\left(4\,\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}-1\right). \tag{3.5.53}$$

На данном этапе мы полностью зафиксировали действие оператора $\hat{\psi}_3$ на третьем уровне (см. Таб. 3.9).

$\hat{\psi}_3$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}^3_{1,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{3,1}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{3,2}$	$\hat{\psi}_3\cdot\mathbf{P}_{3,3}$
$\mathbf{P}^3_{1,1}$	$-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	6	0	0	0	0
$\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}$	$-18\,\sigma_2$	$-12\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	18	0	0
$\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}$	0	$-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	0	0	24	0
$\mathbf{P}_{3,1}$	0	$-12\,\sigma_2$	0	$-24\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$24\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	0
$\mathbf{P}_{3,2}$	0	0	$-6\,\sigma_2$	$-9\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$	$9\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$
$\mathbf{P}_{3,3}$	0	0	0	0	$3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\left(4\,\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}-1\right)$	$3\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$

Таблица 3.9: Таблица коэффициентов $\hat{\psi}_3$ для 3 уровня после решения уравнений.

$\psi_{3,\pi}$ 3-Schurs	$18\epsilon_2-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{1,1,1}}$	$18\epsilon_1-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{3}}$	$18\epsilon_3-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{3}}$	$6(\epsilon_2+\epsilon_1)-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{2,1}}$	$6(\epsilon_2+\epsilon_3)-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{2}}$	$6(\epsilon_1+\epsilon_3)-6\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ $\mathbf{S}_{\ydiagram{2}}$
$\mathbf{P}^3_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}$	$3\epsilon_2$	$3\epsilon_1$	$3\epsilon_3$	$-\epsilon_3$	$-\epsilon_1$	$-\epsilon_2$
$\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}$	$\frac{3\sigma_3}{(\epsilon_2)^2}$	$\frac{3\sigma_3}{(\epsilon_1)^2}$	$\frac{3\sigma_3}{(\epsilon_3)^2}$	$-\frac{\epsilon_3^2}{\sigma_3}\left(3\sigma_2+\epsilon_3^2\right)$	$-\frac{\epsilon_1^2}{\sigma_3}\left(3\sigma_2+\epsilon_1^2\right)$	$-\frac{\epsilon_2^2}{\sigma_3}\left(3\sigma_2+\epsilon_2^2\right)$
$\mathbf{P}_{3,1}$	$2\epsilon_2^2$	$2\epsilon_1^2$	$2\epsilon_3^2$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_3}$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_1}$	$\frac{\sigma_3}{\epsilon_2}$
$\mathbf{P}_{3,2}$	$\frac{3\sigma_3}{2\epsilon_2}$	$\frac{3\sigma_3}{2\epsilon_1}$	$\frac{3\sigma_3}{2\epsilon_3}$	$\frac{\epsilon_3^3}{4\sigma_3}\left(5\sigma_2+3\epsilon_3^2\right)$	$\frac{\epsilon_1^3}{4\sigma_3}\left(5\sigma_2+3\epsilon_1^2\right)$	$\frac{\epsilon_2^3}{4\sigma_3}\left(5\sigma_2+3\epsilon_2^2\right)$
$\mathbf{P}_{3,3}$	$K(\epsilon_2)$	$K(\epsilon_1)$	$K(\epsilon_3)$	$\epsilon_3^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)$	$\epsilon_1^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)$	$\epsilon_2^2\left(\frac{1}{4}-\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)$

Таблица 3.10: Таблица коэффициентов полиномов 3-Шура третьего уровня (3 кубика).

Мы вычисляем полиномы 3-Шура (см. Таб. 3.10) как собственные векторы, где мы определили новую функцию

$$K(h_i)=\frac{\sigma_3}{2h_i^2}\left(2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3}+\frac{\sigma_2}{h_i}+\frac{\sigma_3}{h_i^2}\right). \tag{3.5.54}$$

Заметим, что собственные значения $\hat{\psi}_3$, полученные в нашем алгоритме, соответствуют (3.5.13). Есть еще один важный комментарий. Полученные полиномы 3-Шура обладают хорошими свойствами относительно транспонирования $3d$ диаграммы Юнга в различных плоскостях. В частности, транспонируя диаграмму в плоскости с i-й и j-й осями, следует поменять местами h_i и h_j в соответствующих полиномах 3-Шура. Например,

$$\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\Big|_{\epsilon_2\leftrightarrow\epsilon_1} = \mathbf{S}_{\square\square\square}, \qquad \mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\Big|_{\epsilon_2\leftrightarrow\epsilon_1} = \mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}, \qquad \mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\Big|_{\epsilon_2\leftrightarrow\epsilon_3} = \mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}. \tag{3.5.55}$$

Свойство транспонирования диаграмм не заложено в нашем алгоритме и появляется автоматически. Можно проверить, что полиномы 3-Шура на уровне 2 (3.5.41) также подчиняются этому свойству.

Универсальные формулы для полиномов 3-Шура на уровне 3 в терминах параметра u имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{|\pi|=3} = \mathbf{P}_{1,1}^3 + u\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1} + \left(\frac{9\sigma_2^2}{4\sigma_3} + \frac{\sigma_2\left(9\sigma_3+u^3\right)}{4\sigma_3 u} + u\right)\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1} + \\ + \left(\frac{u^3+\sigma_2 u - 3\sigma_3}{4u}\right)\cdot\mathbf{P}_{3,1} + \left(\frac{\sigma_2 u^4 + 3\sigma_3\left(u^3-3\sigma_3\right) + 9\sigma_2^2u^2}{16\sigma_3 u}\right)\cdot\mathbf{P}_{3,2} + \\ + \left(\frac{\sigma_2^3\left(72\sigma_3+26u^3\right) + 3\sigma_3\sigma_2 u\left(u^3-2\sigma_3\right) + 3\sigma_3^2\left(u^3-3\sigma_3\right) + \sigma_2^2\left(2u^5+5\sigma_3u^2\right) + 72\sigma_2^4 u}{48\sigma_3^2 u}\right)\cdot\mathbf{P}_{3,3},\end{aligned} \tag{3.5.56}$$

где u одно из решений характеристического уравнения

$$\boxed{\begin{aligned}0 = \det\left(\hat{\psi}_3 - 6u + 6\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \quad &\propto \quad \left(u^3+9\sigma_2 u - 27\sigma_3\right)\left(u^3+\sigma_2 u+\sigma_3\right) = \\ &= (u-3\epsilon_2)(u-3\epsilon_1)(u-3\epsilon_3)(u+\epsilon_2)(u+\epsilon_1)(u+\epsilon_3)\end{aligned}} \tag{3.5.57}$$

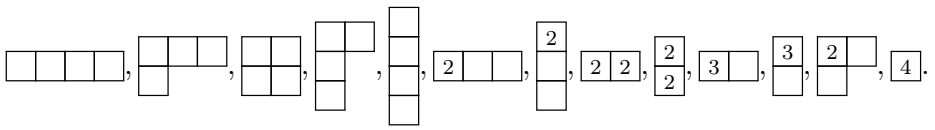
Собственные значения $6u - 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}$ согласуются с формулой (3.5.13). Вышеуказанные полиномы 3-Шура на уровне 3 подчиняются тождеству Коши (3.2.34)

$$\begin{aligned}\sum_{|\pi|=3}\frac{\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P})\cdot\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P}')}{||\mathbf{S}_\pi||^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{1,1}||^2}\right)^3 + \frac{\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{2,1}\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{2,1}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{2,2}\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{2,2}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^2} + \\ + \frac{\mathbf{P}_{3,1}\cdot\mathbf{P}'_{3,1}}{||\mathbf{P}_{3,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{3,2}\cdot\mathbf{P}'_{3,2}}{||\mathbf{P}_{3,2}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{3,3}\cdot\mathbf{P}'_{3,3}}{||\mathbf{P}_{3,3}||^2},\end{aligned} \tag{3.5.58}$$

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{6\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,(2\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)\,(2\epsilon_2-\epsilon_3)}{\epsilon_2\,(\sigma_3-2\epsilon_2\sigma_2)}, & ||\mathbf{P}_{1,1}||^2 &= 1\\
||\mathbf{S}_{\square\square\square}||^2 &= \frac{6\,(\epsilon_1-\epsilon_2)\,(2\epsilon_1-\epsilon_2)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)\,(2\epsilon_1-\epsilon_3)}{\epsilon_1\,(\sigma_3-2\epsilon_1\sigma_2)}, & ||\mathbf{P}_{2,1}||^2 &= -\frac{2}{\sigma_2}\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}3\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{6\,(\epsilon_3-\epsilon_1)\,(2\epsilon_3-\epsilon_1)\,(\epsilon_3-\epsilon_2)\,(2\epsilon_3-\epsilon_2)}{\epsilon_3\,(\sigma_3-2\epsilon_3\sigma_2)}, & ||\mathbf{P}_{2,2}||^2 &= \frac{2}{\sigma_2}\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{(\epsilon_1-2\epsilon_2)\,(\epsilon_2-2\epsilon_1)\,(\epsilon_3-\epsilon_1)\,(\epsilon_3-\epsilon_2)}{\epsilon_2^2\epsilon_1^2}, & ||\mathbf{P}_{3,1}||^2 &= \frac{3}{\sigma_2^2}\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}2\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{(\epsilon_3-2\epsilon_2)\,(\epsilon_2-2\epsilon_3)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)\,(\epsilon_1-\epsilon_2)}{\epsilon_2^2\epsilon_3^2}, & ||\mathbf{P}_{3,2}||^2 &= -\frac{8}{\sigma_2^2}\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}2\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{(\epsilon_1-2\epsilon_3)\,(\epsilon_3-2\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)}{\epsilon_3^2\epsilon_1^2}, & ||\mathbf{P}_{3,3}||^2 &= \frac{24}{\sigma_2^2\left(1-\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)}
\end{aligned}
\tag{3.5.59}
$$

Уровень 4

На уровне 4 имеется 13 базисных мономов: $\mathbf{P}_{4,1},\ \mathbf{P}_{4,2},\ \mathbf{P}_{4,3},\ \mathbf{P}_{4,4},\ (\mathbf{P}_{2,1})^2,\ \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2},\ (\mathbf{P}_{2,2})^2,$ $\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1},\ \mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1},\ \mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1},\ \mathbf{P}_{2,1}(\mathbf{P}_{1,1})^2,\ \mathbf{P}_{2,2}(\mathbf{P}_{1,1})^2,\ (\mathbf{P}_{1,1})^4$ и $3d$ диаграммы Юнга



(3.5.60)

Во-первых, мы фиксируем базис в подпространстве времен $\mathbf{P}_{4,i}$

$$Y^{1,3}_{1,1|2}=0,\quad Y^{1,3}_{1,1|3}=0,\quad Y^{1,3}_{1,1|4}=0,\quad Y^{1,3}_{1,2|1}=0,\quad Y^{1,3}_{1,2|3}=0,\quad Y^{1,3}_{1,2|4}=0 \tag{3.5.61}$$

$$X^{1,3}_{1,1|2}=0,\quad X^{1,3}_{1,1|3}=0,\quad X^{1,3}_{1,1|4}=0,\quad X^{1,3}_{1,2|1}=0,\quad X^{1,3}_{1,2|3}=0,\quad X^{1,3}_{1,2|4}=0 \tag{3.5.62}$$

$$Y^{1,3}_{1,3|1}=0,\quad X^{1,3}_{1,3|1}=0,\quad Y^{1,3}_{1,3|2}=0,\quad X^{1,3}_{1,3|2}=0,\quad Y^{1,3}_{1,3|4}=0,\quad X^{1,3}_{1,3|4}=0 \tag{3.5.63}$$

Количество этих ограничений превышает размерность группы $GL(4)$, которая изменяет базис в подпространстве временных переменных $\mathbf{P}_{4,i}$. Однако не все ограничения независимы, и указанный выше набор непротиворечив. Далее мы перечислим соотношения Янгиана и их следствия для коэффициентов анзаца

$$\left([\hat{\psi}_2,\hat{\psi}_3]\right)\cdot\mathbf{P}_{3,2}=0, \tag{3.5.64}$$

$$
\begin{aligned}
X^{1,3}_{1,1|1} &= -9\,\sigma_2, & Y^{1,3}_{1,1|1} &= 12,\\
X^{1,3}_{1,2|2} &= -6\,\sigma_2, & Y^{1,3}_{1,2|2} &= 15,\\
X^{1,3}_{1,3|3} &= -3\,\sigma_2, & Y^{1,3}_{1,3|3} &= 18.
\end{aligned}
\tag{3.5.65}
$$

Мы накладываем следующие условия при произвольных значениях α_i

$$
\left(\hat{\psi}_3 - [\hat{e}_2, \hat{f}_1]\right) \cdot (\alpha_1 \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1} + \alpha_2 \mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1} + \alpha_3 \mathbf{P}_{3,1} + \alpha_4 \mathbf{P}_{3,2} + \alpha_5 \mathbf{P}_{3,3}) = 0 \tag{3.5.66}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{2,2}_{1,1|1} &= -12\,\sigma_2, & X^{2,2}_{1,1|2} &= 0, & X^{2,2}_{1,1|3} &= 0,\\
X^{2,2}_{1,2|1} &= 0, & X^{2,2}_{1,2|2} &= -\frac{18}{5}\,\sigma_2, & X^{2,2}_{1,2|3} &= 0,\\
Y^{2,2}_{1,1|1} &= 12, & Y^{2,2}_{1,1|2} &= 0, & Y^{2,2}_{1,1|3} &= 0,\\
Y^{2,2}_{1,2|1} &= 0, & Y^{2,2}_{1,2|2} &= 18, & Y^{2,2}_{1,2|3} &= 0,\\
U^4_{1,1} &= -44\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & U^4_{1,2} &= 60\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & U^4_{1,3} &= 0,\\
U^4_{2,1} &= -12\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & U^4_{2,2} &= 4\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, & U^4_{2,3} &= \frac{144\sigma_3}{5\sigma_2},\\
U^4_{3,1} &= 0, & U^4_{3,2} &= 4\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\left(4\,\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2} - 1\right), & U^4_{3,3} &= 4\,\frac{\sigma_3}{\sigma_2}.
\end{aligned}
\tag{3.5.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{YRel}_{0,0} \cdot \left(\alpha_1 \mathbf{P}^2_{1,1} + \alpha_2 \mathbf{P}_{2,1}\alpha_3 \mathbf{P}_{2,2}\right) &= 0,\\
\mathrm{YRel}_{1,1} \cdot \left(\alpha_1 \mathbf{P}^2_{1,1} + \alpha_2 \mathbf{P}_{2,1}\alpha_3 \mathbf{P}_{2,2}\right) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.5.68}
$$

$$
\begin{aligned}
X^{2,2}_{1,1|4} &= 0, & X^{2,2}_{2,2|1} &= 0, & X^{2,2}_{2,2|2} &= 0, & X^{2,2}_{2,2|4} &= 0,\\
Y^{2,2}_{1,1|4} &= 0, & Y^{2,2}_{2,2|1} &= 0, & Y^{2,2}_{2,2|2} &= 0, & Y^{2,2}_{2,2|4} &= 0,\\
U^4_{1,4} &= 0, & U^4_{2,4} &= 0, & U^4_{4,1} &= 0, & U^4_{4,2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.5.69}
$$

$$
X^{2,2}_{1,2|4} Y^{2,2}_{1,2|4} = -\frac{396}{5}\sigma_2, \qquad U^4_{4,4} = 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \qquad U^4_{3,4} = \tau \cdot Y^{2,2}_{1,2|4} \cdot \frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \tag{3.5.70}
$$

$$
X^{2,2}_{2,2|3} = \frac{2}{5}\sigma_2 \left(\frac{16\sigma_2^3}{\sigma_3^2} - 33\tau - 4\right), \tag{3.5.71}
$$

$$
Y^{2,2}_{2,2|3} = B \cdot 72 \left(12\tau + 1 - 14\frac{\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right), \tag{3.5.72}
$$

$$U^4_{4,3} = -B \cdot \frac{432\left(\sigma_3^2\left(5\sigma_3^2 - 6\sigma_2^3(44\tau+17)\right) + 128\sigma_2^6\right)}{5\sigma_2\sigma_3^3 Y^{2,2}_{1,2|4}}. \tag{3.5.73}$$

Где параметр τ должен подчиняться следующему уравнению

$$\sigma_3^4\left(1287\tau^2 - 93\tau + 13\right) - \sigma_3^2\sigma_2^3(3693\tau + 424) + 1488\sigma_2^6 = 0 \tag{3.5.74}$$

и мы определили следующий коэффициент

$$B = \frac{\sigma_3^4}{2\sigma_3^2\sigma_2^3(33\tau+4) + 15\sigma_3^4\tau - 32\sigma_2^6}. \tag{3.5.75}$$

Теперь мы можем вычислять полиномы 3-Шура. Для этого мы определяем следующие функции

$$K(h_i) = \frac{\sigma_3}{2h_i^2}\left(2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3} + \frac{\sigma_2}{h_i} + \frac{\sigma_3}{h_i^2}\right), \tag{3.5.76}$$

$$\begin{aligned} L(h_i) = -B \cdot \frac{3}{h_i^7\sigma_3^2}\Big(&- 6h_i^3\sigma_3^2\sigma_3^3(\tau-2) + 6h_i^2\sigma_3^3\sigma_2^2(2\tau+1) + h_i\sigma_3^4\sigma_2(9\tau+2) + \\ &+ 8h_i^5\sigma_2^5 + 12h_i^4\sigma_3\sigma_2^4 - 15\sigma_3^5\tau\Big), \end{aligned} \tag{3.5.77}$$

$$\begin{aligned} M(h_i) = B \cdot \frac{36}{5\sigma_3^3 h_i^9 Y^{2,2}_{1,2|4}}\Big(&2h_i^5\sigma_3^2\sigma_2^5(33\tau-46) - 2h_i^4\sigma_3^3\sigma_2^4(66\tau+13) - 3h_i^3\sigma_3^4\sigma_2^3(33\tau+4) + \\ &+ 5h_i^2\sigma_3^5\sigma_2^2(33\tau+7) + 32h_i^7\sigma_2^7 - 32h_i^6\sigma_3\sigma_2^6 + 10h_i\sigma_3^6\sigma_2 + 5\sigma_3^7\Big). \end{aligned} \tag{3.5.78}$$

$$\begin{aligned} \psi_{3,\ydiagram{1,1,1}} &= 36\epsilon_2 - 8\frac{\sigma_3}{\sigma_2}, \\ \mathbf{S}_{\ydiagram{1,1,1,1}} &= (\mathbf{P}_{1,1})^4 + 6\epsilon_2 \cdot \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}^2 + \frac{6\sigma_3}{\epsilon_2^2} \cdot \mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}^2 + 8\epsilon_2^2 \cdot \mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1} + \frac{6\sigma_3}{\epsilon_2} \cdot \mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1} + \\ &+ 4K(\epsilon_2) \cdot \mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1} + 3\epsilon_2^2 \cdot \mathbf{P}_{2,1}^2 + \frac{6\sigma_3}{\epsilon_2} \cdot \mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2} + L(\epsilon_2) \cdot \mathbf{P}_{2,2}^2 + 6\epsilon_2^3 \cdot \mathbf{P}_{4,1} + \\ &+ \frac{18\sigma_3}{5} \cdot \mathbf{P}_{4,2} + 2\epsilon_2 K(\epsilon_2) \cdot \mathbf{P}_{4,3} + M(\epsilon_2) \cdot \mathbf{P}_{4,4}, \end{aligned} \tag{3.5.79}$$

$$\psi_{3,\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} = 18\epsilon_2 + 6\epsilon_1 - 8\frac{\sigma_3}{\sigma_2},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}} &= (\mathbf{P}_{1,1})^4 + (3\epsilon_2+\epsilon_1)\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}^2 + \frac{\epsilon_3^2\left(2\epsilon_1^2-\epsilon_2\epsilon_1-3\sigma_2\right)}{\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}^2 + (-2\epsilon_2\epsilon_3)\cdot\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1}+\\ &+\frac{\epsilon_3^2\left(\epsilon_2\left(4\epsilon_1+3\epsilon_3\right)\sigma_2-3\epsilon_1\sigma_3\right)}{2\epsilon_2\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1} - \frac{\epsilon_3^2+4\sigma_2}{\epsilon_1^2}\cdot K(\epsilon_2)\cdot\mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1}+\\ &+\epsilon_2\epsilon_1\cdot\mathbf{P}_{2,1}^2 + \frac{\epsilon_3^2\left(4\epsilon_1\sigma_2+3\epsilon_3\sigma_2+2\epsilon_1^3\right)}{\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2} + \frac{\epsilon_2\epsilon_3^2\left(\sigma_3-3\epsilon_2\sigma_2\right)}{3\sigma_3^2}\cdot L(\epsilon_2)\cdot\mathbf{P}_{2,2}^2+\\ &+2\epsilon_2^2\epsilon_1\cdot\mathbf{P}_{4,1} + \frac{\epsilon_3\left(9\epsilon_3\sigma_2-2\epsilon_1\sigma_2+6\epsilon_3^3\right)}{5\epsilon_1}\cdot\mathbf{P}_{4,2} + \frac{\epsilon_2^2\epsilon_3^2\left(5\epsilon_3\sigma_2+2\epsilon_1\sigma_2+2\epsilon_3^3\right)}{3\sigma_3^2}\cdot K(\epsilon_2)\cdot\mathbf{P}_{4,3}+\\ &+\frac{\epsilon_2\epsilon_3^2\left(\sigma_3-3\epsilon_2\sigma_2\right)}{3\sigma_3^2}\cdot M(\epsilon_2)\cdot\mathbf{P}_{4,4},\end{aligned} \tag{3.5.80}$$

$$\psi_{3,\boxplus} = 12(\epsilon_2+\epsilon_1) - 8\frac{\sigma_3}{\sigma_2},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\boxplus} &= (\mathbf{P}_{1,1})^4 + (-2\epsilon_3)\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}^2 - \frac{2\epsilon_3^2\left(\epsilon_3^2+3\sigma_2\right)}{\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}^2 + \frac{4\sigma_3}{\epsilon_3}\cdot\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1}+\\ &+\frac{5\epsilon_3^3\sigma_2+3\epsilon_3^5}{\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1} + +\epsilon_3^2\left(1-\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)\cdot\mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1} - (2\epsilon_3^2+3\sigma_2)\cdot\mathbf{P}_{2,1}^2 - 4\epsilon_3^2\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2}+\\ &-B\cdot\frac{\epsilon_3^2}{\sigma_3^4}\Big(\epsilon_3^{10}\sigma_2(78\tau-1)+2\epsilon_3^8\sigma_2^2(48\tau-1)+14\epsilon_3^6\sigma_2^3(12\tau+1)+2\epsilon_3^4\sigma_2^4(105\tau+17)+\\ &+15\epsilon_3^2\sigma_2^5(6\tau+1)+30\epsilon_3^{12}\tau-60\sigma_2^6\Big)\cdot\mathbf{P}_{2,2}^2 - \sigma_3\cdot\mathbf{P}_{4,1} - \frac{5\epsilon_3^4\sigma_2+3\epsilon_3^6}{5\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{4,2}+\\ &+\frac{\epsilon_3^3\left(4\sigma_2^3-\sigma_3^2\right)}{6\sigma_3^2}\cdot\mathbf{P}_{4,3} - B\cdot\frac{6\epsilon_3^2}{5\sigma_3^5 Y_{1,2|4}^{2,2}}\Big(5\epsilon_3^{12}\sigma_2^2(132\tau+7)+4\epsilon_3^{10}\sigma_2^3(429\tau-23)+\\ &+\epsilon_3^8\sigma_2^4(2112\tau-229)+12\epsilon_3^6\sigma_2^5(308\tau+9)+\epsilon_3^4\sigma_2^6(4620\tau+893)+220\epsilon_3^2\sigma_2^7(9\tau+1)+\\ &+20\epsilon_3^{14}\sigma_2+5\epsilon_3^{16}-960\sigma_2^8\Big)\cdot\mathbf{P}_{4,4},\end{aligned} \tag{3.5.81}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{3,\ydiagram{2}} &= -8\frac{\sigma_3}{\sigma_2},\\
\mathbf{S}_{\ydiagram{2}} &= (\mathbf{P}_{1,1})^4 + 0\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{1,1}^2 + \frac{24\sigma_2^2}{7\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{1,1}^2 + \frac{4\sigma_2}{7}\cdot\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1} - \frac{4\sigma_2}{7}\cdot\mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1} +\\
&+ \frac{6\sigma_2}{7}\left(\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}-1\right)\cdot\mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1} + \frac{3\sigma_2}{7}\cdot\mathbf{P}_{2,1}^2 - \frac{8\sigma_2}{7}\cdot\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2} +\\
&+ B\cdot\frac{1}{7\sigma_3^4}\left(2\sigma_3^2\sigma_2^4(36\tau+47) - \sigma_3^4\sigma_2(144\tau+7) - 264\sigma_2^7\right)\cdot\mathbf{P}_{2,2}^2 +\\
&+ \sigma_3\cdot\mathbf{P}_{4,1} + \frac{3\left(4\sigma_2^3+7\sigma_3^2\right)}{35\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{4,2} + \frac{\sigma_3^2-4\sigma_2^3}{6\sigma_3}\cdot\mathbf{P}_{4,3} +\\
&+ B\cdot\frac{6}{35\sigma_3^5 Y^{2,2}_{1,2|4}}\left(24\sigma_3^2\sigma_2^6(66\tau+127) - 2\sigma_3^4\sigma_2^3(1584\tau+427) - 768\sigma_2^9 + 35\sigma_3^6\right)\cdot\mathbf{P}_{4,4}.
\end{aligned}
\tag{3.5.82}
$$

Характеристическое уравнение для параметра u

$$
\begin{aligned}
0 &= \det\left(\psi_3 - 6u + 8\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \quad \propto\\
&\propto \quad u\left(u^3 + 36\sigma_2 u - 216\sigma_3\right)\left(u^3 + 4\sigma_2 u + 8\sigma_3\right)\times\\
&\times\left(u^6 + 14\sigma_2 u^4 - 20\sigma_3 u^3 + 49\sigma_2^2 u^2 - 140\sigma_2\sigma_3 u + 36\sigma_2^3 + 343\sigma_3^2\right) =\\
&= u(u-6\epsilon_2)(u-6\epsilon_1)(u-6\epsilon_3)(u+2\epsilon_3)(u+2\epsilon_1)(u+2\epsilon_2)\times\\
&\times(u-3\epsilon_2-\epsilon_1)(u-3\epsilon_1-\epsilon_2)(u-3\epsilon_1-h3)(u-3\epsilon_3-\epsilon_1)(u-3\epsilon_2-\epsilon_3)(u-3\epsilon_3-\epsilon_2).
\end{aligned}
\tag{3.5.83}
$$

Несмотря на то, что формулы для оператора разрезания и склейки и функций 3-Шура сложны, значения собственных значений просты и подчиняются (3.5.13). Обратите внимание, что самые сложные ответы появляются для коэффициентов перед временными переменными $\mathbf{P}_{2,2}^2$ и $\mathbf{P}_{4,4}$, в то время как другие коэффициенты намного проще. Тождество Коши выявляет еще один недостаток в нашем выборе базиса во временных переменных, особенно в секторе $\mathbf{P}_{2,2}^2$, $\mathbf{P}_{4,4}$.

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{24\,(\epsilon_2-\epsilon_1)\,(2\epsilon_2-\epsilon_1)\,(3\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)\,(2\epsilon_2-\epsilon_3)\,(3\epsilon_2-\epsilon_3)}{(2\epsilon_2\sigma_2-\sigma_3)\,(3\epsilon_2\sigma_2-\sigma_3)},\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{4\epsilon_2\,(\epsilon_2-\epsilon_1)^2\,(\epsilon_1-3\epsilon_2)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)\,\epsilon_3^2\,(\epsilon_3-2\epsilon_2)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)}{\sigma_3^2\,(2\sigma_2\epsilon_2-\sigma_3)},\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{8\,(\epsilon_2-2\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_1)^{\,2}\,(2\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-\epsilon_3)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)\,\epsilon_3^2}{\sigma_3^2\,(\epsilon_3^2+2\sigma_2)},\\
||\mathbf{S}_{\begin{smallmatrix}2\square\\\square\end{smallmatrix}}||^2 &= \frac{8\,(2\epsilon_1-\epsilon_2)\,(2\epsilon_2-\epsilon_1)\,(\epsilon_2-2\epsilon_3)\,(\epsilon_1-2\epsilon_3)\,(2\epsilon_2-\epsilon_3)\,(2\epsilon_1-\epsilon_3)}{49\sigma_3^2}.
\end{aligned}
\tag{3.5.84}
$$

Тождество Коши (3.2.34) в указанном секторе несколько нарушается

$$
\begin{aligned}
\sum_{|\pi|=4}\frac{\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P})\cdot\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P}')}{||\mathbf{S}_\pi||^2} = \frac{1}{24}\left(\frac{\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{1,1}||^2}\right)^4 &+ \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}_{2,1}(\mathbf{P}_{1,1})^2\cdot\mathbf{P}'_{2,1}(\mathbf{P}'_{1,1})^2}{||\mathbf{P}_{2,1}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^4} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{P}_{2,2}(\mathbf{P}_{1,1})^2\cdot\mathbf{P}'_{2,2}(\mathbf{P}'_{1,1})^2}{||\mathbf{P}_{2,2}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^4}+\\
&+\frac{\mathbf{P}_{3,1}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{3,1}\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{3,1}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{3,2}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{3,2}\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{3,2}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{3,3}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{3,3}\mathbf{P}'_{1,1}}{||\mathbf{P}_{3,3}||^2||\mathbf{P}_{1,1}||^2}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{P}_{2,1})^2\cdot(\mathbf{P}'_{2,1})^2}{||\mathbf{P}_{2,1}||^4} + \frac{\mathbf{P}_{2,1}\mathbf{P}_{2,2}\cdot\mathbf{P}'_{2,1}\mathbf{P}'_{2,2}}{||\mathbf{P}_{2,1}||^2||\mathbf{P}_{2,2}||^2} + \gamma_1\cdot\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{P}_{2,2})^2\cdot(\mathbf{P}'_{2,2})^2}{||\mathbf{P}_{2,2}||^4}+\\
&+\frac{\mathbf{P}_{4,1}\cdot\mathbf{P}'_{4,1}}{||\mathbf{P}_{4,1}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{4,2}\cdot\mathbf{P}'_{4,2}}{||\mathbf{P}_{4,2}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{4,3}\cdot\mathbf{P}'_{4,3}}{||\mathbf{P}_{4,3}||^2} + \frac{\mathbf{P}_{4,4}\cdot\mathbf{P}'_{4,4}}{||\mathbf{P}_{4,4}||^2}+\\
&+\gamma_2\cdot\left((\mathbf{P}_{2,2})^2\cdot\mathbf{P}'_{4,4}+\mathbf{P}_{4,4}\cdot(\mathbf{P}'_{2,2})^2\right),
\end{aligned}
\tag{3.5.85}
$$

$$
\begin{aligned}
&||\mathbf{P}_{1,1}||^2 = 1, && ||\mathbf{P}_{2,1}||^2 = -\frac{2}{\sigma_2}, && ||\mathbf{P}_{2,2}||^2 = \frac{2}{\sigma_2},\\
&||\mathbf{P}_{3,1}||^2 = \frac{3}{\sigma_2^2}, && ||\mathbf{P}_{3,2}||^2 = -\frac{8}{\sigma_2^2}, && ||\mathbf{P}_{3,3}||^2 = \frac{24}{\sigma_2^2\left(1-\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)}.
\end{aligned}
\tag{3.5.86}
$$

Новые временные переменные имеют следующие нормы

$$
||\mathbf{P}_{4,1}||^2 = \frac{4}{\sigma_2^3}, \qquad ||\mathbf{P}_{4,2}||^2 = -\frac{20}{\sigma_2^3}, \qquad ||\mathbf{P}_{4,3}||^2 = -\frac{144}{\sigma_2^3\left(1-\frac{4\sigma_2^3}{\sigma_3^2}\right)},
\tag{3.5.87}
$$

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{P}_{4,4}||^2 = B^2\cdot\frac{9\sigma_2^3}{5\sigma_3^8(Y^{2,2}_{1,2|4})^2}\cdot\Big(&12\sigma_3^4\sigma_2^6\left(3993\tau^2+968\tau+282\right)+10\sigma_3^6\sigma_2^3\left(1089\tau^2-61\right)-\\
&-128\sigma_3^2\sigma_2^9(363\tau+64)+11264\sigma_2^{12}+25\sigma_3^8\Big).
\end{aligned}
\tag{3.5.88}
$$

Мы наблюдаем появление аномальных слагаемых

$$\gamma_1 = B^2 \cdot \frac{5\sigma_2^4}{16\sigma_3^6} \cdot \left(2\sigma_3^4\sigma_2^3\left(99\tau^2+24\tau+1\right)+45\sigma_3^6\tau^2-12\sigma_3^2\sigma_2^6(16\tau+3)+112\sigma_2^9\right), \tag{3.5.89}$$

$$\gamma_2 = B^2 \cdot \frac{3\sigma_2^4}{2\sigma_3^7 Y^{2,2}_{1,2|4}} \cdot \left(2\sigma_3^4\sigma_2^3\left(1089\tau^2+264\tau+61\right)+5\sigma_3^6\left(99\tau^2-1\right)-8\sigma_3^2\sigma_2^6(264\tau+67)+512\sigma_2^9\right). \tag{3.5.90}$$

Уровень 5

Мы не будем приводить вычисления для 5 уровня в деталях из-за очень объемных формул, все детали можно найти в нашей работе [180]. Приведем только главные результаты. Полученное нами представление корректно и об этом свидетельствуют собственные значения

$$\begin{aligned}
0 = \det\left(\hat{\psi}_3 - 6u + 4\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right) \quad &\propto \quad \left(u^3+100\sigma_2 u-1000\sigma_3\right)\left(u^3+4\sigma_2 u-8\sigma_3\right)\left(u^3+\sigma_2 u+\sigma_3\right)\times \\
&\times \left(u^3+9\sigma_2 u+27\sigma_3\right)\left(u^6+24\sigma_2 u^4+144\sigma_2^2u^2+256\sigma_2^3+1728\sigma_3^2\right)\times \\
&\times \left(u^6+62\sigma_2 u^4-308\sigma_3 u^3+961\sigma_2^2u^2-9548\sigma_2\sigma_3 u+900\sigma_2^3+29791\sigma_3^2\right) = \\
&= (u-10\epsilon_2)(u-10\epsilon_1)(u-10\epsilon_3)(u-2\epsilon_2)(u-2\epsilon_1)(u-2\epsilon_3)\times \\
&\times (u+\epsilon_2)(u+\epsilon_1)(u+\epsilon_3)(u+3\epsilon_2)(u+3\epsilon_1)(u+3\epsilon_3)\times \\
&\times (u-2\epsilon_2-4\epsilon_1)(u-2\epsilon_2-4\epsilon_3)(u-2\epsilon_1-4\epsilon_2)\times \\
&\times (u-2\epsilon_1-4\epsilon_3)(u-2\epsilon_3-4\epsilon_2)(u-2\epsilon_3-4\epsilon_1)\times \\
&\times (u-\epsilon_2-6\epsilon_1)(u-\epsilon_2-6\epsilon_3)(u-\epsilon_1-6\epsilon_2)(u-\epsilon_1-6\epsilon_3)(u-\epsilon_3-6\epsilon_2)(u-\epsilon_3-6\epsilon_1).
\end{aligned} \tag{3.5.91}$$

Мы проверили тождество Коши и наблюдаем следующее отклонение от классической формулы (3.2.34)

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\pi|=5}\frac{\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P})\cdot\mathbf{S}_\pi(\mathbf{P}')}{||\mathbf{S}_\pi||^2} = \exp\left\{\sum_{a\geqslant i}\frac{\mathbf{P}_{a,i}\cdot\mathbf{P}'_{a,i}}{||\mathbf{P}_{a,i}||^2}\right\}\Big|_{\text{5-th level}} + \gamma_3\cdot(\mathbf{P}_{2,2})^2\mathbf{P}_{1,1}\cdot(\mathbf{P}'_{2,2})^2\mathbf{P}'_{1,1}+ \\
&+\gamma_4\cdot\mathbf{P}_{4,4}\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{4,4}\mathbf{P}'_{1,1}+\gamma_5\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,2}\cdot\mathbf{P}'_{2,2}\mathbf{P}'_{3,2}+\gamma_6\cdot\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,3}\cdot\mathbf{P}'_{2,2}\mathbf{P}'_{3,3}+ \\
&+\gamma_7\cdot\left((\mathbf{P}_{2,2})^2\mathbf{P}_{1,1}\cdot\mathbf{P}'_{4,4}\mathbf{P}'_{1,1}+\mathbf{P}_{4,4}\mathbf{P}_{1,1}\cdot(\mathbf{P}'_{2,2})^2\mathbf{P}'_{1,1}\right)+ \\
&+\gamma_8\cdot\left(\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,2}\cdot\mathbf{P}'_{5,4}+\mathbf{P}_{5,4}\cdot\mathbf{P}'_{2,2}\mathbf{P}'_{3,2}\right)+\gamma_9\cdot\left(\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,3}\cdot\mathbf{P}'_{5,5}+\mathbf{P}_{5,5}\cdot\mathbf{P}'_{2,2}\mathbf{P}'_{3,3}\right).
\end{aligned} \tag{3.5.92}$$

Мы опускаем явные формулы для коэффициентов отклонения γ_i. Отметим, что отклонение от 4-го уровня в секторе времен $\mathbf{P}^2_{2,2}$, $\mathbf{P}_{4,4}$ наследуется и возникают новые отклонения в

секторах $\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,2}$, $\mathbf{P}_{5,4}$ и $\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,3}$, $\mathbf{P}_{5,5}$.

3.6 Обсуждение

В этой главе мы привели базовые определения в теории представлений аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ и применили их к построению явной реализации представления МакМахона, векторы которого соответствуют трехмерным диаграммам Юнга. Полиномы, которые будет получаться как векторы представления мы называем полиномами 3-Шура. Проблема построения таких полиномов стоит уже давно и до сих пор является нерешенной. Полиномы 3-Шура в первую очередь интересны тем, что позволят получить доступ к новому классу интегрируемых систем, в которых естественными объектами являются трехмерные диаграммы Юнга.

Мы использовали старую идею [181, 182], основанную на операторе разрезания и склейки [156] для поиска полиномов 3-Шура [179, 183]. Однако преимущество нашего последнего построения заключается в том, что мы использовали общую теорию представлений аффинного Янгиана [60, 153, 184], где интересующий нас оператор разрезания и склейки отождествляется с элементом алгебры $\hat{\psi}_3$, а проблема построения полиномов 3-Шура сводится к построению реализации алгебры $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ в терминах дифференциальных операторов в соответствующем наборе временных переменных $\mathbf{P}_{a,i}$, где $1 \leqslant i \leqslant a$.

Мы предъявляем явные формулы для треугольного представления вплоть до уровня 5. При построении реализации на уровне n мы выбираем базис в подпространстве времен $\mathbf{P}_{n,i}$ одинаковой градуировки по правилам $Y^{1,b}_{1,j|k} \sim \delta_{j,k}$ и $X^{1,b}_{1,j|k} \sim \delta_{j,k}$. Затем мы вычисляем полиномы 3-Шура как общие собственные функции коммутирующего семейства $\hat{\psi}_n$ операторов Янгиана.

По результатам вычисления 3-полиномов Шура видно, что выбор базиса по временам оказывается неудачным. Во-первых, явные формулы для полиномов 3-Шура чрезмерно большие для 4-го и 5-го уровней. Во-вторых, отклонения от тождества Коши на уровнях 4,5 (3.5.85),(3.5.92) указывают на потерю свойства ортогональности. А именно, аномальные члены наблюдаются в следующих секторах: на уровне 4 $\left(\mathbf{P}^2_{2,2}, \mathbf{P}_{4,4}\right)$; на уровне 5 $(\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,2}, \mathbf{P}_{5,4})$ и $(\mathbf{P}_{2,2}\mathbf{P}_{3,3}, \mathbf{P}_{5,3})$.

С другой стороны, истинно *инвариантные* величины (которые не зависят от выбора базиса) — характеристические полиномы (3.5.43), (3.5.57), (3.5.83), (3.5.91) имеют красивую и согласованную форму с собственными значениями, которые удовлетворяют формуле (3.5.13). Кроме того, наша формула для собственных значений совпадает с другими результатами, представленными в литературе [60]. Мы рассматриваем эти факты как указание на то, что

наш алгоритм работает правильно и анзац для оператора $\hat{\psi}_3$ является самосогласованным и корректным.

Идея общего подхода теперь кажется более или менее ясной, но необходимы доработки для продвижения к более высоким уровням и вообще на пути к общим формулам.

Несмотря на то, что нам не удалось выбрать правильный базис в пространстве временных переменных, нам удалось разработать алгоритм для построения представления Янгиана и вычисления полиномов 3-Шура. Следующим шагом следует искать пути обхода нарастающих проблем, например, рассматривая альтернативные приложения теории представлений аффинного Янгиана и проверяя, можно ли их обобщить до представления МакМахона. Перспективным направлением является проверка коммутативных подалгебр и обобщенных интегрируемых систем, введенных в [20].

Глава 4

Аффинный Янгиан $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$

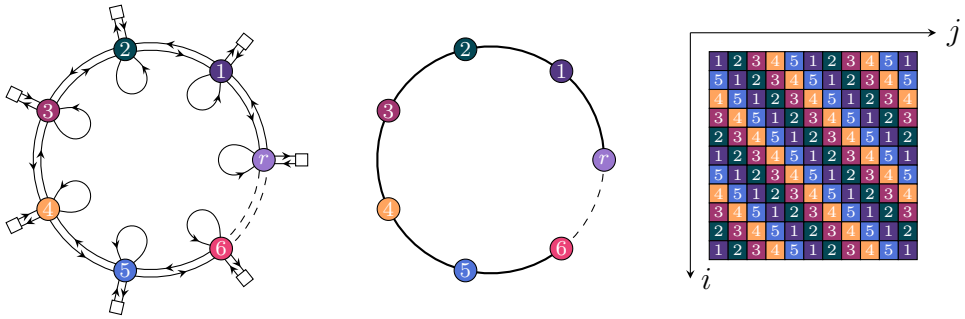


Рис. 4.1: a) Колчанная диаграмма ; b) Диаграмма Дынкина $\hat{\mathfrak{gl}}_r$; c) Раскраска клеток диаграммы Юнга для представлений Фока на примере $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_5)$.

Тема данной главы находится на пересечении двух сюжетов: теории аффинных Янгианов $Y(\widehat{G})$ и теории полиномов Углова $U_\lambda^{(r)}(p_k)$ [185]. Аффинные Янгианы (и их обобщения) приобрели большую популярность среди исследователей из-за их появления в качестве БПС алгебр для систем D-бран, намотанных на трехмерные комплексные многообразиях Калаби-Яу. Мы приведем только некоторые ссылки на актуальные направления исследований в этой области [69, 186–191].

Теория представлений аффинных Янгианов является далеко идущим обобщением теории коммутирующих операторов разрезания и склейки [192], которые образуют подалгебру, подобную Картановской подалгебре в классических алгебрах Ли. Более того, аффинные Янгианы содержат гораздо больше коммутирующих семейств операторов [20, 25, 154, 193, 194], причем каждое коммутирующее семейство отвечает некоторой квантовой интегрируемой системе частиц типа Калоджеро-Сазерленда, как мы видели в разделе 3.3.3. Связь теории представлений аффинных Янгианов $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ и квантовых интегрируемых систем устанавли-

вается благодаря полиномам Углова, которые в последнее время все больше привлекают интерес в приложениях к теории представлений [195–197] и суперинтегрируемым свойствам матричных моделей [198].

Мы обсуждаем самый простой случай $r = 2$ чтобы продемонстрировать все детали нашего метода, обобщение на случай произвольного r строится аналогичным образом.

Сначала мы напомним определение полиномов Углова в разделе 4.1 и опишем непосредственные следствия из теории Макдональда для $r = 2$ в разделе 4.1.1. Главным следствием этого раздела является форма соответствующих диагональных операторов и их отличие от обычных операторов разрезания и склейки [192] (в простейшем случае $r = 1$). Мы покажем, что возникает новая особенность – операторы в случае $r > 2$ больше не являются операторами фиксированного спина, а их разложение по временным переменным включают члены с произвольно большим количеством производных. Самым эффективным способом работы с такими операторами является разложение в базисе полиномов Шура, как это было изначально предложено в работе [199]. Из наших рассуждений становится ясно, что очень простые и изящные операторы конечного спина в случае $r = 1$ были просто случайными – как и предполагалось в [199]. Перед подробным изложением этих идей в разделах 4.3 и 4.4, мы напоминаем основы алгебры аффинного Янгиана для $r = 2$ в разделе 4.2.

4.1 Полиномы Углова

Полиномы Углова определяются как $\hbar \to 0$ предел классических полиномов Макдональда [57]

$$U_\lambda^{(r)}(p_k) = \lim_{\hbar \longrightarrow 0} M_\lambda^{q,t}(p_k), \tag{4.1.1}$$

где параметры $q = \exp\left(\hbar + \frac{2\pi i}{r}\right), t = \exp\left(\beta\hbar + \frac{2\pi i}{r}\right)$, а λ – это диаграмма Юнга [1]. Для $r = 1$ имеем $t = q^\beta$, и предел дается классическими полиномами Джека [57]

$$U_\lambda^{(1)}(p_k) = J_\lambda(p_k). \tag{4.1.2}$$

В пределе $\beta = 1$ все полиномы Углова превращаются в полиномы Шура

$$U_\lambda^{(r)}(p_k) \overset{\beta=1}{=} S_\lambda(p_k). \tag{4.1.3}$$

[1] Диаграммы Юнга, нумерующие векторы модулей Фока $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$, естественным образом появляются как срезы 3d-кристаллов [188]. Подробнее см. [66, 200–202].

Для иллюстрации зависимости полиномов от ранга r приведем несколько полиномов для младших уровней в Таблице 4.1.

$\lambda \setminus r$	1 (Джеки)	2	3	4	5	...
$\square$	p_1	p_1	p_1	p_1	p_1	
$\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$	$\frac{p_1^2-p_2}{2}$	$\frac{p_1^2-p_2}{2}$	$\frac{p_1^2-p_2}{2}$	$\frac{p_1^2-p_2}{2}$	$\frac{p_1^2-p_2}{2}$	
$\square\!\square$	$\frac{\beta p_1^2+p_2}{2}$	$\frac{p_1^2+\beta p_2}{2}$	$\frac{p_1^2+p_2}{2}$	$\frac{p_1^2+p_2}{2}$	$\frac{p_1^2+p_2}{2}$	
$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$	$\frac{p_1^3-3p_2p_1+2p_3}{6}$	$\frac{p_1^3-3p_2p_1+2p_3}{6}$	$\frac{p_1^3-3p_2p_1+2p_3}{6}$	$\frac{p_1^3-3p_2p_1+2p_3}{6}$	$\frac{p_1^3-3p_2p_1+2p_3}{6}$	
$\begin{smallmatrix}\square\!\square\\\square\end{smallmatrix}$	$\frac{\beta p_1^3-(\beta-1)p_2p_1-p_3}{2\beta+1}$	$\frac{p_1^3-p_3}{3}$	$\frac{p_1^3-p_3}{3}$	$\frac{p_1^3-p_3}{3}$	$\frac{p_1^3-p_3}{3}$	
$\square\!\square\!\square$	$\frac{\beta^2 p_1^3+3\beta p_2p_1+2p_3}{(\beta+1)(\beta+2)}$	$\frac{p_1^3+3\beta p_2p_1+2p_3}{3(\beta+1)}$	$\frac{p_1^3+3p_2p_1+2\beta p_3}{2(\beta+2)}$	$\frac{p_1^3+3p_2p_1+2p_3}{6}$	$\frac{p_1^3+3p_2p_1+2p_3}{6}$	

Таблица 4.1: Примеры полиномов Углова для малых r и простейших диаграмм Юнга.

Полиномы Углова также могут быть построены стандартным методом ортогонализации, рассмотренным в [199, 203] (см. также [204] для канонических обозначений), относительно канонической нормы

$$\langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \delta_{\mu,\lambda}\, z_\lambda\, \beta^{|\{i|\lambda_i=0 \bmod r\}|}\,. \tag{4.1.4}$$

Для $|\lambda| < r$ полиномы не зависят от β и превращаются в обычные полиномы Шура.

Возможность явного построения представления обеспечивается особенностью полиномов Углова при $r = 2$: полиномы Макдональда аппроксимируют их с "повышенной" точностью $O(\hbar^2)$. Это означает, что полиномы Углова являются собственными функциями не только для предела $\hbar \to 0$ Гамильтониана Макдональда $\mathcal{H}_0^{(r=2)}$, но и для первой поправки по $\hbar$, то есть $\mathcal{H}_1^{(r=2)}$. Это помогает понять структуру генераторов Янгиана в представлении на полиномах Углова.

Все наши построения основаны на замечательном факте, что простейшие операторы типа разрезания и склейки [156], подобно Гамильтонианам, часто раскладываются в билинейные комбинации *однокрюковых* функций Шура [199]. Эти разложения для низших $\hat{\psi}$-генераторов Янгиана автоматически подразумевают аналогичные разложения для низших повышающих и понижающих генераторов $\hat{e}$ и $\hat{f}$. Эта мысль является главной, всё остальное – это технические детали.

4.1.1 Предел Углова для Гамильтониана Макдональда при $r = 2$

Первый (простейший) Гамильтониан Макдональда в терминах временных переменных имеет вид (см. например [205])

$$\hat{\mathcal{H}} = \oint \frac{dz}{z} \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-t^{-k})}{k} p_k z^k\right) \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^k-1)}{z^k} \frac{\partial}{\partial p_k}\right), \tag{4.1.5}$$

где параметры заданы как

$$q = \exp\left(\hbar + \frac{2\pi i}{r}\right), \qquad t = \exp\left(\beta\hbar + \frac{2\pi i}{r}\right). \tag{4.1.6}$$

Рассмотрим первые два члена разложения по $\hbar$

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hbar\hat{\mathcal{H}}_1 + \dots \tag{4.1.7}$$

В случае $r = 2$ выполняется особое свойство

$$M_\lambda^{q,t}(p_k) \overset{r=2}{=} U_\lambda^{(2)}(p_k) + \hbar \cdot 0 + O(\hbar^2), \tag{4.1.8}$$

что означает, что полиномы Углова являются собственными функциями обоих операторов $\hat{\mathcal{H}}_0$ и $\hat{\mathcal{H}}_1$. Примечательно, что при $r = 2$ оба оператора выражаются через однокрюковые функции Шура $S_{(i|n-i)}(p_k)$ и их дуальные аналоги

$$\hat{S}_R := S_R\left(p_k^*\right), \qquad p_k^* := k\frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{4.1.9}$$

где дуальные операторы $\hat{S}_R$ построены с помощью производных по временным переменным. Однокрюковые диаграммы Юнга с n клетками и длиной первой строки $(n-i+1)$ в наших обозначениях имеет вид $(i|n) = [n-i+1, 1^{i-1}]$, т.е. количество строк такой диаграммы равно i. Например, $(2|4) = \ydiagram{3,1}$. С помощью данных обозначений операторы принимают следующий простой вид

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_0 &= \sum_n (-)^n \sum_{i,j=1}^{n} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \mathcal{P}_{0,n}\widehat{\mathcal{P}}_{0,n} = \\ &= -p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1^2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} - \frac{p_3+2p_1^3}{9}\left(3\frac{\partial}{\partial p_3} + 2\frac{\partial^3}{\partial p_1^3}\right) + \frac{2p_3p_1+p_1^4}{9}\left(6\frac{\partial^2}{\partial p_3\partial p_1} + \frac{\partial^4}{\partial p_1^4}\right) + \dots\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Следующий член разложения при $r = 2$ выражается следующим способом

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_1 &= \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\Big[\mathcal{P}_{0,n}\widehat{\mathcal{P}}_{1,n} + \beta\,\mathcal{P}_{1,n}\widehat{\mathcal{P}}_{0,n} + (1-\beta)\,n\,\mathcal{P}_{0,n}\widehat{\mathcal{P}}_{0,n}\Big] = \\ &= (\beta-1)p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + \left(\beta p_2 - 2(\beta-1)p_1^2\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + 2p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2} + \dots,\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

где мы определили новые операторы

$$\mathcal{P}_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} S_{(i|n)}, \qquad \mathcal{P}_{1,n} = \sum_{i=1}^{n}(n+1-2i)\,S_{(i|n)}. \tag{4.1.12}$$

В случае $r = 2$ полиномы Углова являются собственными функциями обоих данных операторов

$$\hat{\mathcal{H}}_0\,U_\lambda^{(2)} = \mathcal{E}_{\lambda,0}\,U_\lambda^{(2)}, \qquad \hat{\mathcal{H}}_1\,U_\lambda^{(2)} = \mathcal{E}_{\lambda,1}\,U_\lambda^{(2)}, \tag{4.1.13}$$

$$\mathcal{E}_{\lambda,0} = n_\lambda^{(2)} - n_\lambda^{(1)}, \qquad \mathcal{E}_{\lambda,1} = 2\left(\kappa_\lambda^{(2)} - \kappa_\lambda^{(1)}\right) + (1-\beta)\left(n_\lambda^{(2)} - n_\lambda^{(1)}\right), \tag{4.1.14}$$

где собственные значения определены с помощью сумм по клеткам фиксированного цвета

$$n_\lambda^{(a)} = \sum_{\boxed{a}\in\lambda} 1, \qquad \kappa_\lambda^{(a)} = \sum_{\boxed{a}\in\lambda} j_{\boxed{a}} - \beta\cdot i_{\boxed{a}} \tag{4.1.15}$$

Здесь буква (a) играет роль цвета клетки диаграммы Юнга, как показано на рис.4.1. Цвет клетки полностью зафиксирован ее координатами (i, j)

$$a = 1 + \Big[(i+j) \mod 2\Big]. \tag{4.1.16}$$

Вышеуказанные операторы (4.1.13) будут играть роль основных строительных блоков для низших операторов $\hat{\psi}_0^{(a)}$ и $\hat{\psi}_1^{(a)}$ в аффинном Янгиане. Легко догадаться по изящному виду вышеприведенных Гамильтонианов (4.1.13), что простейшие повышающие и понижающие операторы будут отличаться всего лишь сдвигом градуировки

$$\begin{aligned}\hat{e}_0 &\approx \sum_n (-)^n \sum_{i,j=1}^{n} S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)}, \\ \hat{f}_0 &\approx \sum_n (-)^n \sum_{i,j=1}^{n} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)}.\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Для $r > 2$ можно ожидать r различных комбинаций, таких как $\sum_i \omega_r^{ki} S_{(i|n)}$ с различными k для $2r$-го корня из единицы $\omega_r = e^{\pi i/r}$. Для произвольных r полиномы Углова являются

собственными функциями следующего β-независимого оператора

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_0^{(r)} = p_1\hat{p}_1 - \left(\sin\frac{\pi}{r}\cdot p_1^2 - i\cos\frac{\pi}{r}\cdot p_2\right)\left(\sin\frac{\pi}{r}\cdot \hat{p}_1^2 - i\cos\frac{\pi}{r}\cdot \hat{p}_2\right) + \ldots = \\
= S_{\ydiagram{1}}\hat{S}_{\ydiagram{1}} + \left(e^{\frac{\pi i}{r}}S_{\ydiagram{2}} - e^{-\frac{\pi i}{r}}S_{\ydiagram{1,1}}\right)\left(e^{\frac{\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{2}} - e^{-\frac{\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{1,1}}\right) + \\
+ \left(e^{\frac{2\pi i}{r}}S_{\ydiagram{3}} - S_{\ydiagram{2,1}} + e^{-\frac{2\pi i}{r}}S_{\ydiagram{1,1,1}}\right)\left(e^{\frac{2\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{3}} - \hat{S}_{\ydiagram{2,1}} + e^{-\frac{2\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{1,1,1}}\right) + \\
+ \left(e^{\frac{3\pi i}{r}}S_{\ydiagram{4}} - e^{\frac{\pi i}{r}}S_{\ydiagram{3,1}} + e^{-\frac{\pi i}{r}}S_{\ydiagram{2,2}} - e^{-\frac{3\pi i}{r}}S_{\ydiagram{1,1,1,1}}\right)\left(e^{\frac{3\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{4}} - e^{\frac{\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{3,1}} + e^{-\frac{\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{2,2}} - e^{-\frac{3\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{1,1,1,1}}\right) + \\
+ \left(e^{\frac{4\pi i}{r}}S_{\ydiagram{5}} - e^{\frac{2\pi i}{r}}S_{\ydiagram{4,1}} + S_{\ydiagram{3,2}} - e^{-\frac{2\pi i}{r}}S_{\ydiagram{2,2,1}} + e^{-\frac{4\pi i}{r}}S_{\ydiagram{1,1,1,1,1}}\right)\times \\
\times\left(e^{\frac{4\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{5}} - e^{\frac{2\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{4,1}} + \hat{S}_{\ydiagram{3,2}} - e^{-\frac{2\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{2,2,1}} + e^{-\frac{4\pi i}{r}}\hat{S}_{\ydiagram{1,1,1,1,1}}\right) + \ldots = \\
= \boxed{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}(-)^{i+j}e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{r}(i+j-n-1)}S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)}}}
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Он играет роль самого простого оператора Картана $\hat{\psi}_0^{(a)}$. Более того, для разных цветов a данные операторы и их собственные значения почти не различаются. По крайней мере для $r = 2$ и $\beta = 1$ старшие $\hat{\psi}_k$ также являются суммами по однокрюковым диаграммам, а операторы разрезания и склейки включающие несколько крюков, по-видимому, являются произведениями генераторов $\hat{\psi}_k^{(a)}$, т.е. принадлежат универсальной обертывающей аффинного Янгиана.

Полиномы Углова имеют определенную градуировку для всех r, но как мы увидим, классический оператор градуировки

$$\hat{W}_{\square} = \sum_{a=1}^{\infty} ap_a\frac{\partial}{\partial p_a} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}(-)^{i+j}S_{(i|n-i)}\hat{S}_{(j,n-j)} \tag{4.1.19}$$

больше не является элементом алгебры аффинного Янгиана для $r > 2$ при нетривиальном значении $\beta \neq 1$. Однако для случая $\beta = 1$ он, конечно, лежит в алгебре. Более того, следующий стандартный оператор разрезания и склейки

$$\hat{W}_{\square\square} = \sum_{a,b=1}^{\infty}\left(abp_{a+b}\frac{\partial^2}{\partial p_a\partial p_b} + \beta(a+b)p_ap_b\frac{\partial}{\partial p_{a+b}}\right) + (1-\beta)\sum_{a=1}^{\infty}a(a-1)p_a\frac{\partial}{\partial p_a} \tag{4.1.20}$$

тоже не действует диагонально на полиномы Углова для $r > 1$. Таким образом, требуется некоторый другой оператор на эту роль — например, $\hat{\mathcal{H}}_0^{(r)}$, который является однокрюковым в базисе полиномов Шура, но, в отличие от $\hat{W}_{\square\square}$ не является оператором некоторого конечного спина.

4.2 Коммутационные соотношения

Алгебра $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$ имеет базис по типу базиса Шевалле в классических алгебрах Ли, состоящий из трех семейств генераторов $\hat{e}_n^{(a)}, \hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{f}_n^{(a)}$, $a = 1, 2, n = 0, 1, 2, \ldots$, которые можно собрать в производящие ряды операторов

$$\hat{e}^{(a)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{e}_n^{(a)}}{z^{n+1}}, \qquad \hat{\psi}^{(a)}(z) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n^{(a)}}{z^{n+1}}, \qquad \hat{f}^{(a)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}_n^{(a)}}{z^{n+1}}. \tag{4.2.1}$$

Коммутационные соотношения имеют простую форму с точки зрения порождающих рядов

$$\hat{\psi}^{(a)}(z)\,\hat{\psi}^{(b)}(w) \sim \hat{\psi}^{(b)}(w)\,\hat{\psi}^{(a)}(z), \tag{4.2.2}$$

$$\left[\hat{e}^{(a)}(z), \hat{f}^{(b)}(w)\right] \sim \delta_{a,b} \frac{\hat{\psi}^{(a)}(z) - \hat{\psi}^{(a)}(w)}{z - w}, \tag{4.2.3}$$

$$\hat{e}^{(a)}(z)\,\hat{e}^{(b)}(w) \sim \varphi^{(a,b)}(z - w)\,\hat{e}^{(b)}(w)\,\hat{e}^{(a)}(z), \tag{4.2.4}$$

$$\hat{f}^{(a)}(z)\,\hat{f}^{(b)}(w) \sim \varphi^{(a,b)}(w - z)\,\hat{f}^{(b)}(w)\,\hat{f}^{(a)}(z), \tag{4.2.5}$$

$$\hat{\psi}^{(a)}(z)\,\hat{e}^{(b)}(w) \sim \varphi^{(a,b)}(z - w)\,\hat{e}^{(b)}(w)\,\hat{\psi}^{(a)}(z), \tag{4.2.6}$$

$$\hat{\psi}^{(a)}(z)\,\hat{f}^{(b)}(w) \sim \varphi^{(a,b)}(w - z)\,\hat{f}^{(b)}(w)\,\hat{\psi}^{(a)}(z), \tag{4.2.7}$$

где знак $\sim$ означает, что мы уравниваем левую и правую части с точностью до членов $z^{n\geqslant 0}w^m$ и $z^n w^{m\geqslant 0}$. Главными элементами коммутационных соотношений являются структурные функции $\varphi^{(a,b)}(z)$ (которые также называются связывающими факторами в [187])

$$\varphi^{(1,1)}(z) = \varphi^{(2,2)}(z) = \frac{z - \epsilon_1 - \epsilon_2}{z + \epsilon_1 + \epsilon_2}, \qquad \varphi^{(1,2)}(z) = \varphi^{(2,1)}(z) = \frac{(z + \epsilon_1)(z + \epsilon_2)}{(z - \epsilon_1)(z - \epsilon_2)}\,. \tag{4.2.8}$$

На уровне структурных функций случай $r = 2$ отклоняется от общего r: в общем случае второй множитель также распадается на два, появляясь отдельно в $\varphi^{(a,a+1)}$ и $\varphi^{(a+1,a)}$

$$\varphi^{(a,a+1)} = \frac{z + \epsilon_1}{z - \epsilon_2}, \quad \varphi^{(a+1,a)} = \frac{z + \epsilon_2}{z - \epsilon_1}, \tag{4.2.9}$$

где числа $a, a+1$ в верхних индексах следует понимать по модулю r. Одним из важнейших свойств структурных функций, упомянутых выше, является отношение взаимности

$$\varphi^{(a,b)}(-z) = \frac{1}{\varphi^{(b,a)}(z)}\,. \tag{4.2.10}$$

Вышеуказанные соотношения на производящие функции можно представить как бесконечные семейства соотношений между модами $\hat{e}_n^{(a)}, \hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{f}_n^{(a)}$

$$\left[\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{\psi}_m^{(b)}\right] = 0, \tag{4.2.11}$$

$$\left[\hat{e}_n^{(a)}, \hat{f}_m^{(b)}\right] = \delta_{a,b}\,\hat{\psi}_{n+m}^{(a)}. \tag{4.2.12}$$

Соотношения между повышающими $\hat{e}_n^{(a)}$ и понижающими $\hat{f}_n^{(a)}$ генераторами одного цвета (a) выглядят следующим образом

$$\left[\hat{e}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_m^{(a)}\right] - \left[\hat{e}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(a)}\right] + (\epsilon_1+\epsilon_2)\left\{\hat{e}_n^{(a)}, \hat{e}_m^{(a)}\right\} = 0, \tag{4.2.13}$$

$$\left[\hat{f}_{n+1}^{(a)}, \hat{f}_m^{(a)}\right] - \left[\hat{f}_n^{(a)}, \hat{f}_{m+1}^{(a)}\right] - (\epsilon_1+\epsilon_2)\left\{\hat{f}_n^{(a)}, \hat{f}_m^{(a)}\right\} = 0. \tag{4.2.14}$$

Соотношения повышающих и понижающих генераторов с Картановскими генераторами $\hat{\psi}_n^{(a)}$ одного цвета

$$\left[\hat{\psi}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_m^{(a)}\right] - \left[\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(a)}\right] + (\epsilon_1+\epsilon_2)\left\{\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{e}_m^{(a)}\right\} = 0, \tag{4.2.15}$$

$$\left[\hat{\psi}_{n+1}^{(a)}, \hat{f}_m^{(a)}\right] - \left[\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{f}_{m+1}^{(a)}\right] - (\epsilon_1+\epsilon_2)\left\{\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{f}_m^{(a)}\right\} = 0 \tag{4.2.16}$$

Другой класс соотношений включает моды разных цветов $(a) \neq (b)$

$$\left[\hat{e}_{n+2}^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right] - 2\left[\hat{e}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(b)}\right] + \left[\hat{e}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+2}^{(b)}\right] - (\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\left\{\hat{e}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right\} - \left\{\hat{e}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(b)}\right\}\right) + \epsilon_1\epsilon_2\left[\hat{e}_n^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right] = 0, \tag{4.2.17}$$

$$\left[\hat{f}_{n+2}^{(a)}, \hat{f}_m^{(b)}\right] - 2\left[\hat{f}_{n+1}^{(a)}, \hat{f}_{m+1}^{(b)}\right] + \left[\hat{f}_n^{(a)}, \hat{f}_{m+2}^{(b)}\right] + (\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\left\{\hat{f}_{n+1}^{(a)}, \hat{f}_m^{(b)}\right\} - \left\{\hat{f}_n^{(a)}, \hat{f}_{m+1}^{(b)}\right\}\right) + \epsilon_1\epsilon_2\left[\hat{f}_n^{(a)}, \hat{f}_m^{(b)}\right] = 0, \tag{4.2.18}$$

$$\left[\hat{\psi}_{n+2}^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right] - 2\left[\hat{\psi}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(b)}\right] + \left[\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+2}^{(b)}\right] - (\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\left\{\hat{\psi}_{n+1}^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right\} - \left\{\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{e}_{m+1}^{(b)}\right\}\right) + \epsilon_1\epsilon_2\left[\hat{\psi}_n^{(a)}, \hat{e}_m^{(b)}\right] = 0, \tag{4.2.19}$$

$$\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{n+2},\hat{f}^{(b)}_{m}\Big]-2\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{n+1},\hat{f}^{(b)}_{m+1}\Big]+\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{n},\hat{f}^{(b)}_{m+2}\Big]+(\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\Big\{\hat{\psi}^{(a)}_{n+1},\hat{f}^{(b)}_{m}\Big\}-\Big\{\hat{\psi}^{(a)}_{n},\hat{f}^{(b)}_{m+1}\Big\}\right)+\epsilon_1\epsilon_2\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{n},\hat{f}^{(b)}_{m}\Big]=0. \tag{4.2.20}$$

Все вышеперечисленные соотношения могут быть представлены в следующем виде

$$\Big[\hat{A}^{(a)}_{n+1},\hat{B}^{(a)}_{m}\Big]-\Big[\hat{A}^{(a)}_{n},\hat{B}^{(a)}_{m+1}\Big]+\alpha_{(A,B)}\cdot(\epsilon_1+\epsilon_2)\Big\{\hat{A}^{(a)}_{n},\hat{B}^{(a)}_{m},\Big\}=0, \tag{4.2.21}$$

$$\begin{aligned}\Big[\hat{A}^{(a)}_{n+2},\hat{B}^{(b)}_{m}\Big]-2\Big[\hat{A}^{(a)}_{n+1},\hat{B}^{(b)}_{m+1}\Big]+\Big[\hat{A}^{(a)}_{n},\hat{B}^{(b)}_{m+2}\Big]+\epsilon_1\epsilon_2\Big[\hat{A}^{(a)}_{n},\hat{B}^{(b)}_{m}\Big]-\\ -\alpha_{(A,B)}\cdot(\epsilon_1+\epsilon_2)\left(\Big\{\hat{A}^{(a)}_{n+1},\hat{B}^{(b)}_{m}\Big\}-\Big\{\hat{A}^{(a)}_{n},\hat{B}^{(b)}_{m+1}\Big\}\right)=0,\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

где $(A,B)\in\{(e,e),(\psi,e),(e,\psi),(f,f),(\psi,f),(f,\psi)\}$, и знаковый множитель $\alpha_{(A,B)}$ принимает значения согласно Таблице 4.2.

(A,B)	(e,e)	(ψ,e)	(e,ψ)	(f,f)	(ψ,f)	(f,ψ)
$\alpha_{(A,B)}$	1	1	1	-1	-1	-1

Таблица 4.2: Значения параметра $\alpha_{(A,B)}$

Есть простое правило для определения $\alpha_{(A,B)}$: если любая из букв, A или B, становится "f", тогда знак $\alpha_{(A,B)}=-1$. Как всегда, для самых первых Картановских операторов следует наложить дополнительные "граничные" соотношения

$$\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{0},\hat{e}^{(b)}_{n}\Big]=\mathcal{A}_{a,b}\,\hat{e}^{(b)}_{n},\qquad\Big[\hat{\psi}^{(a)}_{0},\hat{f}^{(b)}_{n}\Big]=-\mathcal{A}_{a,b}\,\hat{f}^{(b)}_{n}, \tag{4.2.23}$$

где $\mathcal{A}_{a,b}$ это классическая матрица Картана для аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{gl}}_2$

$$\mathcal{A}_{a,b}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}. \tag{4.2.24}$$

Аффинный Янгиан $r=2$ содержит набор из 6 порождающих генераторов, через которые можно выразить все остальные элементы алгебры

$$\hat{e}^{(1)}_{0},\quad\hat{e}^{(2)}_{0},\quad\hat{\psi}^{(1)}_{1},\quad\hat{\psi}^{(2)}_{1},\quad\hat{f}^{(1)}_{0},\quad\hat{f}^{(2)}_{0}. \tag{4.2.25}$$

Старшие операторы $\hat{e}^{(a)}_{n},\hat{f}^{(a)}_{n}$ получаются с помощью действия Картановских операторов

$\hat{\psi}_1^{(a)}, \hat{\psi}_0^{(a)}$ того же цвета (a)

$$\hat{e}_{n+1}^{(a)} = \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_1^{(a)}, \hat{e}_n^{(a)}\right] + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\left\{\hat{\psi}_0^{(a)}, \hat{e}_n^{(a)}\right\}, \qquad \hat{f}_{n+1}^{(a)} = -\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_1^{(a)}, \hat{f}_n^{(a)}\right] + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\left\{\hat{\psi}_0^{(a)}, \hat{f}_n^{(a)}\right\}, \tag{4.2.26}$$

или с помощью Картановских операторов другого цвета $(b) \neq (a)$

$$\hat{e}_{n+1}^{(a)} = -\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_1^{(b)}, \hat{e}_n^{(a)}\right] + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\left\{\hat{\psi}_0^{(b)}, \hat{e}_n^{(a)}\right\}, \qquad \hat{f}_{n+1}^{(a)} = \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_1^{(b)}, \hat{f}_n^{(a)}\right] + \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)}{2}\left\{\hat{\psi}_0^{(b)}, \hat{f}_n^{(a)}\right\}. \tag{4.2.27}$$

Используя данные формулы, можно рекурсивно получить все генераторы Янгиана, начиная с порождающего набора (4.2.25). Нулевые генераторы Картана $\hat{\psi}_0^{(a)}$ не включены в этот порождающий набор, поскольку они получены из $\hat{e}_0^{(a)}, \hat{f}_0^{(a)}$ через (4.2.11). Вообще говоря, операторы $\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{\psi}_1^{(2)}$ очень похожи друг на друга и играют схожую роль, как это видно из (4.2.26) и (4.2.27), поэтому только одного из них достаточно для рекурсивной процедуры.

4.3 Представление Фока

Кристаллические представления $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$

Диаграммы Юнга на раскрашенной плоскости (см. рис. 4.1(c)) естественным образом соответствуют 2d-срезам 3d-расплавленных кристаллов, перечисляющих векторы представления МакМахона $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_r)$. Поэтому мы можем реализовать каноническое кристаллическое представление как анзац для представления Фока.

В этом представлении векторы находятся во взаимно-однозначном соответствии с диаграммами Юнга. Обозначим как $\mathrm{Add}(\lambda), \mathrm{Rem}(\lambda)$ наборы клеток, которые можно было бы добавить/удалить в диаграмме λ так, чтобы новая диаграмма снова была диаграммой Юнга, обозначенной как $\lambda \pm \square$ соответственно. В дальнейшем нам нужно будет различать цвета клеток в диаграмме. Мы обозначаем цвет (a) клетки $\square$ как букву, вписанную в клетку $\boxed{a}$. Также, обозначая $\boxed{a} \in \lambda$, мы подразумеваем только клетки нужного цвета a в диаграмме λ.

Представление Фока $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_r)$ можно описать явными матрицами для $e_k^{(a)}$ и $f_k^{(a)}$ в базисе раскрашенных диаграмм Юнга

$$\begin{aligned} e_k^{(a)}\,|\lambda\rangle &= \sum_{\boxed{a}\in \mathrm{Add}(\lambda)} \mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}}\ (\omega_{\boxed{a}})^k\ |\lambda+\boxed{a}\rangle\,, \\ f_k^{(a)}\,|\lambda\rangle &= \sum_{\boxed{a}\in \mathrm{Rem}(\lambda)} \mathbf{F}_{\lambda,\lambda-\boxed{a}}\ (\omega_{\boxed{a}})^k\ |\lambda-\boxed{a}\rangle\,, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

где $\omega_\square$ это содержание клетки $\square$ определяемое соответствующими координатами (см. Рис. 4.1(c))

$$\omega_\square = j_\square \cdot \epsilon_1 + i_\square \cdot \epsilon_2. \tag{4.3.2}$$

Матричные элементы $\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\square}$ и $\mathbf{F}_{\lambda+\square,\lambda}$ вычисляются как произведения по крюкам в диаграмме Юнга [177]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\square} &= \prod_{\square'\in\mathcal{H}_\lambda(\square)} \frac{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square'),\mathrm{leg}_\lambda(\square')+1\big)}{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square')+1,\mathrm{leg}_\lambda(\square')+1\big)} \prod_{\square'\in\mathcal{V}_\lambda(\square)} \frac{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square')+1,\mathrm{leg}_\lambda(\square')\big)}{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square')+1,\mathrm{leg}_\lambda(\square')+1\big)}\,,\\
\mathbf{F}_{\lambda+\square,\lambda} &= \prod_{\square'\in\mathcal{H}_\lambda(\square)} \frac{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square')+2,\mathrm{leg}_\lambda(\square')\big)}{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square')+1,\mathrm{leg}_\lambda(\square')\big)} \prod_{\square'\in\mathcal{V}_\lambda(\square)} \frac{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square'),\mathrm{leg}_\lambda(\square')+2\big)}{\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square'),\mathrm{leg}_\lambda(\square')+1\big)}\,,
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

где вертикальные $\mathcal{V}$ и горизонтальные $\mathcal{H}$ полосы для новой клетки как и длины рук/ног крюка в диаграмме определены обычным образом (см. [177] и Рис. 3.3). Функция $\gamma_r(j,i)$ определяется следующим образом

$$\gamma_r(j,i) := \begin{cases} -j\cdot\epsilon_1 + i\cdot\epsilon_2, & \text{если } j+i = 0 \bmod r,\\ 1, & \text{в другом случае.}\end{cases} \tag{4.3.4}$$

Естественная норма векторов в представлении Фока

$$\langle\lambda|\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}\times\mathbf{N}_\lambda\,, \tag{4.3.5}$$

$$\mathbf{N}_\lambda = \prod_{\square\in\lambda} \gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square)+1,\mathrm{leg}_\lambda(\square)\big)\,\gamma_r\big(\mathrm{arm}_\lambda(\square),\mathrm{leg}_\lambda(\square)+1\big)\,. \tag{4.3.6}$$

По отношению к этой норме повышающие и понижающие операторы сопряжены

$$\left(f_k^{(a)}\right)^* = e_k^{(a)}\,. \tag{4.3.7}$$

Мы наблюдаем следующее замечательное свойство при $r=2$

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Алгебра} & & \text{Полиномы} & & \text{Колчан} \\
\hline
\mathbf{N}_\lambda & = & \left\langle U^{(2)}_\lambda, U^{(2)}_\lambda \right\rangle_2 & = & \mathrm{Eul}^{\hat{\mathfrak{gl}}_2}_\lambda \,, \\
\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}} & = & \dfrac{\left\langle U^{(2)}_{\lambda+\boxed{a}}, p_1 \cdot U^{(2)}_\lambda \right\rangle_2}{\left\langle U^{(2)}_{\lambda+\boxed{a}}, U^{(2)}_{\lambda+\boxed{a}} \right\rangle_2} & = & \dfrac{\mathrm{Eul}^{\hat{\mathfrak{gl}}_2}_\lambda}{\mathrm{Eul}^{\hat{\mathfrak{gl}}_2}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}}} \,, \\
\mathbf{F}_{\lambda,\lambda-\boxed{a}} & = & \dfrac{\left\langle U^{(2)}_{\lambda-\boxed{a}}, \frac{\partial}{\partial p_1} \cdot U^{(2)}_\lambda \right\rangle_2}{\left\langle U^{(2)}_{\lambda-\boxed{a}}, U^{(2)}_{\lambda-\boxed{a}} \right\rangle_2} & = & \dfrac{\mathrm{Eul}^{\hat{\mathfrak{gl}}_2}_\lambda}{\mathrm{Eul}^{\hat{\mathfrak{gl}}_2}_{\lambda-\boxed{a},\lambda}} \,.
\end{array}
\tag{4.3.8}
$$

В этих соотношениях величины, обозначенные $\mathrm{Eul}^{\mathfrak{O}}_\lambda$ и $\mathrm{Eul}^{\mathfrak{O}}_{\lambda,\lambda+\square}$, являются эквивариантными классами Эйлера касательных расслоений к неподвижным точкам торического действия [67], соответствующих диаграммам Юнга λ на колчанном многообразии $\mathfrak{O}$ (чтобы сопоставить диаграммы Дынкина для $\hat{\mathfrak{gl}}_r$ и соответствующие колчанные многообразия см. Рис. 4.1). В колчанной конструкции одна диаграмма Юнга λ отвечает неподвижной точке в представлении колчана (классический вакуум), тогда как пара диаграмм λ, μ обозначает неподвижную точку в области инцидентности гомоморфизмов между парами представлений колчана. Матричные коэффициенты и нормировочные коэффициенты (4.3.8) для БПС алгебры D-бран на торическом 3-многообразии Калаби-Яу являются стандартными и широко обсуждаются в литературе [67,206,207]. Поэтому мы не будем более подробно останавливаться на этом вычисление, оно достаточно подробно представлено в [202].

Выражение для временных переменных через генераторы Янгиана

Аффинные Янгианы $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ выделяют специальный набор среди всех возможных выборов временных переменных p_k благодаря соответствующему коммутирующему семейству, как обсуждалось в разделе 3.1.2. Однако не все временные переменные допускают такое описание в случае $r > 1$. В этом разделе мы стараемся выразить временные переменные в Фоковском представлении некоторыми операторами $\hat{\xi}_k$, которые представляют собой оператор умножения на $p_k \cdot$ в терминах полиномов Углова. Другими словами, мы ищем операторы $\hat{\xi}_k$ со следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \qquad \left[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\right] = 0, \quad \forall\, i, j\,, \\
&\text{b)} \qquad \hat{\xi}_k \cdot U^{(r)}_\lambda(p_1, p_2, \ldots)\Big|_{p_m \to \hat{\xi}_m} = \Big(p_k\, U^{(r)}_\lambda(p_1, p_2, \ldots)\Big)\Big|_{p_m \to \hat{\xi}_m}\,, \\
&\text{c)} \qquad U^{(r)}_\lambda(p_1, p_2, \ldots)\Big|_{p_m \to \hat{\xi}_m} |\varnothing\rangle \;=\; |\lambda\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{4.3.9}
$$

В этом разделе мы исследуем случай $r = 2$ как простейший пример, когда нельзя выразить некоторые временные операторы через генераторы алгебры. Мы представляем временные операторы $\hat{\xi}_k$ как последовательные процессы добавления клеток в диаграмму Юнга. Каждое элементарное событие добавления сопровождается амплитудой по формуле (4.3.1). Следовательно, прямым вычислением мы получаем

$$
\begin{aligned}
\hat{\xi}_1|\lambda\rangle &= \sum_{\boxed{a}} \mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}}|\lambda + \boxed{a}\rangle, \\
\hat{\xi}_2|\lambda\rangle &= \epsilon_1 \sum_{\boxed{a},\boxed{b}} \frac{\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}}\mathbf{E}_{\lambda+\boxed{a},\lambda+\boxed{a}+\boxed{b}}}{\omega_{\boxed{b}} - \omega_{\boxed{a}}}(1-\delta_{a,b})|\lambda + \boxed{a} + \boxed{b}\rangle, \\
\hat{\xi}_3|\lambda\rangle &= \sum_{\boxed{a},\boxed{b},\boxed{c}} \Xi_{a,b,c}\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}}\mathbf{E}_{\lambda+\boxed{a},\lambda+\boxed{a}+\boxed{b}}\mathbf{E}_{\lambda+\boxed{a}+\boxed{b},\lambda+\boxed{a}+\boxed{b}+\boxed{c}}|\lambda + \boxed{a} + \boxed{b} + \boxed{c}\rangle, \\
&\ldots
\end{aligned}
\tag{4.3.10}
$$

где элементы цветового тензора принимают следующие значения

$$
\Xi_{1,2,1} = \Xi_{2,1,2} = 1, \quad \Xi_{1,2,2} = \Xi_{2,2,1} = \Xi_{2,1,1} = \Xi_{1,1,2} = -\frac{1}{2}, \quad \Xi_{1,1,1} = \Xi_{2,2,2} = 0\,. \tag{4.3.11}
$$

Благодаря данному вычислению мы наблюдаем следующее интересное явление: нечетные временные операторы имеют регулярные выражения через повышающие нулевые генераторы Янгиана $\hat{e}^{(a)}_0$

$$
\hat{\xi}_{2k-1} = \frac{1}{2^k}\Bigg(\underbrace{\Big[e^{(1)}_0, \Big[e^{(2)}_0, \ldots \Big[e^{(2)}_0, e^{(1)}_0\Big] \ldots\Big]\Big]}_{2k-1} + \underbrace{\Big[e^{(2)}_0, \Big[e^{(1)}_0, \ldots \Big[e^{(1)}_0, e^{(2)}_0\Big] \ldots\Big]\Big]}_{2k-1}\Bigg), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.3.12}
$$

В то время как для четных временных операторов нет регулярных выражений из-за спонтанного *возникновения полюса*. Мы можем использовать другие операторы $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ для регуляризации выражений для $\hat{\xi}_2$. В конечном итоге мы приходим к следующим соотношениям

$$\frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\left[\psi_1^{(2)},\hat{\xi}_{2k}\right]+4k(\epsilon_1+\epsilon_2)\hat{\xi}_{2k}=\epsilon_1\underbrace{\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},\dots\left[e_0^{(2)},e_0^{(1)}\right]\dots\right]\right]}_{2k},\quad k=1,2,\dots \tag{4.3.13}$$

Приведем несколько явных примеров

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_1 &= e_0^{(1)}+e_0^{(2)},\\
\frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\left[\psi_1^{(2)},\hat{\xi}_2\right]+4(\epsilon_1+\epsilon_2)\hat{\xi}_2 &= \epsilon_1\left[e_0^{(2)},e_0^{(1)}\right],\\
\hat{\xi}_3 &= \frac{1}{2}\left(\left[e_0^{(1)},\left[e_0^{(2)},e_0^{(1)}\right]\right]+\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},e_0^{(2)}\right]\right]\right),\\
\frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\left[\psi_1^{(2)},\hat{\xi}_4\right]+8(\epsilon_1+\epsilon_2)\hat{\xi}_4 &= \epsilon_1\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},\left[e_0^{(2)},e_0^{(1)}\right]\right]\right],\\
\hat{\xi}_5 &= \frac{1}{4}\left(\left[e_0^{(1)},\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},\left[e_0^{(2)},e_0^{(1)}\right]\right]\right]\right]+\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},\left[e_0^{(2)},\left[e_0^{(1)},e_0^{(2)}\right]\right]\right]\right]\right),\\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Как мы видели в соотношениях (4.2.26) и (4.2.27), оператор $\psi_1^{(a)}$ повышает номер моды операторов $e_k^{(a)}$ и $f_k^{(a)}$. Поэтому правая часть (4.3.13) с операторами только нулевой моды принадлежит коядру линейного оператора в левой части. Поэтому соотношения (4.3.13) не имеют решений для операторов $\hat{\xi}_{2k}$ в терминах $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$.

Нельзя не обратить внимание на тот факт, что невыразимость некоторых временных переменных через генераторы Янгиана *тонко соотносится* с невозможностью выразить некоторые тождества Уорда в матричных моделях Углова [198, 208] как дифференциальные операторы действующие на полную статсумму. Этот факт косвенно подтверждает тесную связь данных моделей с аффинными Янгианами.

Проблема невыразимости четных времен исчезает в пределе $\beta = 1$ ($\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$). Изучим механизм этого явления. В этом пределе полиномы Углова $U_\lambda^{(r)}$ для всех r становятся просто полиномами Шура для соответствующих диаграмм λ. Это кажущееся противоречие разрешается *новыми* соотношениями, которые разрушаются при $\beta \neq 1$. Основное упрощение, происходящее при $\beta = 1$, касается матричных коэффициентов

$$\mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda,\lambda+\square} = 1. \tag{4.3.15}$$

Полюсный член в первом четном операторе $\hat{\xi}_2$ в (4.3.10) косо-симметричен относительно перестановки порядка добавления клеток. Поэтому единственные нетривиальные члены, появляющиеся в этой сумме, соответствуют ситуациям, когда вторая клетка ставится на вновь

образовавшееся место после добавления первой клетки. Другими словами, эта ситуация эквивалентна тому, когда мы добавляем к диаграмме λ кластер из 2 клеток $\begin{smallmatrix}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{smallmatrix}$ или $\boxed{a|b}$, $a \neq b$. В этой ситуации мы можем забыть о цветах из-за шахматной раскраски диаграмм, а разница функций содержания клеток становится всего лишь знаком

$$(\omega_{\boxed{a}} - \omega_{\boxed{b}})\Big[\begin{smallmatrix}\boxed{a}\\ \boxed{b}\end{smallmatrix}\Big] = \pm 1, \quad (\omega_{\boxed{a}} - \omega_{\boxed{b}})\big[\,\boxed{a|b}\,\big] = \pm 1\,. \tag{4.3.16}$$

Используя данные соотношения мы приходим к следующей формуле

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boxed{a},\boxed{b}} \frac{\mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}} \cdot \mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda+\boxed{a},\lambda+\boxed{a}+\boxed{b}}}{\omega_{\boxed{a}} - \omega_{\boxed{b}}}|\lambda\rangle = \sum_{\boxed{a},\boxed{b}} (\omega_{\boxed{a}} - \omega_{\boxed{b}})\, \mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda,\lambda+\boxed{a}} \cdot \mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda+\boxed{a},\lambda+\boxed{a}+\boxed{b}}|\lambda\rangle = \\
&= \sum_{\square,\square'} (\omega_{\square} - \omega_{\square'})\, \mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda,\lambda+\square} \cdot \mathbf{E}^{(\beta=1)}_{\lambda+\square,\lambda+\square+\square'}|\lambda+\square+\square'\rangle = \boxed{\boxed{[\hat{e}_0, \hat{e}_1]\,|\lambda\rangle}},
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

где e_k – это бесцветные генераторы $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ (4.3.1). Тем самым мы показали, как исчезает полюс в случае $\beta = 1$, и операторы четных времен приобретают выражения через генераторы. Фокус в том, что мы высаживаемся в более простую алгебру $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$, когда рассматриваем бесцветные комбинации. Аналогичный механизм появления кластеров возникает в случае $\hat{W}$ оператора Гауссовой матричной модели, которую мы обсуждали в разделе 2.1.2.

Другое отличие от случая $\beta = 1$ заключается в том, что стандартная и достаточно простая алгебра $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ не является подалгеброй других более сложных $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ при $\beta \neq 1$. В частности, оператор градуировки $\sum a p_{a+1} \frac{\partial}{\partial p_a} \notin Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ для $r > 1$ и $\beta \neq 1$, таким образом, он не может помочь сгенерировать старшие временные переменные из канонически определенных $p_1 = \sum_{i=1}^{r} e_0^{(i)}$, как это происходит в представлении на полиномах Джека для $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$.

Таким образом, мы видим, что сопоставление временных переменных с коммутирующей подалгеброй в $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ для $r > 1$ может быть нерешаемой задачей. Тем не менее, это не противоречит возможности представления алгебры через дифференциальные операторы от временных переменных. Это может быть похоже на теорию бозонизации алгебр Каца-Муди [7], где алгебра коммутирует с экранирующими зарядами, которые являются нетривиальными функциями свободных полей и времен.

4.4 Реализация представления Фока и полиномы Углова

4.4.1 Специальный случай $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$, $\beta = 1$

В этом случае состояния представления Фока находятся во взаимно однозначном соответствии с полиномами Шура

$$|\lambda\rangle = S_\lambda(p_k). \tag{4.4.1}$$

Мы приводим явные формулы для набора порождающих элементов (4.2.25), другие генераторы Янгиана могут быть получены с помощью рекурсивных формул. Нулевые повышающие операторы

$$\hat{e}_0^{(1)} = p_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)} = p_1 - p_1^2\frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{(2p_1^3+p_3)}{3}\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \dots, \tag{4.4.2}$$

$$\hat{e}_0^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)} = p_1^2\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{(2p_1^3+p_3)}{3}\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \dots \tag{4.4.3}$$

Они повышают количество клеток нужного цвета на единицу в диаграмме Юнга

$$\hat{e}_0^{(a)} S_\lambda = \sum_{\boxed{a}\in \mathrm{Add}(\lambda)} S_{\lambda+\boxed{a}}. \tag{4.4.4}$$

Отметим, что коэффициенты в правой части перед полиномами Шура равны единице, и это является особенностью представления $\beta = 1$. Понижающие операторы

$$\hat{f}_0^{(1)} = \frac{\partial}{\partial p_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)} = \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{p_1^2}{3}\left(2\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + 3\frac{\partial}{\partial p_3}\right) + \dots, \tag{4.4.5}$$

$$\hat{f}_0^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)} = p_1\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} - \frac{p_1^2}{3}\left(2\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + 3\frac{\partial}{\partial p_3}\right) + \dots \tag{4.4.6}$$

удаляют клетки нужного цвета в диаграмме Юнга

$$\hat{f}_0^{(a)} S_\lambda = \sum_{\boxed{a}\in \mathrm{Rem}(\lambda)} S_{\lambda-\boxed{a}}. \tag{4.4.7}$$

Сумма по цветам дает соответствующие операторы $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$

$$\hat{e}_0^{(1)} + \hat{e}_0^{(2)} = p_1, \qquad \hat{f}_0^{(1)} + \hat{f}_0^{(2)} = \frac{\partial}{\partial p_1}. \tag{4.4.8}$$

Коммутатор нулевых мод повышающих и понижающих операторов дает операторы цветной градуировки

$$\left[\hat{e}_0^{(1)}, \hat{f}_0^{(1)}\right] = \hat{\psi}_0^{(1)} = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)}, \tag{4.4.9}$$

$$\left[\hat{e}_0^{(2)}, \hat{f}_0^{(2)}\right] = \hat{\psi}_0^{(2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)}, \tag{4.4.10}$$

сумма которых тривиальна

$$\hat{\psi}_0^{(1)} + \hat{\psi}_0^{(2)} = -1. \tag{4.4.11}$$

Более простая алгебра $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ содержит оператор градуировки $\hat{\psi}_2$ с собственными значениями $n_\lambda = \sum_{\square\in\lambda} 1$. В случае $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ собственные значения учитывают цвета клеток, они вносят вклад с противоположными знаками

$$\hat{\psi}_0^{(1)} S_\lambda = \left(-1 + 2n_\lambda^{(1)} - 2n_\lambda^{(2)}\right) S_\lambda, \qquad \hat{\psi}_0^{(2)} S_\lambda = \left(2n_\lambda^{(2)} - 2n_\lambda^{(1)}\right) S_\lambda, \tag{4.4.12}$$

Заметим, что приведенные выше собственные значения зависят только от разности количества клеток разных цвета

$$n_\lambda^{(a)} = \sum_{\boxed{a}\in\lambda} 1. \tag{4.4.13}$$

Основной ингредиент реализации представления – это операторы $\hat{\psi}_1^{(1)}$ и $\hat{\psi}_1^{(2)}$. Они представляют собой аналог оператора разрезания и склейки $\hat{\psi}_3$ из $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1^{(1)} &= -2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n+1-i-j)\, S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)} = \\ &= -p_2\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} - 2p_1^2\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{4(2p_1^3+p_3)}{9}\frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_2} + 2p_1p_2\frac{\partial}{\partial p_3} + \frac{4p_1p_2}{3}\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + \dots\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Второй оператор $\hat{\psi}_1^{(2)} = -\hat{\psi}_1^{(1)}$ и эта формула работает только для случая $\beta = 1$. Собственные значения – это сумма функций содержания $j_\square - i_\square$ по диаграмме Юнга со знаками, учитывающими цвета клеток

$$\hat{\psi}_1^{(1)} S_\lambda = 2\left(\kappa_\lambda^{(1)} - \kappa_\lambda^{(2)}\right) S_\lambda, \qquad \hat{\psi}_1^{(2)} S_\lambda = 2\left(\kappa_\lambda^{(2)} - \kappa_\lambda^{(1)}\right) S_\lambda, \tag{4.4.15}$$

где мы вводим величину $\kappa_\lambda^{(a)}$

$$\kappa_\lambda^{(a)} = \sum_{\boxed{a}\in\lambda} j_{\boxed{a}} - i_{\boxed{a}}. \tag{4.4.16}$$

В наших обозначениях первая клетка диаграммы Юнга имеет координаты $(j,i) = (0,0)$,

а j — горизонтальная координата (см. рис.4.1). Оператор $\hat{\psi}_1^{(1)}$ играет главную роль в нашей конструкции, поскольку он позволяет нам увеличить номер моды повышающих/понижающих операторов

$$\hat{e}_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{2}\Big[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{e}_n^{(1)}\Big], \qquad \hat{e}_{n+1}^{(2)} = -\frac{1}{2}\Big[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{e}_n^{(2)}\Big], \tag{4.4.17}$$

$$\hat{f}_{n+1}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Big[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{f}_n^{(1)}\Big], \qquad \hat{f}_{n+1}^{(2)} = -\frac{1}{2}\Big[\hat{\psi}_1^{(1)}, \hat{f}_n^{(2)}\Big]. \tag{4.4.18}$$

Явная форма операторов повышения с номером моды 1 выглядит так

$$\hat{e}_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} \Big[(-)^n(n+3/2-i-j) + 1/2(-)^{i+j}\Big]\ S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)}, \tag{4.4.19}$$

$$\hat{e}_1^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} \Big[-(-)^n(n+3/2-i-j) + 1/2(-)^{i+j}\Big]\ S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)}. \tag{4.4.20}$$

Операторы понижения имеют схожую структуру

$$\hat{f}_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} \Big[(-)^n(n+3/2-i-j) + 1/2(-)^{i+j}\Big]\ S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)}, \tag{4.4.21}$$

$$\hat{f}_1^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} \Big[-(-)^n(n+3/2-i-j) + 1/2(-)^{i+j}\Big]\ S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)}. \tag{4.4.22}$$

Сумма по цветам дает соответствующий генератор $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$

$$\hat{e}_1^{(1)} + \hat{e}_1^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} (-)^{i+j}\ S_{(i|n+1)}\hat{S}_{(j|n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a\, p_{a+1}\frac{\partial}{\partial p_a}, \tag{4.4.23}$$

$$\hat{f}_1^{(1)} + \hat{f}_1^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n} (-)^{i+j}\ S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(a+1)\, p_a\frac{\partial}{\partial p_{a+1}}. \tag{4.4.24}$$

Более того, коммутатор этих сумм равен оператору градуировки $\hat{\psi}_2$ из $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ (с точностью до знака)

$$\Big[\hat{e}_1^{(1)} + \hat{e}_1^{(2)}, \hat{f}_1^{(1)} + \hat{f}_1^{(2)}\Big] = -2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-)^{i+j}\ S_{(i|n)}\hat{S}_{(j|n)} = -2\sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n\frac{\partial}{\partial p_n}. \tag{4.4.25}$$

4.4.2 β-деформация

В этом разделе мы используем стандартное правило для перехода к β-деформации $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -\beta$. Удобно ввести следующие обозначения

$$\mathcal{P}_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} S_{(i|n)}, \qquad \widehat{\mathcal{P}}_{0,n} = \sum_{i=1}^{n} \hat{S}_{(i|n)}, \tag{4.4.26}$$

$$\mathcal{P}_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} (n+1-2i)\, S_{(i|n)}, \qquad \widehat{\mathcal{P}}_{1,n} = \sum_{i=1}^{n} (n+1-2i)\, \hat{S}_{(i|n)}. \tag{4.4.27}$$

Применяя эти новые обозначения, можно переписать нулевые операторы повышения и понижения, которые не подвергаются β-деформации

$$\hat{e}_0^{(1)} = p_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n+1} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n}, \qquad \hat{e}_0^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n+1} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n}, \tag{4.4.28}$$

$$\hat{f}_0^{(1)} = \frac{\partial}{\partial p_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n+1}, \qquad \hat{f}_0^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n+1}. \tag{4.4.29}$$

Поэтому нулевые моды $\psi_0^{(a)}$ также не испытывают β-деформацию

$$\hat{\psi}_0^{(1)} = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n}, \qquad \hat{\psi}_0^{(2)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n}. \tag{4.4.30}$$

Операторы нулевых мод не зависят от β, также как в случае $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$, где операторы $\hat{e}_0, \hat{f}_0, \hat{\psi}_2$ не зависят от β [60, 180]. Первая мода $\hat{\psi}_1^{(1)}$ претерпевает следующую β-деформацию

$$\hat{\psi}_1^{(1)} = \frac{1-\beta}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \Big[\mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{1,n} + \beta\, \mathcal{P}_{1,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n} + (1-\beta)\,(n-1)\, \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n} \Big] - \frac{1-\beta}{2} \Big(\hat{\psi}_0^{(1)} \Big)^2, \tag{4.4.31}$$

$$\hat{\psi}_1^{(2)} = \frac{1-\beta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \Big[\mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{1,n} + \beta\, \mathcal{P}_{1,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n} + (1-\beta)\,(n+1)\, \mathcal{P}_{0,n} \widehat{\mathcal{P}}_{0,n} \Big] - \frac{1-\beta}{2} \Big(\hat{\psi}_0^{(1)} \Big)^2. \tag{4.4.32}$$

Заметим, что в приведенных выше формулах, включая квадрат оператора $\psi_0^{(1)}$, нет нормального упорядочения. Полиномы Углова ранга 2 являются собственными функциями этих операторов

$$\hat{\psi}_1^{(a)}\, U_\lambda^{(2)} = \psi_{\lambda,1}^{(a)}\, U_\lambda^{(2)}, \tag{4.4.33}$$

со следующими собственными значениями

$$\psi^{(1)}_{\lambda,1} = 2\left(\kappa^{(1)}_\lambda - \kappa^{(2)}_\lambda\right) - 2(1-\beta)\left(n^{(1)}_\lambda - n^{(2)}_\lambda\right)\left(n^{(1)}_\lambda - n^{(2)}_\lambda - 1\right), \tag{4.4.34}$$

$$\psi^{(2)}_{\lambda,1} = -2\left(\kappa^{(1)}_\lambda - \kappa^{(2)}_\lambda\right) - 2(1-\beta)\left(n^{(1)}_\lambda - n^{(2)}_\lambda\right)\left(n^{(1)}_\lambda - n^{(2)}_\lambda\right). \tag{4.4.35}$$

Используя приведенные выше соотношения для генераторов из набора образующих (4.2.25), можно вычислить любой генератор Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$, применяя правила (4.2.26) и (4.2.27). Однако в β-деформированном случае разложение операторов в базисе полиномов Шура появляются диаграммы Юнга с более чем одним крюком из-за квадрата оператора $\psi^{(1)}_0$ в (4.4.31), (4.4.32).

Первые члены в β-деформации (4.4.19) и (4.4.20) для $\hat{e}^{(a)}_1$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\hat{e}^{(1)}_1 = 2\Big(& S_{\square\square\square}\hat{S}_{\square\square} - (\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} - \beta S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} - \\
& - S_{\square\square\square\square}\hat{S}_{\square\square\square} - S_{\square\square\square\square}\hat{S}_{\square\square} - S_{\square\square\square}\hat{S}_{\square\square\square} + (\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square\square} + (\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square\square} + \\
& + \beta S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + \beta S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + (2\beta-1)\, S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} - (\beta-1)\underline{S_{\square\square}\hat{S}_{\square\square}}\Big) + \ldots = \\
& = \left(\frac{1}{3}(1-\beta)p_1^3 + \beta p_2 p_1 + \frac{2}{3}(1-\beta)p_3\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{2}{3}\left(p_1^3 + 2p_3\right)\frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{2}{3}\left(p_1^4 + 2p_3 p_1\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \\
& - \left(\frac{2}{3}(1-\beta)p_1^4 + \beta p_2 p_1^2 - \frac{2}{3}(1-\beta)p_3 p_1 - \beta p_4\right)\frac{\partial}{\partial p_3} + \\
& + \left(\frac{1}{9}(\beta-1)p_1^4 - \frac{2}{3}\beta p_2 p_1^2 - \frac{8}{9}(1-\beta)p_3 p_1 - \frac{\beta p_4}{3}\right)\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + \ldots
\end{aligned} \tag{4.4.36}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}^{(2)}_1 = & S_{\square\square}\hat{S}_{\square} + (1-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} - \\
& - S_{\square\square\square}\hat{S}_{\square\square} - S_{\square\square\square}\hat{S}_{\square} + (2\beta-3)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + (2\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} + (2\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + (2\beta-1)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} + \\
& + 3S_{\square\square\square\square}\hat{S}_{\square\square\square} + S_{\square\square\square\square}\hat{S}_{\square\square} + S_{\square\square\square\square}\hat{S}_{\square} + (3-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square\square} + (3-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + (1-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} + \\
& + (3-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square\square} + (3-4\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + (1-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} + (3-4\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square\square} + (1-2\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square\square} + \\
& + (1-4\beta)S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\hat{S}_{\square} + 2(1-\beta)\underline{S_{\square\square}\hat{S}_{\square\square}} + \ldots = \\
& = \left((1-\beta)p_1^2 + \beta p_2\right)\frac{\partial}{\partial p_1} + \left((\beta-1)p_1^3 - \beta p_1 p_2\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} - \frac{2}{3}\left(p_1^3 - p_3\right)\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{2}{3}\left(p_1^4 + 2p_3 p_1\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \\
& + \frac{1}{9}\left(5(1-\beta)p_1^4 + 6\beta p_2 p_1^2 - 4(\beta-1)p_3 p_1 + 3\beta p_4\right)\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + \\
& + \left(-\frac{1}{3}(\beta-1)p_1^4 + \beta p_2 p_1^2 - \frac{8}{3}(\beta-1)p_3 p_1 + 2\beta p_4\right)\frac{\partial}{\partial p_3} + \ldots
\end{aligned} \tag{4.4.37}$$

Подчеркнутый член в приведенной выше формуле соответствует первому 2-крюковому вкладу.

β-деформация бесцветного генератора $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$ (4.4.25) равна

$$\hat{e}_1^{(1)} + \hat{e}_1^{(2)} = \beta p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + 2\beta p_3 \frac{\partial}{\partial p_2} + 3\beta p_4 \frac{\partial}{\partial p_3} + \dots \\ + (1-\beta)\left\{ p_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{2}{3}\left(p_3 - p_1^3\right)\frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \frac{4}{9}\left(p_1^4 - p_1 p_3\right)\frac{\partial^3}{\partial p_1^3} + \frac{1}{3}\left(10 p_1 p_3 - p_1^4\right)\frac{\partial}{\partial p_3} + \dots \right\} \tag{4.4.38}$$

Хочется подчеркнуть, что последняя корректирующая часть умноженная на $(1-\beta)$ нетривиальна, однако она не зависит от четных времен и производных. Этот факт тесно связан с отсутствием операторов четного порядка в коммутирующем семействе операторов из раздела 4.3.

Приведенные выше формулы для операторов Янгиана приводят к следующей нормировке для полиномов 2-Углова

$$\begin{aligned} U_{\varnothing} &= 1, & U_{\ydiagram{1}} &= p_1, \\ U_{\ydiagram{2}} &= -\left(\beta p_2 + p_1^2\right), & U_{\ydiagram{1,1}} &= \beta\left(p_1^2 - p_2\right), \\ U_{\ydiagram{3}} &= -\frac{1}{3}\left(3\beta p_2 p_1 + p_1^3 + 2p_3\right), & U_{\ydiagram{2,1}} &= \frac{1}{3}\beta\left(p_1^3 - 3p_2 p_1 + 2p_3\right), \\ U_{\ydiagram{2,1}} &= \frac{1}{3}\left(p_1^3 - p_3\right), & & \\ &\dots & & \end{aligned} \tag{4.4.39}$$

где мы опустили для простоты ранг $U_\lambda^{(2)} = U_\lambda$. Действие повышающих операторов на полиномах Углова

$$\begin{aligned} \hat{e}_k^{(1)} U_{\varnothing} &= \delta_{k,0} U_{\ydiagram{1}}, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\varnothing} &= 0, \\ \hat{e}_k^{(1)} U_{\ydiagram{1}} &= 0, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\ydiagram{1}} &= \frac{(-1)}{1+\beta} U_{\ydiagram{2}} + \frac{(-\beta)^k}{1+\beta} U_{\ydiagram{1,1}}, \\ \hat{e}_k^{(1)} U_{\ydiagram{2}} &= 2^k U_{\ydiagram{3}}, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\ydiagram{2}} &= -2(-\beta)^k U_{\ydiagram{2,1}}, \\ \hat{e}_k^{(1)} U_{\ydiagram{1,1}} &= (-2\beta)^k U_{\ydiagram{1,1,1}}, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\ydiagram{1,1}} &= 2\beta U_{\ydiagram{2,1}}, \\ \hat{e}_k^{(1)} U_{\ydiagram{3}} &= 0, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\ydiagram{3}} &= \frac{3^k}{\beta+3} U_{\ydiagram{4}} - \frac{(-\beta)^k}{\beta+3} U_{\ydiagram{3,1}}, \\ \hat{e}_k^{(1)} U_{\ydiagram{2,1}} &= 0, & \hat{e}_k^{(2)} U_{\ydiagram{2,1}} &= -\frac{(-3\beta)^k}{1+3\beta} U_{\ydiagram{2,1,1}} + \frac{1}{1+3\beta} U_{\ydiagram{2,2}}, \end{aligned} \tag{4.4.40}$$

$\dots$

Очевидная асимметрия между $\hat{e}_k^{(1)}$ и $\hat{e}_k^{(2)}$ связана с шахматной раскраской диаграмм. Например, оператор $\hat{e}_k^{(1)}$ уничтожает единственную клетку $U_{\ydiagram{1}}$, поэтому он не может содержать

производную $\frac{\partial}{\partial p_1}$, однако только оператор $\hat{e}_k^{(2)}$ содержит такую производную и так далее. Например, $U_{\ydiagram{2,1}}$ уничтожается оператором $\hat{e}_k^{(2)}$, но не $U_{\ydiagram{2}}$ или $U_{\ydiagram{1}}$, где оба оператора действуют добавлением клетки первого и второго типа соответственно.

Отметим, что нормировка полиномов 2-Углова (4.4.39) не соответствует нормировке полиномов Шура в пределе $\beta = 1$. Это цена, которую пришлось заплатить за простую форму операторов $\hat{e}_0^{(a)}$, $\hat{f}_0^{(a)}$, которые не зависят от β даже в случае β-деформированного представления.

4.5 Обсуждение

Главной целью этой главы было описать простые формулы реализации представления Фока для аффинных Янгианов $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ в терминах временных переменных. В этом случае векторы представления нумеруются раскрашенными диаграммами Юнга и сопоставляются ортогональным полиномам из семейства Шура-Макдональда. Для $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ соответствующие ортогональные многочлены являются полиномами Углова ранга r, из которых полиномы Джека при $r = 1$ являются самым известным примером. Полиномы Углова изначально были получены как собственные функции Гамильтонианов квантовых интегрируемых систем Калоджеро-Сазерленда спинового типа [185], что устанавливает еще одну связь между общей теорией представлений аффинных Янгианов и квантовыми интегрируемыми системами.

Наш алгоритм применим в случае произвольного r (ключевая формула для этого (4.1.18)), однако для простоты мы приводим явные формулы для первого нетривиального случая $r = 2$. Диаграммы приобретают раскраску по диагоналям в r разных цветов, для $r = 2$ раскраска диаграммы похожа на раскраску шахматной доски. Мы предъявили явные выражения («правила бозонизации») для набора порождающих (4.2.25) генераторов Янгиана для $r = 2$.

Мы проанализировали возможность выразить временные переменные через генераторы Янгиана и обнаружили интересную особенность. В аффинном Янгиане $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_r)$ это можно сделать только для каждой r-ой переменной, большая часть временных переменных не будет выражаться через элементы алгебры. К слову, это не противоречит возможности построения реализации через временные переменные, поскольку в каждом конкретном представлении алгебры могут возникать дополнительные соотношения. Интересно, что данный факт тонко соотносится с тем, что в соответствующих матричных моделях [198] тоже остается только каждое r-ое соотношение Вирасоро.

Заключение

Перечислим еще раз основные результаты, достигнутые в данной работе:

- Построен алгоритм поиска суперинтегрируемого базиса в некотором классе матричных моделей. Алгоритм в качестве начальных данных основывается на структуре временных переменных модели и операторах, задающих тождества Уорда (соотношения Вирасоро). Постулируются и решаются уравнения для правил добавления/удаления клеток в соответствующих диаграммах. Строится оператор нулевой градуировки, собственные функции которого совпадают с суперинтегрируемым базисом.

- Построена реализация представления Фока для аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$, в котором векторы представления соответствуют полиномам Углова ранга 2. С помощью техники разложения операторов в базисе полиномов Шура (и их сопряженных операторов) удается написать явные формулы для всех порождающих элементов алгебры в случае $\beta = 1$ и в случае произвольного значения β.

- Построена реализация представления МакМахона для аффинного Янгиана $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_1)$, в котором векторы представления соответствуют трехмерным диаграммам Юнга. Предложен анзац для порождающих операторов аффинного Янгиана в терминах треугольных временных переменных, который задает корректное представление. Данное утверждение проверено прямым вычислением вплоть до трехмерных диаграмм Юнга с пятью кубиками. Вычислены полиномы 3-Шура для уровней 1–5.

- Обнаружено новое свойство дефекта дифференциального разложения по отношению к эволюции в пространстве узлов. Сформулирована гипотеза об эволюции дефекта в параллельном и анти-параллельном направлении, начиная из произвольного перекрестка заданного узла. В ряде конкретных примеров данная гипотеза была проверена, и были проанализированы возможные отклонения. Примеры узлов включают в себя узлы торического, крендельного, общего древесного (арборисцентного) и 1-петлевого (выходящего за рамки древесного) типа.

- Получена точная аналитическая формула для цветных инвариантов ХОМФЛИ в произвольном симметрическом представлении для трехпараметрического семейства антипараллельных крендельных узлов. Проанализировано отклонение от свойства полной факторизации, которое характерно для узлов двойных кос. Произведена нетривиальная проверка полученных формул с помощью свойства факторизации инвариантов ХОМФЛИ в корнях единицы.

Благодарности

Я благодарен Алексею Слепцову за научное воспитание.

Я благодарен Алексею Юрьевичу Морозову, Эмилю Тофиковичу Ахмедову, Анатолию Ивановичу Савину и Андрею Морозову за неисчислимое количество времени потраченного на мое образование.

Я благодарен Хисматуллиной Е.В., Хомяковой И.Н., Белоусову В.Н., Ахметзяновой Л.Г., Мурзиной Л.А., Зайцу А.Е., Ризаеву Г., Садофьеву А., Кривову Д. за то, что разожгли искру.

Я благодарен своим друзьям, коллегам и старшим товарищам Андрееву А., Жабину А., Шарипову Р., Колганову Н., Дьяконову Д., Губареву К., Бишлер Л., Супруну П., Пополитову А., Мусаеву Э., Миронову А.Д., Васильеву Д. за совместные обсуждения.

Я благодарен своим соавторам Мишнякову В., Ланиной Е., Зенкевичу Е., Галахову Д. и младшим товарищам Реве М., Гавшину А., Ажееву Б. за удовольствие от совместной работы.

Выражаю особую благодарность Елене Сусловой за поддержку и помощь.

Я благодарен своим родителям.

Я благодарен своей жене за поддержание огня.

Литература

[1] E. Witten, "Quantum Field Theory and the Jones Polynomial," Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351–399.

[2] L. D. Faddeev, "How algebraic Bethe ansatz works for integrable model," in Les Houches School of Physics: Astrophysical Sources of Gravitational Radiation, pp. pp. 149–219. 5, 1996. arXiv:hep-th/9605187.

[3] L. Dolan, C. R. Nappi, and E. Witten, "Yangian symmetry in D = 4 superconformal Yang-Mills theory," in 3rd International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, pp. 300–315. 1, 2004. arXiv:hep-th/0401243.

[4] A. Agarwal and S. G. Rajeev, "Yangian symmetries of matrix models and spin chains: The Dilatation operator of N=4 SYM," Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005) 5453–5490, arXiv:hep-th/0409180.

[5] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, "Hidden Symmetries of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring," Phys. Rev. D **69** (2004) 046002, arXiv:hep-th/0305116.

[6] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, "Factorized s Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models," Annals Phys. **120** (1979) 253–291.

[7] A. Gerasimov, A. Morozov, M. Olshanetsky, A. Marshakov, and S. L. Shatashvili, "Wess-Zumino-Witten model as a theory of free fields," Int. J. Mod. Phys. A **5** (1990) 2495–2589.

[8] A. Mironov and A. Morozov, "Superintegrability as the hidden origin of the Nekrasov calculus," Phys. Rev. D **106** no. 12, (2022) 126004, arXiv:2207.08242 [hep-th].

[9] A. Y. Morozov, "String theory: What is it?," Sov. Phys. Usp. **35** (1992) 671–714.

[10] A. Morozov, "Integrability and matrix models," Phys. Usp. **37** (1994) 1–55, arXiv:hep-th/9303139.

[11] D. Altschuler and L. Freidel, "Vasilev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders," Commun. Math. Phys. **187** (1997) 261–287, arXiv:q-alg/9603010.

[12] M. Alvarez and J. M. F. Labastida, "Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory," Nucl. Phys. B **395** (1993) 198–238, arXiv:hep-th/9110069.

[13] D. Bar-Natan, "Perturbative Chern-Simons theory," J. Knot Theor. Ramifications **4** (1995) 503–547.

[14] R. K. Kaul and T. R. Govindarajan, "Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links," Nucl. Phys. B **380** (1992) 293–333, arXiv:hep-th/9111063.

[15] A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, P. Ramadevi, and V. K. Singh, "Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams," JHEP **07** (2015) 109, arXiv:1504.00371 [hep-th].

[16] A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, "Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid," arXiv:1112.2654.

[17] A. Mironov, A. Morozov, and A. Sleptsov, "Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links," JHEP **07** (2015) 069, arXiv:1412.8432 [hep-th].

[18] E. Lanina, A. Sleptsov, and N. Tselousov, "Chern-Simons perturbative series revisited," Phys. Lett. B **823** (2021) 136727, arXiv:2105.11565 [hep-th].

[19] R. Wang, F. Liu, C.-H. Zhang, and W.-Z. Zhao, "Superintegrability for (β-deformed) partition function hierarchies with W-representations," Eur. Phys. J. C **82** no. 10, (2022) 902, arXiv:2206.13038 [hep-th].

[20] A. Mironov and A. Morozov, "Many-body integrable systems implied by WLZZ models," Phys. Lett. B **842** (2023) 137964, arXiv:2303.05273 [hep-th].

[21] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, R. Wang, and W.-Z. Zhao, "Interpolating matrix models for WLZZ series," arXiv:2301.04107 [hep-th].

[22] A. Mironov, A. Oreshina, and A. Popolitov, "Two β-ensemble realization of β-deformed WLZZ models," Eur. Phys. J. C **84** no. 7, (2024) 705, arXiv:2403.05965 [hep-th].

[23] A. D. Mironov, A. Oreshina, and A. V. Popolitov, "β-WLZZ Models from β-Ensemble Integrals Directly," Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **120** no. 1, (2024) 62–65, arXiv:2404.18843 [hep-th].

[24] A. Mironov and A. Morozov, "Spectral curves and W-representations of matrix models," JHEP **03** (2023) 116, arXiv:2210.09993 [hep-th].

[25] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, and A. Popolitov, "Commutative families in W_∞, integrable many-body systems and hypergeometric τ-functions," JHEP **23** (2020) 065, arXiv:2306.06623 [hep-th].

[26] Y. Drachov, "Generalized $\widetilde{W}$ algebras," Eur. Phys. J. C **84** no. 10, (2024) 1078, arXiv:2406.13624 [hep-th].

[27] S.-S. Chern and J. Simons, "Characteristic forms and geometric invariants," Annals Math. **99** (1974) 48–69.

[28] J. M. F. Labastida and E. Perez, "Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light cone gauge," J. Math. Phys. **39** (1998) 5183–5198, arXiv:hep-th/9710176.

[29] L. Alvarez-Gaume, H. Itoyama, J. L. Manes, and A. Zadra, "Superloop equations and two-dimensional supergravity," Int. J. Mod. Phys. A **7** (1992) 5337–5368, arXiv:hep-th/9112018.

[30] E. Guadagnini, M. Martellini, and M. Mintchev, "Chern-Simons Holonomies and the Appearance of Quantum Groups," Phys. Lett. B **235** (1990) 275–281.

[31] P. Ramadevi, T. R. Govindarajan, and R. K. Kaul, "Knot invariants from rational conformal field theories," Nucl. Phys. B **422** (1994) 291–306, arXiv:hep-th/9312215.

[32] S. G. Naculich, H. A. Riggs, and H. J. Schnitzer, "Group Level Duality in WZW Models and Chern-Simons Theory," Phys. Lett. B **246** (1990) 417–422.

[33] D. Galakhov, D. Melnikov, A. Mironov, and A. Morozov, "Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots," Nucl. Phys. B **899** (2015) 194–228, arXiv:1502.02621 [hep-th].

[34] M. O'Loughlin, "Boundary actions in Ponzano-Regge discretization, quantum groups and AdS(3)," Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003) 795–826, arXiv:gr-qc/0002092.

[35] E. R. Livine, "3d Quantum Gravity: Coarse-Graining and q-Deformation," Annales Henri Poincare **18** no. 4, (2017) 1465–1491, arXiv:1610.02716 [gr-qc].

[36] J. M. F. Labastida and M. Marino, "Polynomial invariants for torus knots and topological strings," Commun. Math. Phys. **217** (2001) 423–449, arXiv:hep-th/0004196.

[37] H. Ooguri and C. Vafa, "Knot invariants and topological strings," Nucl. Phys. B **577** (2000) 419–438, arXiv:hep-th/9912123.

[38] J. M. F. Labastida, M. Marino, and C. Vafa, "Knots, links and branes at large N," JHEP **11** (2000) 007, arXiv:hep-th/0010102.

[39] C. Adams, The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. Providence: AMS, 2004.

[40] N. Y. Reshetikhin and V. G. Turaev, "Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups," Commun. Math. Phys. **127** (1990) 1–26.

[41] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, "Invariants of three manifolds via link polynomials and quantum groups," Invent. Math. **103** (1991) 547–597.

[42] N. Reshetikhin and F. Smirnov, "Hidden Quantum Group Symmetry and Integrable Perturbations of Conformal Field Theories," Commun. Math. Phys. **131** (1990) 157–178.

[43] G. W. Moore and N. Reshetikhin, "A Comment on Quantum Group Symmetry in Conformal Field Theory," Nucl. Phys. B **328** (1989) 557–574.

[44] A. Klimyk and K. Schmüdgen, Quantum groups and their representations. Springer Science & Business Media, 2012.

[45] C. Kassel, Quantum groups, vol. 155. Springer Science & Business Media, 2012.

[46] J. M. Maldacena, G. W. Moore, N. Seiberg, and D. Shih, "Exact vs. semiclassical target space of the minimal string," JHEP **10** (2004) 020, arXiv:hep-th/0408039.

[47] A. Mironov, "2-d gravity and matrix models. 1. 2-d gravity," Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 4355–4406, arXiv:hep-th/9312212.

[48] E. Witten, "On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity," in International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, pp. 176–216. 6, 1991.

[49] M. Blau and G. Thompson, "Localization and diagonalization: A review of functional integral techniques for low dimensional gauge theories and topological field theories," J. Math. Phys. **36** (1995) 2192–2236, arXiv:hep-th/9501075.

[50] V. Pestun et al., "Localization techniques in quantum field theories," J. Phys. A **50** no. 44, (2017) 440301, arXiv:1608.02952 [hep-th].

[51] E. Brezin, V. Kazakov, D. Serban, P. Wiegmann, and A. Zabrodin, eds., Application of random matrices in physics. 2006.

[52] A. Mironov and A. Morozov, "Superintegrability summary," Phys. Lett. B **835** (2022) 137573, arXiv:2201.12917 [hep-th].

[53] A. Mironov and A. Morozov, "Bilinear character correlators in superintegrable theory," Eur. Phys. J. C **83** no. 1, (2023) 71, arXiv:2206.02045 [hep-th].

[54] M. Jimbo and T. Miwa, "Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras," Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **19** (1983) 943.

[55] R. Wang, C.-H. Zhang, F.-H. Zhang, and W.-Z. Zhao, "CFT approach to constraint operators for (β-deformed) hermitian one-matrix models," Nucl. Phys. B **985** (2022) 115989, arXiv:2203.14578 [hep-th].

[56] V. Mishnyakov and A. Oreshina, "Superintegrability in β-deformed Gaussian Hermitian matrix model from W-operators," Eur. Phys. J. C **82** no. 6, (2022) 548, arXiv:2203.15675 [hep-th].

[57] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford Mathematical Monographs, 1998.

[58] A. Morozov and S. Shakirov, "Generation of Matrix Models by W-operators," JHEP **04** (2009) 064, arXiv:0902.2627 [hep-th].

[59] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, and R. Rashkov, "Matrix model partition function by a single constraint," Eur. Phys. J. C **81** no. 12, (2021) 1140, arXiv:2105.09920 [hep-th].

[60] T. Procházka, "$\mathcal{W}$ -symmetry, topological vertex and affine Yangian," JHEP **10** (2016) 077, arXiv:1512.07178 [hep-th].

[61] A. Tsymbaliuk, "The affine Yangian of gl1 revisited," Advances in Mathematics **304** (2017) 583–645.

[62] A. Okounkov, "Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry," arXiv:1512.07363 [math.AG].

[63] C. N. Pope, L. J. Romans, and X. Shen, "W(infinity) and the Racah-wigner Algebra," Nucl. Phys. B **339** (1990) 191–221.

[64] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo, and S. Odake, "Representation theory of the $W_{1+\infty}$ algebra," Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995) 343–374, arXiv:hep-th/9408158.

[65] J. A. Harvey and G. W. Moore, "Algebras, BPS states, and strings," Nucl. Phys. B **463** (1996) 315–368, arXiv:hep-th/9510182.

[66] D. Galakhov, W. Li, and M. Yamazaki, "Shifted quiver Yangians and representations from BPS crystals," JHEP **08** (2021) 146, arXiv:2106.01230 [hep-th].

[67] D. Galakhov and M. Yamazaki, "Quiver Yangian and Supersymmetric Quantum Mechanics," Commun. Math. Phys. **396** no. 2, (2022) 713–785, arXiv:2008.07006 [hep-th].

[68] D. Galakhov, W. Li, and M. Yamazaki, "Gauge/Bethe correspondence from quiver BPS algebras," JHEP **11** (2022) 119, arXiv:2206.13340 [hep-th].

[69] J. Bao, "A Survey of Toric Quivers and BPS Algebras," arXiv:2301.00663 [hep-th].

[70] S.-S. Chern and J. Simons, "Characteristic forms and geometric invariants," Annals Math. **99** (1974) 48–69.

[71] A. Schwarz, "The partition function of a degenerate functional," Commun.Math. Phys. **67** (1979) 1–16.

[72] M. Atiyah, "Topological quantum field theories," Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques **68** (1988) 175–186.

[73] V. F. R. Jones, "A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras," Bull. Am. Math. Soc. **12** (1985) 103–111.

[74] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links," Bull. Am. Math. Soc. **12** (1985) 239–246.

[75] A. Mironov and A. Morozov, "Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots," Phys. Lett. B **755** (2016) 47–57, arXiv:1511.09077 [hep-th].

[76] A. Mironov and A. Morozov, "Towards effective topological field theory for knots," Nucl. Phys. B **899** (2015) 395–413, arXiv:1506.00339 [hep-th].

[77] A. Anokhina, E. Lanina, and A. Morozov, "Planar decomposition of bipartite HOMFLY polynomials in symmetric representations," Phys. Rev. D **111** no. 4, (2025) 046018, arXiv:2410.18525 [hep-th].

[78] A. Anokhina and A. Morozov, "Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials," Teor. Mat. Fiz. **178** (2014) 3–68, arXiv:1307.2216 [hep-th].

[79] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, "Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux," Adv. High Energy Phys. **2013** (2013) 931830, arXiv:1304.1486 [hep-th].

[80] V. Mishnyakov, A. Sleptsov, and N. Tselousov, "A new symmetry of the colored Alexander polynomial," Annales Henri Poincare **22** no. 4, (2021) 1235–1265, arXiv:2001.10596 [hep-th].

[81] V. Mishnyakov, A. Sleptsov, and N. Tselousov, "A Novel Symmetry of Colored HOMFLY Polynomials Coming from $\mathfrak{sl}(N|M)$ Superalgebras," Commun. Math. Phys. **384** no. 2, (2021) 955–969, arXiv:2005.01188 [hep-th].

[82] Y. Kononov and A. Morozov, "On the defect and stability of differential expansion," JETP Lett. **101** no. 12, (2015) 831–834, arXiv:1504.07146 [hep-th].

[83] L. Bishler and A. Morozov, "Perspectives of differential expansion," Phys. Lett. B **808** (2020) 135639, arXiv:2006.01190 [hep-th].

[84] A. Morozov, "KNTZ trick from arborescent calculus and the structure of differential expansion," Theor. Math. Phys. **204** (2020) 863–889, arXiv:2001.10254 [hep-th].

[85] A. Morozov, "Pentad and triangular structures behind the Racah matrices," Eur. Phys. J. Plus **135** no. 2, (2020) 196, arXiv:1906.09971 [hep-th].

[86] A. Morozov, "Extension of KNTZ trick to non-rectangular representations," Phys. Lett. B **793** (2019) 464–468, arXiv:1903.00259 [hep-th].

[87] A. Morozov, "On exclusive Racah matrices $\bar{S}$ for rectangular representations," Phys. Lett. B **793** (2019) 116–125, arXiv:1902.04140 [hep-th].

[88] A. Morozov, "Differential expansion and rectangular HOMFLY for the figure eight knot," Nucl. Phys. B **911** (2016) 582–605, arXiv:1605.09728 [hep-th].

[89] A. Morozov, "Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots," JHEP **09** (2016) 135, arXiv:1606.06015 [hep-th].

[90] C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, and A. Sleptsov, "Differential expansion for link polynomials," Phys. Lett. B **778** (2018) 197–206, arXiv:1709.09228 [hep-th].

[91] A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, "Evolution method and "differential hierarchy" of colored knot polynomials," AIP Conf. Proc. **1562** no. 1, (2013) 123–155, arXiv:1306.3197 [hep-th].

[92] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, "HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations," JHEP **07** (2012) 131, arXiv:1203.5978 [hep-th].

[93] Y. Kononov and A. Morozov, "Rectangular superpolynomials for the figure-eight knot 4_1," Theor. Math. Phys. **193** no. 2, (2017) 1630–1646, arXiv:1609.00143 [hep-th].

[94] Y. Kononov and A. Morozov, "On rectangular HOMFLY for twist knots," Mod. Phys. Lett. A **31** no. 38, (2016) 1650223, arXiv:1610.04778 [hep-th].

[95] K. Habiro, "A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres," Inventiones mathematicae **171** no. 1, (2007) 1–81.

[96] S. Nawata and A. Oblomkov, "Lectures on knot homology," Contemp. Math. **680** (2016) 137, arXiv:1510.01795 [math-ph].

[97] R. M. Kameyama, S.Nawata and H. D. Zhang, "Cyclotomic expansions of HOMFLY-PT colored by rectangular Young diagrams," Lett. Math. Phys. **110** (2020) 2573–2583, arXiv:1902.02275 [math.GT].

[98] S. Z. Qingtao Chen, Kefeng Liu, "Cyclotomic expansions for the colored HOMFLY-PT invariants of double twist knots," arXiv:2110.03616 [math.GT].

[99] Q. Chen, K. Liu, P. Peng, and S. Zhu, "Congruent skein relations for colored HOMFLY-PT invariants and colored Jones polynomials," arXiv:1402.3571 [math.GT].

[100] Q. Chen, K. Liu, and S. Zhu, "Volume conjecture for $SU(n)$-invariants," arXiv:1511.00658 [math.QA].

[101] K. Kawagoe, "On the formulae for the colored HOMFLY polynomials," J. Geom. Phys. **106** (2016) 143–154, arXiv:1210.7574 [math.GT].

[102] K. Kawagoe, "The colored HOMFLY-PT polynomials of the trefoil knot, the figure-eight knot and twist knots," arXiv:2107.08678 [math.GT].

[103] A. Beliakova and E. Gorsky, "Cyclotomic expansions for $\mathfrak{gl}_N$ knot invariants via interpolation Macdonald polynomials," 2021. https://arxiv.org/abs/2101.08243.

[104] E. Lanina and A. Morozov, "Defect and degree of the Alexander polynomial," Eur. Phys. J. C **82** no. 11, (2022) 1022, arXiv:2208.01585 [hep-th].

[105] A. Anokhina and A. Morozov, "Are Khovanov-Rozansky polynomials consistent with evolution in the space of knots?," JHEP **04** (2018) 066, arXiv:1802.09383 [hep-th].

[106] A. Anokhina, A. Morozov, and A. Popolitov, "Nimble evolution for pretzel Khovanov polynomials," Eur. Phys. J. C **79** no. 10, (2019) 867, arXiv:1904.10277 [hep-th].

[107] A. Morozov, "Knot polynomials for twist satellites," Phys. Lett. B **782** (2018) 104–111, arXiv:1801.02407 [hep-th].

[108] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, and A. Smirnov, "Superpolynomials for toric knots from evolution induced by cut-and-join operators," JHEP **03** (2013) 021, arXiv:1106.4305 [hep-th].

[109] https://knotinfo.math.indiana.edu/.

[110] H. Morton, "Mutant knots with symmetry," in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 146, pp. 95–107, Cambridge University Press. 2009.

[111] H. R. Morton and P. R. Cromwell Journal of Knot Theory and Its Ramifications **05** no. 02, (1996) 225–238.

[112] L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, V. K. Singh, P. Ramadevi, V. K. S. A. Sleptsov, and A. Sleptsov, "Difference of Mutant Knot Invariants and Their

Differential Expansion," JETP Lett. **111** no. 9, (2020) 494–499, arXiv:2004.06598 [hep-th].

[113] L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, "Distinguishing Mutant knots," J. Geom. Phys. **159** (2021) 103928, arXiv:2007.12532 [hep-th].

[114] A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, "Tabulating knot polynomials for arborescent knots," J. Phys. A **50** no. 8, (2017) 085201, arXiv:1601.04199 [hep-th].

[115] Y. Kononov and A. Morozov, "Factorization of colored knot polynomials at roots of unity," Phys. Lett. B **747** (2015) 500–510, arXiv:1505.06170 [hep-th].

[116] S. Zhu, "Colored HOMFLY polynomials via skein theory," JHEP **10** (2013) 229, arXiv:1206.5886 [math.GT].

[117] Y. W. Quanlin Chen, Tianze Jiang, "The generational behavior of Gaussian binomial coefficients at roots of unity,".

[118] S. Garoufalidis, A. D. Lauda, and T. T. Q. Lê, "The colored HOMFLYPT function is q-holonomic," Duke Math. J. **167** no. 3, (2018) 397–447, arXiv:1604.08502 [math.GT].

[119] S. Garoufalidis, "The colored HOMFLY polynomial is q-holonomic," arXiv:1211.6388 [math.GT].

[120] S. Garoufalidis and T. T. Q. Le, "The colored Jones function is q-holonomic," Geometry and Topology **9** no. 3, (Jul, 2005) 1253–1293.

[121] S. Garoufalidis and X. Sun, "The non-commutative A-polynomial of twist knots," 2008.

[122] S. Garoufalidis and X. Sun, "The C-polynomial of a knot," Algebraic Geometric Topology **6** no. 4, (Oct, 2006) 1623–1653.

[123] A. Mironov and A. Morozov, "Algebra of quantum $\mathcal{C}$-polynomials," JHEP **02** (2021) 142, arXiv:2009.11641 [hep-th].

[124] A. Bawane, P. Karimi, and P. Sulkowski, "Proving superintegrability in β-deformed eigenvalue models," SciPost Phys. **13** no. 3, (2022) 069, arXiv:2206.14763 [hep-th].

[125] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and S. Natanzon, "Integrability of Hurwitz Partition Functions. I. Summary," J. Phys. A **45** (2012) 045209, arXiv:1103.4100 [hep-th].

[126] A. Y. Orlov and D. M. Scherbin, "Hypergeometric Solutions of Soliton Equations," Theor. Math. Phys. **128** no. 1, (2001) 906–926.

[127] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and S. Natanzon, "On KP-integrable Hurwitz functions," JHEP **11** (2014) 080, arXiv:1405.1395 [hep-th].

[128] C. Pope, X. Shen, and L. Romans, "W_∞ and the Racah-Wigner algebra," Nuclear Physics B **339** no. 1, (1990) 191–221.

[129] A. Morozov and N. Tselousov, "Hunt for 3-Schur polynomials," Phys. Lett. B **840** (2023) 137887, arXiv:2211.14956 [hep-th].

[130] X. Liu and C. Yang, "Action of W-type operators on Schur functions and Schur Q-functions," J. Lond. Math. Soc. **111** no. 2, (2025) e70080, arXiv:2206.01066 [math-ph].

[131] M. Kontsevich, "Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function," Commun. Math. Phys. **147** (1992) 1–23.

[132] P. Di Francesco, C. Itzykson, and J. B. Zuber, "Polynomial averages in the Kontsevich model," Commun. Math. Phys. **151** (1993) 193–219, arXiv:hep-th/9206090.

[133] A. Mironov and A. Morozov, "Superintegrability of Kontsevich matrix model," Eur. Phys. J. C **81** no. 3, (2021) 270, arXiv:2011.12917 [hep-th].

[134] A. Alexandrov, "Intersection numbers on $\overline{M}_{g,n}$ and BKP hierarchy," JHEP **09** (2021) 013, arXiv:2012.07573 [math-ph].

[135] Y. Drachov and A. Zhabin, "Genus expansion of matrix models and $\hbar$ expansion of BKP hierarchy," Eur. Phys. J. C **83** no. 5, (2023) 437, arXiv:2302.03949 [hep-th].

[136] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Zabrodin, "Unification of all string models with C $<$ 1," Phys. Lett. B **275** (1992) 311–314, arXiv:hep-th/9111037.

[137] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Zabrodin, "Towards unified theory of 2-d gravity," Nucl. Phys. B **380** (1992) 181–240, arXiv:hep-th/9201013.

[138] A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, "On equivalence of topological and quantum 2-d gravity," Phys. Lett. B **274** (1992) 280–288, arXiv:hep-th/9201011.

[139] A. S. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and P. Putrov, "Partition Functions of Matrix Models as the First Special Functions of String Theory. II. Kontsevich Model," Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 4939–4998, arXiv:0811.2825 [hep-th].

[140] A. Alexandrov, "Cut-and-Join operator representation for Kontsewich-Witten tau-function," Mod. Phys. Lett. A **26** (2011) 2193–2199, arXiv:1009.4887 [hep-th].

[141] A. D. Mironov and A. Morozov, "Generalized Q-functions for GKM," Phys. Lett. B **819** (2021) 136474, arXiv:2101.08759 [hep-th].

[142] A. Morozov, "A new kind of anomaly: on W-constraints for GKM," JHEP **21** (2020) 213, arXiv:2108.07198 [hep-th].

[143] G. Akemann and J. C. Plefka, "The Chiral superEigenvalue model," Mod. Phys. Lett. A **12** (1997) 1745–1758, arXiv:hep-th/9705114.

[144] I. N. McArthur, "The Partition function for the supersymmetric Eigenvalue model," Mod. Phys. Lett. A **8** (1993) 3355–3362.

[145] P. Ciosmak, L. Hadasz, M. Manabe, and P. Sułkowski, "Super-quantum curves from super-eigenvalue models," JHEP **10** (2016) 044, arXiv:1608.02596 [hep-th].

[146] R. Wang, S.-K. Wang, K. Wu, and W.-Z. Zhao, "Correlators in the Gaussian and chiral supereigenvalue models in the Neveu-Schwarz sector," JHEP **11** (2020) 119, arXiv:2009.02929 [hep-th].

[147] V. G. Drinfeld, "Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation," Sov. Math. Dokl. **32** (1985) 254–258.

[148] V. G. Drinfeld, "Quantum groups," Zap. Nauchn. Semin. **155** (1986) 18–49.

[149] D. Bernard, "An Introduction to Yangian Symmetries," Int. J. Mod. Phys. B **7** (1993) 3517–3530, arXiv:hep-th/9211133.

[150] N. A. Slavnov, "Algebraic Bethe ansatz," 2019. https://arxiv.org/abs/1804.07350.

[151] A. I. Molev, "Yangians and their applications," 2002.

[152] V. G. Drinfeld, "A New realization of Yangians and quantized affine algebras," Sov. Math. Dokl. **36** (1988) 212–216.

[153] A. Tsymbaliuk, "The affine Yangian of $\mathfrak{gl}_1$ revisited," Adv. Math. **304** (2017) 583–645, arXiv:1404.5240 [math.RT].

[154] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, and A. Popolitov, "Commutative subalgebras from Serre relations," Phys. Lett. B **845** (2023) 138122, arXiv:2307.01048 [hep-th].

[155] A. Mironov and A. Morozov, "Many-body integrable systems implied by WLZZ models," arXiv:2303.05273 [hep-th].

[156] A. Mironov, A. Morozov, and S. Natanzon, "Complete Set of Cut-and-Join Operators in Hurwitz-Kontsevich Theory," arXiv:0904.4227 [hep-th].

[157] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Orlov, "Matrix models of two-dimensional gravity and Toda theory," Nuclear Physics B **357** no. 2-3, (1991) 565–618.

[158] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, "Integrability and Seiberg-Witten exact solution," Phys. Lett. B **355** (1995) 466–474, arXiv:hep-th/9505035.

[159] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Zabrodin, "Towards unified theory of 2-d gravity," Nucl. Phys. B **380** (1992) 181–240, arXiv:hep-th/9201013.

[160] V. A. Kazakov, I. K. Kostov, and N. A. Nekrasov, "D particles, matrix integrals and KP hierarchy," Nucl. Phys. B **557** (1999) 413–442, arXiv:hep-th/9810035.

[161] F. Liu, A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, R. Wang, and W.-Z. Zhao, "(q,t)-deformed (skew) Hurwitz τ-functions," arXiv:2303.00552 [hep-th].

[162] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, and W.-Z. Zhao, "On KP-integrable skew Hurwitz τ-functions and their β-deformations," arXiv:2301.11877.

[163] A. Y. Morozov, "Unitary Integrals and Related Matrix Models," Theor. Math. Phys. **162** (2010) 1–33, arXiv:0906.3518 [hep-th].

[164] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, and A. Morozov, "Character expansion for HOMFLY polynomials. III. All 3-Strand braids in the first symmetric representation," Int. J. Mod. Phys. A **27** (2012) 1250099, arXiv:1204.4785 [hep-th].

[165] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, and J. Shiraishi, "Collective field theory, Calogero-Sutherland model and generalized matrix models," Phys. Lett. B **347** (1995) 49–55, arXiv:hep-th/9411053.

[166] H. Awata, "Hidden Algebraic Structure of the Calogero—Sutherland Model, Integral Formula for Jack Polynomial and Their Relativistic Analog," Calogero—Moser—Sutherland Models (2000) 23–35.

[167] A. Mironov, A. Morozov, and Y. Zenkevich, "Duality in elliptic Ruijsenaars system and elliptic symmetric functions," Eur. Phys. J. C **81** no. 5, (2021) 461, arXiv:2103.02508 [hep-th].

[168] A. Mironov and A. Morozov, "On Hamiltonians for Kerov functions," Eur. Phys. J. C **80** no. 3, (2020) 277, arXiv:1908.05176 [hep-th].

[169] A. Mironov and A. Morozov, "Superintegrability summary," Phys. Lett. B **835** (2022) 137573, arXiv:2201.12917 [hep-th].

[170] A. Mironov and A. Morozov, "On the complete perturbative solution of one-matrix models," Phys. Lett. B **771** (2017) 503–507, arXiv:1705.00976 [hep-th].

[171] A. Mironov, A. Morozov, and Z. Zakirova, "New insights into superintegrability from unitary matrix models," arXiv:2203.03869 [hep-th].

[172] A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, and A. Zhabin, "Natanzon-Orlov model and refined superintegrability," Phys. Lett. B **829** (2022) 137041, arXiv:2112.11371 [hep-th].

[173] L. Cassia, R. Lodin, and M. Zabzine, "On matrix models and their q-deformations," JHEP **10** (2020) 126, arXiv:2007.10354 [hep-th].

[174] A. Morozov, "Cauchy formula and the character ring," Eur. Phys. J. C **79** no. 1, (2019) 76, arXiv:1812.03853 [hep-th].

[175] A. Mironov and A. Morozov, "Kerov functions revisited," arXiv:1811.01184 [hep-th].

[176] D. Galakhov, A. Gavshin, A. Morozov, and N. Tselousov, "Algorithms for representations of quiver Yangian algebras," JHEP **08** (2024) 209, arXiv:2406.20074 [hep-th].

[177] B. L. Feigin and A. I. Tsymbaliuk, "Equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra," Kyoto Journal of Mathematics **51** no. 4, (2011) 831 – 854, arXiv:0904.1679 [math.RT].

[178] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin, "Quantum toroidal gl1-algebra: Plane partitions," Kyoto Journal of Mathematics **52** no. 3, (2012) 621 – 659.

[179] N. Wang, "Affine Yangian and 3-Schur functions," Nucl. Phys. B **960** (2020) 115173.

[180] A. Morozov and N. Tselousov, "3-Schurs from explicit representation of Yangian Y $\left(\hat{\mathfrak{gl}}_1\right)$. Levels 1–5," JHEP **11** (2023) 165, arXiv:2305.12282 [hep-th].

[181] A. Y. Morozov, "Cut-and-join operators and Macdonald polynomials from the 3-Schur functions," arXiv:1810.00395 [hep-th].

[182] A. Morozov and N. Tselousov, "Hunt for 3-Schur polynomials," Phys. Lett. B **840** (2023) 137887, arXiv:2211.14956 [hep-th].

[183] A. Morozov, "An analogue of Schur functions for the plane partitions," Phys. Lett. B **785** (2018) 175–183, arXiv:1808.01059 [hep-th].

[184] D. Maulik and A. Okounkov, "Quantum Groups and Quantum Cohomology," arXiv:1211.1287 [math.AG].

[185] D. Uglov, "Yangian Gelfand-Zetlin bases, gl(N) Jack polynomials and computation of dynamical correlation functions in the spin Calogero-Sutherland model," Commun. Math. Phys. **193** (1998) 663–696, arXiv:hep-th/9702020.

[186] D. Galakhov, A. Morozov, and N. Tselousov, "Towards the theory of Yangians," arXiv:2311.00760 [hep-th].

[187] W. Li, "Quiver algebras and their representations for arbitrary quivers," arXiv:2303.05521 [hep-th].

[188] J. Bao, R.-K. Seong, and M. Yamazaki, "The Origin of Calabi-Yau Crystals in BPS States Counting," arXiv:2401.02792 [hep-th].

[189] D. Butson and M. Rapcak, "Perverse coherent extensions on Calabi-Yau threefolds and representations of cohomological Hall algebras," arXiv:2309.16582 [math.RT].

[190] A. Neguţ, "Quantum loop groups for arbitrary quivers," arXiv:2209.09089 [math.RT].

[191] T. Procházka and A. Watanabe, "On Bethe equations of 2d conformal field theory," arXiv:2301.05147 [hep-th].

[192] A. Mironov, A. Morozov, and S. Natanzon, "Complete Set of Cut-and-Join Operators in Hurwitz-Kontsevich Theory," Theor. Math. Phys. **166** (2011) 1–22, arXiv:0904.4227 [hep-th].

[193] O. Schiffmann and E. Vasserot, "Cherednik algebras, W algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on A^2," arXiv:1202.2756 [math.QA].

[194] A. Smirnov, "Quantum differential and difference equations for $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$," arXiv:2102.10726 [math.AG].

[195] A. Litvinov and I. Vilkoviskiy, "Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz," JHEP **12** (2020) 100, arXiv:2007.00535 [hep-th].

[196] E. Chistyakova, A. Litvinov, and P. Orlov, "Affine Yangian of $\mathfrak{gl}(2)$ and integrable structures of superconformal field theory," JHEP **03** (2022) 102, arXiv:2110.05870 [hep-th].

[197] D. Kolyaskin, A. Litvinov, and A. Zhukov, "R-matrix formulation of affine Yangian of gl^(1|1)," Nucl. Phys. B **985** (2022) 116023, arXiv:2206.01636 [hep-th].

[198] V. Mishnyakov and I. Myakutin, "Superintegrability of the monomial Uglov matrix model," arXiv:2403.19538 [hep-th].

[199] A. Mironov and A. Morozov, "On Hamiltonians for Kerov functions," Eur. Phys. J. C **80** no. 3, (2020) 277, arXiv:1908.05176 [hep-th].

[200] G. Noshita and A. Watanabe, "A note on quiver quantum toroidal algebra," JHEP **05** (2022) 011, arXiv:2108.07104 [hep-th].

[201] G. Noshita and A. Watanabe, "Shifted quiver quantum toroidal algebra and subcrystal representations," JHEP **05** (2022) 122, arXiv:2109.02045 [hep-th].

[202] D. Galakhov, A. Morozov, and N. Tselousov, "Super-Schur polynomials for Affine Super Yangian $\mathrm{Y}(\hat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$," JHEP **08** (2023) 049, arXiv:2307.03150 [hep-th].

[203] A. A. Belavin, M. A. Bershtein, and G. M. Tarnopolsky, "Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity," JHEP **03** (2013) 019, arXiv:1211.2788 [hep-th].

[204] H. Nakajima, "Jack polynomials and Hilbert schemes of points on surfaces," 1996.

[205] A. Mironov and A. Morozov, "On generalized Macdonald polynomials," JHEP **01** (2020) 110, arXiv:1907.05410 [hep-th].

[206] D. Galakhov, W. Li, and M. Yamazaki, "Toroidal and elliptic quiver BPS algebras and beyond," JHEP **02** (2022) 024, arXiv:2108.10286 [hep-th].

[207] M. Rapcak, Y. Soibelman, Y. Yang, and G. Zhao, "Cohomological Hall algebras and perverse coherent sheaves on toric Calabi-Yau 3-folds," arXiv:2007.13365 [math.QA].

[208] O. Khlaif and T. Kimura, "Virasoro constraint for Uglov matrix model," JHEP **04** (2022) 029, arXiv:2201.06839 [hep-th].

[209] S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov, "Eigenvalue hypothesis for multistrand braids," Phys. Rev. D **97** no. 12, (2018) 126015, arXiv:1711.10952 [hep-th].

[210] N. Chbili and V. K. Singh, "Colored HOMFLY-PT polynomials of quasi-alternating 3-braid knots," arXiv:2202.09169 [hep-th].

Приложение А

Древесная техника вычислений ХОМФЛИ

Большинство вычислений инвариантов ХОМФЛИ в данной работе выполнены для древесных и почти древесных узлов [15, 209, 210], причем мы ограничились рассмотрением симметрических представлений. Мы приведем основные формулы древесной техники [15], для которой требуется лишь две исключительные матрицы Рака S и $\bar{S}$, что сильно упрощает вычисления.

В вычислениях задействованы всего 4 матрицы: $S, \bar{S}, T, \bar{T}$. Собственные значения $\mathcal{R}$-матриц в симметричных представлениях $R = [r]$ в двух каналах $[r] \otimes [r]$ и $[r] \otimes \overline{[r]}$ имеют очень простой вид

$$T = \mathrm{diag}\Big((-)^{r+i-1} q^{-r^2+i(i-1)} A^{-r}\Big), \qquad \bar{T} = \mathrm{diag}\Big((-)^{r+i} q^{(i-1)(i-2)} A^{i-1}\Big), \tag{A.0.1}$$

где $i = 1, \ldots, r+1$. Для симметрических представлений матрицы Рака S, которые меняют местами каналы $[r] \otimes \overline{[r]}$ и $\overline{[r]} \otimes \overline{[r]}$ и матрицы Рака $\bar{S}$, действующие в пространстве $\overline{[r]} \otimes \overline{[r]}$, также хорошо известны [17]. В данном случае индексы пробегают значения $i, j = 1, \ldots, r+1$

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{\bar{d}_i}{d_j}} \cdot \alpha_{i-1,j-1}, \qquad \bar{S}_{ij} = \sqrt{\frac{\bar{d}_i}{\bar{d}_j}} \cdot \bar{\alpha}_{i-1,j-1}, \tag{A.0.2}$$

где d_X и $\bar{d}_X$ — квантовые размерности представлений из $[r] \otimes [r]$ и $[r] \otimes \overline{[r]}$ соответственно.

Учитывая, что $[r]\otimes[r]=\bigoplus_{j=1}^{r+1}[r+j-1,r-j+1]$ и $[r]\otimes\overline{[r]}=\bigoplus_{i=1}^{r+1}[2(i-1),(i-1)^{N-2}]$

$$\begin{aligned} d_j=\dim_{[r+j-1,r-j+1]}&:=\frac{[2j-1]_q}{\prod_{i=1}^{r+j}[i]_q\prod_{i=1}^{r+1-j}[i]_q}\cdot\prod_{i=1}^{r+j-2}\{Aq^i\}\prod_{i=-1}^{r-1-j}\{Aq^i\},\\ \bar{d}_i=\dim_{[2(i-1),(i-1)^{N-2}]}&:=\frac{\{Aq^{2i-3}\}}{\{q\}}\frac{\{Aq^{-1}\}}{\{q\}}\prod_{j=0}^{i-3}\left(\frac{\{Aq^j\}}{\{q\}[j+2]_q}\right)^2,\quad i>1,\end{aligned}\tag{A.0.3}$$

где следует положить $\bar{d}_1=1$. Матричные элементы $S,\bar{S}$ сделаны из 6-j символов [17]

$$\begin{pmatrix}\alpha_{km}(r)\\ \\ \bar{\alpha}_{km}(r)\end{pmatrix}=\frac{(-)^{r+k+m}[2m+1]_q\Big([k]_q![m]_q!\Big)^2[r-k]_q![r-m]_q!}{[r+k+1]_q![r+m+1]_q!}\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=\max(r+m,r+k)}^{\min(r+k+m,2r)}\frac{(-)^j[j+1]_q!}{[2r-j]_q!\Big([j-r-k]_q![j-r-m]_q![r+k+m-j]_q!\Big)^2}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathcal{D}_{r-m}\mathcal{D}_{j+1}}{\mathcal{D}_{r+k+1}\mathcal{D}_{j-r-m}}\\ \\ \frac{\mathcal{D}_m^2\mathcal{D}_{j+1}}{\mathcal{D}_{r+k+1}\mathcal{D}_{r+m+1}\mathcal{D}_{r+k+m-j}}\end{pmatrix},\tag{A.0.4}$$

где величины $\mathcal{D}_n:=\frac{1}{[n]_q!}\prod_{j=-1}^{n-2}\{Aq^j\}$ отвечают за отклонение от случая $\mathfrak{sl}_2$, когда $A=q^2$ и $\mathcal{D}_n=1$. Например, используя явный вид матриц и квантовых размерностей для фундаментального представления $r=[1]$

$$\begin{aligned} S_{[1]}&=\frac{1}{\sqrt{[2]_q\{A\}}}\begin{pmatrix}\sqrt{\{A/q\}}&\sqrt{\{Aq\}}\\ \sqrt{\{Aq\}}&-\sqrt{\{A/q\}}\end{pmatrix} & \bar{S}_{[1]}&=\frac{\{q\}}{\{A\}}\begin{pmatrix}1&\frac{\sqrt{\{Aq\}\{A/q\}}}{\{q\}}\\ \frac{\sqrt{\{Aq\}\{A/q\}}}{\{q\}}&-1\end{pmatrix}\\ T_{[1]}&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{Aq}&0\\ 0&\frac{q}{A}\end{pmatrix} & \bar{T}_{[1]}&=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&-A\end{pmatrix}\\ d_1&=\frac{\{A\}\{A/q\}}{\{q\}^2[2]_q} & \bar{d}_1&=1\\ d_2&=\frac{\{A\}\{Aq\}}{\{q\}^2[2]_q} & \bar{d}_2&=\frac{\{A/q\}\{Aq\}}{\{q\}^2}\end{aligned}\tag{A.0.5}$$

можно вычислить фундаментальные полиномы ХОМФЛИ для $3_1=\mathrm{Pr}(1,1,1)$ и $4_1=\mathrm{Pr}(-1,1,1)$

$$\begin{aligned} H_{[1]}^{(1,1,1)}&=d_{[1]}^2\left(\frac{\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}S_{[1]}\right)_{1,1}^3}{\sqrt{d_1}}+\frac{\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}S_{[1]}\right)_{1,2}^3}{\sqrt{d_2}}\right)=-A^4+A^2q^2+\frac{A^2}{q^2},\\ H_{[1]}^{(-1,1,1)}&=d_{[1]}^2\left(\frac{\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}^{-3}S_{[1]}\right)_{1,1}\cdot\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}S_{[1]}\right)_{1,1}^2}{\sqrt{d_1}}+\frac{\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}^{-3}S_{[1]}\right)_{1,2}\cdot\left(\bar{S}_{[1]}\bar{T}_{[1]}S_{[1]}\right)_{1,2}^2}{\sqrt{d_2}}\right)=\\ &=A^2+\frac{1}{A^2}-q^2-\frac{1}{q^2}+1.\end{aligned}\tag{A.0.6}$$

Перечислим простейшие возможные типы пропагаторов [15] – элементарных строительных блоков в древесной технике, которые обычно называют крендельными "пальцами" (см. Рис.А.1 , Рис.А.2 и Рис.А.3).

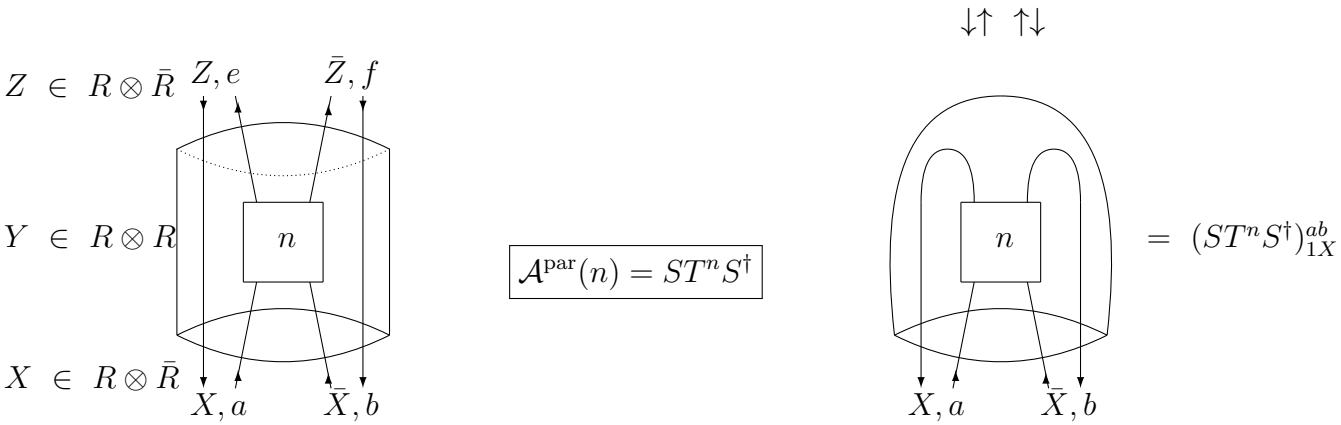


Рис. А.1: Пропагаторы для параллельных кос.

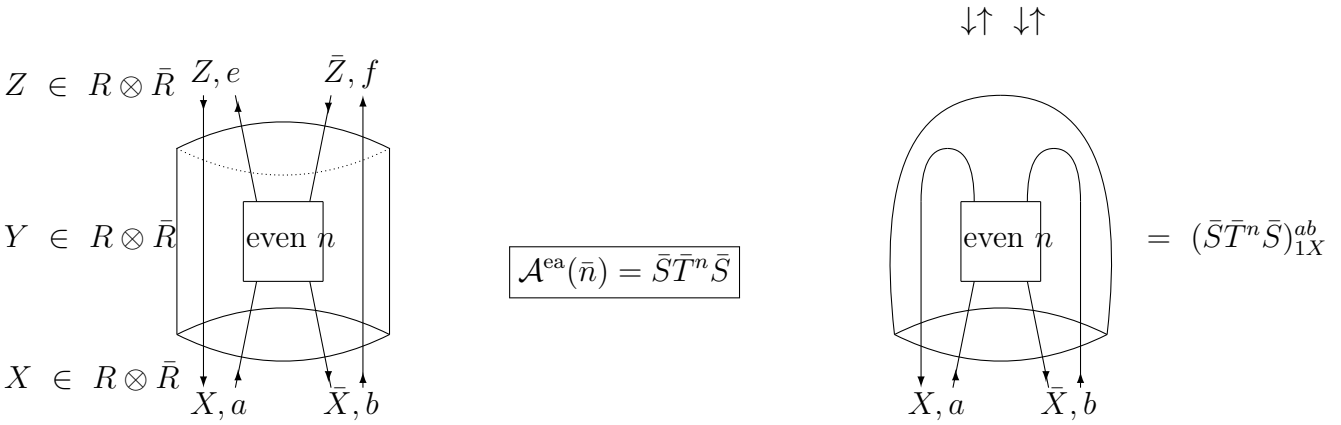


Рис. А.2: Пропагаторы для четных анти-параллельных кос.

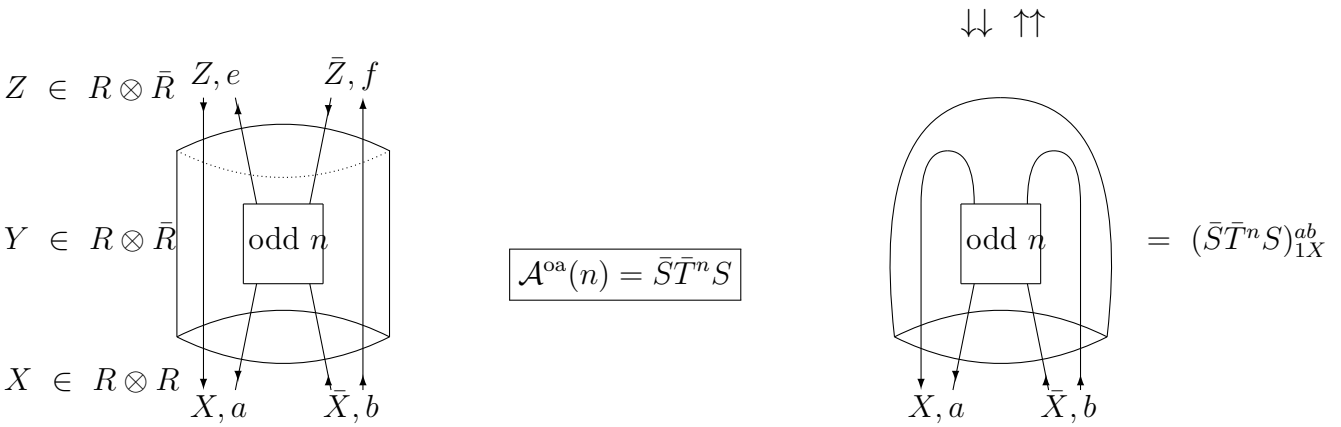


Рис. А.3: Пропагаторы для нечетных анти-параллельных кос.