Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи



Овчаренко Михаил Александрович

УДК: 512.7

# Взвешенные полные пересечения и зеркальная симметрия для многообразий Фано

1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в отделе алгебраической геометрии Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: **Пржиялковский Виктор Владимирович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела алгебраической геометрии ФГБУН Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.01.06).

Официальные оппоненты: **Батырев Виктор Вадимович**, кандидат физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Центра фундаментальной математики ФГАОУ ВО "Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)" (специальность — 01.01.06).

**Петров Виктор Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, декан Факультета математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (специальность — 1.1.5).

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 18 сентября 2025 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова и на сайте
`https://mi-ras.ru/dis/ref25/ovcharenko/dis.pdf`.

Автореферат разослан "  " июня 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03,
д.ф.-м.н., профессор РАН  Д. В. Осипов

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** *Многообразиями Фано* называются проективные алгебраические многообразия с обильным антиканоническим классом. Наиболее простыми примерами многообразий Фано являются проективные пространства $\mathbb{P}^N$, гладкие гиперповерхности $X_d \subset \mathbb{P}^N$ степени $d \leqslant N$ и гладкие полные пересечения $X_{(d_1,\ldots,d_c)} \subset \mathbb{P}^N$ степеней $d_j$ таких, что $\sum d_j \leqslant N$. В диссертации рассматриваются гладкие многообразия Фано (если не оговорено обратное).

Многообразия Фано образуют один из важнейших классов проективных алгебраических многообразий. С точки зрения дифференциальной геометрии гладкие комплексные многообразия Фано — это в точности компактные кэлеровы многообразия с положительной кривизной Риччи (например, см. [8, Section 7]). Согласно программе минимальных моделей любое многообразие отрицательной кодаировой размерности бирационально эквивалентно расслоению на многообразия Фано (т.н. *расслоению Мори*, см. [24]). Также они имеют богатую геометрию: например, они являются рационально связными (см. [23, Theorem 0.1]).

Более того, многообразия Фано заданной размерности допускают явную классификацию. Для простоты ограничимся случаем гладких многообразий Фано над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Классификация многообразий Фано малой размерности хорошо известна: в размерности 1 любое многообразие Фано изоморфно $\mathbb{P}^1$, а в размерности 2 многообразие Фано, обычно называемое *поверхностью дель Пеццо*, изоморфно $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или раздутию $\mathbb{P}^2$ не более чем в 8 точках, находящихся в общем положении. Классификация гладких многообразий Фано в размерности 3 была получена Исковских–Мори–Мукаи (см. [20, 25]). Согласно этой классификации существует ровно 105 деформационных семейств гладких трёхмерных многообразий Фано.

Классификация многообразий Фано более высокой размерности в общем случае неизвестна, хотя в случае гладких торических многообразий Фано размерности 4 полная классификация была получена Батыревым в [9]. Согласно результату Коллара–Мияоки–Мори (см. [23, Theorem 0.2]) число деформационных семейств гладких многообразий Фано любой заданной размерности конечно, так что задача о классификации корректно поставлена в любой размерности.

Одним из подходов к классификации многообразий Фано являются методы *зеркальной симметрии*. Согласно гипотезе зеркальной симметрии, многообразиям Фано соответствуют одномерные семейства многообразий Калаби–Яу,

называемые *моделями Ландау–Гинзбурга*. Неформально говоря, при этом сопоставлении алгебро-геометрические свойства моделей Ландау–Гинзбурга должны отражать симплектические свойства многообразий Фано, и наоборот.

Существуют различные подходы к зеркальной симметрии многообразий Фано. Одним из предсказаний *гомологической зеркальной симметрии* является то, что многообразию Фано $X$ с гладким антиканоническим дивизором $V$, рассмотренному как пара лог-Калаби–Яу $(X, V)$, должна соответствовать зеркальная пара лог-Калаби–Яу $(Z, D)$. При этом компактификация открытого многообразия $X \setminus V$ до $X$ зеркально соответствует тому, что дополнение $Y = Z \setminus D$ снабжается собственной функцией $\mathsf{w} : Y \to \mathbb{C}$ (см. [7, 22]). С точки зрения *зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа* регуляризованный квантовый $D$-модуль многообразия Фано $X$ отождествляется с $D$-модулем Пикара–Фукса модели Ландау–Гинзбурга $\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{C}$ (см. [16, 17]). Согласно подходу Батырева (см. [10, 11]), естественно ожидать, что если $X$ — многообразие Фано, допускающее вырождение в торическое многообразие $T$, то тогда модель Ландау–Гинзбурга для многообразия $X$ допускает открытую карту $(\mathbb{C}^*)^n$, на которую функция $\mathsf{w}$ ограничивается как многочлен Лорана $\mathsf{p}$, чей многогранник Ньютона является веерным многогранником торического вырождения $T$.

Подход к классификации многообразий Фано через зеркальную симметрию можно коротко охарактеризовать следующим образом (см. [6, 14]).

1. Построить явную биекцию между множеством деформационных семейств многообразий Фано и некоторым подклассом многочленов Лорана.
2. Научиться восстанавливать деформационное семейство многообразий Фано по данному многочлену Лорана.

В данном подходе наиболее сложной частью является характеризация многочленов Лорана, реализующихся как модели Ландау–Гинзбурга многообразий Фано. Ожидается, что гладкие многообразия Фано допускают $\mathbb{Q}$-горенштейновы торические вырождения, и их деформационные семейства однозначно соответствуют классам мутационной эквивалентности т.н. *жёстких максимально мутационных* многочленов Лорана (см. [13, Conjecture 5.1]). Известно, что это так для гладких поверхностей дель Пеццо (см. [13, Theorem 3.12]) и трёхмерных многообразий Фано с очень обильным антиканоническим классом (и многочленов Лорана с рефлексивным многогранником Ньютона) (см. [13, Theorem 4.1]).

Другим естественным подходом к классификации многообразий Фано высокой размерности является классификация отдельных подклассов данных

многообразий. Одним из наиболее естественных кандидатов на эту роль являются полные пересечения во взвешенных проективных пространствах, также известные как *взвешенные полные пересечения*. Как и торические многообразия, они дают множество геометрических примеров, позволяющих делать эффективные вычисления: алгебраические, геометрические и комбинаторные.

Известно, что любое гладкое полное пересечение Фано с числом Пикара 1 в торическом многообразии является взвешенным полным пересечением (при естественном требовании *хорошо сформированности*, см. [30]). Отметим, что гладкие взвешенные полные пересечения Фано допускают торические вырождения (см. [19]), но они, как правило, не являются горенштейновыми. Это приводит к тому, что к ним гораздо труднее применять методы зеркальной симметрии (например, см. [28]). Таким образом, гладкие взвешенные полные пересечения Фано (и их различные естественные обобщения) образуют важную часть классификации многообразий Фано с числом Пикара 1.

**Цели и задачи работы.** Описание классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано относительно отклонения. Доказательство согласованности зеркальной симметрии для гладких трёхмерных многообразий Фано с зеркальной симметрией решёточно поляризованных K3 поверхностей. Явное описание взвешенных грассманианов и их геометрических инвариантов.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются полностью новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Предъявлен явный способ построения классификации взвешенных полных пересечений Фано любого заданного отклонения. Показано, что такая классификация исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.

2. Показано, что для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано $X$ естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решётки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ двойственна по Долгачёву–Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга решёткой инвариантов монодромии. Данные решётки явно вычислены в каждом случае.

3. Для взвешенных грассманианов получена явная параметризация возможных $\mathbb{Z}$-градуировок на координатах Плюккера, в терминах которой явно описаны дуализирующий пучок и ряд Гильберта. Предложенный общий подход применим к любым взвешенным обобщённым грассманианам.

**Значимость.** Работа носит теоретический характер.

**Достоверность результатов и апробация работы.** Результаты работы снабжены строгими доказательствами. Результаты опубликованы в рецензируемых журналах *International Journal of Mathematics*, *Математический сборник*, *Труды МИАН* и *Сибирские электронные математические известия*. Результаты докладывались на семинарах МИАН, НИУ ВШЭ, МГУ и University of Nottingham, United Kingdom, а также на различных конференциях, таких как

- совместная конференция НИУ ВШЭ и BIMSA по алгебраической геометрии и математической физике (НИУ ВШЭ, 2024);
- однодневная конференция памяти В. А. Исковских (МИАН, 2023);
- "Молодёжный забег МЦМУ МИАН" (МИАН, 2023);
- "Дни геометрии в Новосибирске" (ИМ СО РАН, 2022);
- "Геометрия и гомологическая зеркальная симметрия" (Сириус, 2021);
- конференция международных математических центров мирового уровня (Сириус, 2021), а также других конференциях.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1, 2, 3, 4, 5]. Результаты совместной работы [3], выносимые на защиту, получены автором лично. Журналы, в которых опубликованы статьи [1, 2, 3, 4, 5], индексируются в базах данных Web of Science и Scopus.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 111 наименований. Общий объём диссертации — 132 страницы.

# Краткое содержание работы

В **главе 1** изучается классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано. Основной результат данной главы состоит в следующем.

**Теорема** (см. теоремы 1.2.17 и 1.2.21)**.** *Классификация взвешенных полных пересечений Фано заданного отклонения может быть явно построена и исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.*

Более точно, в разделе 1.1 перечислены различные предварительные результаты о взвешенных полных пересечениях. В разделе 1.3 доказаны результаты, описанные в разделе 1.2. А именно, в подразделе 1.3.1 явно строится разбиение множества семейств взвешенных полных пересечений Фано на серии и полусерии гладких взвешенных полных пересечений Фано (предложения 1.2.12 и 1.2.14); в подразделе 1.3.2 квадратичная иррегулярность гладкого взвешенного полного пересечения Фано ограничивается в терминах отклонения (теорема 1.2.17); в подразделе 1.3.3 ограничивается число серий и полусерий гладких взвешенных полных пересечений Фано в терминах отклонения (теорема 1.2.21).

Помимо этого, в разделе 4 доказывается, что антиканоническая линейная система на гладком взвешенном полном пересечении Фано антиканонической степени 1 никогда не свободна от базисных точек (теорема 1.2.23). Раздел 1.5 содержит вспомогательные утверждения из коммутативной алгебры, используемые в подразделах 1.1.1 и 1.3.1. Раздел 1.6 содержит список серий и полусерий гладких взвешенных полных пересечений Фано отклонения вплоть до 4.

**Глава 2** посвящена зеркальной симметрии для гладких многообразий Фано. В разделе 2.1 приводятся основные сведения об инвариантах Громова–Виттена, торических моделях Ландау–Гинзбурга, решёточно поляризованных K3 поверхностях и двойственности Долгачёва–Никулина.

В разделе 2.2 обсуждается задача существования *неф-разбиений* для гладких взвешенных полных пересечений Фано. Напомним, что неф-разбиение является ключевым ингредиентом конструкции Гивенталя и Батырева моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений (см. [16, 27]). Ожидается, что оно существует для любого гладкого взвешенного полного пересечения Фано, но это доказано лишь в отдельных случаях. В подразделе 2.2.2 доказывается следующий достаточный критерий для существования *сильного* неф-разбиения.

**Теорема** (см. теорему 2.2.10)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что любое неделимое подмножество $I \subset \{0, \ldots, N\}$ является сильно неделимым (см. определение 2.2.8). Тогда многообразие $X$ допускает явно строящееся сильное неф-разбиение.*

Как было упомянуто ранее, существуют различные подходы к зеркальной симметрии для многообразий Фано. Возникает естественный вопрос о том, насколько они согласованы друг с другом. В разделе 2.3 такая согласованность проверяется для трёхмерных многообразий Фано. Напомним, что зеркальное соответствие для многообразий Фано строится через зеркальное соответствие их антиканонических сечений (являющихся многообразиями Калаби–Яу). Более того, общие антиканонические сечения трёхмерного многообразия Фано и общие слои его модели Ландау–Гинзбурга являются К3 поверхностями, так что естественно рассмотреть зеркальную симметрию между ними. С одной стороны, мы можем сопоставить трёхмерным многообразиям Фано их *торические модели Ландау–Гинзбурга* (см. [29]). С другой стороны, одной из наиболее известных форм зеркальной симметрии является *двойственность Долгачёва–Никулина* (см. [15]): по решётке $L$ она сопоставляет полному семейству $L$-поляризованных К3 поверхностей полное семейство $L^\vee$-поляризованных К3 поверхностей, где решётка $L^\vee$ — т.н. *двойственная по Долгачёву–Никулину*, т.е., $L^\vee \simeq (L \oplus H)^\perp$ в решётке вторых когомологий. Основным результатом главы 2 является доказательство выполнения двойственности Долгачёва–Никулина для слоёв торических моделей Ландау–Гинзбурга для трёхмерных многообразий Фано.

**Теорема** (см. теорему 2.3.4)**.** *Для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано $X$ естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решётки Пикара* $\mathrm{Pic}(X)$ *двойственна по Долгачёву–Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной (см. определение 2.3.3) торической модели Ландау–Гинзбурга решёткой инвариантов монодромии. Данные решётки явно вычислены в каждом случае.*

Также для каждого трёхмерного многообразия Фано вида $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где $S$ — гладкая поверхность дель Пеццо с очень обильным антиканоническим классом, проверено, что для любого выбора дивизора $D \subset X$ для общих слоёв

компактификации торической модели Ландау–Гинзбурга пары $(X, D)$ также имеет место двойственность Долгачёва–Никулина (предложение 2.3.7).

В подразделе 2.3.6 разбирается один случай из классификации Мори–Мукаи (дивизора бистепени $(1,1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$). Ввиду крайней объёмности вычислений, необходимых для доказательства теоремы 2.3.4 и предложения 2.3.7, все остальные случаи из классификации Мори–Мукаи, а также случаи параметризованных торических моделей Ландау–Гинзбурга разобраны в [3, приложения Б–Е] абсолютно аналогичным образом.

В **главе 3** изучаются полные пересечения в обобщённых грассманианах и их взвешенных аналогах. Хорошо известно (см. [12, 26]), что среди всех гладких многообразий Фано с числом Пикара 1 важный подкласс также образуют полные пересечения в обобщённых грассманианах. Поэтому возникает естественный вопрос о том, как устроены взвешенные аналоги обобщённых грассманианов и полные пересечения в них. В разделе 3.1 кратко изложены основные факты о полных пересечениях в пространствах мечты Мори и кольцах Кокса.

Напомним классическую теорему Белого: гладкая комплексная проективная кривая $X$ может быть определена над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует сюръективный морфизм $X \to \mathbb{P}^1$, неразветвлённый над дополнением $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. По ряду причин естественно ожидать, что существуют многомерные аналоги теоремы Белого: для поверхностей общего типа такой результат был получен Гонзалезом-Диезом в [18]. Его подход был обобщён Джаванпейкаром в [21] на полные пересечения общего типа в $\mathbb{P}^n$. В подразделе 3.2.1 доказан многомерный аналог критерия Белого для гладких полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах.

**Теорема** (см. теоремы 3.2.7 и 3.2.8)**.** *Пусть $Y$ — обобщённый грассманиан или взвешенное проективное пространство, и $X \subset Y$ — гладкое хорошо сформированное комплексное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3. Многообразие $X$ может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ (см. определение 3.2.2) с не более чем 3 критическими точками.*

Таким образом, и задача о классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано, рассмотренная в главе 1, и предложенный аналог теоремы Белого приводят к рассмотрению полных пересечений во *взвешенных обобщённых грассманианах* — замкнутых подмногообразиях во взвешенных проективных

пространствах, заданных однородными соотношениями Плюккера. В разделе 3.3 получено явное описание взвешенных грассманианов и вычислена степень антиканонического дивизора и ряд Гильберта. В подразделе 3.3.1 предложена модифицированная конструкция взвешенного обобщённого грассманиана. Описано, как можно получить $\mathbb{Z}$-градуировку из данных теории представлений. Обсуждаются базовые геометрические свойства взвешенных обобщённых грассманианов. В подразделе 3.3.2 описана явная параметризация $\mathbb{Z}$-градуировок для взвешенных грассманианов. В подразделе 3.3.3 описаны дуализирующий пучок и ряд Гильберта взвешенного грассманиана.

**Теорема** (см. теоремы 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.6)**.** *Любой взвешенный грассманиан изоморфен подмногообразию вида* $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}$*, где многообразия* $Y$ *и* $\mathbb{P}$ *определены следующим образом.*

*Пусть* $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$*,* $W = \wedge^k(V)$ *— фундаментальное представление группы* $G = \mathrm{SL}(V)$*. Выберем плюккеровы координаты на* $V$ *и* $W$*:*

$$\mathrm{Sym}(V^\vee) \simeq \Bbbk[T_0, \dots, T_n], \quad \mathrm{Sym}(W^\vee) \simeq \Bbbk[\{T_{i_1<\dots<i_k}\}].$$

*Определим* $\mathbb{P}$ *как взвешенное проективное пространство, заданное следующей* $\mathbb{Z}_+$*-градуировкой на векторном пространстве* $W$*:*

$$\deg(T_{i_1<\dots<i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > 0,$$

*а подмногообразие* $Y \subset \mathbb{P}$ *зададим обычными соотношениями Плюккера.*

*Если* $Y \subset \mathbb{P}$ — хорошо сформированный *взвешенный грассманиан, то дуализирующие пучки для многообразий* $Y$ *и* $\mathbb{P}$ *явно описаны в теореме 3.3.3. Явная формула для ряда Гильберта приведена в теореме 3.3.6.*

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертации.

# Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю В. В. Пржиялковскому за постановку задач и поддержку на всех этапах подготовки диссертации, а также К. А. Шрамову за полезные обсуждения и замечания.

# Публикации по теме диссертации


[1] Ovcharenko, M. «On the existence of nef-partitions for smooth well-formed Fano weighted complete intersections». В: *Siberian Electronic Mathematical Reports* 20.2 (2023), с. 1405—1419.

[2] Ovcharenko, M. «The classification of smooth well-formed Fano weighted complete intersections». В: *International Journal of Mathematics* 34.11, 2350064 (2023).

[3] Доран, Ч., Хардер, Э., Кацарков, Л., Овчаренко, М. А. и Пржиялковский, В. В. «Модулярность моделей Ландау–Гинзбурга». В: *Труды МИАН* 328 (2025), с. 165—310.

[4] Овчаренко, М. А. «Взвешенные грассманианы и их явное описание». В: *Труды МИАН* 329 (2025).

[5] Овчаренко, М. А. «Теорема Белого для гладких полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах». В: *Математический сборник* 216.6 (2025), с. 59—76.

# Литература


[6] Akhtar, M., Coates, T., Corti, A., Heuberger, L., Kasprzyk, A., Oneto, A., Petracci, A., Prince, T. и Tveiten, K. «Mirror symmetry and the classification of orbifold del Pezzo surfaces». В: *Proceedings of the American Mathematical Society* 144.2 (2016), с. 513—527.

[7] Auroux, D. «Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor». В: *Journal of Gökova Geometry Topology* 1 (2007), с. 51—91.

[8] Ballmann, W. *Lectures on Kähler manifolds*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society, 2017.

[9] Batyrev, V. «On the classification of toric Fano 4-folds». В: *Journal of Mathematical Sciences* 94.1 (1999), с. 1021—1050.

[10] Batyrev, V. «Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds». В: The Fano conference. Università di Torino. 2004, с. 109—122.

[11] Batyrev, V., Kim, B., Ciocan-Fontanine, I. и Straten, D. van. «Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds». В: *Acta Mathematica* 184.1 (2000), с. 1—39.

[12] Biase, L. D., Fatighenti, E. и Tanturri, F. «Fano 3-folds from homogeneous vector bundles over Grassmannians». В: *Revista Matemática Complutense* 35 (2022), с. 649—710.

[13] Coates, T., Kasprzyk, A., Pitton, G. и Tveiten, K. «Maximally mutable Laurent polynomials». В: *Proceedings of the Royal Society A* 477, 20210584 (2021).

[14] Coates, T., Kasprzyk, A. и Prince, T. «Laurent inversion». В: *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 15.4 (2019), с. 1135—1179.

[15] Dolgachev, I. «Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces». В: *Journal of Mathematical Sciences* 81.3 (1996), с. 2599—2630.

[16] Givental, A. «A Mirror Theorem for Toric Complete Intersections». В: *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics*. Progress in Mathematics 160. Birkhäuser, 1998, с. 141—175.

[17] Golyshev, V. «Modularity of equations D3 and the Iskovskikh classification». В: *Doklady Mathematics* 69.3 (2004), с. 443—449.

[18] González-Diez, G. «Belyi's theorem for complex surfaces». В: *American Journal of Mathematics* 130.1 (2008), с. 59—74.

[19] Ilten, N., Lewis, J. и Przyjalkowski, V. «Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau–Ginzburg Models». В: *Journal of Algebra* 374 (2013), с. 104—121.

[20] Iskovskikh, V. и Prokhorov, Y. *Fano Varieties*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 47. Springer, 1999.

[21] Javanpeykar, A. «Belyi's theorem for complete intersections of general type». В: *Michigan Mathematical Journal* 66.1 (2017), с. 85—97.

[22] Katzarkov, L., Kontsevich, M. и Pantev, T. «Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models». В: *Journal of Differential Geometry* 105.1 (2017), с. 55—117.

[23] Kollár, J., Miyaoka, Y. и Mori, S. «Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds». В: *Journal of Differential Geometry* 36.3 (1992), с. 765—779.

[24] Matsuki, K. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer, 2092.

[25] Mori, S. и Mukai, S. «Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geqslant 2$». В: *Manuscripta mathematica* 36.2 (1981), с. 147—162.

[26] Mukai, S. «Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* 86 (1989), с. 3000—3002.

[27] Przyjalkowski, V. и Shramov, C. «Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections». В: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V* 19.3 (2019), с. 827—845.

[28] Пржиялковский, В. В. «Об особых компактификациях лог-Калаби–Яу моделей Ландау–Гинзбурга». В: *Математический сборник* 213.1 (2022), с. 95—118.

[29] Пржиялковский, В. В. «Торические модели Ландау–Гинзбурга». В: *Успехи математических наук* 73.6 (2018), с. 95—190.

[30] Пржиялковский, В. В. и Шрамов, К. А. «Гладкие полные пересечения Фано основной серии в торических многообразиях». В: *Математические заметки* 109.4 (2021), с. 590—596.