УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора Федерального
государственного бюджетного учреждения науки
Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

А.Е. Миронов

«25» августа 2025

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Овчаренко Михаила Александровича «Взвешенные полные пересечения и зеркальная симметрия для многообразий Фано», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Классификация многообразий Фано — одна из центральных задач алгебраической геометрии, имеющая фундаментальное значение как для чистой математики, так и для приложений в математической физике. А именно, их изучение помогает понять общие закономерности бирациональной геометрии, особенно в рамках программы Мори. Кроме того, этот класс проективных многообразий играет важную роль в теории чисел, дифференциальной геометрии и теории струн.

Классификация гладких трехмерных многообразий Фано была получена в работах Исковского, а также Мори и Мукаи в 1980-х годах. Хотя для размерности ≥ 4 полной классификации не построено, известно, что число деформационных семейств многообразий Фано любой фиксированной размерности конечно.

Одним из подходов к классификации многообразий Фано является использование метода зеркальной симметрии, корни которого уходят в модели теории струн в математической физике. Математическое выражение этого подхода (гипотеза Голышева) было глубоко исследовано в работах Кацаркова, Концевича, Пржиялковского и др.

Взвешенные полные пересечения (weighted complete intersections — WCI) образуют важный и нетривиальный подкласс многообразий Фано, играющий ключевую роль в их классификации и приложениях. Их изучение позволяет конструктивно описывать многообразия с положительной первой формой Чженя.

Цель представленной работы состоит в том, чтобы описать гладкие взвешенные полные пересечения Фано с различными значениями инварианта «отклонения», доказать согласованность зеркальной симметрии для гладких трехмерных многообразий Фано с зеркальной симметрией решеточно поляризованных K3 поверхностей, а также явно описать взвешенные грассманианы и их геометрические инварианты.

Основные результаты диссертации следующие:

1. Предложен способ построения классификации взвешенных полных пересечений Фано любого заданного отклонения. Показано, что такая классификация исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.

2. Показано, что для любого гладкого трехмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решетки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ двойственна по Долгачёву — Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной торической модели Ландау — Гинзбурга при помощи решетки инвариантов монодромии. Указанные решетки явно вычислены в каждом случае из классификации Исковских — Мори — Мукаи.

3. Для взвешенных грассманианов получена явная параметризация возможных $\mathbb{Z}$-градуировок на координатах Плюккера, в терминах которой явно описаны дуализирующий пучок и ряд Гильберта. Предложенный общий подход применим к любым взвешенным обобщенным грассманианам.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, изложена на 132 страницах.

Глава 1 посвящена классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано в хорошо сформированных взвешенных проективных пространствах. Основные результаты основаны на разбиении семейств всех таких пересечений на серии и полусерии в зависимости от отклонения $\mathrm{var}(X) = \mathrm{coind}(X) - \mathrm{codim}(X)$, получении оценок на квадратичную иррегулярность $s_2(X)$ и ее связи с отклонением. Как результат (следствие 1.2.24), число таких серий конечно. В заключительном разделе первой главы перечислены все такие серии и полусерии для значения отклонения от 0 до 4, включая размерности, степени и свойства аменабельности.

В главе 2 изучается зеркальная симметрия для гладких трехмерных многообразий Фано. Установлено достаточное условие существования сильного неф-разбиения гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано, не являющегося пересечением с линейным конусом. Введено понятие стандартной модели Ландау — Гинзбурга: это торическая модель, заданная жестким максимально мутационным многочленом Лорана. Доказано, что для любого гладкого трехмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решетки Пикара двойственна по Долгачёву — Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной модели Ландау — Гинзбурга при помощи решетки инвариантов монодромии. Двойственные решетки $\mathrm{Pic}(X)^\vee$ вычислены для ряда семейств гладких трехмерных многообразий Фано из классификации Мори — Мукаи.

В главе 3 рассматривается важный случай многообразий Фано — полных пересечений в обобщенных грассманианах, рассматриваемых как частный случай *пространств мечты Мори*. Установлен критерий, когда гладкое хорошо сформированное комплексное полное пересечение общего типа размерности ≥ 3 в таком грассманиане может быть определено над полем алгебраических чисел. Предложена модифицированная конструкция взвешенного обобщенного грассманиана как подмногообразия в проективном пространстве, построенном по фундаментальному представлению специальной линейной группы.

Работа носит теоретический характер. Научная значимость работы состоит в том, что в ней доказан ряд утверждений фундаментального характера о строении проективных алгебраических многообразий. Использованные методы сочетают алгебро-геометрические и комбинаторные подходы для описания структурных свойств многообразий Фано, при этом абстрактные теоретические построения сопровождаются явными вычислениями, демонстрирующими глубокие связи между алгебраической геометрией и теорией решеток.

Результаты являются новыми, изложены с полными доказательствами и представляют серьезный научный интерес. Полученные результаты и использованные методы могут быть использованы для дальнейшего развития алгебраической геометрии. Результаты диссертации могут представлять интерес для специалистов в Московском и Новосибирском государственных университетах, в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, ПОМИ РАН и Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Все основные результаты опубликованы в виде пяти статей в журналах Сибирские электронные математические известия, International Journal of Mathematics, Математический сборник и Труды МИАН, входящих в список изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук по математическим специальностям. Все вынесенные на защиту результаты получены автором лично. Результаты докладывались на ряде международных конференций в Москве (ВШЭ, МИАН), Новосибирске (ИМ СО РАН) и п.г.т. Сириус (образовательный центр «Сириус»). Автореферат правильно и точно отражает содержание диссертации.

Работа написана грамотным математическим языком, имеется весьма немного опечаток грамматического характера. Отметим не самую удачную компоновку содержания главы 1: выбранный способ изложения предполагает многочисленные ссылки на утверждения, приведенные ниже. Также заметим, что названия главы 1 и ее раздела 1.2 совпадают.

Суммируя сказанное выше, заключаем, что диссертационная работа М. А. Овчаренко представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, выполненную на актуальную тему современной алгебры. По своему содержанию и полученным в ней результатам диссертация отвечает требованиям ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Отзыв составлен д.ф.-м.н. П. С. Колесниковым, обсужден на заседании лаборатории алгебры ИМ СО РАН 20.08.2025.

В.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н. П.С. Колесников

И.о. зав. лабораторией алгебры
ИМ СО РАН, д.ф.-м.н М.А. Гречкосеева

«22» августа 2025 г.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ Со РАН)
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4. тел. 8(383) 333-28-92 e-mail: im@math.nsc.ru