Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Овчаренко Михаил Александрович

УДК: 512.7

Взвешенные полные пересечения и зеркальная симметрия для многообразий Фано

1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Пржиялковский Виктор Владимирович

Москва — 2025

Оглавление

Введение **4**

1 Классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано 15

1.1 Предварительные сведения 15

1.1.1 Взвешенные полные пересечения 15

1.1.2 Комбинаторика взвешенных полных пересечений 24

1.2 Классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано . 29

1.3 Серии и полусерии гладких взвешенных полных пересечений Фано 35

1.3.1 Структура серий и полусерий 35

1.3.2 Оценки на квадратичную иррегулярность 39

1.3.3 Оценки на число серий и полусерий данного отклонения . 42

1.4 Гладкие взвешенные полные пересечения Фано антиканонической степени 1 44

1.5 Регулярность общих последовательностей взвешенно-однородных многочленов 48

1.6 Список серий и полусерий малого отклонения 54

2 Зеркальная симметрия для гладких многообразий Фано 56

2.1 Предварительные сведения 56

2.1.1 Инварианты Громова–Виттена 56

2.1.2 Торические модели Ландау–Гинзбурга 58

2.1.3 Пространства модулей решёточно поляризованных K3 поверхностей и двойственность Долгачёва–Никулина 60

2.2 Неф-разбиения для гладких взвешенных полных пересечений Фано 62

2.2.1 Взвешенные симплициальные комплексы 65

2.2.2 Существование сильных неф-разбиений 70

2.3 Двойственность Долгачёва–Никулина для торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трёхмерных многообразий Фано . . . 73

2.3.1 Многочлены Минковского и очень обильное антиканоническое расслоение . . . 75
2.3.2 Сведение к антиканоническому пучку $\mathcal{S}$ . . . 75
2.3.3 Антиканонический пучок $\mathcal{S}$ и инварианты монодромии . . 76
2.3.4 Базисное множество антиканонического пучка $\mathcal{S}$ . . . 78
2.3.5 Вычисление решётки L_λ . . . 78
2.3.6 Пример вычислений: семейство №2.32 . . . 80

3 Полные пересечения в грассманианах и их взвешенных аналогах 82
3.1 Предварительные сведения . . . 82
3.1.1 Кольца Кокса и пространства мечты Мори . . . 82
3.1.2 Соответствие между замкнутыми подсхемами и однородными идеалами . . . 83
3.1.3 Полные пересечения в пространствах мечты Мори . . . 86
3.1.4 Сопряжённые полные пересечения . . . 88
3.2 Теорема Белого для полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах . . 89
3.2.1 Теорема Белого для допустимых полных пересечений . . . 92
3.2.2 Возможное обобщение доказательства . . . 97
3.3 Явное описание взвешенных грассманианов . . . 99
3.3.1 Взвешенные обобщённые грассманианы . . . 104
3.3.2 Параметризация $\mathbb{Z}$-градуировок взвешенных грассманианов 110
3.3.3 Геометрические инварианты взвешенных грассманианов . 117

Заключение 124

Публикации по теме диссертации 125

Литература 126

Введение

Актуальность темы. *Многообразиями Фано* называются проективные алгебраические многообразия с обильным антиканоническим классом. Наиболее простыми примерами многообразий Фано являются проективные пространства $\mathbb{P}^N$, гладкие гиперповерхности $X_d \subset \mathbb{P}^N$ степени $d \leqslant N$ и гладкие полные пересечения $X_{(d_1,\dots,d_c)} \subset \mathbb{P}^N$ степеней d_j таких, что $\sum d_j \leqslant N$. В диссертации рассматриваются гладкие многообразия Фано (если не оговорено обратное).

Многообразия Фано образуют один из важнейших классов проективных алгебраических многообразий. С точки зрения дифференциальной геометрии гладкие комплексные многообразия Фано — это в точности компактные кэлеровы многообразия с положительной кривизной Риччи (например, см. [13, Section 7]). Согласно программе минимальных моделей любое многообразие отрицательной кодаировой размерности бирационально эквивалентно расслоению на многообразия Фано (т.н. *расслоению Мори*, см. [73]). Также они имеют богатую геометрию: например, они являются рационально связными (см. [62, Theorem 0.1]).

Более того, многообразия Фано заданной размерности допускают явную классификацию. Для простоты ограничимся случаем гладких многообразий Фано над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Классификация многообразий Фано малой размерности хорошо известна: в размерности 1 любое многообразие Фано изоморфно $\mathbb{P}^1$, а в размерности 2 многообразие Фано, обычно называемое *поверхностью дель Пеццо*, изоморфно $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или раздутию $\mathbb{P}^2$ не более чем в 8 точках, находящихся в общем положении. Классификация гладких многообразий Фано в размерности 3 была получена Исковских–Мори–Мукаи (см. [57, 76]). Согласно этой классификации существует ровно 105 деформационных семейств гладких трёхмерных многообразий Фано.

Классификация многообразий Фано более высокой размерности в общем случае неизвестна, хотя в случае гладких торических многообразий Фано размерности 4 полная классификация была получена Батыревым в [14]. Согласно результату Коллара–Мияоки–Мори (см. [62, Theorem 0.2]) число деформацион-

ных семейств гладких многообразий Фано любой заданной размерности конечно, так что задача о классификации корректно поставлена в любой размерности.

Одним из подходов к классификации многообразий Фано являются методы *зеркальной симметрии*. Согласно гипотезе зеркальной симметрии, многообразиям Фано соответствуют одномерные семейства многообразий Калаби–Яу, называемые *моделями Ландау–Гинзбурга*. Неформально говоря, при этом сопоставлении алгебро-геометрические свойства моделей Ландау–Гинзбурга должны отражать симплектические свойства многообразий Фано, и наоборот.

Существуют различные подходы к зеркальной симметрии многообразий Фано. Одним из предсказаний *гомологической зеркальной симметрии* является то, что многообразию Фано X с гладким антиканоническим дивизором V, рассмотренному как пара лог-Калаби–Яу (X, V), должна соответствовать зеркальная пара лог-Калаби–Яу (Z, D). При этом компактификация открытого многообразия $X \setminus V$ до X зеркально соответствует тому, что дополнение $Y = Z \setminus D$ снабжается собственной функцией $\mathsf{w} : Y \to \mathbb{C}$ (см. [11, 59]). С точки зрения *зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа* регуляризованный квантовый D-модуль многообразия Фано X отождествляется с D-модулем Пикара–Фукса модели Ландау–Гинзбурга $\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{C}$ (см. [44, 46]). Согласно подходу Батырева (см. [15, 16]), естественно ожидать, что если X — многообразие Фано, допускающее вырождение в торическое многообразие T, то тогда модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X допускает открытую карту $(\mathbb{C}^*)^n$, на которую функция w ограничивается как многочлен Лорана p, чей многогранник Ньютона является веерным многогранником торического вырождения T.

Подход к классификации многообразий Фано через зеркальную симметрию можно коротко охарактеризовать следующим образом (см. [8, 29]).

1. Построить явную биекцию между множеством деформационных семейств многообразий Фано и некоторым подклассом многочленов Лорана.
2. Научиться восстанавливать деформационное семейство многообразий Фано по данному многочлену Лорана.

В данном подходе наиболее сложной частью является характеризация многочленов Лорана, реализующихся как модели Ландау–Гинзбурга многообразий Фано. Ожидается, что гладкие многообразия Фано допускают $\mathbb{Q}$-горенштейновы торические вырождения, и их деформационные семейства однозначно соответствуют классам мутационной эквивалентности т.н. *жёстких максимально мутационных* многочленов Лорана (см. [28, Conjecture 5.1]). Известно, что это так для

гладких поверхностей дель Пеццо (см. [28, Theorem 3.12]) и трёхмерных многообразий Фано с очень обильным антиканоническим классом (и многочленов Лорана с рефлексивным многогранником Ньютона) (см. [28, Theorem 4.1]).

Другим естественным подходом к классификации многообразий Фано высокой размерности является классификация отдельных подклассов данных многообразий. Одним из наиболее естественных кандидатов на эту роль являются полные пересечения во взвешенных проективных пространствах, также известные как *взвешенные полные пересечения*. Как и торические многообразия, они дают множество геометрических примеров, позволяющих делать эффективные вычисления: алгебраические, геометрические и комбинаторные.

Известно, что любое гладкое полное пересечение Фано с числом Пикара 1 в торическом многообразии является взвешенным полным пересечением (при естественном требовании *хорошо сформированности*, см. [108]). Отметим, что гладкие взвешенные полные пересечения Фано допускают торические вырождения (см. [56]), но они, как правило, не являются горенштейновыми. Это приводит к тому, что к ним гораздо труднее применять методы зеркальной симметрии (например, см. [105]). Таким образом, гладкие взвешенные полные пересечения Фано (и их различные естественные обобщения) образуют важную часть классификации многообразий Фано с числом Пикара 1.

Классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано Главным объектом, рассматриваемым в главе 1, является гладкое взвешенное полное пересечение Фано. Без ограничения общности мы считаем, что гладкие взвешенные полные пересечения также являются *квази-гладкими*, т.е., их проколотый аффинный конус является гладким (см. пример 1.1.27): геометрические свойства таких многообразий можно описывать в терминах весов и степеней. Условие гладкости и обильности антиканонического класса накладывают сильные ограничения на взвешенное полное пересечение. Например, несложно перечислить все полные пересечения Фано фиксированной размерности в обычном проективном пространстве. Однако для взвешенного проективного пространства это не так. Ченом–Ченом–Ченом и Пржиялковским–Шрамовым (см. [25, 85]) были получены эффективные ограничения на численные данные, определяющие взвешенное полное пересечение, позволяющие классифицировать такие многообразия для любой размерности. Однако на практике это позволяет классифицировать взвешенные полные пересечения лишь небольшой размерности, а число взвешенных

полных пересечений при увеличении размерности растёт. Поэтому естественной задачей является явное описание структуры классификации всех гладких взвешенных полных пересечений Фано.

Рассматривая классификацию гладких взвешенных полных пересечений Фано малой размерности, можно увидеть, что данные многообразия выстраиваются в серии: многообразие на единицу большей размерности можно получить, добавив к весам взвешенного проективного пространства две единицы и взяв пересечение с квадрикой. Естественным является следующий вопрос: конечно ли число таких серий при ограниченной коразмерности? А именно, Пржиялковский–Шрамов показали, что пересечение максимально возможной коразмерности (когда коиндекс равен коразмерности) — это полные пересечения квадрик (образующие серию), а на единицу меньшей коразмерности — пересечения квадрик и кубики. Другими словами, если назвать разность коиндекса и коразмерности *отклонением*, то были классифицированы пересечения отклонения 0 и 1.

Первый основной результат диссертации обобщает сформулированный выше результат Пржиялковского–Шрамова.

Теорема (см. теоремы 1.2.17 и 1.2.21)**.** *Классификация взвешенных полных пересечений Фано заданного отклонения может быть явно построена и исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.*

Для взвешенных полных пересечений Фано антиканонической степени 1 также показано, что их антиканоническая линейная система не является свободной от базисных точек. Из этого выведено, что такие многообразия не лежат ни в одной серии, и что из приведённого выше результата следует конечность числа их деформационных семейств для любого фиксированного значения отклонения. Также получена явная классификация серий и полусерий гладких взвешенных полных пересечений Фано отклонения вплоть до 4.

Зеркальная симметрия для гладких многообразий Фано Глава 2 посвящена изучению зеркальной симметрии для гладких многообразий Фано. Напомним, что гипотеза зеркальной симметрии сопоставляет многообразиям Фано одномерные семейства многообразий Калаби–Яу, называемые их *моделями Ландау–Гинзбурга*. Слои таких семейств должны быть зеркально двойственны антиканоническим сечениям многообразий Фано, т.е., симплектические свойства одних многообразий должны отражать алгебро-геометрические свойства других,

и наоборот. Соответствие данных свойств можно трактовать по-разному, начиная от самого грубого — соответствия чисел Ходжа, и заканчивая самым тонким подходом — категорным. Зеркальное соответствие также стоит рассматривать не как соответствие многообразий, а как соответствие их семейств.

Одним из результатов главы 2 является достаточный критерий существования *неф-разбиения* для гладких взвешенных полных пересечений Фано. Напомним, что неф-разбиение является ключевым ингредиентом конструкции Гивенталя и Батырева моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений (см. [44, 87]). Ожидается, что оно существует для любого гладкого взвешенного полного пересечения Фано, но это доказано лишь в отдельных случаях.

Данная задача связана с геометрией симплициальных комплексов. А именно, неф-разбиения естественно появляются как слои морфизмов *взвешенных симплициальных комплексов* — абстрактных симплициальных комплексов, снабжённых функцией веса на гранях. Строящиеся таким образом неф-разбиения называются *сильными* и естественно появляются в конструкции Пржиялковского *компактификации лог-Калаби–Яу* модели Ландау–Гинзбурга для взвешенного полного пересечения Фано (см. [105, раздел 4]). Пржиялковским–Шрамовым было доказано, что сильные неф-разбиения существуют в случае малой размерности или коразмерности. Было высказано предположение, что данный подход продолжается на случай произвольной коразмерности. Однако в случае любой коразмерности более 3 к этому приводится явный контрпример (пример 2.2.7).

Более того, получено следующее достаточное условие для существования сильных неф-разбиений, формулируемое в терминах весов, без предположений о мультистепени взвешенного полного пересечения.

Теорема (см. теорему 2.2.10)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что любое неделимое подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$ является сильно неделимым (см. определение 2.2.8). Тогда многообразие X допускает явно строящееся сильное неф-разбиение.*

Из этого результата следует существование моделей Ландау–Гинзбурга в смысле Гивенталя и Батырева для большого числа взвешенных полных пересечений Фано. Также показано (пример 2.2.13), что комбинаторика гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано может быть сколь угодно сложно устроена с точки зрения симплициальной геометрии.

Как было упомянуто ранее, существуют различные подходы к зеркальной симметрии для многообразий Фано. Возникает естественный вопрос о том, насколько они согласованы друг с другом. В главе 2 такая согласованность проверяется для трёхмерных многообразий Фано.

Напомним, что зеркальное соответствие для многообразий Фано строится через зеркальное соответствие их антиканонических сечений (являющихся многообразиями Калаби–Яу). Более того, общие антиканонические сечения трёхмерного многообразия Фано и общие слои его модели Ландау–Гинзбурга являются K3 поверхностями, так что естественно рассмотреть зеркальную симметрию между ними. С одной стороны, мы можем сопоставить трёхмерным многообразиям Фано их *торические модели Ландау–Гинзбурга* (см. [107]). С другой стороны, одной из наиболее известных форм зеркальной симметрии является *двойственность Долгачёва–Никулина* (см. [35]): по решётке L она сопоставляет полному семейству L-поляризованных K3 поверхностей полное семейство $L^\vee$-поляризованных K3 поверхностей, где решётка $L^\vee$ — т.н. *двойственная по Долгачёву–Никулину*, т.е., $L^\vee \simeq (L \oplus H)^\perp$ в решётке вторых когомологий.

Из результата Бовиля [18] следует, что для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано X и его очень общего антиканонического сечения S отображение ограничения $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(S)$ является изоморфизмом, и пространство деформаций пар (X, S) образует полное семейство $\mathrm{Pic}(X)$-поляризованных K3 поверхностей. Из двойственности Долгачёва–Никулина (см. [35]) следует, что грубое пространство модулей $\mathrm{Pic}(X)^\vee$-поляризованных K3 поверхностей имеет размерность, равную числу Пикара $\rho(X)$ многообразия Фано X.

Заметим, что в случае числа Пикара 1 данное пространство модулей отождествляется с рациональной модулярной кривой $X_0^+(n) = X_0(n)/W_n$, где W_n — инволюция Фрикке, $(-K_X)^3 = 2i_X^2 n$, и i_X — индекс Фано (см. [45, 46]). В общем же случае пространства модулей $\mathrm{Pic}(X)^\vee$-поляризованных K3 поверхностей также связаны с классическими модулярными многообразиями (см. [3, 6.8.2]). Заметим, что деформационно неэквивалентные трёхмерные многообразия Фано могут иметь решётки Пикара с эквивалентными примитивными вложениями в решётку вторых когомологий K3 поверхности (см. [3, 6.8.1]).

Сформулируем *второй основной результат диссертации.*

Теорема (см. теорему 2.3.4)**.** *Для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений огра-*

ничением решётки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ *двойственна по Долгачёву–Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной (см. определение 2.3.3) торической модели Ландау–Гинзбурга решёткой инвариантов монодромии. Данные решётки явно вычислены в каждом случае.*

Также для каждого трёхмерного многообразия Фано вида $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где S — гладкая поверхность дель Пеццо с очень обильным антиканоническим классом, проверено, что для любого выбора дивизора $D \subset X$ для общих слоёв компактификации торической модели Ландау–Гинзбурга пары (X, D) также имеет место двойственность Долгачёва–Никулина.

Данные результаты получили следующее развитие (не являющееся частью данной диссертации). В совместной работе [3] показано, что для любого гладкого многообразия Фано X с очень обильным антиканоническим расслоением пространство деформаций пар (Z, F) образует полное семейство $\mathrm{Pic}(X)^\vee$-поляризованных K3 поверхностей. Сформулированное утверждение вместе с основным результатом диссертации позволило доказать, что для всех многообразий Фано с очень обильным антиканоническим расслоением соответствующее пространство модулей $\mathrm{Pic}(X)^\vee$-поляризованных K3 поверхностей является унилинейчатым, что дало большое число новых явных примеров унилинейчатых модулярных многообразий (см. [26, 27, 49, 50]).

Полные пересечения в грассманианах и их взвешенных аналогах В главах 1 и 2 рассмотрены два стандартных подкласса многообразий Фано: взвешенные полные пересечения Фано и трёхмерные многообразия Фано. Хорошо известно (см. [19, 77]), что среди всех гладких многообразий Фано с числом Пикара 1 важный подкласс также образуют полные пересечения в обобщённых грассманианах. Возникает естественный вопрос о том, как устроены взвешенные аналоги обобщённых грассманианов и полные пересечения в них.

Напомним классическую теорему Белого (см [61, 99]): гладкая комплексная проективная кривая X может быть определена над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует сюръективный морфизм $X \to \mathbb{P}^1$, неразветвлённый над дополнением $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$. Естественно ожидать (см. раздел 3.2), что существуют многомерные аналоги теоремы Белого: для поверхностей общего типа такой результат был получен Гонзалезом-Диезом в [47]. Его подход был обобщён Джаванпейкаром в [58] на полные пересечения общего типа в $\mathbb{P}^n$.

Следующим результатом диссертации является многомерный аналог критерия Белого для гладких комплексных полных пересечений *общего типа* во взвешенных проективных пространствах и обобщённых грассманианах. В разделе 3.2 также предложен явный подход к обобщению данного результата на полные пересечения общего типа в других пространствах мечты Мори.

Теорема (см. теоремы 3.2.7 и 3.2.8)**.** *Пусть Y — обобщённый грассманиан или взвешенное проективное пространство, и $X \subset Y$ — гладкое хорошо сформированное комплексное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3. Многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ (см. определение 3.2.2) с не более чем 3 критическими точками.*

Таким образом, и задача о классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано, рассмотренная в главе 1, и предложенный аналог теоремы Белого приводят нас к рассмотрению полных пересечений во *взвешенных обобщённых грассманианах* — замкнутых подмногообразиях во взвешенных проективных пространствах, заданных (взвешенно-однородными) соотношениями Плюккера. В разделе 3.3 предложена явная параметризация возможных весов для взвешенного грассманиана (т.е., для случая серии A), в её терминах дано описание дуализирующего пучка и ряда Гильберта. Это *третий основной результат диссертации*. Отметим, что предложенный общий подход применим к любым взвешенным обобщённым грассманианам (см. обсуждение в разделе 3.3).

Теорема (см. теоремы 3.3.1, 3.3.3 и 3.3.6)**.** *Любой взвешенный грассманиан изоморфен подмногообразию вида $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n) \subset \mathbb{P}$, где многообразия Y и $\mathbb{P}$ определены следующим образом.*

Пусть $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ — фундаментальное представление группы $G = \mathrm{SL}(V)$. Выберем плюккеровы координаты на V и W:

$$\mathrm{Sym}(V^\vee) \simeq \Bbbk[T_0, \dots, T_n], \quad \mathrm{Sym}(W^\vee) \simeq \Bbbk[\{T_{i_1<\dots<i_k}\}].$$

Определим $\mathbb{P}$ как взвешенное проективное пространство, заданное следующей $\mathbb{Z}_+$-градуировкой на векторном пространстве W:

$$\deg(T_{i_1<\dots<i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > 0,$$

а подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}$ зададим обычными соотношениями Плюккера.

Если $Y \subset \mathbb{P}$ — хорошо сформированный *взвешенный грассманиан, то дуализирующие пучки для многообразий Y и $\mathbb{P}$ явно описаны в теореме 3.3.3. Явная формула для ряда Гильберта приведена в теореме 3.3.6.*

Цели и задачи работы. Описание классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано относительно отклонения. Доказательство согласованности зеркальной симметрии для гладких трёхмерных многообразий Фано с зеркальной симметрией решёточно поляризованных K3 поверхностей. Явное описание взвешенных грассманианов и их геометрических инвариантов.

Научная новизна. Все результаты являются новыми.

Значимость. Работа носит теоретический характер.

Достоверность результатов и апробация работы. Результаты работы снабжены строгими доказательствами. Результаты опубликованы в рецензируемых журналах *International Journal of Mathematics*, *Математический сборник*, *Труды МИАН* и *Сибирские электронные математические известия*. Результаты докладывались на семинарах МИАН, НИУ ВШЭ, МГУ и University of Nottingham, United Kingdom, а также на различных конференциях, таких как

- совместная конференция НИУ ВШЭ и BIMSA по алгебраической геометрии и математической физике (НИУ ВШЭ, 2024);
- однодневная конференция памяти В. А. Исковских (МИАН, 2023);
- “Молодёжный забег МЦМУ МИАН” (МИАН, 2023);
- “Дни геометрии в Новосибирске” (ИМ СО РАН, 2022);
- “Геометрия и гомологическая зеркальная симметрия” (Сириус, 2021);
- конференция международных математических центров мирового уровня (Сириус, 2021), а также других конференциях.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1, 2, 3, 4, 5]. Результаты совместной работы [3], выносимые на защиту, получены автором лично. Журналы, в которых опубликованы статьи [1, 2, 3, 4, 5], индексируются в базах данных Web of Science и Scopus.

Структура диссертации. Данная диссертация состоит из трёх глав.

В главе 1 изучается классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано. Более точно, в разделе 1.1 перечислены различные предварительные результаты о взвешенных полных пересечениях. В разделе 1.3 доказаны результаты, описанные в разделе 1.2. А именно, в подразделе 1.3.1 явно строится разбиение множества семейств взвешенных полных пересечений Фано на серии и полусерии гладких взвешенных полных пересечений Фано (предложения 1.2.12 и 1.2.14); в подразделе 1.3.2 квадратичная иррегулярность гладкого взвешенного полного пересечения Фано ограничивается в терминах отклонения (теорема 1.2.17); в подразделе 1.3.3 ограничивается число серий и полусерий гладких взвешенных полных пересечений Фано в терминах отклонения (теорема 1.2.21). В разделе 1.4 доказывается, что антиканоническая линейная система на гладком взвешенном полном пересечении Фано антиканонической степени 1 никогда не свободна от базисных точек (теорема 1.2.23). Раздел 1.5 содержит вспомогательные утверждения из коммутативной алгебры, используемые в подразделах 1.1.1 и 1.3.1. Раздел 1.6 содержит список серий и полусерий гладких взвешенных полных пересечений Фано отклонения вплоть до 4.

Глава 2 посвящена зеркальной симметрии для гладких многообразий Фано. В разделе 2.1 приводятся основные сведения об инвариантах Громова–Виттена, торических моделях Ландау–Гинзбурга, решёточно поляризованных K3 поверхностях и двойственности Долгачёва–Никулина. В разделе 2.2 обсуждается задача существования неф-разбиений для взвешенных полных пересечений Фано. В подразделе 2.2.2 доказывается теорема 2.2.10 и утверждения, необходимые для построения примера 2.2.13. В разделе 2.3 изложена схема доказательства теоремы 2.3.4 и предложения 2.3.7. В подразделе 2.3.6 разбирается один случай из классификации Мори–Мукаи (дивизора бистепени $(1,1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$). Ввиду крайней объёмности вычислений, необходимых для доказательства теоремы 2.3.4 и предложения 2.3.7, все остальные случаи из классификации Мори–Мукаи, а также случаи параметризованных торических моделей Ландау–Гинзбурга разобраны в [3, приложения Б–Е] абсолютно аналогичным образом.

В главе 3 изучаются полные пересечения в обобщённых грассманианах и их взвешенных аналогах. А именно, в разделе 3.1 кратко изложены основные факты о полных пересечениях в пространствах мечты Мори и кольцах Кокса. В подразделе 3.2.1 доказаны теоремы 3.2.7 и 3.2.8. В подразделе 3.2.2 обсуждается их возможное обобщение на полные пересечения общего типа во взвешенных обобщённых грассманианах. В разделе 3.3 получено явное описание взвешенных грассманианов и вычислена степень антиканонического дивизора и ряд Гильберта. В подразделе 3.3.1 предложена модифицированная конструкция взвешенного обобщённого грассманиана. Описано, как можно получить $\mathbb{Z}$-градуировку из данных теории представлений. Обсуждаются базовые геометрические свойства взвешенных обобщённых грассманианов. В подразделе 3.3.2 описана явная параметризация $\mathbb{Z}$-градуировок для взвешенных грассманианов. В подразделе 3.3.3 описаны дуализирующий пучок и ряд Гильберта взвешенного грассманиана.

В заключении кратко сформулированы основные результаты диссертации.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предъявлен явный способ построения классификации взвешенных полных пересечений Фано любого заданного отклонения. Показано, что такая классификация исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.

2. Показано, что для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решётки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ двойственна по Долгачёву–Никулину к поляризации общего слоя компактификации стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга решёткой инвариантов монодромии. Данные решётки явно вычислены в каждом случае.

3. Для взвешенных грассманианов получена явная параметризация возможных $\mathbb{Z}$-градуировок на координатах Плюккера. В её терминах дано явное описание дуализирующего пучка и ряда Гильберта.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю В. В. Пржиялковскому за постановку задач и поддержку на всех этапах подготовки диссертации, а также К. А. Шрамову за полезные обсуждения и замечания.

Глава 1

Классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано

1.1 Предварительные сведения

Мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики 0. В данной главе $a^{(t)}$ обозначает число $a \in \mathbb{Z}_{>0}$, повторённое t раз. Мы предполагаем, что веса $(a_0, \dots, a_N)$ и степени $(d_1, \dots, d_c)$ взвешенного полного пересечения упорядочены по неубыванию: $a_0 \leqslant \dots \leqslant a_N$, и $d_1 \leqslant \dots \leqslant d_c$.

1.1.1 Взвешенные полные пересечения

Обозначение 1.1.1. Пусть $\Bbbk$ — поле, и $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ — упорядоченный набор положительных целых чисел. Обозначим через $R^\rho = \Bbbk[X_0, \dots, X_N]$ кольцо многочленов над полем $\Bbbk$ со следующей структурой градуированного кольца:

$$\deg\left(\prod_{i=0}^{N} X_i^{\alpha_i}\right) = \sum_{i=0}^{N} a_i\alpha_i, \quad (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{N+1}, \quad R^\rho = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^\rho_n.$$

Определение 1.1.2. Пусть $\Bbbk$ — поле, и $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ — упорядоченный набор положительных целых чисел. Мы называем многообразие $\mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ *взвешенным проективным пространством над полем* $\Bbbk$ *с весами* ρ.

Определение 1.1.3 ([55, Definition 5.11])**.** Взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ называется *хорошо сформированным*, если выполнено

$$\gcd(a_0, \dots, a_{i-1}, \widehat{a_i}, a_{i+1}, \dots, a_N) = 1 \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Предложение 1.1.4 ([36, 1.3.1])**.** *Любое взвешенное проективное пространство изоморфно хорошо сформированному.*

Особый локус взвешенного проективного пространства может быть явно описан следующим образом.

Определение 1.1.5. Пусть $\mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(\Bbbk[X_0, \ldots, X_N])$ — взвешенное проективное пространство с весами $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$. Для любого подмножества $I \subset \{0, \ldots, N\}$ назовём *координатной стратой* замкнутое подмногообразие

$$\mathbb{P}(\rho)_I = \mathrm{Proj}(R^\rho / \langle \{X_i \mid i \notin I\} \rangle) \subset \mathbb{P}(\rho).$$

Лемма 1.1.6 ([55, 5.15])**.** *Пусть $\mathbb{P}(\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство с весами $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$. Тогда особый локус $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ является объединением координатных страт*

$$\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \bigcup_I \mathbb{P}(\rho)_I$$

по всем подмножествам $I \subset \{0, \ldots, N\}$ таким, что $\gcd(\{a_i \mid i \in I\}) > 1$. Для любого подмножества $I \subset \{0, \ldots, N\}$ общая точка координатной страты $P \in \mathbb{P}(\rho)_I \subset \mathbb{P}(\rho)$ — циклическая факторособенность индекса $\gcd(\{a_i \mid i \in I\})$.

Определение 1.1.7. Пусть $\mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ — взвешенное проективное пространство. Определим $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(k)$ как когерентный пучок на многообразии $\mathbb{P}(\rho)$, ассоциированный с градуированным R^ρ-модулем $R^\rho(k)$, чья однородная компонента степени i равна $R^\rho(k)_i = (R^\rho)_{k+i}$.

Лемма 1.1.8 ([36, Theorem 1.4.1])**.** *Пусть $\mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство. Тогда имеет место изоморфизм $H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(n)) \simeq R^\rho_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.*

Следствие 1.1.9. *Пусть $\mathbb{P}(\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство. Тогда имеется включение $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) \subset \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$.*

Напомним соответствие между однородными идеалами в градуированном кольце R^ρ и замкнутыми подсхемами в пространстве $\mathbb{P}(\rho)$.

Определение 1.1.10 (см. [36, Proposition 3.1.2])**.** Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ — замкнутая подсхема в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве, и обозначим через

$$S_X \colon R^\rho \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$$

соответствующий гомоморфизм ограничения. Мы будем называть $I_X = \ker(S_X)$ *определяющим идеалом* подсхемы X.

Определение 1.1.11. Пусть $I \subset R^\rho$ — однородный идеал. Его *насыщением* I^∞ называется определяющий идеал I_X замкнутой подсхемы

$$X = \operatorname{Proj}(R^\rho/I) \subset \operatorname{Proj}(R^\rho) = \mathbb{P}(\rho).$$

Лемма 1.1.12. *Пусть $I \subset R^\rho$ — однородный идеал. Его насыщение I^∞ может быть явно описано как*

$$I^\infty = \langle \{ x \in R^\rho \mid (R^\rho \cdot x)_{n\cdot\operatorname{lcm}(\rho)} \subset I \text{ для всех } n \gg 0 \} \rangle.$$

Доказательство. В самом деле, рассмотрим прореживание $\widetilde{R^\rho} = \oplus_{n=0}^\infty R^\rho_{n\cdot\operatorname{lcm}(\rho)}$ градуированного кольца $R^\rho = \oplus_{n=0}^\infty R^\rho_n$. Это градуированное кольцо, конечнопорождённое в степени 1 (после очевидной замены градуировки).

Существует канонический изоморфизм $\operatorname{Proj}(R^\rho) = \operatorname{Proj}(\widetilde{R^\rho})$ (см. [51, 2.4.7(i)]). Положим $\widetilde{I} = I \cap \widetilde{R^\rho}$, и $X = \operatorname{Proj}(R^\rho/I) = \operatorname{Proj}(\widetilde{R^\rho}/\widetilde{I})$. В силу [52, Exercise II.5.10] замкнутая подсхема $X \subset \operatorname{Proj}(\widetilde{R^\rho})$ канонически соответствует идеалу $(\widetilde{I} : \widetilde{B}^\infty) \subset \widetilde{R^\rho}$, где $\widetilde{B} \subset \widetilde{R^\rho}$ — несущественный идеал. Более точно, выполнено тождество

$$(\widetilde{I} : \widetilde{B}^\infty) = \ker\left(\widetilde{S}_X \colon \widetilde{R^\rho} \to \bigoplus_{n=0}^\infty H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \right).$$

Тогда мы можем восстановить идеал I^∞ из соотношения $\operatorname{im}(S_X) = \operatorname{im}(\widetilde{S}_X)$, т.е., $R^\rho/I^\infty \simeq \widetilde{R^\rho}/(\widetilde{I} : \widetilde{B}^\infty)$. □

Обозначение 1.1.13. Пусть ρ и $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Обозначим через $R^\rho_\mu = \prod_{j=1}^m R^\rho_{d_j}$ соответствующее пространство последовательностей взвешенно-однородных многочленов. Мы также обозначим через $\langle F \rangle = \langle F_1, \dots, F_m \rangle$ однородный идеал в кольце R^ρ, порождённый последовательностью $F = (F_1, \dots, F_m) \in R^\rho_\mu$.

Определение 1.1.14. Замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ называется *взвешенным полным пересечением* мультистепени $\mu = (d_1, \dots, d_c) \in \mathbb{Z}^c_{>0}$, если её определяющий идеал $I_X \subset R^\rho$ порождён регулярной последовательностью $F \in R^\rho_\mu$.

Условие насыщенности в определении 1.1.14 нельзя отбросить, хотя оно часто выполнено автоматически.

Пример 1.1.15 (Пржиялковский–Шрамов)**.** Положим $\rho = (1, 1, 3, 6)$, и пусть $I = \langle x_0^3, x_1^3 \rangle \subset R^\rho$ — однородный идеал. Его насыщение $I^\infty = \langle x_0^3, x_1^3, x_0^2 x_1^2 \rangle$ невозможно породить регулярной последовательностью.

Пример 1.1.16. Пусть $I \subset R^\rho$ — однородный идеал, порождённый регулярной последовательностью. Предположим, что $\rho = (1^{(N+1)})$, и $\operatorname{ht}(I) \leqslant N$. Мы утверждаем, что идеал I насыщен в смысле определения 1.1.11. В нашем случае насыщение I^∞ совпадает с идеалом $(I : B^\infty)$, где $B \subset R^\rho$ — несущественный идеал (см. лемму 1.1.12). В силу [39, Corollary 18.14] любой ассоциированный простой идеал $\mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}(I)$ является минимальным над I и имеет высоту $\operatorname{ht}(\mathfrak{P}) = \operatorname{ht}(I)$. Пусть $I = \cap_{r=1}^s \mathfrak{P}_r$ — минимальное примарное разложение. Если идеал I не является насыщенным, то существует элемент $f \in (\mathfrak{P}_r : B^\infty) \setminus \mathfrak{P}_r$ для некоторого $r = 1, \ldots, s$ такой, что $f \cdot B^m \subset \mathfrak{P}_r$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Но $f \notin \mathfrak{P}_r$ по предположению, откуда $B \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{P}_r)$. Мы получили противоречие: $N + 1 = \operatorname{ht}(B) \leqslant \operatorname{ht}(\operatorname{rad}(\mathfrak{P}_r)) = \operatorname{ht}(\mathfrak{P}_r) = \operatorname{ht}(I)$.

Пример 1.1.17. Радикальный однородный идеал $I \subset R^\rho$ всегда является насыщенным (см. лемму 1.1.12).

Взвешенные полные пересечения в пространстве $\mathbb{P}(\rho)$ заданной мультистепени μ образуют семейство в следующем смысле.

Определение 1.1.18. Пусть $\mathbb{P}(\rho) = \operatorname{Proj}(R^\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, и $\mu = (d_1, \ldots, d_c) \in \mathbb{Z}_{>0}^c$ — упорядоченный набор. Обозначим через $\Gamma_\mu^\rho \subset \mathbb{P}(\rho) \times \prod_{j=1}^c |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|$ соответствующее многообразие инцидентности. Положим

$$\Phi_\mu^\rho \colon R_\mu^\rho \xrightarrow{\sim} \prod_{j=1}^c H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)) \twoheadrightarrow \prod_{j=1}^c |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|,$$

$$U_\mu^\rho = \{F \in R_\mu^\rho \mid F \text{ — регулярная последовательность}\},$$

$$V_\mu^\rho = \{F \in R_\mu^\rho \mid \langle F \rangle \text{ — насыщенный идеал}\}.$$

Пусть $\pi_\mu^\rho \colon \Gamma_\mu^\rho \to \prod_{j=1}^c |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|$ — естественная проекция, и $\mathcal{F}_\mu^\rho \colon T \to B$ — кограничение на подпространство $B = \Phi_\mu^\rho(U_\mu^\rho \cap V_\mu^\rho)$. Назовём отображение $\mathcal{F}_\mu^\rho$ *семейством взвешенных полных пересечений в* $\mathbb{P}(\rho)$ *мультистепени* μ.

Замечание 1.1.19. Подмножество $U_\mu^\rho \subset R_\mu^\rho$ открыто в топологии Зарисского в силу следствия 1.5.19.

Если число весов взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(\rho)$, равных 1, достаточно велико, то любое семейство взвешенных полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho)$ непусто, и его общий элемент является приведённым.

Лемма 1.1.20 (см. лемму 1.1.30 и предложение 1.1.42)**.** *Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_c)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Предположим, что $|\{i \mid a_i = 1\}| > c$. Тогда соответствующее семейство $\mathcal{F}_\mu^\rho \colon T \to B$ взвешенных полных пересечений непусто, определяющий идеал $I_X \subset R^\rho$ его общего элемента $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ — радикальный, и база семейства B является неприводимым топологическим пространством.*

Доказательство. Здесь мы используем обозначения из определения 1.1.18. Пусть $(i_1, \dots, i_c) \in \{0, \dots, N\}$ — любой набор попарно различных чисел такой, что $a_{i_j} = 1$ для любого $j = 1, \dots, c$. Тогда существует регулярная последовательность $(X_{i_1}^{d_1}, \dots, X_{i_c}^{d_c}) \in R_\mu^\rho$, где $R^\rho = \Bbbk[X_0, \dots, X_N]$. Следовательно, подмножество $U_\mu^\rho \subset R_\mu^\rho$ регулярных последовательностей непусто и открыто в силу следствия 1.5.19. Более того, из [39, Theorem 18.15] следует, что для любой последовательности $F = (f_1, \dots, f_c) \in U_\mu^\rho$ соответствующий идеал $\langle F \rangle \subset R_\mu^\rho$ радикален тогда и только тогда, когда F содержится в множестве $U_\mu^\rho \cap S_\mu^\rho$, где

$$S_\mu^\rho = \{F \in R_\mu^\rho \mid \operatorname{ht}(\langle F; \partial f_j / \partial x_i \rangle) > c\}.$$

Заметим, что по предположению множество S_μ^ρ непусто: например, оно содержит общий элемент подпространства $R_\mu^{\widetilde{\rho}} \subset R_\mu^\rho$, где $\widetilde{\rho} = (a_i \mid a_i = 1)$. Более того, мы утверждаем, что подмножество $S_\mu^\rho \subset R_\mu^\rho$ открыто в топологии Зарисского. Рассмотрим включение

$$i \colon R_\mu^\rho \hookrightarrow R_\mu^\rho \times \prod_{i,j} R_{d_j - a_i}^\rho, \quad (f_1, \dots, f_c) \mapsto (f_1, \dots, f_c; \partial f_j / \partial x_i).$$

Следующее подмножество открыто в топологии Зарисского по следствию 1.5.20:

$$\widetilde{S}_\mu^\rho = \left\{ G \in R_\mu^\rho \times \prod_{i,j} R_{d_j - a_i}^\rho \mid \operatorname{ht}(\langle G \rangle) > c \right\}.$$

Тогда подмножество $S_\mu^\rho = i(R_\mu^\rho) \cap \widetilde{S}_\mu^\rho$ также открыто в топологии Зарисского. Но любой радикальный идеал является насыщенным (см. пример 1.1.17), откуда множество V_μ^ρ содержит непустое открытое подмножество, так что база семейства B — неприводимое топологическое пространство. □

Напомним геометрические свойства взвешенных полных пересечений.

Определение 1.1.21 ([55, Definition 6.3])**.** Замкнутая подсхема $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ называется *квази-гладкой*, если её аффинный конус $\mathrm{Spec}(R^\rho/I_X)$ является гладким вне вершины, где $I_X \subset R^\rho$ — определяющий идеал (см. определение 1.1.10).

Следующее утверждение является аналогом леммы 1.1.20 для квази-гладких взвешенных полных пересечений.

Лемма 1.1.22. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Предположим, что семейство $\mathcal{F}^\rho_\mu \colon T \to B$ взвешенных полных пересечений содержит квази-гладкий элемент. Тогда общий элемент $X \in \mathcal{F}^\rho_\mu$ является квази-гладким, его определяющий идеал $I_X \subset R^\rho$ — радикальный, и база семейства B — неприводимое топологическое пространство.*

Доказательство. Здесь мы следуем обозначениям из определения 1.1.18. Рассмотрим открытое в топологии Зарисского подмножество

$$W^\rho_\mu = \{F \in R^\rho_\mu \mid \mathrm{Spec}(R^\rho/\langle F\rangle) \subset \mathbb{A}^{N+1} \text{ гладкий вне вершины}\}.$$

Напомним, что подмножество $U^\rho_\mu \subset R^\rho_\mu$ открыто в топологии Зарисского в силу замечания 1.1.19. По предположению множество $U^\rho_\mu \cap W^\rho_\mu$ непусто. Для любой последовательности $F \in U^\rho_\mu \cap W^\rho_\mu$ соответствующий идеал $\langle F\rangle \subset R^\rho_\mu$ радикален в силу [39, Exercise 18.9], следовательно, является насыщенным (см. пример 1.1.17). Таким образом, множество V^ρ_μ содержит непустое открытое подмножество, следовательно, база семейства B неприводима. □

Определение 1.1.23 (см. [33, Definition 1.1])**.** Замкнутая подсхема X в $\mathbb{P}(\rho)$ называется *хорошо сформированной*, если $\mathbb{P}(\rho)$ хорошо сформировано, и

$$\mathrm{codim}_X(X \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))) \geqslant 2.$$

Предложение 1.1.24 ([36, Proposition 8])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Тогда особый локус многообразия X совпадает с пересечением многообразия X с $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$.*

Предложение 1.1.25 ([85, Corollary 2.14])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Тогда X квази-гладко.*

Следствие 1.1.26. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — взвешенное полное пересечение. Следующие условия эквивалентны:*

- *X является гладким и хорошо сформированным;*
- *$\mathbb{P}(\rho)$ хорошо сформировано, X квази-гладко, и $X \cap \operatorname{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \varnothing$.*

Пример 1.1.27. Если взвешенное полное пересечение является гладким, но не хорошо сформированным, то могут возникать следующие патологии.

- Существует K3 поверхность, реализующаяся как гладкая, квази-гладкая, но не хорошо сформированная гиперповерхность X степени 9 в $\mathbb{P}(1,2,2,3)$ (см. [55, 6.15(ii)]). Наивная формула присоединения (см. предложение 1.1.38) бы означала, что $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(1)$, что неверно.
- Общая взвешенная гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(2,3,5^{(t)})$ является гладкой, но не квази-гладкой и не хорошо сформированной для всех $t > 0$ (см. [109, пример 2.9]).

Определение 1.1.28 ([55, Definition 6.5])**.** Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ — взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1, \ldots, d_c)$. Мы назовём X

- *пересечением с линейным конусом*, если выполнено $a_i = d_j$ для каких-то $i = 0, \ldots, N$ и $j = 1, \ldots, c$;
- *вырожденным*, если $d_j = 1$ для некоторого $j = 1, \ldots, c$.

Лемма 1.1.29 ([101, следствие 3.3])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Тогда отображение* $\operatorname{res}\colon H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(m)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ *сюръективно для всех $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.*

Лемма 1.1.30 ([36, Theorem 3.4.4], [55, Lemma 7.1])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое хорошо сформированное невырожденное взвешенное полное пересечение. Положим $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$. Тогда выполнены равенства*

$$\dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(1))) = \dim(H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1))) = |\{i \mid a_i = 1\}|.$$

Следствие 1.1.31. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое взвешенное полное пересечение. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Если X хорошо сформировано и невырождено, то выполнено*

$$\operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_X(1)|) = X \cap \operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|).$$

2. *Если $\mathbb{P}(\rho)$ хорошо сформировано, и выполнено $X \cap \operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|) = \varnothing$, то X является гладким и хорошо сформированным.*

Доказательство. Во-первых, пусть многообразие X — квази-гладкое, хорошо сформированное и невырожденное. Тогда из лемм 1.1.29 и 1.1.30 следует, что отображение ограничения $H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ является изоморфизмом, что и требовалось. Во-вторых, пусть $\mathbb{P}(\rho)$ хорошо сформировано, а X является квази-гладким. В этом случае в силу следствия 1.1.26 X является гладким и хорошо сформированным тогда и только тогда, когда $X \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \varnothing$. Но мы имеем $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) \subset \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$ в силу следствия 1.1.9. □

Следствие 1.1.32. *Пусть $\mathbb{P}(\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, μ — упорядоченный набор положительных целых чисел, и $\mathcal{F}^\rho_\mu \colon T \to B$ — семейство взвешенных полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho)$ мультистепени μ. Следующие подмножества базы семейства B открыты:*

$$B' = \{X \in B \mid X \text{ — гладкое и хорошо сформированное}\},$$
$$B'' = \{X \in B \mid X \text{ — аменабельное (см. определение 1.2.8)}\}.$$

Доказательство. В силу следствия 1.1.26 множество B' состоит из взвешенных полных пересечений X таких, что X является квази-гладким, и верно $X \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \varnothing$ (см. лемму 1.1.6). Первое условие является открытым по определению 1.1.21. Второе условие открыто в силу леммы 1.5.13.

По определению 1.2.8 подмножество B'' состоит из взвешенных полных пересечений $X \in B'$ таких, что X невырождено, и $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_X(1)|) = \varnothing$. В силу следствия 1.1.31 последнее условие переписывается в виде $X \cap \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|) = \varnothing$ (см. лемму 1.1.8). Тогда множество B'' также открыто по лемме 1.5.13. □

Предложение 1.1.33 ([102, предложение 2.9])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое взвешенное полное пересечение мультистепени μ. Предположим, что $\dim(X) \geqslant 3$, и X — общее в семействе $\mathcal{F}^\rho_\mu$ взвешенных полных пересечений. Тогда существует квази-гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X' \simeq X$, не являющееся пересечением с линейным конусом.*

Предложение 1.1.34 ([101, предложение 1.5])**.** *Пусть X' и X'' — квази-гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения в $\mathbb{P}(\rho')$ и $\mathbb{P}(\rho'')$ мультистепени μ' и μ'', соответственно, такие, что X' и X'' не являются пересечениями с линейными конусами. Предположим, что $X' \simeq X''$, и $\dim(X') \geqslant 3$. Тогда верно, что $\rho' = \rho''$ и $\mu' = \mu''$.*

Замечание 1.1.35. Утверждение предложения 1.1.34 также выполнено для гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано размерности 2. В случае размерности $X \simeq \mathbb{P}^1$ содержится в двух семействах полных пересечений: $\mathbb{P}^1$ и коник (см. [101, лемма 2.6]).

Лемма 1.1.36 ([55, Lemma 18.14], [25, Proposition 3.1(1)]). *Пусть X — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Выполнены следующие оценки:*

$$d_{c-j} > a_{N-j} \text{ для всех } j = 1, \dots, c, \quad d_c \geqslant 2a_N.$$

Предложение 1.1.37 ([79, Remark 4.2], [83, Proposition 2.3]). *Пусть X — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(\rho)$ размерности хотя бы 3. Тогда группа классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ порождена классом дивизориального пучка $\mathcal{O}_X(1)$.*

Предложение 1.1.38 ([36, Theorem 3.3.4], [55, 6.14]). *Пусть X — квази-гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ размерности хотя бы 2 и мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$, и ω_X — дуализирующий пучок многообразия X. Тогда выполнено $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(\sum_{j=1}^{c} d_j - \sum_{i=0}^{N} a_i)$.*

Следствие 1.1.39 ([101, следствие 2.8]). *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ размерности хотя бы 2 и мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$. Тогда индекс Фано многообразия X равен $i_X = \sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{c} d_j$.*

Следствие 1.1.40 (см. доказательство [86, Theorem 2.7]). *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$ и размерности хотя бы 2, и i_X — его индекс Фано. Антиканоническая степень X равна $(\prod_{j=1}^{c} d_j / \prod_{i=0}^{N} a_i) \cdot i_X^{\dim(X)}$.*

Следствие 1.1.41. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$. Равенство $(-K_X)^{\dim(X)} = 1$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $i_X = 1$ и $\prod_{i=0}^{N} a_i = \prod_{j=1}^{c} d_j$.*

Предложение 1.1.42 ([83, Theorem 1.2], [102, следствие 3.4]). *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Если X — многообразие Калаби–Яу, то выполнена оценка*

$$\dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(1))) \geqslant \operatorname{codim}(X).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда X — взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(1^{(c)}, 2^{(c)}, 3^{(c)})$ мультистепени $(6^{(c)})$.

2. *Если X — многообразие Фано, то выполнена оценка*

$$\dim(H^0(X, \mathcal{O}_X(1))) \geqslant \operatorname{codim}(X) + i_X,$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда X — взвешенное полное пересечение в $\mathbb{P}(1^{(i_X+c)}, 2^{(c)}, 3^{(c)})$ мультистепени $(6^{(c)})$.

1.1.2 Комбинаторика взвешенных полных пересечений

Покажем, какие ограничения накладывают геометрические свойства взвешенных полных пересечений на комбинаторику их весов и степеней.

Определение 1.1.43 ([41, Example 1.5]). Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$ — упорядоченный набор. Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *денумерантом* $D(\rho; n)$ называется число решений $(\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^{N+1}$ уравнения $\sum_{i=0}^{N} a_i\alpha_i = n$.

Лемма 1.1.44 ([41, Proposition I.1, Example 1.5]). *Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ — упорядоченный набор положительных целых чисел. Порождающая функция для денумерантов $D(\rho; \bullet)(T)$ имеет следующий вид:*

$$D(\rho; \bullet)(T) = \sum_{n=0}^{\infty} D(\rho; n)T^n = \frac{1}{\prod_{i=0}^{N}(1 - T^{a_i})}.$$

Например, существуют необходимые и достаточные условия для квазигладкости взвешенного полного пересечения в терминах его весов и степеней. Введём вспомогательные обозначения.

Определение 1.1.45. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Для любого подмножества $I \subset \{0, \dots, N\}$ мы вводим следующие обозначения:

$$\rho_I = (a_{i_1}, \dots, a_{i_s}), \quad I = \{i_1, \dots, i_s\}, \quad i_1 < \dots < i_s.$$

Для любых подмножеств $I \subset \{0, \dots, N\}$ и $J \subset \{1, \dots, m\}$ мы также полагаем $I^\circ = \{0, \dots, N\} \setminus I$ и $J^\circ = \{1, \dots, m\} \setminus J$.

Будем говорить, что подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$

- *имеет тип* (Q_1), если выполнено следующее условие:
  - существует подмножество $J \subset \{1, \dots, m\}$ такое, что $|J| = |I|$, и $D(\rho_I; d_j) > 0$ для всех $j \in J$.
- *имеет тип* (Q_2) если выполнены следующие два условия:
  - существует подмножество $J \subset \{1, \dots, m\}$ такое, что $|J| < |I|$, и $D(\rho_I; d_j) > 0$ для всех $j \in J$;
  - для любого $\mu = 1, \dots, |I| - |J|$ существует подмножество

$$E_\mu = \{e_{j,\mu} \mid j \in J^\circ\} \subset I^\circ$$

мощности $|J^\circ|$ такое, что верно $D(\rho_I; d_j - a_{e_{\mu,j}}) > 0$ для любого $j \in J^\circ$, и для любого подмножества $G \subset J^\circ$ выполнено

$$|\{e_{g,\mu} \mid g \in G,\ \mu = 1, \dots, |I| - |J|\}| \geqslant |I| - |J| + |G| - 1.$$

Определение 1.1.46. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Мы будем называть $(\rho; \mu)$ *согласованной парой*, если любое подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$ имеет тип (Q_1) или (Q_2) в смысле определения 1.1.45.

Предложение 1.1.47 ([83, Proposition 3.1])**.** *Предположим, что существует взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ мультистепени μ, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Если взвешенное полное пересечение X является квази-гладким, то пара $(\rho; \mu)$ является согласованной.*
2. *Предположим, что пара $(\rho; \mu)$ является согласованной, и полное пересечение X является общим в семействе $\mathcal{F}_\mu^\rho$ взвешенных полных пересечений. Тогда полное пересечение X является квази-гладким.*

Другим интересным геометрическим свойством является непересечение с заданной координатной стратой во взвешенном проективном пространстве (например, см. лемму 1.1.6). Оно допускает следующее комбинаторное описание.

Определение 1.1.48. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$ *имеет тип* (Q_1^+), если $|I| \leqslant m$, и любое подмножество $\widetilde{I} \subset I$ имеет тип (Q_1).

Лемма 1.1.49. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ — взвешенное полное пересечение мультистепени μ. Положим $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$, и пусть $I \subset \{0, \ldots, N\}$ — любое подмножество. Введём обозначение*

$$\Lambda_I = \{X_i = 0 \mid i \notin I\} \subset \mathbb{P}(\rho), \quad R^\rho = \Bbbk[X_0, \ldots, X_N].$$

Если $X \cap \Lambda_I = \varnothing$, то подмножество I имеет тип (Q_1^+).

Доказательство. Положим $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$. Определяющий идеал $I_X \subset R^\rho$ (см. определение 1.1.10) порождён регулярной последовательностью $(f_1, \ldots, f_c)$ взвешенно-однородных многочленов степени $d_j = \deg(f_j)$ для всех $j = 1, \ldots, c$. Для любого подмножества $\widetilde{I} \subset I$ рассмотрим мономиальный идеал

$$S_{\widetilde{I}} = \langle \{X_i \mid i \notin \widetilde{I}\} \rangle \subset R^\rho.$$

По определению верно $\mathrm{ht}(I_X + S_{\widetilde{I}}) = |\widetilde{I}|$ для любого подмножества $\widetilde{I} \subset I$. Следовательно, для любого подмножества $\widetilde{I} \subset I$ должно существовать подмножество $J_{\widetilde{I}} \subset \{1, \ldots, c\}$ мощности $|\widetilde{I}|$ такое, что многочлен f_j содержит моном от переменных $\{X_i \mid i \in \widetilde{I}\}$ для любого $j \in J_{\widetilde{I}}$, откуда получаем утверждение. □

Определение 1.1.50. Пусть $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Пара $(\rho; \mu)$ *строго регулярна*, если любое подмножество $I \subset \{0, \ldots, N\}$ такое, что $\gcd(\{a_i \mid i \in I\}) > 1$, имеет тип (Q_1^+).

Замечание 1.1.51. Пусть $\mathbb{P}(\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство. Пара $(\rho; \mu)$ строго регулярна тогда и только тогда, когда для любой координатной страты $\mathbb{P}(\rho)_I \subset \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ существует подмножество $J \subset \{1, \ldots, c\}$ мощности $|I|$ такое, что $\mathbb{P}(\rho)_I \not\subset \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|)$ для любого $j \in J$.

Следствие 1.1.52 (см. [85, Lemma 2.15], [25, Proposition 4.1])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени μ, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда пара $(\rho; \mu)$ является согласованной и строго регулярной.*

Доказательство. По следствию 1.1.26 взвешенное полное пересечение X является квази-гладким и не пересекает $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$. Тогда пара $(\rho; \mu)$ является согласованной по предложению 1.1.47. Лемма 1.1.6 явно описывает $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ как объединение координатных страт. Тогда пара $(\rho; \mu)$ также является строго регулярной в силу леммы 1.1.49. □

Следствие 1.1.53. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — *аменабельное взвешенное полное пересечение мультистепени* μ. *Тогда* $\{i \mid a_i > 1\}$ *имеет тип* (Q_1^+).

Доказательство. По определению 1.2.8 мы должны иметь $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_X(1)|) = \varnothing$. Из следствия 1.1.31 вытекает, что $X \cap \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|) = \varnothing$. Отметим, что базисное множество $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1))|$ может быть описано как координатная страта в $\mathbb{P}(\rho)$ (см. лемму 1.1.8). Тогда утверждение следует из леммы 1.1.49. □

Полезно сравнить определение 1.1.50 с его более слабой версией.

Определение 1.1.54 ([83, Definition 4.1])**.** Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$, $\mu = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{Z}_{>0}^m$ — упорядоченные наборы. Назовём пару $(\rho; \mu)$ *регулярной*, если для любого подмножества $I \subset \{0, \dots, N\}$ такого, что $\gcd(\{a_i \mid i \in I\}) > 1$, существует подмножество $J \subset \{1, \dots, c\}$ мощности $|I|$ такое, что

$$\gcd(\{a_i \mid i \in I\}) \mid \gcd(\{d_j \mid j \in J\}).$$

Мы можем переформулировать следствия 1.1.52 и 1.1.53 в этих терминах, что гораздо более удобно для практических вычислений.

Обозначение 1.1.55. Для упорядоченного набора $\rho = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>1}^{N+1}$ и $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ положим $I(h) = \{i \mid a_i \in h\mathbb{Z},\ a_i > 1\}$.

Замечание 1.1.56. Заметим, что по определению $I(h) = \{i \mid a_i \in h\mathbb{Z}\}$ для $h > 1$, и $I(1) = \{i \mid a_i > 1\}$ для $h = 1$.

Лемма 1.1.57. *Пусть* $(\rho; \mu)$ — *согласованная и регулярная пара. Тогда подмножество* $I(h)$ *имеет тип* (Q_1) *для всех* $h \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Доказательство. Пусть $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ и $J(h) = \{j \mid d_j \in h\mathbb{Z}\}$. Мы утверждаем, что подмножество $I(h)$ имеет тип (Q_1). От противного, пусть оно имеет тип (Q_2). Во-первых, существует подмножество $J \subset \{1, \dots, m\}$ мощности менее чем $|I(h)|$ такое, что для всех $j \in J$ выполнено $D(\rho_{I(h)}; d_j) > 0$. Во-вторых, для любых $j \in J^\circ = \{1, \dots, m\} \setminus J$ и $\mu = 1, \dots, |I(h)| - |J|$ существуют целые числа $e_{j,\mu} \in \{0, \dots, N\} \setminus I$ такие, что $D(\rho_{I(h)}; d_j - a_{e_{j,\mu}}) > 0$. По определению $a_{e_{j,\mu}}$ не делится на h, откуда d_j не делится на h для любого $j \in J^\circ$. Иными словами, мы имеем $m - |J| \leqslant m - |J(h)|$, т.е., $|J(h)| \leqslant |J|$. Из предположения регулярности мы имеем $|I(h)| \leqslant |J(h)|$, откуда $|I(h)| \leqslant |J|$, что является противоречием. □

Лемма 1.1.58. *Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что пара $(\rho; \mu)$ является совместимой и регулярной. Пусть $|I(h)| \leqslant m$, и подмножество $I(h)$ имеет тип (Q_1). Тогда подмножество $I(h)$ имеет тип (Q_1^+).*

Доказательство. Положим $I = I(h)$. Пусть $\widetilde{I} \subset I$ — собственное подмножество. Мы утверждаем, что $\widetilde{I}$ имеет тип (Q_1). От противного, пусть оно имеет тип (Q_2). Во-первых, существует подмножество $\widetilde{J} \subset \{1, \dots, m\}$ мощности менее чем $|\widetilde{I}|$ такое, что для всех $j \in \widetilde{J}$ мы имеем $D(\rho_{\widetilde{I}}; d_j) > 0$. Во-вторых, для любого $j \in \widetilde{J}^\circ = \{1, \dots, m\} \setminus \widetilde{J}$ и $\mu = 1, \dots, |\widetilde{I}| - |\widetilde{J}|$ существуют целые числа $e_{j,\mu} \in \{0, \dots, N\} \setminus \widetilde{I}$ такие, что $D(\rho_{\widetilde{I}}; d_j - a_{e_{j,\mu}}) > 0$, и для любого $G \subset \widetilde{J}$ выполнена следующая оценка:

$$|\{e_{g,\mu} \mid g \in G,\ \mu = 1, \dots, |\widetilde{I}| - |\widetilde{J}|\}| \geqslant |\widetilde{I}| - |\widetilde{J}| + |G| - 1.$$

По предположению существует подмножество $\widetilde{G} \subset \widetilde{J}^\circ$ мощности $|I| - |\widetilde{J}|$ такое, что $D(\rho_I; d_j) > 0$ для любого $j \in \widetilde{G}$, так как подмножество I имеет тип (Q_1), и $|I| \leqslant m$. Но тогда по определению подмножества $I = I(h)$ мы имеем $e_{j,\mu} \in I$ для любого $j \in \widetilde{J}$. Мы получили противоречие:

$$|\widetilde{I}| + |\{e_{g,\mu} \mid g \in \widetilde{G},\ \mu = 1, \dots, |\widetilde{I}| - |\widetilde{J}|\}| \geqslant 2(|\widetilde{I}| - |\widetilde{J}|) - 1 + |I| > |I|. \qquad \square$$

Следствие 1.1.59. *Согласованная и регулярная пара строго регулярна.*

Следствие 1.1.60 (см. следствие 1.1.53 и пример 1.2.10)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое хорошо сформированное невырожденное взвешенное полное пересечение мультистепени μ. Следующие условия эквивалентны:*

- *$I(1)$ имеет тип (Q_1), пара $(\rho; \mu)$ регулярна, и $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$;*
- *$I(1)$ имеет тип (Q_1^+).*

Доказательство. Пусть подмножество $I(1)$ имеет тип (Q_1), пара $(\rho; \mu)$ является регулярной, и $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$. В силу леммы 1.1.30 имеем $|I(1)| \leqslant c$. Тогда утверждение следует из леммы 1.1.58.

Обратно, пусть подмножество $I(1)$ имеет тип (Q_1^+). Тогда по определению пара $(\rho; \mu)$ является регулярной, подмножество $I(1)$ имеет тип (Q_1), и $|I(1)| \leqslant c$. Тогда из леммы 1.1.30 следует, что $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$. $\square$

1.2 Классификация гладких взвешенных полных пересечений Фано

Многообразия Фано образуют один из наиболее важных классов проективных алгебраических многообразий. Хорошо известно, что число деформационных классов гладких многообразий Фано заданной размерности конечно (см. [62, Theorem 0.2]), так что естественно попытаться получить их явную классификацию. Основным инвариантом гладкого многообразия Фано X является его *индекс*: наибольшее натуральное число $i_X > 0$ такое, что антиканонический класс $-K_X$ делится на i_X в группе Пикара $\mathrm{Pic}(X)$.

Гладкие многообразия Фано большого индекса могут быть явно описаны.

Теорема 1.2.1 (см. [60])**.** *Для любого гладкого многообразия Фано X размерности n имеет место оценка $i_X \leqslant n+1$. Более того,*

- *равенство $i_X = n+1$ выполнено тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}^n$;*
- *равенство $i_X = n$ выполнено тогда и только тогда, когда $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ — гладкая квадрика размерности $n > 1$.*

Число $\mathrm{coind}(X) = \dim(X) + 1 - i_X$ часто называется *коиндексом* гладкого многообразия Фано X. Таким образом, данный результат описывает гладкие многообразия Фано коиндекса 0 и 1, соответственно. Гладкие многообразия Фано коиндекса 2 были классифицированы Исковских и Фуджитой (см. [57, Theorem 3.3.1]).

Наша цель — явно описать классификацию гладких многообразий Фано, представимых в виде полных пересечений во взвешенных проективных пространствах. Мы ограничиваемся случаем *хорошо сформированных* взвешенных полных пересечений: их геометрические свойства адекватно описываются в терминах весов и степеней (см. определение 1.1.23 и пример 1.1.27). Более того, мы предполагаем, что рассматриваемые нами взвешенные полные пересечения не являются *пересечениями с линейными конусами* (см. определение 1.1.28). Это понятие непосредственно обобщает понятие вырожденного проективного многообразия. Условие не быть пересечением с линейным конусом является достаточно слабым: его всегда можно предположить, если взвешенное полное пересечение выбрано достаточно общим образом (см. предложение 1.1.33).

По определению мы можем сопоставить полному пересечению $X_\mu \subset \mathbb{P}(\rho)$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(\rho)$ набор весов $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$

и *мультистепень* $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$ взвешенного полного пересечения X (см. определение 1.1.14). Взвешенные полные пересечения в $\mathbb{P}(\rho)$ заданной мультистепени μ образуют семейство $\mathcal{F}_\mu^\rho$ (в смысле определения 1.1.18). В данной главе мы будем понимать под коразмерностью взвешенного полного пересечения X разность $\operatorname{codim}(X) = \dim(\mathbb{P}(\rho)) - \dim(X) = c$.

Известно, что любое гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано размерности хотя бы 2, не являющееся пересечением с линейным конусом, содержится в единственном семействе $\mathcal{F}_\mu^\rho$ (см. предложение 1.1.34 и замечание 1.1.35). В данной главе мы покажем, что множество таких семейств имеет естественную структуру. Отправной точкой здесь является следующий результат Пржиялковского–Шрамова, аналогичный классификации гладких многообразий Фано минимального коиндекса.

Теорема 1.2.2 ([102, теорема 1.1])**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано размерности хотя бы 2, не являющееся пересечением с линейным конусом.*

Выполнены следующие утверждения.

1. *Имеет место оценка* $\operatorname{codim}(X) \leqslant \operatorname{coind}(X)$.
2. *Если* $\operatorname{codim}(X) = \operatorname{coind}(X)$, *то многообразие X является полным пересечением* $\operatorname{coind}(X)$ *квадрик в* $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}^{\dim(\mathbb{P}(\rho))}$.
3. *Предположим, что* $\operatorname{codim}(X) = \operatorname{coind}(X) - 1$, *и* $\operatorname{codim}(X) > 1$. *Тогда X — полное пересечение* $\operatorname{coind}(X) - 2$ *квадрик и кубики в* $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}^{\dim(\mathbb{P}(\rho))}$.

Замечание 1.2.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что $\operatorname{codim}(X) = 1$, и $\operatorname{coind}(X) = 2$. Тогда из [101, следствие 3.8] следует, что многообразие X — гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^{(i_X+1)}, 2, 3)$ или гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1^{(i_X+2)}, 2)$.

Определение 1.2.4. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Мы определим *отклонение* взвешенного полного пересечения X как

$$\operatorname{var}(X) = \begin{cases} \operatorname{coind}(X) - \operatorname{codim}(X), & \text{если } \dim(X) > 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначение 1.2.5. Обозначим через Θ множество семейств $\mathcal{F}_\mu^\rho$ взвешенных полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho)$ мультистепени μ (см. определение 1.1.18) таких, что

существует гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$, не являющееся пересечением с линейным конусом.

Заметим, что отклонение гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано является характеристикой соответствующего ему семейства $\mathcal{F}_\mu^\rho \in \Theta$ взвешенных полных пересечений (см. следствие 1.1.39):

$$\operatorname{var}\colon \mathcal{F}_\mu^\rho \mapsto \sum_{j=1}^{c}(d_j-2) - \sum_{i=0}^{N}(a_i-1); \quad \rho = (a_0,\dots,a_N), \quad \mu = (d_1,\dots,d_c).$$

Замечание 1.2.6. Вместо отклонения также возможно работать с разностью $\dim(X) - \operatorname{codim}(X) = \operatorname{var}(X) + (i_X - 1)$, где $\operatorname{var}(X) \geqslant 0$ в силу теоремы 1.2.2, и $i_X > 0$ по определению. Например, см. [102, лемма 3.9].

Наша основная цель — построить явное разбиение множества Θ на подмножества семейств постоянного отклонения (см. предложения 1.2.12 и 1.2.14), а затем ограничить их число через отклонение (см. теоремы 1.2.17 и 1.2.23).

Обозначение 1.2.7. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu^\rho$ — множество семейств взвешенных полных пересечений. Введём следующие семейства взвешенных полных пересечений:

$$\mathcal{F}_{(m)}^{(l)} = \mathcal{F}_{\widetilde{\mu}}^{\widetilde{\rho}}, \quad \widetilde{\rho} = (1^{(l+2m)};\rho), \quad \widetilde{\mu} = (2^{(m)};\mu); \quad l,m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Покажем, когда сопоставление $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{(m)}^{(l)}$ определено на множестве Θ.

Определение 1.2.8. Мы будем называть гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(a_0,\dots,a_N)$

- *аменабельным*, если X является невырожденным (см. определение 1.1.28), и линейная система $|\mathcal{O}_X(1)|$ свободна от базисных точек;
- *строго аменабельным*, если X является аменабельным, и верно, что
  - X не является пересечением с линейным конусом;
  - $a_i \neq 2$ для всех $i = 0,\dots,N$.

Замечание 1.2.9. Если семейство $\mathcal{F} \in \Theta$ содержит (строго) аменабельное взвешенное полное пересечение Фано, то его общий элемент также является (строго) аменабельным и Фано (см. следствие 1.1.32).

Пример 1.2.10. Следующие взвешенных полных пересечений (не) аменабельны.

1. Гладкая хорошо сформированная гиперповерхность $X_{2m} \subset \mathbb{P}(1^{(l+1)}, m)$ степени $2m$ является аменабельной для всех $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Это двойное накрытие $\mathbb{P}^l$, разветвлённое над гиперповерхностью $Y_{2m} \subset \mathbb{P}^l$.
2. Гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X_{(3,10)} \subset \mathbb{P}(1^{(i_X+6)}, 2, 5)$ не является аменабельным.

Замечание 1.2.11. Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Так как пучок $\mathcal{O}_X(1)$ обилен, то многообразие X аменабельно тогда и только тогда, когда рациональное отображение $\Phi_{|\mathcal{O}_X(1)|} \colon X \dashrightarrow |\mathcal{O}_X(1)|$ — конечный морфизм (например, см. [69, Proposition 1.2.13]). Более того, если многообразие X невырождено, то мы можем отождествить линейные системы $|\mathcal{O}_X(1)|$ и $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|$ по лемме 1.1.30. Тогда мы можем думать про отображение $\Phi_{|\mathcal{O}_X(1)|}$ как о проекции на подпространство $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)| \subset \mathbb{P}(\rho)$.

Предложение 1.2.12 (следствия 1.3.2 и 1.3.8)**.** *Следующие утверждения имеют место для любого семейства $\mathcal{F} \in \Theta$ и всех $l, m \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

1. *Семейство $\mathcal{F}^{(l)}_{(0)}$ лежит в множестве Θ.*
2. *Семейство $\mathcal{F}^{(0)}_{(m)}$ лежит в множестве Θ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ содержит строго аменабельное взвешенное полное пересечение.*

Разобьем множество Θ в дизъюнктное объединение *серий* и *полусерий*.

Определение 1.2.13. Пусть $\mathcal{F} \in \Theta$ — семейство взвешенных полных пересечений такое, что $\mathcal{F}$ нельзя представить в виде $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{(l)}_{(m)}$ для любого семейства $\mathcal{G} \in \Theta \setminus \{\mathcal{F}\}$ и любых $l, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

- Пусть семейство $\mathcal{F}$ содержит строго аменабельное взвешенное полное пересечение Фано. *Серией*, порождённой семейством $\mathcal{F}$, называется подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \Theta \mid \mathcal{G} = \mathcal{F}^{(l)}_{(m)};\ l, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \subset \Theta$.
- Пусть семейство $\mathcal{F}$ не содержит строго аменабельного взвешенного полного пересечения Фано. *Полусерией*, порождённой семейством $\mathcal{F}$, называется подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{G} \in \Theta \mid \mathcal{G} = \mathcal{F}^{(l)}_{(0)};\ l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \subset \Theta$.

Предложение 1.2.14 (лемма 1.3.10, следствие 1.3.11)**.** *Выполнены следующие утверждения.*

1. *Пусть $\mathcal{F}^{\rho}_{\mu} \in \Theta$ — семейство взвешенных полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho)$ мультистепени μ. Тогда $\mathcal{F}^{\rho}_{\mu}$ порождает серию или полусерию тогда и*

только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{c} d_j = 1,\ |\{j \mid d_j > 2\}| = c;\ \rho = (a_0, \ldots, a_N),\ \mu = (d_1, \ldots, d_c).$$

2. Серии и полусерии образуют разбиение множества Θ.

Замечание 1.2.15. Пусть $\mathcal{F}_\mu^\rho \in \Theta$ — семейство взвешенных полных пересечений размерности хотя бы 2. Тогда общий элемент $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ семейства — гладкое многообразие Фано индекса $i_X = \sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{c} d_j$ (см. следствие 1.1.39).

Теперь мы ограничим число серий и полусерий в терминах отклонения. Для этого нам придётся ограничить *квадратичную иррегулярность* гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано.

Определение 1.2.16. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени $(d_1, \ldots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Мы будем называть число $s_2(X) = |\{j \mid d_j > 2\}|$ *квадратичной иррегулярностью* взвешенного полного пересечения X.

Теорема 1.2.17 (следствие 1.3.19)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ *— гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Пусть* $\operatorname{var}(X) > 0$*, тогда* $s_2(X) \leqslant 3\operatorname{var}(X) - 2$.

Гипотеза 1.2.18. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ *— гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда выполнена оценка* $s_2(X) \leqslant \operatorname{var}(X)$.

Замечание 1.2.19. Гипотеза выполнена при $\operatorname{var}(X) < 5$ (см. приложение 1.6).

Сформулируем основной результат данной главы.

Обозначение 1.2.20. Для любого $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ обозначим через $\mathbb{S}_r$ множество всех серий и полусерий отклонения r. Представим множество $\mathbb{S}_r$ в виде дизъюнктного объединения следующих трёх подмножеств $\mathbb{S}_r = \mathbb{S}_r^\alpha \bigsqcup \mathbb{S}_r^\beta \bigsqcup \mathbb{S}_r^\gamma$:

- $\mathbb{S}_r^\alpha$ содержит серии семейств полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}^{\dim(\mathbb{P}(\rho))}$;
- $\mathbb{S}_r^\beta$ содержит серии семейств полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho) \neq \mathbb{P}^{\dim(\mathbb{P}(\rho))}$.
- $\mathbb{S}_r^\gamma$ содержит полусерии семейств полных пересечений в $\mathbb{P}(\rho) \neq \mathbb{P}^{\dim(\mathbb{P}(\rho))}$.

Иными словами, выполнено следующее равенство:

$$\Theta = \bigsqcup_{r=0}^{\infty} \left(\bigsqcup_{\mathfrak{S} \in \mathbb{S}_r} \mathfrak{S} \right) = \bigsqcup_{r=0}^{\infty} \left(\bigsqcup_{\mathfrak{S}_\alpha \in \mathbb{S}_r^\alpha} \mathfrak{S}_\alpha \sqcup \bigsqcup_{\mathfrak{S}_\beta \in \mathbb{S}_r^\beta} \mathfrak{S}_\beta \sqcup \bigsqcup_{\mathfrak{S}_\gamma \in \mathbb{S}_r^\gamma} \mathfrak{S}_\gamma \right).$$

Теорема 1.2.21 (лемма 1.3.20, следствие 1.3.25)**.** *Выполнены следующие утверждения.*

1. $|\mathbb{S}_r^\alpha|$ *равняется количеству целых разбиений числа* r *для всех* $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.
2. *Положим* $F_w(m) = \binom{m+w-1}{m}$. *Выполнены следующие оценки:*

$$|\mathbb{S}_r^\beta| \leqslant \sum_{c=1}^{3r-2} F_r(c-1)F_r(c), \quad |\mathbb{S}_r^\gamma| \leqslant \sum_{c=1}^{3r-2} F_{r+2c}(r+c)F_c((r-1)(r+2c)).$$

Замечание 1.2.22. Оценки в теореме 1.2.21 являются достаточно слабыми (см. раздел 1.6).

Гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения играют важную роль в изучении бирациональной жёсткости многообразий Фано (см. [88, 110]). Хорошо известно, что гладкое многообразие Фано X размерности хотя бы 3 такое, что $(-K_X)^{\dim(X)} \leqslant 4$, и $\mathrm{Bs}(|-K_X|) = \varnothing$, является бирационально сверхжёстким (см. [110, §0.3]). В то же время известно лишь небольшое число многообразий Фано, удовлетворяющих данным двум условиям (например, двойные накрытия проективных пространств или квадрик, см. [88, Example 2.1.3]). Мы доказываем, что антиканоническая линейная система $|-K_X|$ на гладком хорошо сформированном взвешенном полном пересечении Фано X антиканонической степени 1 *никогда* не является свободной от базисных точек.

Теорема 1.2.23 (предложение 1.4.9)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — *гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени* $(d_1, \ldots, d_c)$, *не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что верно* $(-K_X)^{\dim(X)} = 1$. *Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Имеет место следующая оценка:* $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) < \dim(X)$. *Отсюда мы получаем, что* $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_X(1)|) \neq \varnothing$ *(см. замечание 1.2.11).*
2. *Число* d_j *не является степенью простого числа для всех* $j = 1, \ldots, c$.

Следствие 1.2.24 (следствие 1.4.10)**.** *Число семейств* $\mathcal{F} \in \Theta$ *таких, что существует гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано* $X \in \mathcal{F}$ *антиканонической степени 1 и заданного отклонения, конечно.*

1.3 Серии и полусерии гладких взвешенных полных пересечений Фано

1.3.1 Структура серий и полусерий

Лемма 1.3.1. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени μ, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда общий элемент X' семейства $\mathcal{F}_\mu^{(1;\rho)}$ взвешенных полных пересечений — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Если $\dim(X) > 1$, то индекс Фано многообразия X' равен $i_{X'} = i_X + 1$.*

Доказательство. По определению взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1;\rho)$ хорошо сформировано. Отметим, что элементы семейства $\mathcal{F}_\mu^{(1;\rho)} : T \to B$ не являются пересечениями с линейными конусами. Таким образом, достаточно доказать, что подмножество

$$B' = \{X' \in B \mid X' \text{ гладко и хорошо сформировано}\}$$

непусто и открыто (условие быть Фано будет следовать из предложения 1.1.38).

По следствию 1.1.26 мы можем представить B' в виде $B' = B'_1 \cap B'_2$, где

$$B'_1 = \{X' \in B \mid X' \text{ квази-гладко}\}, \quad B'_2 = \{X' \in B \mid X' \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(1;\rho)) = \varnothing\}.$$

Данные подмножества открыты в B (см. доказательство следствия 1.1.32).

Отметим, что B'_2 непусто: оно содержит проективный конус над X по лемме 1.1.6. Предложение 1.1.47 означает, что B'_1 также непусто. Так как база семейства B неприводима по лемме 1.1.22, то получаем, что $B'_1 \cap B'_2 \neq \varnothing$. □

Следствие 1.3.2. *Пусть $\mathcal{F} \in \Theta$ — семейство взвешенных полных пересечений. Тогда $\mathcal{F}_{(0)}^{(l)} \in \Theta$ для всех $l \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.*

Лемма 1.3.3 (см. доказательство теоремы 1.2.2)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(1;\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени μ и размерности хотя бы 2, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда общий элемент X' семейства взвешенных полных пересечений $\mathcal{F}_\mu^\rho$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом.*

Если индекс Фано $i_X > 1$, то X' является многообразием Фано. Более того, если $\dim(X) > 2$, то индекс Фано многообразия X' равен $i_{X'} = i_X - 1$.

Доказательство. В силу [83, Theorem 1.2] линейная система $|\mathcal{O}_X(1)|$ непуста. Пусть X' — общий дивизор из линейной системы $|\mathcal{O}_X(1)|$. Тогда X' является гладким по [83, Theorem 1.2]. Более того, $X' \subset \mathbb{P}(\rho)$ — хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени μ по [102, лемма 3.3], не являющееся пересечением с линейным конусом. Применим предложение 1.1.38. □

Лемма 1.3.4. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкая подсхема в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$, где $a_i \neq 2$ для всех $i = 0, \dots, N$. Предположим, что существует элемент $Q \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(2)|$ такой, что $X \cap Q$ квази-гладко, и $\operatorname{codim}_X(X \cap Q) = 1$. Тогда подсхема X не пересекает $\operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$.*

Доказательство. Лемма 1.1.8 означает, что базисное множество линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|$ может быть описано следующим образом:

$$\operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|) = \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} \subset \mathbb{P}(\rho) = \operatorname{Proj}(R^\rho), \quad R^\rho = \Bbbk[X_0, \dots, X_N].$$

Пусть $I_X \subset R^\rho$ — определяющий идеал X (см. определение 1.1.10), и $f \in R^\rho$ — квадратичный многочлен от переменных $\{X_i \mid a_i = 1\}$, представляющий Q (см. лемму 1.1.8). Ясно, что f зануляется на страте $\{X_i = 0 \mid a_i = 1\} \subset \mathbb{A}^{N+1}$ вместе со всеми своими частными производными. Но по определению подсхема $\operatorname{Spec}(R^\rho/(I_X + (f))) \subset \mathbb{A}^{N+1}$ является гладкой вне вершины конуса, поэтому взвешенное полное пересечение X не пересекает $\operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$. □

Следствие 1.3.5. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — квази-гладкое хорошо сформированное невырожденное взвешенное полное пересечение. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$, где $a_i \neq 2$ для всех $i = 0, \dots, N$. Если существует квази-гладкий элемент $Q \in |\mathcal{O}_X(2)|$, то X и Q — аменабельные взвешенные полные пересечения.*

Доказательство. Лемма 1.1.29 означает, что элемент $Q \in |\mathcal{O}_X(2)|$ поднимается до элемента $\widetilde{Q} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(2)|$ такого, что $\widetilde{Q} \cap X = Q$. Тогда лемма 1.3.4 означает, что многообразие X не пересекает $\operatorname{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$ (тогда $Q \subset X$ — тоже). Следствие 1.1.31 означает, что многообразия X и Q аменабельны. □

Лемма 1.3.6. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — взвешенное полное пересечение в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве мультистепени μ,*

не являющееся пересечением с линейным конусом. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$, *где* $a_i \neq 2$ *для всех* $i = 0, \dots, N$. *Предположим, что* X *не пересекает базисное множество* $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$. *Тогда общие элементы* $X' \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ *и* $X'' \in \mathcal{F}_{(2;\mu)}^{(1,1;\rho)}$ *являются строго аменабельными.*

Доказательство. По предположению и лемме 1.1.8 взвешенное полное пересечение X не пересекает координатную страту

$$\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|) = \{X_i = 0 \mid a_i = 1\} \subset \mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho), \quad R^\rho = \Bbbk[X_0, \dots, X_N].$$

Лемма 1.1.49 означает, что подмножество $\{i \mid a_i > 1\}$ имеет тип (Q_1^+). Мы можем применить предложение 1.1.47 и заключить, что общий элемент $X' \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ является квази-гладким. Более того, X' также не пересекает $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(1)|)$ по лемме 1.5.13. Тогда он является гладким и хорошо сформированным в силу следствия 1.1.26, поэтому X' аменабельно по следствию 1.1.31.

Рассмотрим общий элемент $\widetilde{X} \in \mathcal{F}_\mu^{(1,1;\rho)}$. Он является гладким и хорошо сформированным по лемме 1.3.1, следовательно, аменабелен в силу следствия 1.1.31. Ясно, что $|\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(2)| \neq \varnothing$, тогда пусть $Q \in |\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(2)|$ — общий элемент. Лемма 1.1.29 означает, что Q можно поднять до общего элемента $X'' \in \mathcal{F}_{(2;\mu)}^{(1,1;\rho)}$. Но мы имеем $X'' \subset \widetilde{X}$, откуда $X'' \cap \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1;\rho)}(1)|) \subset \mathbb{P}(1,1;\rho)$ также пусто. Тогда мы можем повторить те же рассуждения для X''. □

Следствие 1.3.7. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ *— строго аменабельное взвешенное полное пересечение мультистепени* μ. *Тогда общий элемент* $X' \in \mathcal{F}_{(2;\mu)}^{(1,1;\rho)}$ *также является аменабельным взвешенным полным пересечением.*

Следствие 1.3.8. *Пусть* $\mathcal{F} \in \Theta$ *— семейство взвешенным полных пересечений. Тогда для любого* $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ *верно* $\mathcal{F}_{(m)}^{(0)} \in \Theta$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F}$ *содержит строго аменабельное взвешенное полное пересечение.*

Лемма 1.3.9. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(1,1;\rho)$ *— гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени* $(2;\mu)$, *не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда общий элемент* X' *семейства взвешенных полных пересечений* $\mathcal{F}_\mu^\rho$ *— строго аменабельное взвешенное полное пересечение Фано. Если* $\dim(X) > 1$, *то индекс* X' *совпадает с индексом* X.

Доказательство. По определению существует элемент $Q \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(2)|$ и взвешенное полное пересечение $X' \in \mathcal{F}_\mu^{(1,1;\rho)}$ такие, что $Q \cap X' = X$. Тогда X' —

строго аменабельное взвешенное полное пересечение по следствию 1.3.5, и Фано по следствию 1.1.39. Теперь достаточно дважды применить лемму 1.3.3. □

Лемма 1.3.10. *Пусть $\mathcal{F}_\mu^\rho \in \Theta$ — семейство взвешенных полных пересечений. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$, $\mu = (d_1, \dots, d_c)$, а также*

$$I(\mathcal{F}_\mu^\rho) = \sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{c} d_j, \quad s_2(\mathcal{F}_\mu^\rho) = |\{j \mid d_j > 2\}|.$$

Семейство $\mathcal{F}_\mu^\rho$ порождает серию или полусерию тогда и только тогда, когда выполнено $I(\mathcal{F}_\mu^\rho) = 1$ и $s_2(\mathcal{F}_\mu^\rho) = c$.

Доказательство. Докажем необходимость. С одной стороны, предположение $s_2(\mathcal{F}_\mu^\rho) = c$ означает, что мы не можем записать $\mathcal{F}_\mu^\rho = \mathcal{G}_{(1)}^{(0)}$ для любого семейства $\mathcal{G} \in \Theta$. С другой стороны, по следствию 1.1.39 общий элемент семейства $\mathcal{F}_\mu^\rho$ имеет индекс Фано 1. Лемма 1.3.3 означает, что существует семейство $\mathcal{G}$ взвешенных полных пересечений такое, что $\mathcal{F}_\mu^\rho = \mathcal{G}_{(0)}^{(1)}$, но его общий элемент — многообразие Калаби–Яу, откуда $\mathcal{G} \notin \Theta$.

Докажем достаточность. Пусть $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано. Если $\dim(X) > 1$, то мы можем применять лемму 1.3.3, пока не получим $i_X = 1$ или $\dim(X) = 1$. В последнем случае X — или проективная прямая, или гладкая коника (см. [101, лемма 2.6]), тогда данные семейства могут быть получены из семейства, соответствующего точке.

Следовательно, по следствию 1.1.39 можем предположить, что $I(\mathcal{F}_\mu^\rho) = 1$. Если X не является аменабельным, то $s_2(X) = \operatorname{codim}(X) = c$ по следствию 1.3.5. Если многообразие X аменабельно, то мы можем применить лемму 1.3.9 достаточное количество раз, пока не получим $s_2(\mathcal{F}) = \operatorname{codim}(X) = c$. □

Следствие 1.3.11. *Любые две различные серии или полусерии гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}(\mathcal{F}')$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{F}'')$ — две серии или полусерии, порождённые семействами $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, соответственно. Предположим, что существует семейство $\mathcal{G} \in \Theta$ такое, что $\mathcal{G} \in \mathfrak{S}(\mathcal{F}') \cap \mathfrak{S}(\mathcal{F}'')$. Тогда существуют числа $l', m, l'', m'' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такие, что $\mathcal{G} = \mathcal{F}'^{(l')}_{(m')} = \mathcal{F}''^{(l'')}_{(m'')}$. Положим $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_{\mu'}^{\rho'}$ и $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}_{\mu''}^{\rho''}$. Мы получаем следующие равенства:

$$(1^{(l'+2m')}; \rho') = (1^{(l''+2m'')}; \rho''), \quad (2^{(m')}; \mu') = (2^{(m'')}; \mu'').$$

Для любого $\mathcal{F} \in \Theta$ положим $I(\mathcal{F}) = \sum a_i - \sum d_j$ и $s_2(\mathcal{F}) = |\{j \mid d_j > 2\}|$. Тогда

$$l' + I(\mathcal{F}') = l'' + I(\mathcal{F}''), \quad s_2(\mathcal{F}') = s_2(\mathcal{F}''), \quad m' + c' = m'' + c''.$$

Лемма 1.3.10 означает, что $I(\mathcal{F}') = I(\mathcal{F}'') = 1$, $s_2(\mathcal{F}') = c'$ и $s_2(\mathcal{F}'') = c''$, откуда $l' = l''$ и $m' = m''$. Таким образом, $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, и всё доказано. □

1.3.2 Оценки на квадратичную иррегулярность

Лемма 1.3.12. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда $(d_1 - 2, \dots, d_c - 2)$ определяет слабое разбиение числа $\operatorname{var}(X)$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $\dim(X) > 1$. Следствие 1.1.39 означает, что $\operatorname{var}(X) = \sum_{j=1}^{c}(d_j - 2)$. Но полное пересечение X не является пересечением с линейным конусом, откуда $d_j > 1$ для всех $j = 1, \dots, c$. □

Следствие 1.3.13. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — гладкое полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Тогда $s_2(X) \leqslant \operatorname{var}(X)$.*

Лемма 1.3.14. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что $\max_i(a_i) > 1$. Положим*

$$\alpha_j = d_j - a_{\dim(X)+j} - 1, \quad j = 1, \dots, c-1; \quad \alpha_c = d_c - a_N - a_{\dim(X)} - 1.$$

Тогда выполнено следующее тождество:

$$\sum_{j=1}^{c} \alpha_j = \sum_{i=c+i_X}^{\dim(X)-1} a_i; \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, c.$$

Доказательство. Лемма 1.1.36 означает, что выполнено $\alpha_j \geqslant 0$ для любого $j = 1, \dots, c-1$. Отметим, что $a_{\dim(X)} < a_N$: от противного, пусть $a_{\dim(X)} = a_N$, тогда по следствию 1.1.52 хотя бы $c+1$ степеней среди $d_1, \dots, d_c$ делятся на $a_{\dim(X)}$, что невозможно. Тогда мы получаем, что $d_c \geqslant 2a_N \geqslant a_N + a_{\dim(X)} + 1$ по лемме 1.1.36. Более того, предложение 1.1.42 означает, что $a_{c+i_X-1} = 1$. Тогда тождество следует из следствия 1.1.39. □

Замечание 1.3.15. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$, откуда $a_{\dim(X)} = 1$ по лемме 1.1.30. Тогда лемма 1.3.14 означает, что набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_c)$ определяет слабую композицию числа $\operatorname{var}(X) - 1$.

Лемма 1.3.16. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Выполнена следующая оценка:* $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant N - 2\operatorname{var}(X)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.2.2 можно предположить, что $\operatorname{var}(X) > 0$. Рассмотрим функцию $W\colon \Theta \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, сопоставляющую семейству $\mathcal{G} \in \Theta$ взвешенных полных полных пересечений в $\mathbb{P}(a'_0, \dots, a'_{N'})$ мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$ число $|\{i \mid a'_i > 1\}|$. По лемме 1.1.30 верно равенство $W(\mathcal{G}) = N' - \dim(|\mathcal{O}_Y(1)|)$ для любого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано $Y \in \mathcal{G}$. Рассмотрим разбиение $\Theta = \bigsqcup \Theta^{(i,r)}$, где для любого семейства $\mathcal{G} \in \Theta^{(i,r)}$ и любого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано $Y \in \mathcal{G}$ выполнено $\operatorname{var}(Y) = r$ и $\sum a_i - \sum d_j = i$. По предложению 1.1.42 и следствию 1.1.39 ограничение функции W на любое подмножество $\Theta^{(i,r)}$ имеет единственный максимум на семействе $\mathcal{F}_{(i,r)} \in \Theta^{(i,r)}$ взвешенных полных пересечений мультистепени $(6^{(r)})$ в $\mathbb{P}(1^{(i+r)}, 2^{(r)}, 3^{(r)})$. Ясно, что $W(\mathcal{F}_{(i,r)}) = 2r$. Тогда мы получаем оценку $W(\mathcal{F}) \leqslant 2\operatorname{var}(X)$ для любого семейства $\mathcal{F} \in \Theta$ и любого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано $X \in \mathcal{F}$, таким образом, всё доказано. □

Теперь мы выведем теорему 1.2.17 из различных частных случаев.

Лемма 1.3.17. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени μ, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что* $\max_i(a_i) = 2$. *Тогда выполнена следующая оценка:* $\operatorname{var}(X) \geqslant \operatorname{codim}(X)$.

Доказательство. Отметим, что из предположения $\max_i(a_i) > 1$ и теоремы 1.2.2 следует, что $\operatorname{var}(X) > 0$. Положим $\mu = (d_1, \dots, d_c)$. В силу следствия 1.1.39 равенство $\operatorname{var}(X) - \operatorname{codim}(X) = N + 1 - 3c - i_X$, где $c = \operatorname{codim}(X)$, равносильно

$$\operatorname{var}(X) - \operatorname{codim}(X) = \sum_{j=1}^{c}(d_j - 3) - \sum_{i=0}^{N}(a_i - 1).$$

По предположению выполнено $d_j > 2$ для всех $j = 1, \dots, c$, и $a_i \leqslant 2$ для всех $i = 0, \dots, N$. Иными словами,

$$\sum_{j=1}^{c}(d_j - 3) \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{N}(a_i - 1) = l, \quad l = |\{i \mid a_i = 2\}|.$$

Пара $(\rho; \mu)$ является регулярной по следствию 1.1.52, поэтому существует хотя бы l чётных чисел среди d_j. Таким образом, выполнено $\sum_{j=1}^{c}(d_j - 3) \geqslant l$, что равносильно оценке $\operatorname{var}(X) \geqslant \operatorname{codim}(X)$. □

Лемма 1.3.18. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Пусть $\max_i(a_i) > 1$, и $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$. Тогда выполнена следующая оценка: $s_2(X) \leqslant 3\operatorname{var}(X) - 2$.*

Доказательство. Отметим, что из предположения $\max_i(a_i) > 1$ следует, что $\operatorname{var}(X) > 0$ в силу теоремы 1.2.2. Тогда мы можем предположить, что выполнено $\operatorname{codim}(X) > \operatorname{var}(X)$. В самом деле, иначе утверждение тривиально:

$$s_2(X) \leqslant \operatorname{codim}(X) \leqslant \operatorname{var}(X) = \min(\operatorname{var}(X), 3\operatorname{var}(X) - 2).$$

В этом доказательстве мы будем использовать обозначения леммы 1.3.14.

Отметим, что по предположению и лемме 1.1.30 выполнено $a_{\dim(X)} = 1$. Пусть $(d_1, \dots, d_c)$ — мультистепень взвешенного полного пересечения X. Также предположим, что $\alpha_c > 0$. В самом деле, по лемме 1.1.36 выполнено $d_c \geqslant 2a_N$, т.е., $a_N \leqslant a_{\dim(X)} + 1 + \alpha_c$. Тогда из $\alpha_c = 0$ следует, что $a_N = 2$, так что в этом случае мы можем применить лемму 1.3.17. Из леммы 1.3.14 мы получаем, что

$$c - s_2(X) = |\{j \mid d_j = 2\}| = |\{j \mid a_{\dim(X)+j} = 1,\ \alpha_j = 0\}|.$$

Положим $\mu = |\{j \mid \alpha_j = 0\}|$ и $\nu = |\{j \mid a_{\dim(X)+j} > 1,\ \alpha_j = 0\}|$. Тогда мы можем записать $s_2(X) = c - \mu + \nu$.

Вначале выведем оценку снизу на μ. Напомним, что выполнено $a_{\dim(X)} = 1$ и $\alpha_c > 0$. Из замечания 1.3.15 и принципа Дирихле мы получаем, что

$$\sum_{j=1}^{c-1}\alpha_j = \operatorname{var}(X) - 1 - \alpha_c, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \alpha_c > 0; \quad \mu \geqslant c - 1 - \sum_{j=1}^{c-1}\alpha_j = c - \operatorname{var}(X) + \alpha_c.$$

Теперь мы можем вывести оценку сверху на ν. По лемме 1.3.16 выполнено $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant N - 2\operatorname{var}(X)$, что равносильно $2\operatorname{var}(X) \geqslant |\{i \mid a_i > 1\}|$ в силу

леммы 1.1.30. Напомним, что $\alpha_c > 0$, тогда ясно, что $|\{i \mid a_i > 1\}| > \nu$. Как следствие, мы получаем, что $\nu \leqslant 2\operatorname{var}(X) - 1$. □

Следствие 1.3.19. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано, не являющееся пересечением с линейным конусом. Пусть $\operatorname{var}(X) > 0$. Тогда выполнена оценка $s_2(X) \leqslant 3\operatorname{var}(X) - 2$.*

Доказательство. Если $\max(\rho) \leqslant 2$, то утверждение следует из следствия 1.3.13 и леммы 1.3.17. Если же $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) < \dim(X)$, то по лемме 1.3.16 мы получаем оценку $\operatorname{codim}(X) < 2\operatorname{var}(X)$. Наконец, если выполнено $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$ и $\max(\rho) > 1$, то мы можем применить лемму 1.3.18. □

1.3.3 Оценки на число серий и полусерий данного отклонения

Лемма 1.3.20. *Для любого $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ верно $|\mathbb{S}_r^\alpha| = p(r)$, где $p(r)$ — количество целых разбиений числа r.*

Доказательство. Следует из леммы 1.3.12. □

Лемма 1.3.21. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \ldots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что верна оценка $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant \dim(X)$. Тогда выполнены следующие оценки:*

$$\max_i(a_i) \leqslant \operatorname{var}(X) + 1, \quad \max_j(d_j) \leqslant 2(\operatorname{var}(X) + 1).$$

Доказательство. Можем предположить, что $\max(a_i) > 1$ (см. лемму 1.3.12). По предположению и лемме 1.1.30 мы получаем, что $a_{\dim(X)} = 1$. По лемме 1.3.14 выполнено $d_c = a_N + a_{\dim(X)} + 1 + \alpha_c$, где $0 \leqslant \alpha_c \leqslant \operatorname{var}(X) - 1$. Лемма 1.1.36 означает, что $d_c \geqslant 2a_N$, т.е., $a_N \leqslant a_{\dim(X)} + 1 + \alpha_c$. Тогда мы получаем оценки

$$a_N \leqslant a_{\dim(X)}+1+\alpha_c \leqslant \operatorname{var}(X)+1, \quad d_c = a_N+a_{\dim(X)}+1+\alpha_c \leqslant 2(\operatorname{var}(X)+1). \ \square$$

Обозначение 1.3.22. Далее обозначим через $\mathbb{S}_r^\beta(c) \subset \mathbb{S}_r^\beta$ (соответственно, через $\mathbb{S}_r^\gamma(c) \subset \mathbb{S}_r^\gamma$) подмножество серий (соответственно, полусерий) гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано таких, что для любой серии $\mathfrak{S} \in \mathbb{S}_r^\beta(c)$ (для любой полусерии $\mathfrak{S} \in \mathbb{S}_r^\gamma(c)$), порождённой семейством

$\mathcal{F} \in \Theta$, выполнено $\operatorname{var}(X) = r$ и $\operatorname{codim}(X) = c$ для любого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано $X \in \mathcal{F}$.

Лемма 1.3.23. *Положим* $F_w(m) = \binom{m+w-1}{m}$. *Выполнена следующая оценка:*

$$|\mathbb{S}_r^\beta(c)| \leqslant F_r(c-1)F_r(c).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mu^\rho) \in \mathbb{S}_r^\beta(c)$ — произвольная серия, и $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_c)$. Выполнены следующие ограничения:

- $a_i \neq 2$, $|\{i \mid a_i > 1\}| \leqslant \operatorname{codim}(X) = c$ по лемме 1.1.30 и замечанию 1.2.11;
- $\sum a_i - \sum d_j = 1$, и $s_2(X) = \operatorname{codim}(X) = c$ по лемме 1.3.10;
- $\max(a_0, \dots, a_N) \leqslant r + 1$ по лемме 1.3.21.

Отождествим семейство $\mathcal{F}_\mu^\rho$ с парой $(\rho; \mu)$. По предположению, лемме 1.3.14 и замечанию 1.3.15 мы можем единственным образом представить пару $(\rho; \mu)$ наборами $(a_{\dim(X)+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^c$ и $(\alpha_1, \dots, \alpha_c) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^c$, где

$$\alpha_j = d_j - a_{\dim(X)+j} - 1, \quad j = 1, \dots, c-1; \quad \alpha_c = d_c - a_N - 2,$$
$$\sum_{j=1}^{c} \alpha_j = r - 1, \quad \dim(X) = \sum_{j=1}^{c} (d_j - a_{\dim(X)+j}).$$

Число возможных наборов $(a_{\dim(X)+1}, \dots, a_N)$ ограничено числом неубывающих последовательностей чисел $\{1, 3, \dots, r+1\}$ длины c, равным $F_r(c)$. Число возможных наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_c)$ ограничено числом слабых разбиений числа $r-1$ в c частей, равным $F_r(c-1)$. Отсюда получаем требуемую оценку. □

Лемма 1.3.24. *Пусть* $F_w(m) = \binom{m+w-1}{m}$. *Выполнена следующая оценка:*

$$|\mathbb{S}_r^\gamma(c)| \leqslant F_{r+2c}(r+c)F_c((r-1)(r+2c)).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mu^\rho) \in \mathbb{S}_r^\gamma(c)$ — произвольная полусерия, и $X \in \mathcal{F}_\mu^\rho$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано. Положим $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_c)$. Выполнены следующие ограничения:

- $\sum a_i - \sum d_j = 1$ и $s_2(X) = \operatorname{codim}(X) = c$ по лемме 1.3.10;
- $|\{i \mid a_i > 1\} \leqslant \dim(X) = c + r$ по лемме 1.1.30 и предложению 1.1.42;
- $\max(a_0, \dots, a_N) \leqslant N = c + 2r$ по [85, Theorem 1.1].

Отождествим семейство $\mathcal{F}_\mu^\rho$ с парой $(\rho; \mu)$ и также отметим, что набор $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$ определяется поднабором $(a_{c+1}, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{\dim(X)}$. Число

возможных наборов $(a_{c+1}, \dots, a_N)$ ограничено числом неубывающих последовательностей чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ длины $r + c$, которое равно $F_{c+2r}(r + c)$. Более того, для любого заданного набора $(a_{c+1}, \dots, a_N)$ по лемме 1.3.14 мы можем единственным образом представить любую мультистепень $(d_1, \dots, d_c)$ набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_c) \in \mathbb{Z}^c_{\geqslant 0}$, где

$$\alpha_j = d_j - a_{\dim(X)+j} - 1, \quad \alpha_c = d_c - a_N - a_{\dim(X)} - 1, \quad \sum_{j=1}^{c} \alpha_j = \sum_{i=c+1}^{\dim(X)-1} a_i.$$

Отсюда мы получаем, что для любого заданного набора $(a_{c+1}, \dots, a_N)$ число возможных мультистепеней $(d_1, \dots, d_c)$ ограничено числом слабых композиций числа $\beta = \sum_{i=c+1}^{\dim(X)-1} a_i$ в c частей, которое равно $F_c(\beta)$. Заметим, что выполнена оценка $\beta \leqslant (r-1)N = (r-1)(c+2r)$. Тогда мы можем ограничить $F_c(\beta)$ через $F_c((r-1)(c+2r))$. Следовательно, мы получаем требуемую оценку. □

Следствие 1.3.25. *Положим* $F_w(m) = \binom{m+w-1}{m}$. *Выполнены оценки*

$$|\mathbb{S}^{\beta}_r| \leqslant \sum_{c=1}^{3r-2} F_r(c-1)F_r(c), \quad |\mathbb{S}^{\gamma}_r| \leqslant \sum_{c=1}^{3r-2} F_{r+2c}(r+c)F_c((r-1)(r+2c)).$$

Доказательство. В силу леммы 1.3.10 и следствия 1.3.19 имеются равенства $\mathbb{S}^{\beta}_r = \bigsqcup_{c=1}^{3r-2} \mathbb{S}^{\beta}_r(c)$ и $\mathbb{S}^{\gamma}_r = \bigsqcup_{c=1}^{3r-2} \mathbb{S}^{\gamma}_r(c)$. Применим леммы 1.3.23 и 1.3.24. □

1.4 Гладкие взвешенные полные пересечения Фано антиканонической степени 1

В данном разделе мы доказываем, что гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения Фано антиканонической степени 1 не являются аменабельными в смысле определения 1.2.8. Здесь мы следуем определениям и обозначениям раздела 1.1.

Обозначение 1.4.1. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}_{>0}$ и $\mu = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{Z}^m_{>0}$ — упорядоченные наборы, и ν_p — p-адическое нормирование. Для любого простого p и $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ положим $I^n_p(\rho; \mu) = \{i \mid \nu_p(a_i) = n\}$ и $J^n_p(\rho; \mu) = \{j \mid \nu_p(d_j) = n\}$.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ *и* $\mu = (d_1, \dots, d_m)$ — *упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что* $(\rho; \mu)$ — *регулярная пара. Следующие условия эквивалентны:*

- $\prod a_i = \prod d_j$;
- $|I_p^n(\rho;\mu)| = |J_p^n(\rho;\mu)|$ *для любого простого* p *и* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Доказательство. Пусть $\prod a_i = \prod d_j$. Пара $(\rho;\mu)$ регулярна, откуда для любого простого p и $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ выполнено $|\{i \mid \nu_p(a_i) \geqslant n\}| \leqslant |\{j \mid \nu_p(d_j) \geqslant n\}|$, что равносильно оценке

$$\sum_{s \geqslant n} |I_p^s(\rho;\mu)| \leqslant \sum_{s \geqslant n} |J_p^s(\rho;\mu)|. \tag{1.1}$$

Положим $h_p = \max_s(|I_p^s(\rho;\mu)| > 0)$. Мы можем переписать (1.1) в виде

$$\sum_{s=n}^{h_p} \left(|J_p^s(\rho;\mu)| - |I_p^s(\rho;\mu)|\right) + \sum_{s>h_p} |J_p^s(\rho;\mu)| \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Просуммируем (1.2) по свободному параметру $n = 1, \ldots, h_p$. Получим

$$\sum_{s=1}^{h_p} s\left(|J_p^s(\rho;\mu)| - |I_p^s(\rho;\mu)|\right) + h_p \sum_{s>h_p} |J_p^s(\rho;\mu)| \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что $\prod a_i = \prod d_j$ равносильно равенствам

$$\sum_i \nu_p(a_i) = \sum_{s \geqslant 1} s|I_p^s(\rho;\mu)| = \sum_{s \geqslant 1} s|J_p^s(\rho;\mu)| = \sum_j \nu_p(d_j) \tag{1.4}$$

для всех простых p. Мы можем переписать (1.4) в следующем виде:

$$\left(\sum_{s=1}^{h_p} s\left(|J_p^s(\rho;\mu)| - |I_p^s(\rho;\mu)|\right) + h_p \sum_{s>h_p} |J_p^s(\rho;\mu)|\right) + \sum_{s>h_p} (s - h_p)|J_p^s(\rho;\mu)| = 0. \tag{1.5}$$

Сравнивая (1.3) и (1.5), мы получаем, что $|J_p^s(\rho;\mu)| = 0$ для любого $s > h_p$. Тогда из (1.2) мы выводим, что $|I_p^s(\rho;\mu)| = |J_p^s(\rho;\mu)|$ для любого $s = 1, \ldots, h_p$.

Теперь предположим, что выполнено $|I_p^s(\rho;\mu)| = |J_p^s(\rho;\mu)|$ для всех простых p и $s \in \mathbb{Z}_{>0}$. Как мы отмечали выше, равенство $\prod a_i = \prod d_j$ равносильно равенствам (1.4), что завершает доказательство. □

Обозначение 1.4.3. Мы обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех регулярных пар $(\rho;\mu) = (a_0, \ldots, a_N; d_1, \ldots, d_m)$ таких, что $\prod a_i = \prod d_j$, и для любого простого p и $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ подмножество $I_p^n(\rho;\mu)$ имеет тип (Q_1^+).

Лемма 1.4.4. *Пусть* $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ *и* $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ *— упорядоченные наборы положительных целых чисел. Предположим, что* $(\rho; \mu) \in \mathcal{P}$*, и* $a_i \neq d_j$ *для всех* $i = 0, \ldots, N$ *и* $j = 1, \ldots, m$*. Тогда число* d_j *не является степенью простого числа для всех* $j = 1, \ldots, m$*.*

Доказательство. Предположим, что выполнено $d_j = p^n$ для некоторого простого p и $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда в силу леммы 1.4.2 и определения множества $\mathcal{P}$ мы бы имели $a_i = p^n$ для некоторого $i = 0, \ldots, N$. Мы получили противоречие. □

Обозначение 1.4.5. Пусть $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что пара $(\rho; \mu)$ регулярна, и p — простое число. Тогда следующая пара $(\rho^p; \mu^p)$ регулярна по [83, Lemma 4.5]:

$$d_j^p = \begin{cases} d_j/p & \text{если } p \mid d_j, \\ d_j & \text{если } p \nmid d_j; \end{cases} \qquad a_i^p = \begin{cases} a_i/p & \text{если } p \mid a_i, \\ a_i & \text{если } p \nmid a_i. \end{cases}$$

Обозначение 1.4.6. Пусть $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что пара $(\rho; \mu)$ регулярна. Мы обозначим через $(\widetilde{\rho}; \widetilde{\mu})$ единственную регулярную пару, полученную удалением всех чисел d_j и a_i таких, что $d_j = a_i$ (см. [83, Lemma 4.4]).

Лемма 1.4.7. *Пусть* $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ *и* $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ *— упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что* $(\rho; \mu)$ *— регулярная пара. Тогда* $(\widetilde{\rho^p}; \widetilde{\mu^p}) \in \mathcal{P}$ *для любого простого* p*.*

Доказательство. Первое свойство в определении множества $\mathcal{P}$ сохраняется в силу леммы 1.4.2. Второе свойство также сохраняется, так как для любого простого p и $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ мы имеем равенства

$$I_p^n(\widetilde{\rho^p}; \widetilde{\mu^p}) = I_p^{n+1}(\widetilde{\rho}; \widetilde{\mu}), \quad J_p^n(\widetilde{\rho^p}; \widetilde{\mu^p}) = J_p^{n+1}(\widetilde{\rho}; \widetilde{\mu}). \qquad \square$$

Лемма 1.4.8. *Пусть* $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ *и* $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ *— упорядоченные наборы положительных целых чисел такие, что* $(\rho; \mu) \in \mathcal{P}$ *— регулярная пара. Тогда выполнена следующая оценка:* $|\{i \mid a_i > 1\}| \geqslant |\{j \mid d_j > 1\}|$*, где равенство достигается тогда и только тогда, когда* $(\widetilde{\rho}; \widetilde{\mu})$ *— пустая пара.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по числу n различных простых делителей числа $\prod d_j = \prod a_i$. Положим

$$I = \{i \mid a_i > 1\} = \bigcup_{t=1}^{n} I_{(p_t)},\ J = \{j \mid d_j > 1\} = \bigcup_{t=1}^{n} J_{(p_t)};$$
$$I_{(p_t)} = \{i \mid \nu_{p_t}(a_i) > 0\},\ J_{(p_t)} = \{j \mid \nu_{p_t}(d_j) > 0\}.$$

В течение доказательства мы будем неявно заменять любую регулярную пару $(\rho'; \mu')$ на приведённую пару $(\widetilde{\rho'}; \widetilde{\mu'})$, если это будет нам удобно.

База индукции тривиальна: если $n = 0$, то пара $(\rho; \mu)$ пуста.

Предположим, что утверждение выполнено для всех $k < n$. Положим

$$\widetilde{I} = \bigcup_{t=1}^{n-1} I_{(p_t)}, \quad \widetilde{J} = \bigcup_{t=1}^{n-1} J_{(p_t)};$$
$$I_p^{\text{prime}} = \{i \mid a_i = p^l,\ l \in \mathbb{Z}_{>0}\}, \quad J_p^{\text{prime}} = \{j \mid d_j = p^l,\ l \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Тогда мы можем записать $|I| = |\widetilde{I}| + |I_{p_n}^{\text{prime}}|$ и $|J| = |\widetilde{J}| + |J_{p_n}^{\text{prime}}|$. Отметим, что в силу леммы 1.4.4 выполнено $J_{p_n}^{\text{prime}} = \emptyset$.

Заменим пару $(\rho; \mu)$ на пару $(\rho^{p_n}; \mu^{p_n})$ хотя бы $\max_s(|I_p^s(\rho; \mu)| > 0)$ раз. Обозначим полученную пару через $(\rho_*^{p_n}; \mu_*^{p_n})$. Теперь мы можем применить предположение индукции к $(\rho_*^{p_n}; \mu_*^{p_n})$, так как $|\widetilde{I}| \geqslant |\widetilde{J}|$. Мы получили оценку $|I| - |J| = |\widetilde{I}| - |\widetilde{J}| + |I_{p_n}^{\text{prime}}| \geqslant 0$. Более того, равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(\rho_*^{p_n}; \mu_*^{p_n})$ — пустая пара, и $|I_{p_n}^{\text{prime}}| = 0$. Иными словами, пара $(\widetilde{\rho}; \widetilde{\mu})$ также должна быть пустой. □

Предложение 1.4.9. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \ldots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что $(-K_X)^{\dim(X)} = 1$.*

1. *Выполнена следующая оценка: $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) < \dim(X)$.*
2. *Число d_j не являются степенью простого числа для всех $j = 1, \ldots, c$.*

Доказательство. Положим $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$. С одной стороны, пара $(\rho; \mu)$ является совместной и строго регулярной по предложению 1.1.52. С другой стороны, по следствию 1.1.41 выполнено равенство $\prod d_j = \prod a_i$. Следовательно, пара $(\rho; \mu)$ лежит в множестве $\mathcal{P}$. Отметим, что по предположению выполнено $|\{j \mid d_j > 1\}| = \operatorname{codim}(X)$. Тогда лемма 1.4.8 означает, что $|\{i \mid a_i > 1\}| > \operatorname{codim}(X)$, что равносильно первому утверждению в силу леммы 1.1.30. Заметим, что второе утверждение следует из леммы 1.4.4. □

Следствие 1.4.10. *Число семейств $\mathcal{F} \in \Theta$ таких, что существует гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \in \mathcal{F}$ антиканонической степени 1 и заданного отклонения, конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} \in \Theta$ — семейство такое, что существует гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \in \mathcal{F}$ такое, что $(-K_X)^{\dim(X)} = 1$. Из теоремы 1.2.23 следует оценка $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) < \dim(X)$, тогда X не является аменабельным по замечанию 1.2.11. Отметим, что $i_X = 1$. Предложения 1.2.12, 1.2.14 и замечание 1.2.15 означают, что $\mathcal{F}$ отождествляется с порождающим семейством полусерии в Θ. Применим теорему 1.2.21. □

1.5 Регулярность общих последовательностей взвешенно-однородных многочленов

В данном разделе мы показываем, что регулярные последовательности взвешенно-однородных многочленов с заданными весами и степенями образуют открытое по Зарисскому подмножество в пространстве всех последовательностей взвешенно-однородных многочленов с такими ограничениями. Мы продолжаем следовать обозначениям 1.1.1 и 1.1.13.

Определение 1.5.1. Для любых упорядоченных наборов ρ и μ положительных целых чисел мы будем называть отображение

$$\mathcal{H}^{\rho}_{\mu} \colon R^{\rho}_{\mu} \to \mathbb{Z}[[T]], \quad F \mapsto \mathrm{HS}_{R^{\rho}/\langle F \rangle}(T),$$

отображением вычисления ряда Гильберта.

Обозначение 1.5.2. Пусть $S', S'' \in \mathbb{Z}[[T]]$ — формальные ряды. Обозначим через $S' \preccurlyeq S''$ сравнение по всем коэффициентам ряда.

Мы докажем, что для любых упорядоченных наборов ρ и μ положительных целых чисел отображение $\mathcal{H}^{\rho}_{\mu}$ полунепрерывно: мы утверждаем, что подмножество $\{F \in R^{\rho}_{\mu} \mid \mathcal{H}^{\rho}_{\mu}(F) \preccurlyeq S\} \subset R^{\rho}_{\mu}$ является открытым в топологии Зарисского для любого формального ряда $S \in \mathrm{im}(\mathcal{H}^{\rho}_{\mu})$. Как следствие, мы получим, что регулярные последовательности в пространстве R^{ρ}_{μ} образуют открытое в топологии Зарисского подмножество (возможно, пустое).

Пример 1.5.3. По определению $\mathrm{HS}_{R^\rho}(T)$ является производящей функцией денумерантов $D(\rho;\bullet)(T)$ (см. лемму 1.1.44).

Лемма 1.5.4 ([74, Theorem 8.20])**.** *Пусть $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ — упорядоченный набор положительных целых чисел, и $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов. Ряд Гильберта кольца $R^\rho/\langle F\rangle$ имеет вид*

$$\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) = \frac{N(T)}{\prod_{i=0}^{N}(1-T^{a_i})}, \quad N(T) \in \mathbb{Z}[T].$$

Определение 1.5.5 ([74, Definition 8.21])**.** Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов. Многочлен $N(t)$ из леммы 1.5.4 называется *K-многочленом* кольца $R^\rho/\langle F\rangle$. Обозначим его через $\mathcal{K}(R^\rho/\langle F\rangle)$.

Мы утверждаем, что степень K-многочлена $\mathcal{K}(R^\rho/\langle F\rangle)$ ограничена для любой последовательности $F \in R^\rho_\mu$.

Лемма 1.5.6. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Существует число $C(\rho;\mu) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такое, что $\deg(\mathcal{K}(R^\rho/\langle F\rangle)) \leqslant C(\rho;\mu)$ для любой последовательности $F \in R^\rho_\mu$ взвешенно-однородных многочленов.*

Доказательство. Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов. K-многочлен кольца $R^\rho/\langle F\rangle$ является альтернированной суммой мономов степени, равной градуированным числам Бетти этого кольца (см. [74, Proposition 8.23]). Более того, в силу [74, Theorem 8.29] для ограничения степени K-многочлена всегда можно предположить, что F — последовательность мономов, а таких последовательностей в пространстве R^ρ_μ конечное число. □

Таким образом, мы можем эффективно приближать ряд Гильберта $\mathcal{H}^\rho_\mu(F)$ его соответствующим усечением.

Определение 1.5.7. Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Пусть $C(\rho;\mu) \in \mathbb{Z}_{>0}$ — минимальное число такое, что выполнено $\deg(\mathcal{K}(R^\rho/\langle F\rangle)) \leqslant C(\rho;\mu)$ для любой последовательности $F \in R^\rho_\mu$ взвешенно-однородных многочленов (оно существует по лемме 1.5.6). Тогда для любой последовательности $F \in R^\rho_\mu$ взвешенно-однородных многочленов определим *усечение* ряда Гильберта $\mathcal{H}^\rho_\mu(F) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i T^i$ как $\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) = \sum_{i=0}^{C(\rho;\mu)} s_i T^i$.

Следствие 1.5.8. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Для любых последовательностей $F, G \in R^\rho_\mu$ из предположения $\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) = \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)$ следует, что $\mathcal{H}^\rho_\mu(F) = \mathcal{H}^\rho_\mu(G)$.*

Доказательство. По лемме 1.5.4 существуют многочлены $M(T), N(T) \in \mathbb{Z}[T]$ такие, что выполнено

$$\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) = \frac{M(T)}{\prod_{i=0}^{N}(1-T^{a_i})}, \quad \mathrm{HS}_{R^\rho/\langle G\rangle}(T) = \frac{N(T)}{\prod_{i=0}^{N}(1-T^{a_i})}.$$

Более того, в силу леммы 1.5.6 существует число $C(\rho;\mu) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такое, что выполнено $\deg(M(T)) \leqslant C(\rho;\mu)$ и $\deg(N(T)) \leqslant C(\rho;\mu)$. Тогда утверждение следует из [95, Theorem 4.1.1]. □

Мы можем охарактеризовать ряд Гильберта в терминах *матриц Маколея* (например, см. [75, 41.3]).

Определение 1.5.9. Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенных однородных многочленов, и $\preccurlyeq$ — порядок на мономах кольца многочленов R^ρ. Для любого $d \geqslant 0$ *матрицей Маколея* $\mathrm{Mac}_{\preccurlyeq,d}(F)$ называется матрица над $\Bbbk$

- с $D(\rho;d)$ столбцами, заиндексированными мономами степени d и упорядоченными по *убыванию* относительно $\preccurlyeq$;
- с $\sum_{j=1}^{m} D(\rho;d_j)$ строками, заиндексированными парами (j,μ) для всех $j = 1,\dots,m$ и мономов μ степени $d-d_j$; индексы упорядочены вначале по *возрастанию* j, а затем по *убыванию* μ;
- такая, что коэффициент матрицы $\mathrm{Mac}_{\preccurlyeq,d}(F)_{(j,\mu),\mu'}$ равен коэффициенту при мономе μ' многочлена μf_j для всех мономов μ и μ' степени d и $d-d_j$, соответственно.

Определение 1.5.10. Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенных однородных многочленов, и $\preccurlyeq$ — любой порядок на мономах кольца многочленов R^ρ. Для любого $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ *корангом* матрицы Маколея $\mathrm{Mac}_{\preccurlyeq,d}(F)$ называется число $\mathrm{corank}(\mathrm{Mac}_d(F)) = D(\rho;d) - \mathrm{rank}(\mathrm{Mac}_{\preccurlyeq,d}(F))$.

Лемма 1.5.11. *Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов. Тогда ряд Гильберта кольца $R^\rho/\langle F\rangle$ совпадает со следующим формальным рядом:* $\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) = \sum_{d=0}^{\infty} \mathrm{corank}(\mathrm{Mac}_d(F))T^d$.

Доказательство. Для любого $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ мы можем отождествить d-однородную компоненту $(R^\rho/\langle F\rangle)_d$ кольца $R^\rho/\langle F\rangle$ с факторпространством d-однородной компоненты кольца R^ρ_d по модулю соотношений, описываемых матрицей Маколея $\mathrm{Mac}_d(F)$. Иными словами, верно соотношение

$$\dim((R^\rho/\langle F\rangle)_d) = \dim(R^\rho_d) - \mathrm{rank}(\mathrm{Mac}_d(F)) = D(\rho;d) - \mathrm{rank}(\mathrm{Mac}_d(F)). \quad \square$$

Лемма 1.5.12. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Следующая функция полунепрерывна сверху для любого $d \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$:*

$$\dim((R^\rho/\langle\bullet\rangle)_d)\colon R^\rho_\mu \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad F \mapsto \dim((R^\rho/\langle F\rangle)_d).$$

Доказательство. По определению существует линейное отображение

$$\mathrm{Mac}_d\colon R^\rho_\mu \to \mathrm{Mat}_{\Bbbk}\left(\sum_{j=1}^{m} D(\rho; d-d_j), D(\rho; d)\right).$$

Функция ранга полунепрерывна снизу на данном пространстве матриц, значит, она полунепрерывна и на подпространстве матриц вида $\mathrm{Mac}_d(R^\rho_\mu)$. □

Лемма 1.5.13. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Для любой последовательности $G \in R^\rho_\mu$ взвешенно-однородных многочленов следующее подмножество является открытым в топологии Зарисского: $W^\rho_\mu(G) = \{F \in R^\rho_\mu \mid \mathcal{H}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \mathcal{H}^\rho_\mu(G)\}$.*

Замечание 1.5.14. Заметим, что $G \in W^\rho_\mu(G)$, т.е., множество $W^\rho_\mu(G)$ непусто.

Доказательство. Из леммы 1.5.12 следует, что множество $W^\rho_\mu(G)$ является счётным пересечением подмножеств, открытых в топологии Зарисского:

$$W^\rho_\mu(G) = \{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\} \cap$$
$$\cap \bigcap_{d=C(\rho;\mu)+1}^{\infty} \{F \in R^\rho_\mu \mid \dim((R^\rho/\langle F\rangle)_d) \leqslant s_d\}, \quad \mathcal{H}^\rho_\mu(G) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i T^i,$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu$ — усечение (см. определение 1.5.7). Первое подмножество открыто в топологии Зарисского и может быть представлено в виде

$$\{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\} = \bigcup_{\widetilde{S}\in\widetilde{\Lambda}} \{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{S}\},$$
$$\widetilde{\Lambda} = \{\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\}.$$

Заметим, что множество $\widetilde{\Lambda}$ конечно по построению. Более того, следствие 1.5.8 означает, что любой элемент $\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \in \widetilde{\Lambda}$ поднимается до единственного ряда Гильберта $\mathcal{H}^\rho_\mu(F)$. Иными словами, мы можем отождествить конечное множество $\widetilde{\Lambda}$ со следующим множеством:

$$\Lambda = \{\mathcal{H}^\rho_\mu(F) \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\}, \quad |\Lambda| = |\widetilde{\Lambda}|.$$

Иными словами, мы можем представить $\{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\}$ в виде конечного объединения открытых в топологии Зарисского подмножеств:

$$\{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(G)\} = \bigcup_{S\in\Lambda} \{F \in R^\rho_\mu \mid \mathcal{H}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq S\} = \bigcup_{\widetilde{S}\in\widetilde{\Lambda}} \{F \in R^\rho_\mu \mid \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \widetilde{S}\}.$$

Как следствие, мы также можем представить $W^\rho_\mu(G)$ в виде конечного объединения открытых в топологии Зарисского подмножеств:

$$W^\rho_\mu(G) = \bigcup_{S\in\Lambda'} \{F \in R^\rho_\mu \mid \mathcal{H}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq S\},\ \Lambda' = \{\mathcal{H}^\rho_\mu(F) \mid \mathcal{H}^\rho_\mu(F) \preccurlyeq \mathcal{H}^\rho_\mu(G)\} \subset \Lambda.\ \square$$

Определение 1.5.15. Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Обозначим через $M^\rho_\mu \in \mathrm{im}(\widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu)$ единственный многочлен такой, что $M^\rho_\mu \preccurlyeq \widetilde{\mathcal{H}}^\rho_\mu(F)$ для любой последовательности $F \in R^\rho_\mu$ (он существует по лемме 1.5.12). Его продолжение $\mathrm{MHS}^\rho_\mu \in \mathrm{im}(\mathcal{H}^\rho_\mu)$ (единственное в силу следствия 1.5.8) мы будем называть *минимальным рядом Гильберта.*

Следствие 1.5.16. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Тогда последовательности взвешенно-однородных многочленов в пространстве R^ρ_μ с соответствующим минимальным рядом Гильберта*

$$\{F \in R^\rho_\mu \mid \mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) = \mathrm{MHS}^\rho_\mu(T)\} \subset R^\rho_\mu$$

образуют непустое открытое в топологии Зарисского подмножество в R^ρ_μ.

Лемма 1.5.17. *Пусть $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов, и $f \in R^\rho/\langle F\rangle$ — однородный элемент степени d. Тогда выполнено следующее неравенство $\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F,f\rangle}(T) \succcurlyeq (1-T^d)\,\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T)$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда $f \in R^\rho/\langle F\rangle$ — не делитель нуля.*

Доказательство. Точная последовательность градуированных R^ρ-модулей

$$0 \to K \to R^\rho/\langle F\rangle \xrightarrow{\cdot f} R^\rho/\langle F\rangle \to R^\rho/\langle F, f\rangle \to 0, \quad K = \ker(\cdot f),$$

задаёт следующую точную последовательность однородных компонент:

$$0 \to K_u \to (R^\rho/\langle F\rangle)_u \xrightarrow{\cdot f} (R^\rho/\langle F\rangle)_{u+d} \to (R^\rho/\langle F, f\rangle)_{u+d} \to 0, \quad u \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Следовательно, для любого $u \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ выполнено равенство

$$\dim((R^\rho/\langle F\rangle)_{u+d}) - \dim((R^\rho/\langle F\rangle)_u) = \dim((R^\rho/\langle F, f\rangle)_{u+d}) - \dim(K_u).$$

Домножим обе части равенства на T^{d+u} и просуммируем по $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Получаем

$$\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F,f\rangle}(T) = (1-T^d)\,\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) + \left(\sum_{u=0}^{\infty} \dim(K_u)T^u\right)\cdot T^d. \qquad \square$$

Следствие 1.5.18. *Пусть $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$ — упорядоченные наборы положительных целых чисел, где $m \leqslant N+1$, и $F \in R^\rho_\mu$ — последовательность взвешенно-однородных многочленов. Последовательность F является регулярной тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{HS}_{R^\rho/\langle F\rangle}(T) = \frac{\prod_{j=1}^m (1-T^{d_j})}{\prod_{i=0}^N (1-T^{a_i})} = \mathrm{MHS}^\rho_\mu(T).$$

Следствие 1.5.19. *Регулярные последовательности в пространстве R^ρ_μ образуют открытое в топологии Зарисского подмножество (возможно, пустое).*

Доказательство. Вытекает из следствий 1.5.16 и 1.5.18. $\square$

Следствие 1.5.20. *Пусть ρ и μ — упорядоченные наборы положительных целых чисел. Подмножество $U^\rho_\mu(n) = \{F \in R^\rho_\mu \mid \mathrm{ht}(\langle F\rangle) \geqslant n\}$ открыто в топологии Зарисского для любого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Доказательство. Положим $\mu = (d_1, \ldots, d_m)$, и пусть $F = (f_1, \ldots, f_m) \in R^\rho_\mu$ — любая последовательность. По [23, Proposition 1.5.11] выполнено $\mathrm{ht}(\langle F\rangle) \geqslant n$ тогда и только тогда, когда существует набор $\tau = (b_1, \ldots, b_n)$ положительных целых чисел и регулярная последовательность $G = (g_1, \ldots, g_n) \in R^\rho_\tau$ такая, что $g_k \in \langle F\rangle$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Иными словами, должна существовать (m,n)-матрица H такая, что её элементы $H_{j,k} \in R^\rho$ — однородные многочлены степени $b_k - d_j$, и выполнено $H \cdot F = G$.

Для любого набора τ обозначим через $M^\rho_{\mu,\tau}$ пространство всех (m,n)-матриц H таких, что их элементы $H_{j,k} \in R^\rho$ — однородные многочлены степени $b_k - d_j$. Имеется естественное отображение

$$\Phi^\rho_{\mu,\tau} \colon M^\rho_{\mu,\tau} \times R^\rho_\mu \to R^\rho_\tau, \quad (H, F) \mapsto H \cdot F = G.$$

Пусть $U^\rho_\tau \subset R^\rho_\tau$ — подмножество регулярных последовательностей (открытое в топологии Зарисского в силу следствия 1.5.19). Тогда множество $(\Phi^\rho_{\mu,\tau})^{-1}(U^\rho_\tau)$

открыто в топологии Зарисского $M^{\rho}_{\mu,\tau} \times R^{\rho}_{\mu}$. Так как проекция $\pi\colon M^{\rho}_{\mu,\tau} \times R^{\rho}_{\mu} \to R^{\rho}_{\mu}$ является открытым отображением, подмножество $W^{\rho}_{\mu}(\tau) = \pi((\Phi^{\rho}_{\mu,\tau})^{-1}(U^{\rho}_{\tau}))$ также является открытым в топологии Зарисского. Тогда и $U^{\rho}_{\mu}(n) = \cup_{\tau} W^{\rho}_{\mu}(\tau)$ также открыто в топологии Зарисского. □

1.6 Список серий и полусерий малого отклонения

Здесь мы приводим список всех порождающих семейств гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано отклонения не более 4.

Классификация гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано может быть сведена к перебору конечного числа возможных вариантов. Основные ограничения на веса и степени в терминах отклонения перечислены в доказательстве лемм 1.3.23 и 1.3.24. Мы также используем ограничения, описанные в лемме 1.1.36, а также следствиях 1.1.39 и 1.1.52. Реализация данного алгоритма перебора в SAGE может быть найдена по ссылке `https://github.com/MikhailOvcharenko/fano-WCI`. Отметим, что эти ограничения являются только необходимыми, так что необходимо вручную проверять, что полученные кандидаты действительно являются семействами гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений (см. подраздел 1.1.1).

Нумерация семейств в данном разделе является лексикографической по отношению к отклонению, размерности, антиканонической степени, размерности антиканонической линейной системы, весам и степеням, соответственно. Отметим, что все нижеперечисленные семейства $\mathcal{F}$ взвешенных полных пересечений являются непустыми (см. лемму 1.1.20), и их общие элементы $X \in \mathcal{F}$ являются гладкими, хорошо сформированными и Фано (см. следствие 1.1.26 и предложение 1.1.38). Последний столбец показывает, является ли взвешенное полное пересечение X (строго) аменабельным в смысле определения 1.2.8.

№	$\dim(X)$	$(-K_X)^{\dim(X)}$	$h^0(X,-K_X)$	$\mathbb{P}(\rho)$	Степени	Аменабельность
0.1	0	–	–	pt	–	Строгая
1.1	2	1	2	$\mathbb{P}(1^{(2)},2,3)$	(6)	Нет
1.2	2	2	3	$\mathbb{P}(1^{(3)},2)$	(4)	Нестрогая
1.3	2	3	4	$\mathbb{P}^3$	(3)	Строгая
2.1	3	2	4	$\mathbb{P}(1^{(4)},3)$	(6)	Строгая
2.2	3	4	5	$\mathbb{P}^4$	(4)	Строгая
2.3	4	1	3	$\mathbb{P}(1^{(3)},2^{(2)},3^{(2)})$	$(6^{(2)})$	Нет
2.4	4	2	4	$\mathbb{P}(1^{(4)},2^{(2)},3)$	$(4,6)$	Нет
2.5	4	4	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2^{(2)})$	$(4^{(2)})$	Нестрогая
2.6	4	6	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2)$	$(3,4)$	Нестрогая
2.7	4	9	7	$\mathbb{P}^6$	$(3,3)$	Строгая
3.1	4	1	4	$\mathbb{P}(1^{(4)},2,5)$	(10)	Нет
3.2	4	2	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},4)$	(8)	Строгая
3.3	4	3	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2)$	(6)	Нестрогая
3.4	4	5	6	$\mathbb{P}^5$	(5)	Строгая
3.5	5	2	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2,3^{(2)})$	$(6^{(2)})$	Нет
3.6	5	4	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2,3)$	$(4,6)$	Нестрогая
3.7	5	8	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2)$	$(4^{(2)})$	Нестрогая
3.8	5	12	8	$\mathbb{P}^7$	$(3,4)$	Строгая
3.9	6	1	4	$\mathbb{P}(1^{(4)},2^{(3)},3^{(3)})$	$(6^{(3)})$	Нет
3.10	6	2	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2^{(3)},3^{(2)})$	$(4,6^{(2)})$	Нет
3.11	6	4	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2^{(3)},3)$	$(4^{(2)},6)$	Нет
3.12	6	8	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2^{(3)})$	$(4^{(3)})$	Нестрогая
3.13	6	12	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},2^{(2)})$	$(3,4^{(2)})$	Нестрогая
3.14	6	18	9	$\mathbb{P}(1^{(9)},2)$	$(3^{(2)},4)$	Нестрогая
3.15	6	27	10	$\mathbb{P}^9$	$(3^{(3)})$	Строгая
4.1	5	2	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},5)$	(10)	Строгая
4.2	5	6	7	$\mathbb{P}^6$	(6)	Строгая
4.3	6	1	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2^{(2)},3,5)$	$(6,10)$	Нет
4.4	6	2	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2,3,4)$	$(6,8)$	Нет
4.5	6	2	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2^{(2)},5)$	$(4,10)$	Нет
4.6	6	3	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2^{(2)},3)$	$(6^{(2)})$	Нет
4.7	6	3	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2,5)$	$(3,10)$	Нет
4.8	6	4	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},3^{(2)})$	$(6^{(2)})$	Строгая
4.9	6	5	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2,3)$	$(5,6)$	Нестрогая
4.10	6	6	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2^{(2)})$	$(4,6)$	Нестрогая
4.11	6	6	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},4)$	$(3,8)$	Строгая
4.12	6	6	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},2)$	$(3,6)$	Нестрогая
4.13	6	8	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},3)$	$(4,6)$	Строгая
4.14	6	10	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},2)$	$(4,5)$	Нестрогая
4.15	6	15	8	$\mathbb{P}^8$	$(3,5)$	Строгая
4.16	6	16	8	$\mathbb{P}^8$	$(4^{(2)})$	Строгая
4.17	7	2	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2^{(2)},3^{(3)})$	$(6^{(3)})$	Нет
4.18	7	4	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2^{(2)},3^{(2)})$	$(4,6^{(2)})$	Нет
4.19	7	8	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},2^{(2)},3)$	$(4^{(2)},6)$	Нестрогая
4.20	7	16	9	$\mathbb{P}(1^{(9)},2^{(2)})$	$(4^{(3)})$	Нестрогая
4.21	7	24	10	$\mathbb{P}(1^{(10)},2)$	$(3,4^{(2)})$	Нестрогая
4.22	7	36	10	$\mathbb{P}^{10}$	$(3^{(2)},4)$	Строгая
4.23	8	1	5	$\mathbb{P}(1^{(5)},2^{(4)},3^{(4)})$	$(6^{(4)})$	Нет
4.24	8	2	6	$\mathbb{P}(1^{(6)},2^{(4)},3^{(3)})$	$(4,6^{(3)})$	Нет
4.25	8	4	7	$\mathbb{P}(1^{(7)},2^{(4)},3^{(2)})$	$(4^{(2)},6^{(2)})$	Нет
4.26	8	8	8	$\mathbb{P}(1^{(8)},2^{(4)},3)$	$(4^{(3)},6)$	Нет
4.27	8	16	9	$\mathbb{P}(1^{(9)},2^{(4)})$	$(4^{(4)})$	Нестрогая
4.28	8	24	10	$\mathbb{P}(1^{(10)},2^{(3)})$	$(3,4^{(3)})$	Нестрогая
4.29	8	36	11	$\mathbb{P}(1^{(11)},2^{(2)})$	$(3^{(2)},4^{(2)})$	Нестрогая
4.30	8	54	12	$\mathbb{P}(1^{(12)},2)$	$(3^{(3)},4)$	Нестрогая
4.31	8	81	13	$\mathbb{P}^{12}$	$(3^{(4)})$	Строгая

Таблица 1.1: Серии и полусерии гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано отклонения вплоть до 4

Глава 2

Зеркальная симметрия для гладких многообразий Фано

В данной главе все многообразия предполагаются определёнными над $\mathbb{C}$.

2.1 Предварительные сведения

2.1.1 Инварианты Громова–Виттена

В данном подразделе мы очень кратко излагаем основные понятия и обозначения теории Громова–Виттена. Мы отсылаем читателя за деталями к [100, 103, 107]. Далее X — это гладкое многообразие Фано.

Определение 2.1.1. *Пространство модулей отображений* $\overline{M}_n(X,\beta)$ в многообразие X рациональных кривых класса $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ с n отмеченными точками — это стек Делиня–Мамфорда стабильных отображений $f\colon C \to X$ кривых рода 0 с n отмеченными точками т.ч. $f_*([C]) = \beta$.

Замечание 2.1.2. На стеке $\overline{M}_n(X,\beta)$ определён *виртуальный фундаментальный класс* $[\overline{M}_n(X,\beta)^{\mathrm{virt}}]$, имеющий *виртуальную размерность*

$$\mathrm{vdim}(\overline{M}_n(X,\beta)) = \dim(X) - \deg_{K_X}(\beta) + n - 3.$$

Обозначение 2.1.3. Введём *отображения вычисления*:

$$\mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_n(X,\beta) \to X, \quad \mathrm{ev}_i(C; p_1, \ldots, p_n, f) = f(p_i),$$

и рассмотрим *морфизм, забывающий точку* p_{n+1}:

$$\pi_{n+1}\colon \overline{M}_{n+1}(X,\beta) \to \overline{M}_n(X,\beta).$$

Он стягивает компоненты, которые становятся нестабильными при забывании точки. Также введём сечения забывающего морфизма:

$$\sigma_i \colon \overline{M}_n(X,\beta) \to \overline{M}_{n+1}(X,\beta).$$

Здесь образ кривой $(C; p_1, \ldots, p_n, f)$ при отображении σ_i — это кривая вида $(C'; p_1, \ldots, p_{n+1}, f')$, где $C' = C \bigcup C_0$ и $C_0 \simeq \mathbb{P}^1$. Кривые C_0 и C пересекаются по неотмеченной точке p_i на C', а точки p_{n+1} и p_i лежат на C_0. При этом отображение f' стягивает кривую C_0 в точку, и $f'|_C = f$.

Определение 2.1.4. Рассмотрим пучок $L_i = \sigma_i^*(\omega_{\pi_{n+1}})$, где $\omega_{\pi_{n+1}}$ — относительный дуализирующий пучок морфизма π_{n+1}. Заметим, что его слой над точкой $(C; p_1, \ldots, p_n, f)$ — это в точности кокасательное пространство $T^*_{p_i}(C)$. Тогда определим *кокасательный линейный класс* как

$$\psi_i = c_1(L_i) \in H^2(\overline{M}_n(X,\beta), \mathbb{Z}).$$

Определение 2.1.5. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*(X,\mathbb{Z})$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$, а также $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$. *Инвариантом Громова–Виттена с потомками* называется число

$$\langle \tau_{a_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{a_n}\gamma_n \rangle_\beta = \mathrm{ev}_1^*(\gamma_1) \cdot \psi_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot \mathrm{ev}_n^*(\gamma_n) \cdot \psi_n^{a_n} \cdot [\overline{M}_n(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}$$

при условии, что

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{codim}(\gamma_i) + \sum_{i=1}^n a_i = \mathrm{vdim}(\overline{M}_n(X,\beta)),$$

и 0 иначе. В случае, когда $a_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, данные инварианты называются *примарными*. В этом случае обозначение обычно τ_0 опускается.

Одноточечные (т.е., при $n = 1$) инварианты Громова–Виттена естественно рассматривать в виде так называемого *I-ряда*. Пусть X — гладкое многообразие Фано размерности N с числом Пикара ρ. Выберем базис $\{H_1, \ldots, H_\rho\}$ в $H^2(X,\mathbb{Z})$ т.ч. для любого $i = 1, \ldots, \rho$ и любой кривой β в конусе эффективных кривых K многообразия X имеет место неравенство $H_i \cdot \beta \geqslant 0$.

Обозначение 2.1.6. Введём формальные переменные q, τ_i для всех $i = 1, \ldots, \rho$, и положим $q_i = q^{\tau_i}$. Для любого класса $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ обозначим

$$q^\beta = q^{\sum \tau_i (H_i \cdot \beta)}.$$

Пусть Λ — *кольцо Новикова*, т.е., групповое кольцо для $H_2(X,\mathbb{Z})$. Рассмотрим его как кольцо многочленов над $\mathbb{C}$ от переменных q^β с соотношениями вида

$$q^{\beta_1}q^{\beta_2} = q^{\beta_1+\beta_2}.$$

Заметим, что для любого класса $\beta \in K$ соответствующий моном q^β имеет неотрицательную степень относительно всех переменных q_i.

Определение 2.1.7. Пусть $T_1,\dots,T_N$ — однородный базис в кольце когомологий $H^*(X,\mathbb{Z})$, и пусть $T^1,\dots,T^n$ — двойственный базис. *I-рядом* (или *J-рядом Гивенталя*) для многообразия X называется

$$I_\beta^X = \mathrm{ev}_*\left(\frac{1}{1-\psi}\cdot[\overline{M}_1(X,\beta)]^{\mathrm{virt}}\right) = \sum_{i,j\geqslant 0}\langle\tau_i T_j\rangle_\beta T^j,$$
$$I^X(q_1,\dots,q_\rho) = 1+\sum_{\beta\in K} I_\beta^X\cdot q^\beta.$$

Свободным членом I-ряда I_0^X называется ряд

$$I_0^X(q_1,\dots,q_\rho) = 1+\sum_{\beta\in K}\langle\tau_{(-K_X)\cdot\beta-2}\mathbf{1}\rangle_\beta\cdot q^\beta,$$

где $\mathbf{1}$ — фундаментальный класс. Ряд

$$\widetilde{I}_0^X(q_1,\dots,q_\rho) = 1+\sum_{\beta\in K}(-K_X\cdot\beta)!\langle\tau_{(-K_X)\cdot\beta-2}\mathbf{1}\rangle_\beta\cdot q^\beta$$

называется *свободным членом регуляризованного I-ряда* для многообразия X.

Рассмотрим класс дивизоров $H=\sum\alpha_i H_i$. Мы можем ограничить I-ряд (и обычный, и регуляризованный) на направление данного дивизориального класса, положив $\tau_i=\alpha_i\tau$ и $t=q^\tau$. Зафиксируем класс дивизоров D. Определим *ограничение свободного члена регуляризованного I-ряда на антиканоническое направление, соответствующее дивизору D*, заменив q^β на $e^{-D\cdot\beta}t^{-K_X\cdot\beta}$:

$$\widetilde{I}_0^{(X,D)}(t) = 1+\sum_{\substack{\beta\in K\\ a\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}}(-K_X\cdot\beta)!\langle\tau_a\mathbf{1}\rangle_\beta\cdot e^{-D\cdot\beta}t^{-K_X\cdot\beta}.$$

2.1.2 Торические модели Ландау–Гинзбурга

Пусть $\varphi[\mathsf{p}]$ — постоянный коэффициент многочлена Лорана p. Определим *главный период* многочлена Лорана p как формальный ряд $I_{\mathsf{p}}(t)=\sum\varphi[\mathsf{p}^j]t^j$. Данная теорема (см. [106, предложение 2.3]) оправдывает выбор названия.

Теорема 2.1.8. *Пусть* p *— многочлен Лорана от* n *переменных, и* $\mathbf{D}$ *— дифференциальный оператор Пикара–Фукса для пучка гиперповерхностей в торе, заданного многочленом Лорана* p*. Тогда выполнено* $\mathbf{D}[I_{\mathsf{p}}(t)] = 0$*.*

Напомним определение торической модели Ландау–Гинзбурга (см. [107]).

Определение 2.1.9. *Торической моделью Ландау–Гинзбурга* для пары из гладкого многообразия Фано X размерности n и дивизора D на нём называется многочлен Лорана $\mathsf{p} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, удовлетворяющий следующим условиям.

Условие периодов: Имеет место равенство рядов $I_{\mathsf{p}} = \widetilde{I}_0^{(X,D)}$, где $\widetilde{I}_0^{(X,D)}(t)$ — ограничение свободного члена регуляризованного I-ряда на антиканоническое направление, соответствующее дивизору D (см. подраздел 2.1.1).

Условие Калаби–Яу: Существует послойная компактификация (т.н. *компактификация Калаби–Яу*) семейства $\mathsf{p}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}$, чьё тотальное пространство является открытым гладким многообразием Калаби–Яу Y.

Торическое условие: Существует плоское вырождение $X \rightsquigarrow T_X$ торического многообразия T_X т.ч. $F(T_X) = N(\mathsf{p})$, где $F(T_X)$ — веерный многогранник для T_X, и $\mathrm{Newt}(\mathsf{p})$ — многогранник Ньютона многочлена Лорана p.

В [104] доказано, что стандартные торические модели Ландау–Гинзбурга (см. определение 2.3.3) для гладких трёхмерных многообразий Фано удовлетворяют более сильному компактификационному условию.

Определение 2.1.10. Компактификация семейства $\mathsf{p}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}$ до семейства $\mathsf{f}\colon Z \to \mathbb{P}^1$, где Z — гладкое многообразие такое, что $-K_Z \sim \mathsf{f}^{-1}(\infty)$, называется *компактификацией лог-Калаби–Яу.*

Замечание 2.1.11. Понятие компактификации лог-Калаби–Яу схоже с понятием *ручной компактификации* модели Ландау–Гинзбурга (см. [59]). Разница состоит в том, что во втором случае дополнительно требуется, чтобы слой над бесконечностью был дивизором с простыми нормальными пересечениями. Тем не менее, в большинстве известных случаев компактификаций лог-Калаби–Яу (в частности, для стандартных моделей Ландау–Гинзбурга) слои над бесконечностью являются дивизорами с простыми нормальными пересечениями.

2.1.3 Пространства модулей решёточно поляризованных K3 поверхностей и двойственность Долгачёва–Никулина

Напомним основные результаты о решёточных поляризациях K3 поверхностей. Мы будем называть решётку $L_{\mathrm{K3}} = H^{\oplus 3} \oplus \mathbb{E}_8(-1)^{\oplus 2}$ *K3 решёткой*, где мы обозначаем через H стандартную двумерную гиперболическую решётку.

Предложение 2.1.12 (см. [54, Proposition 1.3.5])**.** *Для любой комплексной K3 поверхности S существует изометрия решёток $H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq L_{\mathrm{K3}}$.*

Определение 2.1.13. Пусть L — чётная решётка сигнатуры $(1, r)$. Мы будем говорить, что K3 поверхность S является *L-поляризованной*, если существует примитивное вложение $\iota\colon L \hookrightarrow \mathrm{Pic}(S)$, чей образ содержит обильный класс. Семейство K3 поверхностей $\varpi : \mathcal{S} \to B$ называется *L-поляризованным*, если существует тривиальная локальная подсистема $\mathbb{L} \subseteq R^2\varpi_*\underline{\mathbb{Z}}_{\mathcal{S}}$, задающая L-поляризацию на каждом слое семейства ϖ.

Хорошо известно, что для L-поляризованных K3 поверхностей существует корректно определённое грубое пространство модулей (см. [35, Theorem 3.1]). Кратко напомним его конструкцию. Рассмотрим область периодов

$$\mathcal{P}_L = \{z \in L^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \mid (z, z) = 0, (z, \overline{z}) > 0\}$$

и определим группу

$$O^+(L) = \{\gamma \in O(\Lambda_{\mathrm{K3}}) \mid \gamma|_L = \mathrm{id}_L\}.$$

Пусть $\Delta(L^\perp)$ — множество всех элементов $\delta \in L^\perp$ таких, что $(\delta, \delta) = (-2)$, и положим $H_\delta = \{z \in \mathcal{P}_L \mid (z, \delta) = 0\}$ для всех $\delta \in \Delta(L^\perp)$. Тогда грубое пространство модулей L-поляризованных K3 поверхностей может быть получено как арифметический фактор

$$\mathcal{M}_L = O^+(L^\perp)\backslash \left(\mathcal{P}_L - \bigcup_{\delta \in \Delta(L^\perp)} H_\delta\right).$$

Для любого семейства L-поляризованных K3 поверхностей $\varpi\colon \mathcal{S} \to B$ существует отображение периодов $\Pi\colon B \to \mathcal{M}_L$. Семейство L-поляризованных K3 поверхностей $\mathcal{S}$ называется *полным*, если отображение Π доминантно.

Теорема 2.1.14 (см. [35]). *Пусть L — решётка, имеющая единственное (с точностью до изометрии) примитивное вложение в К3 решётку $L_{\text{К3}}$. Тогда $\mathcal{M}_L$ — грубое пространство модулей L-поляризованных К3 поверхностей.*

Замечание 2.1.15. Известны достаточные условия для того, чтобы решётка L имела примитивное вложение в К3 решётку (см. [34, Theorem 1.4.6]) и это вложение было единственным (см. [34, Theorem 1.4.8]). В общем случае грубое пространство модулей L-поляризованных К3 поверхностей имеет конечное число неприводимых компонент, соответствующих классам эквивалентности вложений решётки L в К3 решётку $L_{\text{К3}}$.

Существует естественная проективная компактификация $\overline{\mathcal{M}}_L$ пространства модулей $\mathcal{M}_L$ — *компактификация Бейли–Бореля* (см. [35, Section 6]). Напомним, что она получается присоединением точек, называемых *граничными компонентами типа III*, и кривых, называемых *граничными компонентами типа II*. Хорошо известно (см. [35, 94]), что граничные компоненты типа III (соответственно, типа II) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $O^+(L^\perp)$-эквивалентности полностью изотропных подрешёток ранга 1 (соответственно, ранга 2) в ортогональном дополнении $L^\perp$.

Определение 2.1.16. Пусть $L \subset L_{\text{К3}}$ — примитивная подрешётка, чьё ортогональное дополнение допускает разложение $L^\perp = H \oplus L^\vee$ для некоторой решётки $L^\vee$. Назовём $L^\vee$ *двойственной по Долгачёву–Никулину* к решётке L.

Замечание 2.1.17. Пусть L и M — решётки, примитивно вложенные в К3 решётку. Существует явный метод проверки того, что решётки L и M являются двойственными по Долгачёву–Никулину друг к другу (см. [34, Lemma 1.4.5]).

Двойственность Долгачёва–Никулина — это зеркальное соответствие между семействами решёточно поляризованных К3 поверхностей: по примитивно вложенной решётке она сопоставляет полному семейству L-поляризованных К3 поверхностей полное семейство $L^\vee$-поляризованных К3 поверхностей.

Замечание 2.1.18. Существование решётки $L^\vee$ соответствует особому выбору вложения решётки H в $L^\perp$, которое, в свою очередь, соответствует особому выбору граничной компоненты типа III. Двойственность Долгачёва–Никулина связывает комплексную структуру на L-поляризованных К3 поверхностях в окрестности этой граничной точки с симплектической структурой на $L^\vee$-поляризованных К3

поверхностях. Например, размерность полного семейства L-поляризованных K3 поверхностей совпадает с числом Пикара очень общего слоя полного семейства $L^\vee$-поляризованных K3 поверхностей (см. [35]).

2.2 Неф-разбиения для гладких взвешенных полных пересечений Фано

В данном разделе мы изучаем существование *неф-разбиения* для взвешенных полных пересечений Фано — комбинаторной структуры на их весах и степенях, важной для зеркальной симметрии. Основным полем далее является $\mathbb{C}$. Наш подход является комбинаторным, так что многие утверждения выполнены в гораздо большей общности.

Определение 2.2.1 (см. [87, Definition 1.1], [44], [15])**.** Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано в $\mathbb{P}(a_0,\dots,a_N)$ мультистепени $(d_1,\dots,d_c)$. *Неф-разбиением* для X называется разбиение

$$\{0,\dots,N\} = I_0 \sqcup \dots \sqcup I_c, \quad \sum_{i\in I_j} a_i = d_j, \quad j = 1,\dots,c.$$

Неф-разбиение называется *хорошим*, если существует $i \in I_0$ такое, что $a_i = 1$.

Напомним, что зеркальная симметрия сопоставляет многообразиям Фано одномерные семейства многообразий Калаби–Яу, называемые их *моделями Ландау–Гинзбурга*. Элементы этих семейств зеркально двойственны к антиканоническим сечениям многообразий Фано. Существование неф-разбиений позволяет построить для гладкого взвешенного полного пересечения Фано его модель Ландау–Гинзбурга в смысле Гивенталя и Батырева (см. [44] и [87, Definition 2.1]).

Если неф-разбиение является хорошим, то возможно бирационально представить модель Ландау–Гинзбурга в смысле Гивенталя и Батырева алгебраическим тором, снабжённым регулярной функцией на нём (см. [84, Theorem 9]). Более того, многогранник Ньютона соответствующего многочлена Лорана реализуется как многогранник веера торического вырождения гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано (см. [56, Theorem 2.2]).

Всё это является мотивацией для следующей комбинаторной гипотезы.

Гипотеза 2.2.2 (см. [87, Conjecture 1.5])**.** *Гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано допускает хорошее неф-разбиение.*

Известно, что данная гипотеза выполнена для гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано малой размерности или коразмерности (см. [85, 87]). В этих случаях неф-разбиение удовлетворяет следующему дополнительному свойству.

Определение 2.2.3 (см. [105, замечание 4.2]). Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$. Неф-разбиение $I_0 \sqcup \dots \sqcup I_c$ называется *сильным*, если

$$a_i = 1 \text{ для всех } i \in I_0; \quad a_i \mid d_j \text{ для всех } j = 1, \dots, c \text{ и } i \in I_j.$$

Теорема 2.2.4 (см. [87, Theorems 1, 2]). *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано коразмерности 1 или 2. Тогда существует сильное неф-разбиение для X.*

Сильные неф-разбиения не только удобны с комбинаторной точки зрения, но также они естественно появляются в конструкции Пржиялковского *компактификации лог Калаби–Яу* модели Ландау–Гинзбурга для гладкого взвешенного полного пересечения Фано (см. [105, раздел 4]).

Основным наблюдением доказательства теоремы 2.2.4 является то, что особый локус $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ взвешенного проективного пространства с весами $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ описывается как *взвешенный симплициальный комплекс* $\mathcal{S}(\rho)$, т.е., как абстрактный симплициальный комплекс, снабжённый функцией веса (мы отсылаем читателя за подробностями к подразделу 2.2.1). Более того, базисные множества линейных систем $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|$ также имеют схожее описание (см. подробности в лемме 2.2.22). Это приводит нас к следующей задаче.

Задача 2.2.5 (см. [87, Section 4]). Построить неф-разбиение для гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения Фано мультистепени μ как слои взвешенного симплициального отображения $\mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$.

Замечание 2.2.6. Отметим, что любое такое неф-разбиение является сильным (см. определение 2.2.14 и обозначение 2.2.20).

Задача 2.2.5 не всегда имеет решение: в случае любой коразмерности, большей 3, существуют гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения Фано, не допускающие сильного неф-разбиения.

Пример 2.2.7. Положим $\rho = (1^{(61+t)}, 6, 10, 15)$ для любого $t > 0$. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — общее взвешенное полное пересечение мультистепени $(16, 21, 25, 30)$ (см. лемму 1.1.20). По следствию 1.1.26 многообразие X является гладким и хорошо сформированным тогда и только тогда, когда оно является *квази-гладким* (см. определение 1.1.21), и $X \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \varnothing$. Первое условие выполнено по предложению 1.1.47, а второе условие непосредственно проверятся с помощью леммы 1.1.6. Более того, X — многообразие Фано индекса t для всех $t > 0$ (см. предложение 1.1.38). Тем не менее, X не допускает сильного неф-разбиения.

Этот пример обобщается до *серии* взвешенных полных пересечений X в $\mathbb{P}(1^{(61+t+2m)}, 6, 10, 15)$ мультистепени $(2^{(m)}, 16, 21, 25, 30)$ (см. раздел 1.2).

Основным результатом этого раздела является достаточное условие для существования сильного неф-разбиения исключительно в терминах весов.

Определение 2.2.8. Для любого набора $\rho = (a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$ мы будем называть подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$

- *неделимым*, если выполнено $a_i \nmid a_j$ для всех $i, j \in I$, где $i \neq j$;
- *сильно неделимым*, если $a_k \nmid (\mathrm{lcm}_{i,j \in I}(\gcd_{i \neq j}(a_i, a_j)))$ для всех $k \in I$.

Заметим, что любое сильно неделимое подмножество неделимо.

Пример 2.2.9. Пусть $(q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{Z}_{>1}^l$ — попарно взаимно простые целые числа, и $(m_1, \dots, m_l) \in \mathbb{Z}_{>0}^l$ — любой набор. Положим $\rho = (q_1^{(m_1)}, \dots, q_l^{(m_l)})$. Тогда любое неделимое подмножество для набора ρ является сильно неделимым.

Положим $\rho = (1^{(t+1)}, 6, 10, 15)$ для любого $t \geqslant 0$. Тогда $\{t+1, t+2, t+3\}$ является неделимым, но не сильно неделимым подмножеством.

Если весь набор весов ρ сильно неделим, то нетрудно вывести существование сильного неф-разбиения из [83, Lemma 6.1] и следствия 1.1.52. Если же для набора ρ существует неделимое подмножество, не являющееся строго неделимым, то сильного неф-разбиения может и не существовать (см. примеры 2.2.7 и 2.2.9). Мы утверждаем, что если любое неделимое подмножество для набора ρ является сильно неделимым, то сильное неф-разбиение существует для любой возможной мультистепени взвешенного полного пересечения Фано.

Теорема 2.2.10 (см. доказательство в подразделе 2.2.2)**.** *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано в $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что любое*

неделимое подмножество $I \subset \{0, \dots, N\}$ является сильно неделимым. Тогда X допускает явно строящееся сильное неф-разбиение.

Замечание 2.2.11. В частности, теорема 2.2.10 означает, что при некоторых ограничениях на веса свойство взвешенного полного пересечения иметь сильное неф-разбиение вообще не зависит от мультистепени, только от свойства быть гладким, хорошо сформированным и Фано, что достаточно неожиданно.

Замечание 2.2.12. Для любого набора $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}^{N+1}$ множество $\mathcal{A}(\rho)$ всех неделимых подмножеств и множество $\mathcal{B}(\rho)$ всех сильно неделимых подмножеств являются конечными симплициальными комплексами на $\{0, \dots, N\}$, при этом второй комплекс является подкомплексом первого. Иными словами, $(\mathcal{A}(\rho), \mathcal{B}(\rho))$ — симплициальная пара. В теореме 2.2.10 мы буквально требуем $\mathcal{A}(\rho) = \mathcal{B}(\rho)$, т.е., тривиальности симплициальной пары $(\mathcal{A}(\rho), \mathcal{B}(\rho))$.

Мы также показываем, что комбинаторика гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ мультистепени μ может быть сколь угодно сложно устроена с точки зрения симплициальной геометрии.

Пример 2.2.13. Пусть $X_\mu \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени μ.

1. Существуют гладкие взвешенные полные пересечения такие, что любое взвешенное симплициальное отображение $(\mathcal{S}(\rho), \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}) \to (\mathcal{S}(\mu), \Phi_{\mathcal{S}(\mu)})$ является отображением в точку (пример 2.2.29).
2. Любой конечный симплициальный комплекс реализуется как взвешенный симплициальный комплекс $\mathcal{S}(\rho)$ для некоторого набора весов ρ (предложение 2.2.28). Любое отображение конечных симплициальных комплексов, не стягивающее грани, реализуется как взвешенное симплициальное отображение $(\mathcal{S}(\rho), \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}) \to (\mathcal{S}(\mu), \Phi_{\mathcal{S}(\mu)})$ для некоторого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения $X_\mu \subset \mathbb{P}(\rho)$ (пример 2.2.31).

2.2.1 Взвешенные симплициальные комплексы

В данном подразделе мы изучаем, до какой степени возможно обобщить подход доказательства теоремы 2.2.4. Основным наблюдением работы [87] является то, что особый локус взвешенного проективного пространства описывается как *взвешенный симплициальный комплекс*, т.е., как абстрактный симплициальный комплекс, снабжённый функцией веса.

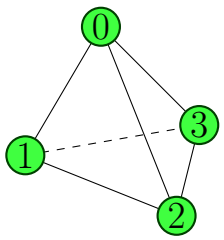
Определение 2.2.14 (см. [87, Definition 3.1]). Пусть $\mathcal{C}$ — конечный абстрактный симплициальный комплекс. *Взвешенным симплициальным комплексом* называется пара $(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})$, где $\Phi_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_{>0}$ — отображение такое, что для любой грани $I \in \mathcal{C}$ выполнено $\Phi_{\mathcal{C}}(I) = \gcd_{i \in I}(\Phi_{\mathcal{C}}(\{i\}))$. Мы будем называть отображение $\Phi_{\mathcal{C}}$ *функцией веса* комплекса $(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})$. Мы назовём *взвешенным симплициальным отображением* $F \colon (\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}}) \to (\mathcal{D}, \Phi_{\mathcal{D}})$ симплициальное отображение $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ такое, что $\Phi_{\mathcal{C}}(I) \mid \Phi_{\mathcal{D}}(F(I))$ для любой грани $I \in \mathcal{C}$.

Мы обозначаем через $\mathrm{Vert}(\mathcal{C})$ множество всех вершин абстрактного симплициального комплекса $\mathcal{C}$. По определению выполнено $\mathcal{C} \subset 2^{\mathrm{Vert}(\mathcal{C})}$, где $2^{\mathrm{Vert}(\mathcal{C})}$ — множество всех подмножеств множества $\mathrm{Vert}(\mathcal{C})$.

Замечание 2.2.15. Отметим, что функция веса $\Phi_{\mathcal{C}}$ определена своими значениями на вершинах грани. Мы не требуем, чтобы подмножество $I \subset \mathrm{Vert}(\mathcal{C})$, удовлетворяющее $\gcd_{i \in I}(\Phi_{\mathcal{C}}(\{i\})) > 1$, автоматически было гранью.

Пример 2.2.16. Пусть $S = \{0, 1, 2, 3\}$ — множество из четырех элементов. Как изображено на рисунке 2.1, мы можем ввести на множестве S структуру взвешенного симплициального комплекса $(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})$ следующим образом:

$$\mathcal{C} = \{I \subset \{0,1,2,3\} \mid \gcd_{i \in I}(\Phi_i) > 1\}; \quad \Phi_{\mathcal{C}}(i) = \Phi_i, \quad i = 0, \dots, 3.$$



$$\Phi_0 = b_1 b_2 b_5, \quad \Phi_1 = b_1 b_4 b_6,$$
$$\Phi_2 = b_3 b_4 b_5, \quad \Phi_3 = b_2 b_3 b_6;$$
$$b_i \in \mathbb{Z}_{>1}, \quad i = 1, \dots, 6;$$
$$\gcd(b_j, b_k) = 1, \quad j \neq k.$$

Рис. 2.1: 1-скелет тетраэдра как взвешенный симплициальный комплекс.

Определение 2.2.17 ([23, Definition 5.1.2]). Пусть $\mathcal{C}$ — конечный абстрактный симплициальный комплекс. Зафиксируем произвольную нумерацию вершин: $\mathrm{Vert}(\mathcal{C}) \simeq \{0, \dots, N\}$. *Кольцо Стенли–Рейзнера* $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ — факторкольцо кольца многочленов $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ по идеалу $I_{\mathcal{C}}$, порождённому свободными от квадратов мономами, соответствующими не-граням комплекса $\mathcal{C}$:

$$I_{\mathcal{C}} = (x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid \{i_1, \dots, i_r\} \notin \mathcal{C}).$$

Определение 2.2.18. Пусть $(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})$ — взвешенный симплициальный комплекс. Зафиксируем произвольную нумерацию вершин: $\mathrm{Vert}(\mathcal{C}) \simeq \{0, \dots, N\}$. *Градуированным кольцом Стенли–Рейзнера* $\mathbb{C}[(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})]$ мы назовём кольцо Стенли–Рейзнера $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ комплекса $\mathcal{C}$ с градуировкой $\deg(X_i) = \Phi_{\mathcal{C}}(\{i\})$.

Замечание 2.2.19. Пусть $(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})$ — взвешенный симплициальный комплекс. Зафиксируем нумерацию вершин: $\mathrm{Vert}(\mathcal{C}) \simeq \{0, \dots, N\}$. По построению градуированное кольцо Стенли–Рейзнера $\mathbb{C}[(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})]$ является факторкольцом градуированного кольца $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$ по мономиальному идеалу $I_{\mathcal{C}}$. Тогда факторотображение $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})]$ задаёт вложение $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[(\mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}})]) \hookrightarrow \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$, где $a_i = \Phi_{\mathcal{C}}(\{i\})$ для всех $i = 0, \dots, N$.

Таким образом, мы можем описывать различные конфигурации координатных страт (см. определение 1.1.5) в терминах взвешенных симплициальных комплексов. Основными примерами таких конфигураций будут особые локусы $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ и базисные множества линейных систем $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|$.

Обозначение 2.2.20. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ — набор положительных целых чисел. Обозначим через $(\mathcal{S}(\rho), \Phi_{\mathcal{S}(\rho)})$ взвешенный симплициальный комплекс на множестве $\{0, \dots, N\}$, заданный следующим образом:

$$\mathcal{S}(\rho) = \{I \subset \{0, \dots, N\} \mid \gcd_{i \in I}(a_i) > 1\}, \quad \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}(I) = \gcd_{i \in I}(a_i).$$

Обозначение 2.2.21. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ — упорядоченный набор положительных целых чисел. Для любого $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ обозначим через $\mathcal{B}_\rho(d)$ абстрактный симплициальный комплекс на множестве $\{0, \dots, N\}$, где $I \subset \{0, \dots, N\}$ — грань тогда и только тогда, когда мы *не можем* представить число d в виде $d = \sum_{i \in I} n_i a_i$ для некоторых натуральных чисел $\{n_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \mid i \in I\}$. Снабдим $\mathcal{B}_\rho(d)$ функцией веса $\Phi_{\mathcal{B}_\rho(d)}$ по правилу $\Phi_{\mathcal{B}_\rho(d)}(\{i\}) = a_i$ для всех $i = 0, \dots, N$.

Лемма 2.2.22. *Пусть* $\mathbb{P}(\rho) = \mathrm{Proj}(R^\rho)$ *— хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, где* $\rho = (a_0, \dots, a_N)$*. Тогда выполнено*

$$\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[(\mathcal{S}(\rho), \Phi_{\mathcal{S}(\rho)})]);$$
$$\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|)^{\mathrm{red}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[(\mathcal{B}_\rho(d), \Phi_{\mathcal{B}_\rho(d)})]), \quad d \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Доказательство. Первое равенство является переформулировкой первого утверждения леммы 1.1.6. Перейдём ко второму равенству: лемма 1.1.8 даёт описание

базисного множества $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d)|)^{\mathrm{red}}$ как локуса общих нулей всех взвешенных мономов степени d. То есть, это переформулировка обозначения 2.2.21. □

Пример 2.2.23. Положим $\rho = (1^{(t+1)}, 6, 10, 15)$ для любого $t \geq 0$. Лемма 2.2.22 и рисунок 2.2 описывают особый локус $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho))$ и базисные множества линейных систем $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(16)|)$, $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(21)|)$, $\mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(25)|)$.

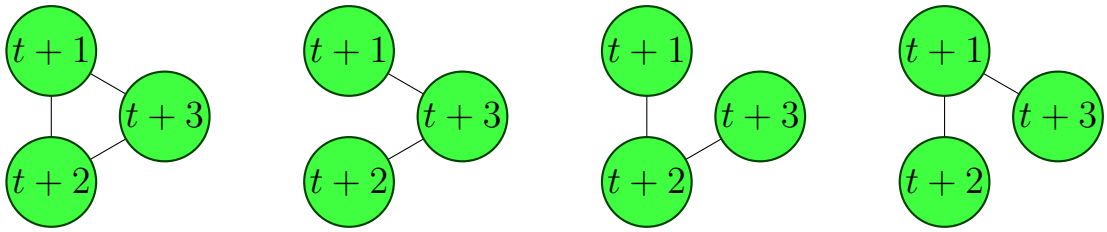


Рис. 2.2: Взвешенные симплициальные комплексы $\mathcal{S}(\rho)$, $\mathcal{B}_\rho(16)$, $\mathcal{B}_\rho(21)$, $\mathcal{B}_\rho(25)$, где мы полагаем $\rho = (1^{(t+1)}, 6, 10, 15)$.

Определение 2.2.24. Пусть $\mathcal{C}$ — симплициальный комплекс. Обозначим через $(\mathcal{C}, \supseteq)$ его *частично упорядоченное множество (ЧУМ) граней*, т.е. множество всех граней комплекса $\mathcal{C}$, частично упорядоченное по включению.

Предложение 2.2.25 (см. доказательство в подразделе 2.2.2)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение мультистепени $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$, не являющееся пересечением с линейным конусом, где мы полагаем $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$. Существует сохраняющее порядок отображение ЧУМ граней $\chi\colon (\mathcal{S}(\rho), \supseteq) \to (\mathcal{S}(\mu), \supseteq)$ такое, что:*

1. *Для всех граней $I \in \mathcal{S}(\rho)$ выполнено $|\chi(I)| = |I|$.*
2. *Для всех граней $I \in \mathcal{S}(\rho)$ и вершин $j \in \chi(I)$ верно $\mathbb{P}(\rho)_I \not\subset \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|)$. В частности, для любой вершины j из $\mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu)) = \{1, \ldots, c\}$ и грани $I \in \mathcal{S}(\rho)$ т.ч. $I \subset \chi^{-1}(j)$, верно $\mathbb{P}(\rho)_I \cap \mathrm{Bs}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(d_j)|) = \varnothing$.*
3. *Отображение на вершинах не стягивает любое ребро $I = \{i_1, i_2\} \in \mathcal{S}(\rho)$ такое, что $a_{i_1} \mid a_{i_2}$.*

Замечание 2.2.26. Строго говоря, в обозначении 2.2.20 нумерация начинается с 0, а нумерация упорядоченного набора $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$ начинается с 1. Мы надеемся, что это не запутает читателя.

Замечание 2.2.27. Понятие ЧУМ граней — тавтология: мы можем *определить* абстрактный симплициальный комплекс как частично упорядоченное множество

(см. [23, Definition 5.1.1]). Разница заключается в том, что мы рассматриваем "обобщённые симплициальные отображения" в следующем смысле. Мы требуем лишь того, чтобы образ любой подграни содержался в образе грани. При этом образ самой грани уже *не обязан* определяться образами его вершин.

Применим предложение 2.2.25 к примеру 2.2.7 (см. рисунок 2.3).



$$\{t+1\},\{t+2\},\{t+3\} \mapsto \{4\},$$
$$\{t+1,t+2\} \mapsto \{1,4\},\ \{t+1,t+3\} \mapsto \{2,4\},\ \{t+2,t+3\} \mapsto \{3,4\};$$
$$\Phi_{\mathcal{S}(\rho)}(\{t+1\}) = 6,\ \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}(\{t+2\}) = 10,\ \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}(\{t+3\}) = 15;$$
$$\Phi_{\mathcal{S}(\mu)}(\{1\}) = 16,\ \Phi_{\mathcal{S}(\mu)}(\{2\}) = 21,\ \Phi_{\mathcal{S}(\mu)}(\{3\}) = 25,\ \Phi_{\mathcal{S}(\mu)}(\{4\}) = 30.$$

Рис. 2.3: Сохраняющее порядок отображение ЧУМ граней
$\chi\colon (\mathcal{S}(\rho),\supseteq) \to (\mathcal{S}(\mu),\supseteq)$, где $\rho = (1^{(t+1)},6,10,15)$ и $\mu = (16,21,25,30)$.

Следующие примеры показывают, что комбинаторика гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений может быть произвольно сложно устроена с точки зрения симплициальной геометрии.

Предложение 2.2.28 (см. доказательство в подразделе 2.2.2)**.** *Пусть $\mathcal{C}$ — любой конечный абстрактный симплициальный комплекс. Тогда существует набор ρ положительных целых чисел такой, что $\mathcal{C} \simeq \mathcal{S}(\rho)$.*

Пример 2.2.29. Пусть $\Delta_l(N)$ — l-скелет N-симплекса. По предложению 2.2.28 существует упорядоченный набор $\rho = (a_0,\dots,a_N)$ такой, что $\Delta_l(N) \simeq \mathcal{S}(\rho)$. Зафиксируем нумерацию вершин: $\mathrm{Facets}(\mathcal{S}(\rho)) \simeq \{I_1,\dots,I_w\}$. Положим

$$\mu = (2^{(m)}, d_1,\dots,d_w; \mathrm{lcm}(\rho)^{(l)}), \quad d_j = \sum_{i\in I_j} a_i, \quad j = 1,\dots,w; \quad m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Общее взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(1^{(t)},\rho)$ мультистепени μ существует для любого $t > m+w+l$ по лемме 1.1.20. Оно является гладким и хорошо

сформированным в силу следствия 1.1.26, леммы 1.1.6 и предложения 1.1.47. Выберем набор ρ таким образом, что $a_i \nmid d_j$ для любых $i = 0, \dots, N$ и $j = 1, \dots, w$. Тогда образ любого взвешенного симплициального отображения $\mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$ содержится в $(l-1)$-симплексе $\{m+w+1, \dots, m+w+l\} \in \mathcal{S}(\rho)$.

Предложение 2.2.30 (см. доказательство в подразделе 2.2.2)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — общее квази-гладкое взвешенное полное пересечение мультистепени μ. Пусть существует взвешенное симплициальное отображение $F\colon \mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$, не стягивающее грани. Тогда X является гладким и хорошо сформированным.*

Пример 2.2.31. Пусть $F\colon \mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{D}$ — любое сюръективное отображение конечных абстрактных симплициальных комплексов, не стягивающее грани. Покажем, что F реализуется как взвешенное симплициальное отображение, ассоциированное с гладким хорошо сформированным взвешенным полным пересечением. В силу предложения 2.2.28 мы можем отождествить $\mathcal{C}$ со взвешенным симплициальным комплексом $(\mathcal{S}(\rho), \Phi_{\mathcal{S}(\rho)})$ для некоторого набора весов ρ. Снабдим комплекс $\mathcal{D}$ структурой взвешенного симплициального комплекса $(\mathcal{S}(\mu), \Phi_{\mathcal{S}(\mu)})$ следующим образом: для любой вершины мы возьмем наименьшее общее кратное всех весов, лежащих в соответствующем слое. Если слой состоит из одного веса, то мы возьмем его произвольную кратность, чтобы избежать случая пересечения с линейным конусом (см. определение 1.1.28).

Заметим, что общее взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P}(1^{(t)}; \rho)$ мультистепени $(\mu; \operatorname{lcm}(\rho)^{(s)})$ существует для любого $t > m + s$ по лемме 1.1.20 и квази-гладко в силу предложения 1.1.47 для $s \gg 0$. Тогда оно является гладким и хорошо сформированным по предложению 2.2.30.

2.2.2 Существование сильных неф-разбиений

В данном подразделе мы используем обозначения и определения подраздела 2.2.1. Мы также используем *нётерову индукцию*.

Принцип 2.2.32 (Нётерова индукция, см. [52, Exercise II.3.16])**.** *Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — фундированное частично упорядоченное множество, т.е., такое, что любое непустое подмножество $S \subseteq X$ имеет минимальный элемент.*

Пусть $P(x)$ — свойство элемента $x \in X$. Для доказательства выполнения $P(x)$ для всех элементов $x \in X$ достаточно доказать, что выполнены

База индукции. *$P(x)$ верно для всех минимальных элементов $x \in X$.*

Шаг индукции. *Для любого не минимального элемента $y \in X$ предположим, что $P(x)$ верно для всех $x \prec y$. Тогда $P(y)$ также верно.*

Доказательство предложения 2.2.25. Зафиксируем следующие обозначения: положим $\rho = (a_0, \ldots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \ldots, d_c)$, а также

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{S}(\rho)}, \quad \mathcal{S}(\rho)^{(b)} = \{i = 0, \ldots, N,\ b \mid a_i\} \text{ для всех } b \in \mathrm{im}(\Phi).$$

В силу следствия 1.1.52 и замечания 1.1.51 для любого элемента $b \in \mathrm{im}(\Phi)$ существует *допустимое вложение*: инъективное симплициальное отображение

$$\chi^{(b)} \colon \mathcal{S}(\rho)^{(b)} \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu)) = \{1, \ldots, c\}$$

такое, что грань $\mathcal{S}(\rho)^{(b)} \in \mathcal{S}(\rho)$ не лежит в симплициальном комплексе $\mathcal{B}_\rho(d_j)$ для любой вершины $j \in \mathrm{im}(\chi^{(b)})$.

Для доказательства утверждения сопоставим любому элементу $b \in \mathrm{im}(\Phi)$ допустимое вложение $\chi^{(b)}$ таким образом, что для любых $q_1, q_2 \in \mathrm{im}(\Phi)$ таких, что $q_1 \mid q_2$, допустимое вложение $\chi^{(q_2)}$ может быть получено как ограничение допустимого вложения $\chi^{(q_1)}$. Добьёмся этого нётеровой индукцией по элементам множества $\mathrm{im}(\Phi)$, частично упорядоченным по делимости. Отметим, что слои ассоциированного симплициального отображения $\chi_{\mathrm{vert}} \colon \mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$ удовлетворяют следующему условию: для любых $i_1, i_2 \in \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)$ выполнено $a_{i_1} \nmid a_{i_2}$.

База индукции. Пусть $b \in \mathrm{im}(\Phi)$ — элемент такой, что не существует другого элемента $q \in \mathrm{im}(\Phi) \setminus \{b\}$ такого, что $q \mid b$. По предположению существует допустимое вложение $\chi^{(b)} \colon \mathcal{S}(\rho)^{(b)} \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu))$, и всё доказано.

Шаг индукции. Пусть $b \in \mathrm{im}(\Phi)$ — элемент, и предположим, что мы уже построили нужные допустимые вложения $\chi^{(q)} \colon \mathcal{S}(\rho)^{(q)} \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu))$ для любого элемента $q \in \mathrm{im}(\Phi) \setminus \{b\}$ такого, что $q \mid b$, и все эти вложения согласованы в смысле выше. Пусть $\{b_1, \ldots, b_l\}$ — множество всех элементов $b_j \in \mathrm{im}(\Phi) \setminus \{b\}$ таких, что $b_j \mid b$, и не существует никакого элемента $q \in \mathrm{im}(\Phi) \setminus \{b_j, b\}$ такого, что $b_j \mid q \mid b$. Пусть $\chi^{(b_j)} \colon \mathcal{S}(\rho)^{(b_j)} \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu))$ и $\chi^{(b)} \colon \mathcal{S}(\rho)^{(b)} \hookrightarrow \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu))$ — допустимые вложения. При необходимости модифицируем вложение $\chi^{(b_j)}$ таким образом, что выполнено $\mathrm{im}(\chi^{(b)}) \subset \mathrm{im}(\chi^{(b_j)})$ для всех $j = 1, \ldots, l$. Отметим, что по предположению индукции для любого элемента $q \in \mathrm{im}(\Phi)$ такого, что $q \mid b_j$, допустимое вложение $\chi^{(b_j)}$ является ограничением допустимого вложения $\chi^{(q)}$. Таким образом, модификация вложения $\chi^{(b_j)}$ задаёт модификацию любого подчинённого вложения $\chi^{(q)}$, и всё доказано. $\square$

Доказательство теоремы 2.2.10. Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $\mu = (d_1, \dots, d_c)$, где $\rho = (a_0, \dots, a_N)$. По предложению 2.2.25 существует взвешенное симплициальное отображение $\chi_{\mathrm{vert}} \colon \mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$ такое, что для любой вершины $j \in \mathrm{Vert}(\mathcal{S}(\mu)) = \{1, \dots, c\}$ слой $\chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)$ является неделимым подмножеством в $\{0, \dots, N\}$ (см. определение 2.2.8). По предположению любое неделимое подмножество в $I \subset \{0, \dots, N\}$ сильно неделимо. Симплициальное отображение $\chi_{\mathrm{vert}} \colon \mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$ является взвешенным, откуда $a_i \mid d_j$ для любого $i \in \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)$. Положим $\Delta_j = d_j - \sum_{i \in \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)} a_i$. Тогда из [83, Lemma 6.1] следует, что

$$\Delta_j \geqslant \operatorname*{lcm}_{i \in \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)} a_i - \sum_{i \in \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)} a_i \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, c.$$

Пусть $i_X = \deg(-K_X) > 0$ — индекс Фано многообразия X. Обозначим $U = \{i = 0, \dots, N \mid a_i = 1\}$. По предложению 1.1.38 $|U| = i_X + \sum_{j=1}^{c} \Delta_j$. Рассмотрим произвольное разбиение $U = U_0 \sqcup \ldots \sqcup U_c$ такое, что $|U_0| = i_X$, и $|U_j| = \Delta_j$ для всех $j = 1, \dots, c$. Положим $I_j = U_j \sqcup \chi_{\mathrm{vert}}^{-1}(j)$ для всех $j = 1, \dots, c$. Тогда $I = U_0 \sqcup I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_c$ — искомое сильное неф-разбиение для X. □

Доказательство предложения 2.2.28. Мы снабдим $\mathcal{C}$ функцией веса $\Phi_{\mathcal{C}}$ нётеровой индукцией по граням комплекса $\mathcal{C}$, частично упорядоченным по обратному включению, начиная с гиперграней. Тогда набор ρ может быть получен как значения функции веса $\Phi_{\mathcal{C}}$ на вершинах симплициального комплекса.

База индукции. Пусть $\{F_1, \dots, F_l\} \subset \mathcal{C}$ — множество всех гиперграней комплекса $\mathcal{C}$, и $(b_1, \dots, b_l)$ — множество попарно взаимно простых целых чисел таких, что $b_j > 1$. Положим $\Phi_{\mathcal{C}}(F_j) = b_j$ для всех $j = 1, \dots, l$.

Шаг индукции. Пусть $I \in \mathcal{C}$ — грань, и $\{I_1, \dots, I_k\} \subset \mathcal{C}$ — множество всех граней комплекса $\mathcal{C}$ таких, что для любого $j = 1, \dots, k$ грань I_j содержит грань I в качестве гиперграни. Тогда положим $\Phi_{\mathcal{C}}(I) = \mathrm{lcm}_{j=1,\dots,k}(\Phi_{\mathcal{C}}(I_j))$. □

Доказательство предложения 2.2.30. Пусть $\rho = (a_0, \dots, a_N)$ и $\mu = (d_1, \dots, d_c)$ — наборы весов и степеней для X. В силу следствия 1.1.26 взвешенное полное пересечение X в хорошо сформированном взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(\rho)$ является гладким и хорошо сформированным тогда и только тогда, когда оно является квази-гладким, и $X \cap \mathrm{Sing}(\mathbb{P}(\rho)) = \varnothing$. Тогда лемма 1.1.6 означает, что достаточно проверить, что $X \cap \mathbb{P}(\rho)_I = \varnothing$ для любой грани $I \in \mathcal{S}(\rho)$.

Напомним, что по определению 1.1.5 и в обозначении 1.1.1 выполнено

$$\mathbb{P}(\rho)_I = \operatorname{Proj}(R^\rho/\langle\{X_i \mid i \notin I\}\rangle),\ R^\rho = \mathbb{C}[X_0,\dots,X_N] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^\rho_{d_j},\ \deg(X_i) = a_i.$$

Взвешенное симплициальное отображение $F\colon \mathcal{S}(\rho) \to \mathcal{S}(\mu)$ переводит вершину $i \in \operatorname{Vert}(\mathcal{S}(\rho))$ в вершину $F(i) \in \operatorname{Vert}(\mathcal{S}(\mu))$ такую $a_i \mid d_{F(\{i\})}$. Тогда существует моном $X_i^{m_i} \in R^\rho$ степени $d_{F(\{i\})} = m_i a_i$. По предположению отображение F не стягивает любую грань $I \in \mathcal{S}(\rho)$, откуда мы имеем вложение

$$F_I = F|_I : I \hookrightarrow \operatorname{Vert}(\mathcal{S}(\mu)) = \{1,\dots,c\}, \quad a_i \mid d_{F_I(\{i\})} \text{ для всех } i \in I.$$

Получаем, что существует регулярная последовательность $(X_i^{m_i} \mid i \in I)$ длины $|\operatorname{im}(F_I)| = |I|$, где $m_i a_i = d_{F_I(\{i\})}$. Из полунепрерывности коразмерности (см. следствие 1.5.20) для общего выбора последовательности взвешенно-однородных многочленов $\overline{f} \in \prod_{j=1}^c R^\rho_{d_j}$ идеал $I_{\overline{f}} \subset R^\rho/\langle\{X_i \mid i \notin I\}\rangle$ имеет высоту $|I|$. Следовательно, для общего выбора взвешенного полного пересечения X мы получаем, что $X \cap \mathbb{P}(\rho)_I = \varnothing$, и всё доказано. □

2.3 Двойственность Долгачёва–Никулина для торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трёхмерных многообразий Фано

В данном разделе мы проверяем, что общее антиканоническое сечение S гладкого трёхмерного многообразия Фано X (с естественной поляризацией решёткой Пикара $\operatorname{Pic}(X)$) зеркально двойственно по Долгачёву–Никулину к общему слою торической модели Ландау–Гинзбурга многообразия Фано X, снабжённого поляризацией решёткой инвариантов монодромии.

Гипотеза 2.3.1. *Пусть X — гладкое трёхмерное многообразие Фано, и F — общий слой компактификации лог-Калаби–Яу его торической модели Ландау–Гинзбурга $\mathsf{f} : Z \to \mathbb{P}^1$. Имеет место изометрия решёток*

$$\operatorname{Pic}(X)^\vee \simeq \operatorname{im}\left(H^2(Z,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{res}} H^2(F,\mathbb{Z})\right).$$

Предложение 2.3.2 (см. [107, теорема 5.25])**.** *Гипотеза 2.3.1 выполнена для гладких трёхмерных многообразий Фано с числом Пикара $\rho(X) = 1$.*

Напомним, что любое гладкое трёхмерное многообразие Фано имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга, заданную *жёстким максимально мутационным* многочленом Лорана (см. [28, Theorem 4.1]), причём в случае очень обильного антиканонического класса их классы мутационной эквивалентности однозначно соответствуют деформационным семействам соответствующих многообразий Фано. Более конкретно, в очень обильном случае в качестве такого многочлена можно выбрать т.н. *многочлен Минковского* (см. [9, 104]), а иначе мы можем выбрать многочлены Лорана, используемые в работах [107, 111].

Определение 2.3.3. Пусть X — гладкое трёхмерное многообразие Фано. Назовём торическую модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X, заданную жёстким максимально мутационным многочленом Лорана, приведённом в [24, 111], *стандартной* моделью Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано X.

Сформулируем основной результат данной главы.

Теорема 2.3.4. *Гипотеза 2.3.1 выполнена для стандартных торических моделей Ландау–Гинзбурга, причём решётка* $\mathrm{Pic}(X)^\vee$ *инвариантов монодромии явно вычислена в каждом случае классификации Мори–Мукаи.*

Двойственность Долгачёва–Никулина формулируется как соответствие полных семейств решёточно поляризованных K3 поверхностей. Поэтому естественно задаться вопросом о том, продолжается ли описанная двойственность на деформации моделей Ландау–Гинзбурга.

Определение 2.3.5. Пусть X — гладкое многообразие Фано, и выберем базис $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}^{\rho(X)}$. Назовём многочлен Лорана $\mathsf{p} \in \mathbb{Z}[a_1^{\pm 1}, \dots, a_{\rho(X)}^{\pm 1}][x_1, \dots, x_{\dim(X)}]$ *параметризованной моделью Ландау–Гинзбурга*, если для любого класса дивизоров $D = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\rho(X)}) \in \mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{C}$ специализация $\mathsf{p}_D = \mathsf{p}(\{a_i = \exp(-\alpha_i)\})$ задаёт торическую модель Ландау–Гинзбурга для пары (X, D).

Определение 2.3.6. Пусть X — гладкое трёхмерное многообразие Фано, и f — его параметризованная торическая модель Ландау–Гинзбурга. Мы назовём модель Ландау–Гинзбурга f *стандартной*, если её специализация f_0 является стандартной торической моделью Ландау–Гинзбурга для $X = (X, 0)$.

Для каждого гладкого трёхмерного многообразия Фано вида $X = \mathbb{P}^1 \times S$, где S — гладкая поверхность дель Пеццо с очень обильным антиканоническим

классом, мы проверили, что для любого выбора дивизора $D \subset X$ для общих слоёв торической модели Ландау–Гинзбурга пары (X, D) также имеет место двойственность Долгачёва–Никулина.

Предложение 2.3.7 (см. [3, приложение F]). *Стандартная параметризованная торическая модель Ландау–Гинзбурга явно построена для семейств №2.11, 3.27, 3.28, 4.11, 5.3, 6.1, 7.1, 8.1. При любом выборе дивизора D для общего слоя модели Ландау–Гинзбурга имеет место изометрия решёток*

$$\mathrm{Pic}(X)^\vee = \mathrm{im}\left(H^2(Z_{(X,D)}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^2(F_{(X,D)}, \mathbb{Z})\right).$$

Схема доказательства теоремы 2.3.4 и предложения 2.3.7 изложена ниже в данной главе. Мы разбираем один случай классификации Мори–Мукаи (дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1,1)$) в подразделе 2.3.6. Ввиду крайней объёмности вычислений, необходимых для доказательства остальных случаев, мы отсылаем читателя к [3, приложения Б–Е], они разбираются аналогичным образом.

2.3.1 Многочлены Минковского и очень обильное антиканоническое расслоение

Если антиканонический дивизор $-K_X$ является очень обильным, то многообразие Фано X допускает горенштейново торическое вырождение. В этом случае многогранник Ньютона торической модели Ландау–Гинзбурга p для многообразия Фано X является рефлексивным как веерный многогранник соответствующего торического вырождения. Коэффициенты многочлена p соответствуют разложениям его граней в суммы Минковского некоторых элементарных многоугольников (см. [104]). По этой причине такие многочлены Лорана p обычно называются *многочленами Минковского* (см. [9]).

Заметим, что дивизор $-K_X$ очень обилен во всех случаях, кроме семейств №2.1, 2.2, 2.3, 9.1, 10.1. Эти случаи рассматриваются отдельно.

2.3.2 Сведение к антиканоническому пучку $\mathcal{S}$

Для гладкого многообразия Фано X с числом Пикара $\rho(X) > 1$ и очень обильным антиканоническим дивизором $-K_X$ мы можем выбрать торическую замену переменных для многочлена Минковского p в [9] таким образом, что он

определит пучок $\mathcal{S}$ квартик в $\mathbb{P}^3$ следующим образом:

$$f_4(X,Y,Z,T) = \lambda XYZT, \quad \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{2.1}$$

что продолжит компактификационную диаграмму (см. определение 2.1.10)

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^*)^3 & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & Z \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{w}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{f}} \\ \mathbb{C} & = & \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array} \tag{2.2}$$

до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbb{C}^*)^3 & \hookrightarrow & Y & \hookrightarrow & Z & \overset{\chi}{\dashleftarrow} & V \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{w}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{g}} \quad \swarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathbb{C} & = & \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}^1 & = & \mathbb{P}^1 \end{array} \tag{2.3}$$

где ϕ — рациональное отображение, заданное пучком $\mathcal{S}$, отображение π — некоторый бирациональный морфизм, явно строящийся в [111], V — гладкое трёхмерное многообразие и χ — композиция флопов.

Если антиканонический дивизор $-K_X$ гладкого трёхмерного многообразия Фано не является очень обильным, то всё ещё возможно найти многочлен Лорана с нерефлексивным многогранником Ньютона и соответствующий антиканонический пучок такие, что диаграмма (2.2) коммутативна и существует аналог коммутативной диаграммы (2.3) (см. [111, подразделы 2.1, 2.2, 2.3, 9.1, 10.1]).

2.3.3 Антиканонический пучок $\mathcal{S}$ и инварианты монодромии

В [111, лемма 1.5.3] было показано, что для любой стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга общий элемент $\mathcal{S}_\lambda$ пучка $\mathcal{S}$ является поверхностью с дювалевскими особенностями, и её минимальное разрешение особенностей $\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda \to \mathcal{S}_\lambda$ можно отождествить с общим слоем модели Ландау–Гинзбурга. Мы также рассмотрим теоретико-схемный общий слой модели Ландау–Гинзбурга. Пусть $\mathcal{S}_\Bbbk$ — поверхность с дювалевскими особенностями над $\Bbbk = \mathbb{C}(\lambda)$ (заданная уравнением (2.1) в случае очень обильного антиканонического класса, и явно заданная в [111] иначе). Мы можем отождествить теоретико-схемный общий слой торической модели Ландау–Гинзбурга с минимальным разрешением особенностей поверхности $\widetilde{\mathcal{S}}_\Bbbk \to \mathcal{S}_\Bbbk$.

Пучок $\mathcal{S}$ позволяет явно вычислить решётку инвариантов монодромии, появляющуюся в теореме 2.3.4.

Обозначение 2.3.8. Пусть $\mathbb{P}_{\Bbbk}$ — объемлющее многообразие общего элемента $\mathcal{S}_{\Bbbk}$ пучка $\mathcal{S}$. Обозначим через $A_{\mathcal{S}}$ подгруппу в $\mathrm{Cl}(\mathcal{S}_{\Bbbk})$, порождённую классами линейной эквивалентности $[\mathcal{C}_i]$ неприводимых кривых, образующих базисное множество пучка и ограничением $i^*\operatorname{Pic}(\mathbb{P}_{\Bbbk})$, где $i\colon \mathcal{S}_{\Bbbk} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\Bbbk}$ — включение.

Замечание 2.3.9. Мы имеем $\mathbb{P}_{\Bbbk} = \mathbb{P}^3_{\Bbbk}$ для всех случаев, кроме семейств №2.1 и №10.1, для которых выполнено $\mathbb{P}_{\Bbbk} = \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^2_{\Bbbk}$.

Обозначение 2.3.10. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}_\lambda}$ и $\widetilde{\mathcal{S}_{\Bbbk}}$ — минимальное разрешение особенностей общего слоя $\mathcal{S}_\lambda$ (соответственно, теоретико-схемного общего слоя $\mathcal{S}_{\Bbbk}$). Обозначим через $L_\lambda \subset \operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{S}_\lambda})$ и $L_{\mathcal{S}} \subset \operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{S}_{\Bbbk}})$ подгруппы, порождённые классами линейной эквивалентности исключительных дивизоров разрешения и собственными прообразами кривых из группы $A_{\mathcal{S}}$.

Замечание 2.3.11. По построению решётка L_λ снабжена действием группы $\mathrm{Gal}(\Bbbk)$, и решётка $L_{\mathcal{S}}$ отождествляется с подрешёткой $L_\lambda^{\mathrm{Gal}(\Bbbk)} \subset L_\lambda$. Отметим, что подрешётка $L_\lambda^{\mathrm{Gal}(\Bbbk)} \subset L_\lambda$ является примитивной.

Следующее утверждение неявно содержится в [111, раздел 1].

Предложение 2.3.12 (см. [111, подразделы 1.4, 1.9])**.** *Пусть X — гладкое трёхмерное многообразие Фано, и пусть F — общий слой компактификации лог-Калаби–Яу стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга $\mathsf{f}\colon Z \to \mathbb{P}^1$ для многообразия Фано X. Тогда имеет место изометрия решёток*

$$\operatorname{im}(H^2(Z,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^2(F,\mathbb{Z})) \simeq L_{\mathcal{S}}.$$

Более того, это решётка ранга

$$\operatorname{rank}(L_{\mathcal{S}}) = \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{S}_{\Bbbk}})) - \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(\mathcal{S}_{\Bbbk})) + \operatorname{rank}(A_{\mathcal{S}}) = 20 - \operatorname{rank}(\operatorname{Pic}(X)).$$

Замечание 2.3.13. Подрешётка $L_{\mathcal{S}} \subset \operatorname{Pic}(F)$ примитивна по [98, Theorem 4.24].

Подытожим схему доказательства теоремы 2.3.4.

1. Явно найти подрешётки $L_\lambda \subset \operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{S}_\lambda})$ и $L_{\mathcal{S}} = L_\lambda^{\mathrm{Gal}(\Bbbk)} \subset \operatorname{Pic}(\widetilde{\mathcal{S}_{\Bbbk}})$.
2. Доказать, что $L_{\mathcal{S}}^{\perp} \simeq H \oplus \operatorname{Pic}(X) \subset L_{\mathrm{K3}}$ (см. замечания 2.1.15 и 2.1.17).

Замечание 2.3.14. Решётки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ для гладких трёхмерных многообразий Фано были явно найдены в [3, приложение A]. Более того, замечание 2.1.17 даёт явный метод проверки того, что $L_{\mathcal{S}}^{\perp} \simeq H \oplus \mathrm{Pic}(X)$ в терминах дискриминантных форм на данных решётках (см. обзор данной теории в [38, 3.3]).

Мы также используем следующее обозначение.

Обозначение 2.3.15. Обозначим через $C_{(f,g)}$ кривую в $\mathbb{P}^3$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, заданную (би)однородными многочленами f, g. Мы также используем аналогичное обозначение для поверхности $S_{(f)}$ в $\mathbb{P}^3$ или $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

2.3.4 Базисное множество антиканонического пучка $\mathcal{S}$

Пусть C_i — неприводимые кривые, образующие базисное множество пучка $\mathcal{S}$. Мы можем найти эти кривые по пересечению поверхности $\mathcal{S}_\lambda$ для общего выбора $\lambda \in \mathbb{C}$ с неприводимыми компонентами слоя $\mathcal{S}_\infty$ над бесконечностью. Например, если пучок задан уравнением (2.1), то мы рассмотрим пересечения $S_{(f)} \cap \mathcal{S}_\lambda$ для $f \in \{X, Y, Z, T\}$. Мы хотим найти минимальное множество порождающих группы $A_{\mathcal{S}}$ над $\mathbb{Z}$. Для этого мы можем думать об $A_{\mathcal{S}}$ как об абелевой группе, порождённой элементами $\mathcal{C}_i$, общим гиперплоским сечением $H_{\mathcal{S}}$ и соотношениями линейной эквивалентности. Обычно достаточно рассматривать лишь линейную эквивалентность для гиперплоских сечений поверхности $\mathcal{S}_\lambda$. Тогда мы можем явно выбрать минимальное подмножество порождающих для $A_{\mathcal{S}}$. Отметим, что в общем случае полученное множество не будет базисом.

2.3.5 Вычисление решётки L_λ

Хорошо известно, что минимальное разрешение поверхности с дювалевскими особенностями может быть получено последовательностью раздутий в особых точках. Пусть E_i^j — j-я исключительная кривая разрешения в особой точке p_i. Напомним, что исключительный дивизор раздутия в точке может быть отождествлён с проективизацией касательного конуса в данной точке. Мы используем это для вычисления чисел пересечения вида $\widetilde{C}_l \cdot E_j^k$, где $\widetilde{C}_l$ — собственный прообраз l-й кривой, порождающей группу $A_{\mathcal{S}}$.

А именно, мы можем перейти к локальной карте U, содержащей данную особую точку $p \in \mathcal{S}_\lambda$ и вычислить начальный член многочлена $\mathcal{S}_\lambda|_U$ в данной точке. После гомогенизации мы получаем *квадратичный член* особенности —

однородный квадратичный многочлен, задающий проективизацию касательного конуса $E_p = \mathbb{P}(T_p\mathcal{S}_\lambda)$. Могут возникнуть следующие случаи:

1. Дивизор E_p неприводим, тогда $E_p \simeq \mathbb{P}^1$, и особая точка имеет тип $\mathbb{A}_1$;
2. Дивизор E_p имеет две различных неприводимые компоненты, тогда особая точка имеет тип $\mathbb{A}_n$ при $n > 1$. Если кривая $\mathcal{C}$ касается одной (двух) неприводимых компонент дивизора E_p, то её собственный прообраз $\widetilde{\mathcal{C}}$ касается одной из "внешних" (одной из "внутренних") исключительных кривых в точке $P \in \mathcal{S}_\lambda$ относительно соответствующей диаграммы Дынкина.
3. Дивизор E_p — рациональная кривая $\mathcal{E} \simeq \mathbb{P}^1$ кратности 2. Этот случай возникает, когда особая точка имеет тип $\mathbb{D}_n$ при $n > 4$ или $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$.

Мы можем вычислить целочисленный базис решётки L_λ следующим образом:

1. Если удалось получить базис группы $A_\mathcal{S}$ как подмножество в $\{[C_l]\}$, то целочисленный базис решётки L_λ образован исключительными кривыми E_j^k разрешения и собственными прообразами $\widetilde{C}_i$ кривых из $A_\mathcal{S}$.
2. В общем случае мы вычисляем матрицу пересечения на всех исключительных кривых E_j^k разрешения и собственных прообразах $\widetilde{C}_l$ кривых, образующих группу $A_\mathcal{S}$. Полученная матрица пересечения будет вырожденной, и решётка L_λ изоморфна фактору свободной абелевой группы $\mathbb{Z}[E_j^k, \widetilde{C}_l]$ по соотношениям из ядра полученной матрицы.

На практике вычисление решётки инвариантных циклов $L_\mathcal{S}$ и проверка двойственности Долгачёва–Никулина приводит к крайне громоздким и долгим вычислениям. Для их упрощения и исключения возможных ошибок мы реализовали описанный алгоритм вычисления в SAGE, его можно найти по ссылке `https://github.com/MikhailOvcharenko/DN-duality`.

Для краткости мы вводим следующее удобное сокращение. По построению матрица пересечения L_λ является симметрической и блочной:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

где A — матрица пересечения исключительных кривых на поверхности, C — матрица пересечения собственных прообразов кривых, образующих базисное множество пучка $\mathcal{S}$, и B — оставшаяся "смешанная" матрица пересечения.

Более того, общий элемент пучка $\mathcal{S}_\lambda$ имеет дювалевские особенности, откуда A — блочно-диагональная матрица вида $A = \oplus(-A_i)$, где i пробегает все особые точки поверхности $\mathcal{S}_\lambda$, и A_i — матрица Картана соответствующей диаграммы Дынкина. Таким образом, матрицу A легко восстановить.

Таким образом, достаточно предъявить подматрицу $(B|C)$ и упорядоченный набор дювалевских особенностей поверхности $\mathcal{S}_\lambda$. В этой ситуации мы будем говорить, что матрица пересечений L_λ *определена* подматрицей $(B|C)$.

Мы также используем следующие обозначения.

Обозначение 2.3.16. Мы сопоставляем решётке $L_{\mathcal{S}}$ следующие данные:

- G' — матрица выбранных порождающих дискриминантной группы;
- B' — матрица $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-значной билинейной дискриминантной формы;
- Q' — вектор $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$-значений квадратичной дискриминантной формы.

Мы используем аналогичные обозначения G'', B'' и Q'' для решётки $H \oplus \mathrm{Pic}(X)$ (гипотетического ортогонального дополнения к решётке $L_{\mathcal{S}}$).

2.3.6 Пример вычислений: семейство №2.32

Пусть X — элемент семейства №2.32 из классификации Мори–Мукаи, т.е., дивизор на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1,1)$. Пучок $\mathcal{S}$ имеет вид (см. [111, 2.32])

$$X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2 + XZT^2 + YZT^2 + T^4 = \lambda XYZT.$$

Элементы $\mathcal{S}_\lambda$ пучка неприводимы для всех значений параметра $\lambda \in \mathbb{P}^1$, кроме $\mathcal{S}_\infty = S_{(X)} + S_{(Y)} + S_{(Z)} + S_{(T)}$. Базисное множество пучка $\mathcal{S}$ образовано кривыми

$$C_1 = C_{(X,T)},\ C_2 = C_{(Y,T)},\ C_3 = C_{(Z,T)},$$
$$C_4 = C_{(T,X+Y+Z)},\ C_5 = C_{(X,YZ+T^2)},\ C_6 = C_{(Y,XZ+T^2)}.$$

Их классы линейной эквивалентности на теоретико-схемном общем элементе $\mathcal{S}_{\Bbbk}$ пучка удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} [C_4] \\ [C_5] \\ [C_6] \\ [H_{\mathcal{S}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{pmatrix}.$$

Для общего выбора параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ поверхность $\mathcal{S}_\lambda$ имеет особенности

$P_1 = P_{(X,Y,T)}$: тип $\mathbb{A}_4$ с квадратичным членом $X \cdot Y$;

$P_2 = P_{(X,Z,T)}$: тип $\mathbb{A}_3$ с квадратичным членом $X \cdot Z$;

$P_3 = P_{(Y,Z,T)}$: тип $\mathbb{A}_3$ с квадратичным членом $Y \cdot Z$;

$P_4 = P_{(X,T,Y+Z)}$: тип $\mathbb{A}_1$ с квадратичным членом $X(X+Y+Z-\lambda T)+T^2$;

$P_5 = P_{(Y,T,X+Z)}$: тип $\mathbb{A}_1$ с квадратичным членом $Y(X+Y+Z-\lambda T)+T^2$;

$P_6 = P_{(Z,T,X+Y)}$: тип $\mathbb{A}_3$ с квадратичным членом $Z \cdot (X+Y+Z-\lambda T)$.

Действие Галуа на решётке L_λ тривиально. Матрица пересечения на решётке $L_\lambda = L_{\mathcal{S}}$ определяется следующей подрешёткой:

•	E_1^1	E_1^2	E_1^3	E_1^4	E_2^1	E_2^2	E_2^3	E_3^1	E_3^2	E_3^3	E_4^1	E_5^1	E_6^1	E_6^2	E_6^3	$\widetilde{C_1}$	$\widetilde{C_2}$	$\widetilde{C_3}$
$\widetilde{C_1}$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2	0	0
$\widetilde{C_2}$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	-2	0
$\widetilde{C_3}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	-2

.

Заметим, что матрица пересечений невырождена.

Дискриминантные группы и дискриминантные формы на решётках $L_{\mathcal{S}}$ и $H \oplus \mathrm{Pic}(X)$ определяются следующими данными:

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$G'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix};\ B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\ B'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} Q' \\ Q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{6} \end{pmatrix}.$$

Глава 3

Полные пересечения в грассманианах и их взвешенных аналогах

Далее мы считаем, что все многообразия определены над $\mathbb{C}$. Заметим, что большая часть аргументов выполнена для любого алгебраически замкнутого поля характеристики 0. Гладкое проективное многообразие X называется многообразием *общего типа*, если его размерность Кодаиры равна $\dim(X)$. Для многообразия Y мы обозначаем через $\mathrm{WDiv}(Y)$ группу его дивизоров Вейля, и для поля $\Bbbk$ мы обозначаем через $Y(\Bbbk)$ множество $\Bbbk$-точек многообразия Y.

3.1 Предварительные сведения

3.1.1 Кольца Кокса и пространства мечты Мори

Определение 3.1.1. Пусть Y — неприводимое нормальное многообразие т.ч. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathbb{Z}^\rho$. Зафиксируем подгруппу $K \subset \mathrm{WDiv}(Y)$ т.ч. каноническое отображение $K \to \mathrm{Cl}(Y)$, отправляющее дивизор Вейля $D \in K$ в соответствующий класс $[D] \in \mathrm{Cl}(Y)$, является изоморфизмом. *Кольцом Кокса* многообразия Y называется следующая $\mathrm{Cl}(Y)$-градуированная алгебра:

$$\mathcal{R}(Y) = \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(Y)} \mathcal{R}_{[D]}(Y), \quad \mathcal{R}_{[D]}(Y) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)),$$

где умножение в $\mathcal{R}(Y)$ задано умножением однородных сечений в поле рациональных функций $\mathbb{C}(Y)$ многообразия.

Замечание 3.1.2. Кольцо Кокса $\mathcal{R}(Y)$ единственно с точностью до изоморфизма и не имеет делителей нуля (см. [10, Construction 1.4.1.1, 1.5.1]).

Определение 3.1.3 (см. [10, Definition 3.3.4.1])**.** Неприводимое нормальное проективное многообразие Y т.ч. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathbb{Z}^\rho$, и кольцо Кокса $\mathcal{R}(Y)$ конечнопорождено, называется *пространством мечты Мори* ранга ρ.

Замечание 3.1.4. Любое пространство мечты Мори имеет естественное разложение конуса эффективных дивизоров на выпуклые полиэдральные множества, называемые *камерами Мори*. Данное разложение описывает бирациональную геометрию пространства мечты Мори (см. [10, 3.3.4]).

Пример 3.1.5. Гладкое многообразие Фано является пространством мечты Мори (см. [10, Theorem 4.3.3.7]). Кольцо Кокса обобщённого многообразия флагов G/P описывается теорией представлений группы G (см. [10, 3.2.3]).

3.1.2 Соответствие между замкнутыми подсхемами и однородными идеалами

Существует естественное соответствие между замкнутыми подсхемами в гладком пространстве мечты Мори Y и однородными идеалами в его кольце Кокса $\mathcal{R}(Y)$. Более точно, пучки идеалов на многообразии Y соответствуют т.н. "насыщенным" однородным идеалам в $\mathcal{R}(Y)$.

Обозначение 3.1.6 (см. [82, Definition 2.2])**.** Пусть Y — неприводимое нормальное многообразие т.ч. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathbb{Z}^\rho$. Для любого однородного элемента $f \in \mathcal{R}(Y)$ обозначим через D_f соответствующий эффективный дивизор на Y.

1. Для любого однородного идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$ обозначим через $\varphi_Y(I)$ пучок идеалов, ассоциированный со следующей суммой $\mathcal{O}_Y$-подпучков:

$$\varphi_Y(I) = \sum_{\substack{f \in I \\ \text{однородный}}} \mathcal{O}_Y(-D_f) \subseteq \mathcal{O}_Y.$$

   В частности, пучок $\varphi_Y(I)$ соответствует единственной замкнутой подсхеме в Y (например, см. [52, Proposition II.5.9]).

2. Для любого пучка идеалов $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ пусть $\psi_Y(\mathcal{I}) \subset \mathcal{R}(Y)$ — идеал, порождённый всеми однородными элементами $f \in \mathcal{R}(Y)$ т.ч. $\mathcal{O}_Y(-D_f) \subseteq \mathcal{I}$.

Замечание 3.1.7. Если $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, то $Y \simeq \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y))$ (см. [10, 3.3.4]). Для любого однородного идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$ факторотображение $\mathcal{R}(Y) \twoheadrightarrow \mathcal{R}(Y)/I$

определяет замкнутую подсхему $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)/I) \subset \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)) = Y$. Её пучок идеалов отождествляется с пучком идеалов $\varphi_Y(I)$ выше (например, см. [52, Proposition II.5.9]).

Предложение 3.1.8. *Пусть Y — гладкое пространство мечты Мори, $\mathcal{R}(Y)$ — его кольцо Кокса, и $B \subset \mathcal{R}(Y)$ — несущественный (irrelevant) идеал.*

1. *Пусть $I = (f_1, \dots, f_m) \subset \mathcal{R}(Y)$ — однородный идеал. Тогда выполнено разложение $\varphi_Y(I) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{O}_Y(-D_{f_j})$.*

2. *Пусть $I \subset \mathcal{R}(Y)$ — однородный идеал. Тогда $\psi_Y(\varphi_Y(I)) = (I : B^\infty)$, где $(I : B^\infty)$ — насыщение идеала I относительно B:*

$$(I : B^\infty) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{f \in \mathcal{R}(Y) \mid fB^l \subset I\}.$$

3. *Для любого пучка идеалов $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ выполнено $\varphi_Y(\psi_Y(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$.*

Доказательство. Если Y — гладкое многообразие, то $\mathrm{Cl}(Y) = \mathrm{Pic}(Y)$, тогда кольцо Кокса $\mathcal{R}(Y)$ является $\mathrm{Pic}(Y)$-градуированным. Утверждение следует из [82, Proposition 3.1(1, 2, 3)]. □

Замечание 3.1.9. Несущественный идеал $B \subset \mathcal{R}(Y)$ может быть явно описан в терминах выбранного обильного дивизора $D \in K$ на Y (см. [10, Corollary 1.6.3.6]), где группа $K \subset \mathrm{WDiv}(Y)$ была введена в определении 3.1.1.

Далее мы опишем такое соответствие для особых пространств мечты Мори Y с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Нетривиальность $\mathrm{Cl}(Y)/\mathrm{Pic}(Y)$ приводит к определению "насыщения" для однородных идеалов $I \subset \mathcal{R}(Y)$, отличного от $(I : B^\infty)$.

Обозначение 3.1.10. Пусть Y — пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Для любого однородного идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$ введём обозначение

$$I^\infty = (\{x \in \mathcal{R}(Y) \mid (\mathcal{R}(Y) \cdot x)_{m \cdot k} \subset I \text{ для всех } k \gg 0\}),\ m = [\mathrm{Cl}(Y) : \mathrm{Pic}(Y)].$$

Замечание 3.1.11. Заметим, что если Y — гладкое многообразие, то идеал I^∞ совпадает с обычным насыщением $(I : B^\infty)$ относительно несущественного идеала $B \subset \mathcal{R}(Y)$. Также нетрудно проверить, что любой радикальный однородный идеал $I \subset \mathcal{R}(Y)$ удовлетворяет $I = I^\infty$.

Предложение 3.1.12. *Пусть Y — пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}(Y)$ — его кольцо Кокса, и $B \subset \mathcal{R}(Y)$ — несущественный идеал.*

1. *Пусть $I = (f_1, \dots, f_m) \subset \mathcal{R}(Y)$ — однородный идеал. Тогда выполнено разложение $\varphi_Y(I) = \sum_{j=1}^m \mathcal{O}_Y(-D_{f_j})$.*

2. *Для любого однородного идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$ выполнено $\psi_Y(\varphi_Y(I)) = I^\infty$.*

3. *Для любого пучка идеалов $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ выполнено $\varphi_Y(\psi_Y(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$.*

Доказательство. Мы хотим вывести утверждение из [82, Proposition 3.1], как это было сделано в доказательстве предложения 3.1.8. Тем не менее, мы не можем применить его напрямую, т.к. в нашем случае кольцо Кокса $\mathcal{R}(Y)$ является лишь $\mathrm{Cl}(Y)$-, а не $\mathrm{Pic}(Y)$-градуированным.

Нам понадобятся следующие соображения.

Во-первых, напомним, что $Y \simeq \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y))$ (см. [10, 3.3.4]). Введём *прореженное* кольцо Кокса, имеющее уже $\mathrm{Pic}(Y)$-градуировку:

$$\mathcal{R}(Y)^{[m]} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m \cdot k)), \quad m = [\mathrm{Cl}(Y) : \mathrm{Pic}(Y)].$$

Напомним, что многообразие $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y))$ канонически изоморфно $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)^{[m]})$ (см. [51, 2.4.7(i)]). Тогда любой пучок идеалов на Y канонически отождествляется с пучком идеалов на $\widetilde{Y} := \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)^{[m]})$, и наоборот. В частности, для любого идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$ и его прореживания $\widetilde{I} = I \cap \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ мы можем отождествить пучки идеалов $\phi_Y(I)$ и $\phi_{\widetilde{Y}}(\widetilde{I})$.

Во-вторых, пусть $I \subset \mathcal{R}(Y)$ — однородный идеал, и $\widetilde{I} = I \cap \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ — его образ в прореженном кольце Кокса. Нетрудно проверить, что идеал I является насыщенным в смысле обозначения 3.1.10 (т.е., выполнено $I = I^\infty$) тогда и только тогда, когда идеал $\widetilde{I}$ является насыщенным в обычном смысле слова относительно несущественного идеала $\widetilde{B} \subset \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ (т.е., выполнено $\widetilde{I} = (\widetilde{I} : \widetilde{B}^\infty)$) (например, см. доказательство леммы 1.1.12).

Перейдём к доказательству утверждения.

(1) Рассмотрим прореживание $\widetilde{I} = I \cap \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ идеала $I \subset \mathcal{R}(Y)$. Если $\widetilde{I}$ порождён элементами $g_1, \dots, g_l \in \mathcal{R}(Y)^{[m]}$, то мы имеем $\varphi_{\widetilde{Y}}(\widetilde{I}) = \sum_{j=1}^l \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-D_{g_j})$ в силу [82, Proposition 3.1(1)], где $\widetilde{Y} = \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)^{[m]})$. Тогда в силу канонического изоморфизма $Y \simeq \widetilde{Y}$ получаем $\varphi_Y(I) = \sum_{j=1}^m \mathcal{O}_Y(-D_{f_j})$.

(3) Для любого пучка идеалов $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ мы можем отождествить идеал $\psi_{\widetilde{Y}}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ с прореживанием $\widetilde{\psi_Y(\mathcal{I})} = \psi_Y(\mathcal{I}) \cap \mathcal{R}(Y)^{[m]}$ идеала $\psi_Y(\mathcal{I})$. Применим [82, Proposition 3.1(3)].

(2) Идеал $I \subset \mathcal{R}(Y)$ задаёт пучок идеалов $\varphi_Y(I)$ на Y. После канонического отождествления $Y \simeq \widetilde{Y}$ мы можем думать про $\varphi_Y(I)$ как про пучок идеалов на $\widetilde{Y}$. Согласно [82, Proposition 3.1(2)], пучки идеалов на $\widetilde{Y}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с насыщенными идеалами $\widetilde{I} = (\widetilde{I} : \widetilde{B}^\infty)$ в кольце $\mathcal{R}(Y)^{[m]}$. Но мы можем отождествить идеал $\widetilde{I}$ с прореживанием идеала $\psi_Y(\varphi_Y(I))$, откуда $\psi_Y(\varphi_Y(I)) = I^\infty$. □

Предложения 3.1.8 и 3.1.12 приводят к следующим определениям.

Определение 3.1.13. Пусть Y — пространство мечты Мори, и $I \subset \mathcal{R}(Y)$ — однородный идеал. *Насыщением* идеала I называется идеал $(I : B^\infty)$, если многообразие Y — гладкое, и идеал I^∞, если $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ (см. замечание 3.1.11). Идеал называется *насыщенным*, если он совпадает со своим насыщением.

Определение 3.1.14. Пусть $X \subseteq Y$ — замкнутая подсхема в пространстве мечты Мори Y т.ч. Y — гладкое многообразие, или $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Мы будем называть $\psi_Y(\mathcal{I}_X) \subset \mathcal{R}(Y)$ *идеалом определения* подсхемы X. Определим *однородное координатное кольцо* многообразия X как $\mathrm{Cl}(Y)$-градуированную алгебру $\mathcal{R}_Y(X) = \mathcal{R}(Y)/\psi_Y(\mathcal{I}_X) = \oplus_{i \in \mathrm{Cl}(Y)} \mathcal{R}_Y(X)_i$.

3.1.3 Полные пересечения в пространствах мечты Мори

Определение 3.1.15. Пусть Y — неприводимое нормальное многообразие. *Полным пересечением* гиперповерхностей $H_1, \dots, H_c \subset Y$ называется замкнутая подсхема $X \subseteq Y$ с $\mathrm{codim}_Y(X) = c$ и пучком идеалов $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_{H_1} + \dots + \mathcal{I}_{H_c}$.

Определение 3.1.16 (см. [82, Definition 2.2])**.** Пусть Y — неприводимое нормальное многообразие т.ч. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathbb{Z}^\rho$. Полное пересечение $X \subseteq Y$ гиперповерхностей $H_1, \dots, H_c$ — *строгое*, если $\psi_Y(\mathcal{I}_X) \subset \mathcal{R}(Y)$ порождён c элементами.

Замечание 3.1.17. Пусть $X \subset Y$ — строгое полное пересечение в пространстве мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$. Идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X)$ порождён $\mathrm{codim}_Y(X)$ элементами. Из замечания 3.1.7 мы можем отождествить $X \simeq \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)/\psi_Y(\mathcal{I}_X))$. Тогда

$$\mathrm{codim}_Y(X) = \dim(\mathcal{R}(Y)) - \dim(\mathcal{R}(Y)/\psi_Y(\mathcal{I}_X)) = \mathrm{ht}(\psi_Y(\mathcal{I}_X)).$$

Отсюда следует, что идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X)$ порождён регулярной последовательностью (см. [23, Proposition 1.5.11]).

Лемма 3.1.18. *Пусть Y — пространство мечты Мори, и $X \subseteq Y$ — полное пересечение гиперповерхностей $D_{f_1}, \dots, D_{f_c}$, заданных однородными элементами $f_j \in \mathcal{R}(Y)$, и пусть $B = (g_1, \dots, g_s) \subset \mathcal{R}(Y)$ — несущественный идеал.*

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- *Y — гладкое многообразие, и $s < \mathrm{ht}(B)$;*
- *$\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, и идеал $(f_1, \dots, f_c)$ радикален.*

Тогда $\psi_Y(\mathcal{I}_X) = (f_1, \dots, f_c)$, и $\mathrm{ht}(\psi_Y(\mathcal{I}_X)) = c$. В частности, X — строгое полное пересечение, и $(f_1, \dots, f_c)$ — регулярная последовательность.

Доказательство. Положим $I = (f_1, \dots, f_c) \subset \mathcal{R}(Y)$.

Пусть Y — гладкое, и $s < \mathrm{ht}(B)$. В силу предложения 3.1.8(1) мы можем отождествить $\varphi_Y(I)$ с пучком идеалов $\mathcal{I}_X$. Согласно [82, Lemma 4.2], мы имеем $\mathrm{ht}(I) = c$. Тогда по [82, Lemma 4.1] данный идеал является насыщенным относительно несущественного идеала B. В силу предложения 3.1.8(2) имеем $\psi_Y(\varphi_Y(I)) = I$. Отсюда мы получаем, что $\psi_Y(\mathcal{I}_X) = I$.

Предположим, что $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, и I — радикальный идеал. В силу предложения 3.1.12(1) мы можем отождествить $\varphi_Y(I)$ с пучком идеалов $\mathcal{I}_X$. Нетрудно проверить, что радикальный однородный идеал $I \subset \mathcal{R}(Y)$ удовлетворяет $I = I^\infty$. Предложение 3.1.12(2) означает, что $\psi_Y(\varphi_Y(I)) = I$. Следовательно, мы имеем $\psi_Y(\mathcal{I}_X) = I$. Согласно замечанию 3.1.7, мы имеем $\mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y)/I) \simeq X$. в силу $Y \simeq \mathrm{Proj}(\mathcal{R}(Y))$ (см. [10, 3.3.4]) верно, что (см. замечание 3.1.17)

$$\mathrm{ht}(I) = \dim(\mathcal{R}(Y)) - \dim(\mathcal{R}(Y)/I) = \mathrm{codim}_Y(X) = c.$$

В обоих случаях $\psi_Y(\mathcal{I}_X) = I$ порождён c элементами, и $\mathrm{ht}(\psi_Y(\mathcal{I}_X)) = c$. Тогда последовательность $(f_1, \dots, f_c)$ регулярна по [23, Proposition 1.5.11]. □

Замечание 3.1.19. Предположения леммы 3.1.18 не могут быть ослаблены.

Рассмотрим многообразие $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с координатами $(x_0 : x_1)$, $(y_0 : y_1)$ и замкнутую подсхему $X = ((0 : 1), (0 : 1))$. Её идеал определения имеет вид $\psi_Y(\mathcal{I}_X) = (x_0, y_0) \subset \mathcal{R}(Y) = \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, y_1]$. Но мы также можем задать X не насыщенным идеалом $I = (x_0, x_1 y_0)$ (см. [82, Example 4.6]).

Рассмотрим $Y = \mathbb{P}(1,1,3,6)$ с координатами $(x_0, \dots, x_3)$ и $I = (x_0^3, x_1^3)$ в $\mathcal{R}(Y) = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Насыщение идеала $\psi_Y(\phi_Y(I)) = I^\infty = (x_0^3, x_1^3, x_0^2 x_1^2)$ не может быть порождено регулярной последовательностью, т.е., идеал I задаёт нестрогое полное пересечение в Y (см. пример 1.1.15).

3.1.4 Сопряжённые полные пересечения

Пусть Y — пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, и пусть $X \subseteq Y$ — строгое полное пересечение. Согласно замечанию 3.1.17, идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X)$ порождён регулярной последовательностью однородных элементов.

Определение 3.1.20. Пусть $X \subseteq Y$ — строгое полное пересечение в пространстве мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, т.е., $\psi_Y(\mathcal{I}_X) \subset \mathcal{R}(Y)$ порождён регулярной последовательностью $(f_1, \dots, f_c)$ однородных элементов. Пусть $d_j = \deg(f_j) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Набор $(d_1, \dots, d_c)$ — *мультистепень* полного пересечения $X \subseteq Y$.

Определение 3.1.21. Пусть $X = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]/I_X)$ — проективное многообразие, и $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. *Сопряжённым многообразием* к X называется многообразие $X^\sigma = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]/I_X^\sigma)$, где группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ действует на коэффициентах многочленов в $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$.

Лемма 3.1.22. *Пусть Y — комплексное пространство мечты Мори, где $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, определимое над $\mathbb{Q}$, и $X \subseteq Y$ — строгое полное пересечение мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$. Его сопряжённое многообразие X^σ также является строгим полным пересечением в Y той же мультистепени μ для любого элемента $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.*

Доказательство. По предположению $X \subseteq Y$ является строгим полным пересечением, т.е., его идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X)$ в кольце $\mathcal{R}(Y)$ порождён регулярной последовательностью однородных элементов $(f_1, \dots, f_c)$, где $\deg(f_j) = d_j$ (см. замечание 3.1.17). Заметим, что действие автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ переводит идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X) \subset \mathcal{R}(Y)$ в идеал $\psi_Y(\mathcal{I}_X)^\sigma = (f_1^\sigma, \dots, f_c^\sigma) \subset \mathcal{R}(Y^\sigma) \simeq \mathcal{R}(Y)$.

Данное действие сохраняет насыщенность (см. определение 3.1.13), т.к. оно сохраняет несущественный идеал и однородные компоненты кольца $\mathcal{R}(Y)$, и действует $\mathbb{Q}$-линейно на коэффициентах многочленов. Следовательно, в силу предложения 3.1.12 мы имеем $\psi_Y(\mathcal{I}_X)^\sigma = \psi_Y(\mathcal{I}_{X^\sigma})$. Нетрудно проверить, что в силу $\mathbb{Q}$-линейности действия последовательность $(f_1^\sigma, \dots, f_c^\sigma)$ регулярна. □

3.2 Теорема Белого для полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах

В данном разделе мы получаем критерий, когда гладкие комплексные полные пересечения общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах могут быть определены над $\overline{\mathbb{Q}}$, что является многомерным обобщением известного результата Г. В. Белого.

Напомним классическую формулировку теоремы Белого.

Теорема 3.2.1 (см. [61, 99])**.** *Гладкая комплексная проективная кривая X может быть определена над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует нетривиальный морфизм $f\colon X \to \mathbb{P}^1$, этальный над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$.*

Теорема Белого является отправной точкой для теории *детских рисунков* А. Гротендика: из неё выводится, что абсолютная группа Галуа $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ точно действует на этальной фундаментальной группе $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ внешними автоморфизмами (см. [96, Theorem 4.7.7]). Более того, группа $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ точно действует на множестве связных компонент пространства модулей поверхностей общего типа (см. [17, 37]).

Таким образом, естественно ожидать многомерные аналоги теоремы Белого. В случае $\dim(X) \geqslant 2$ морфизм $X \to \mathbb{P}^1$ заменяется на *функцию Лефшеца*.

Определение 3.2.2. Пусть X — гладкое проективное многообразие, и $\mathcal{H}$ — очень обильная линейная система на X. *Пучком Лефшеца* $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ называется одномерная линейная подсистема т.ч. $\mathrm{codim}_X(\mathrm{Bs}(\mathcal{L})) > 1$, и любой элемент $X_t \in \mathcal{L}$ пучка имеет не хуже чем обыкновенную двойную особенность. *Функцией Лефшеца* (см. [47, 58]) называется композиция рационального отображения $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, заданного пучком Лефшеца, с рациональной функцией на $\mathbb{P}^1$.

Замечание 3.2.3. В теореме 3.2.1 мы всегда можем считать, что индексы ветвления морфизма f в точках, лежащих над 1, равны 2 (см. [96, Exercise 4.7]). Таким образом, определение 3.2.2 согласуется с одномерным случаем.

Аналог теоремы Белого для гладких поверхностей общего типа получен Гонзалезом-Диезом (см. [47, Theorem 1, Proposition 1]). Следуя его подходу, Джа-

ванпейкар получил обобщение теоремы Белого на гладкие полные пересечения общего типа в обычных проективных пространствах.

Теорема 3.2.4 (см. [58, Theorem 1.1]). *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гладкое комплексное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3. Тогда многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с не более чем 3 критическими точками.*

В данном разделе доказывается, что доказательство теоремы 3.2.4 может быть обобщено на гладкие полные пересечения общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах. В процессе мы используем известные результаты об инфинитезимальной теореме Торелли для таких многообразий (см. [65, 97]).

Определение 3.2.5. *Обобщённым грассманианом* называется проективное рациональное однородное многообразие с числом Пикара 1.

Замечание 3.2.6. Любой обобщённый грассманиан представим в виде G/P, где G — простая алгебраическая группа, P — её максимальная параболическая подгруппа (например, см. обзор [78, Subsection 2]).

Сформулируем основные результаты данного раздела.

Теорема 3.2.7. *Пусть Y — обобщённый грассманиан, и $X \subset Y$ — гладкое комплексное полное пересечение общего типа с $\dim(X) \geqslant 3$. Многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с не более чем 3 критическими точками.*

Теорема 3.2.8. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное комплексное взвешенное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3. Предположим, что $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$. Многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с не более чем 3 критическими точками.*

Замечание 3.2.9. Мы предполагаем $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$ лишь потому, что это важно для доказательства инфинитезимальной теоремы Торелли (см. [97]). Мы ожидаем, что данное ограничение излишне (см. вопрос 3.2.15).

Замечание 3.2.10. Если полное пересечение $X \subset Y$ можно было (абстрактно) определить над $\overline{\mathbb{Q}}$, то с точностью до линейной эквивалентности его гиперплоское сечение $X' \subset Y$ также возможно определить над $\overline{\mathbb{Q}}$. А именно, если полное пересечение $X \subset Y$ определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ *как подмногообразие*, то и его гиперплоское сечение $X' \subset Y$ — тоже (при условии, что задающие его элементы линейной системы $|\mathcal{O}_Y(1)|$ сами определены над $\overline{\mathbb{Q}}$). Как следствие, многообразие X' (абстрактно) определимо над $\overline{\mathbb{Q}}$.

Заметим, что объемлющее многообразие $Y = Y_0 \otimes \mathbb{C}$ определено над $\overline{\mathbb{Q}}$. Отсюда следует, что если полное пересечение $X \subset Y$ изоморфно замене базы многообразия X_0 над $\overline{\mathbb{Q}}$, то X_0 — полное пересечение в Y_0 той же мультистепени. В самом деле, для таких полных пересечений выполнено $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, т.е., $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{NS}(X)$, откуда $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X_0)$. Рассмотрим очень обильный пучок $\mathcal{O}_Y(m)$ и его ограничение на X. Оно определяет класс в $\mathrm{Pic}(X_0) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ и задаёт вложение $\Phi_0 \colon X_0 \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\overline{\mathbb{Q}}}$ т.ч. $\Phi_0 \otimes \mathbb{C} \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ — композиция вложений $\Theta \colon X = X_0 \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow Y = Y_0 \otimes \mathbb{C}$ и $\Psi \colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$. Так как морфизмы $\Phi_0 \otimes \mathbb{C}$ и Ψ определены над $\overline{\mathbb{Q}}$, то и морфизм Θ может быть определён над $\overline{\mathbb{Q}}$ по слабой версии критерия рациональности Вейля (см. [47, с. 60—61]).

Замечание 3.2.11. Если $X \subset Y$ — полное пересечение Фано с индексом i_X и коиндексом хотя бы 3 (напомним, что все многообразия Фано с коиндексом менее 3 классифицированы), то общее линейное сечение $X' \subset Y$ многообразия $X \subset Y$ коразмерности $(i_X + 1)$ имеет положительную размерность и является полным пересечением общего типа в том же объемлющем пространстве (например, см. предложение 1.1.42 и лемму 1.3.3). Если полное пересечение $X \subset Y$ можно было абстрактно определить над $\overline{\mathbb{Q}}$, то с точностью до рациональной эквивалентности сечение $X' \subset Y$ также возможно определить над $\overline{\mathbb{Q}}$ (см. замечание 3.2.10).

Таким образом, полученный аналог теоремы Белого позволяет строить препятствия к определимости над $\overline{\mathbb{Q}}$ для значительного числа многообразий Фано с числом Пикара 1. Напомним, что определимые над $\overline{\mathbb{Q}}$ многообразия Фано играют важную роль в арифметической геометрии (см. [42]). А именно, линейные сечения $X' \subset Y$ можно рассматривать как точки в $\mathrm{Gr}_{i_X+1}(H^0(X, \mathcal{O}_X(1)))$, и изучать подмножество тех сечений, которые могут быть определены над $\overline{\mathbb{Q}}$.

3.2.1 Теорема Белого для допустимых полных пересечений

В данном подразделе мы доказываем теоремы 3.2.7 и 3.2.8. Для этого мы введём следующий класс многообразий, чьи представители ведут себя как гладкие полные пересечения в обычном проективном пространстве $\mathbb{P}^n$.

Определение 3.2.12. Пусть Y — комплексное пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, определимое над $\mathbb{Q}$ (см. раздел 3.1). Назовём гладкое полное пересечение $X \subseteq Y$ мультистепени $(d_1, \dots, d_c)$ *допустимым*, если

- группа Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождена ограничением $\mathcal{H}|_X$ обильного порождающего $\mathcal{H} \in \mathrm{Cl}(Y)$ при $\dim(X) > 2$ ("теорема Лефшеца о гиперплоском сечении");
- формула присоединения $\omega_X \simeq \omega_Y|_X \otimes \mathcal{H}|_X^{\otimes \sum d_j}$ верна при $\dim(X) > 1$;
- отображение ограничения $H^0(Y, \mathcal{H}^{\otimes k}) \to H^0(X, \mathcal{H}|_X^{\otimes k})$ сюръективно для всех $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и для любого $D \in H^0(X, \mathcal{H}|_X^{\otimes k})$ существует $\widetilde{X} \in H^0(Y, \mathcal{H}^{\otimes k})$ т.ч. $X = \widetilde{X} \cap Y$ — допустимое полное пересечение в Y;
- для любого допустимого полного пересечения $X \subset Y$ и любого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ сопряжённое многообразие X^σ также является допустимым полным пересечением (ср. с леммой 3.1.22);
- любой гладкий дивизор $D \in H^0(X, \mathcal{H}|_X^{\otimes k})$ общего типа в очень обильной линейной системе удовлетворяет *инфинитезимальной теореме Торелли*, т.е., каноническое отображение

$$H^1(X, \mathcal{T}_X) \to \bigoplus_{p+q=\dim(X)} \mathrm{Hom}(H^p(X, \Omega_X^q), H^{p+1}(X, \Omega_X^{q-1}))$$

  инъективно, где $\mathcal{T}_X$ — канонический пучок многообразия X.

Замечание 3.2.13. Существуют гладкие многообразия с очень обильным каноническим классом такие, что инфинитезимальная теорема Торелли для них неверна (см. [43]).

Предложение 3.2.14. *Следующие классы полных пересечений допустимы:*

- *гладкие полные пересечения в обобщённых грассманианах;*

- *гладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения т.ч.* $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$.

Доказательство. Обобщённый грассманиан Y является однородным пространством простой алгебраической группы G по максимальной параболической подгруппе P. Это гладкое многообразие Фано с числом Пикара 1 (см. [78, Subsection 2]). Более того, любая параболическая подгруппа $P \subset Y$ сопряжена стандартной параболической подгруппе (например, см. [72, Proposition 12.2]), поэтому многообразие Y может быть определено над $\mathbb{Q}$. Отметим, что теорема Лефшеца о гиперплоском сечении автоматически выполнена для $X \subseteq Y$. Более того, для любого гладкого полного пересечения $X \subseteq Y$ верна формула присоединения. В самом деле, его нормальное расслоение $(\mathcal{I}_X/\mathcal{I}_X^2)^\vee$ всегда изоморфно расслоению $\oplus_{j=1}^c \mathcal{O}_X(d_j)$, где $(d_1, \ldots, d_c)$ — мультистепень многообразия X, что следует из существования резольвенты Кошуля для пучка идеалов $\mathcal{I}_X$. Более того, отображение ограничения $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(k))$ сюръективно (см. доказательство [65, Lemma 2.2]). Наконец, гладкие полные пересечения общего типа в обобщённых грассманианах удовлетворяют инфинитезимальной теореме Торелли по [65, Theorem 2.6].

Взвешенные проективные пространства $\mathbb{P}(\rho)$ являются пространствами мечты Мори с $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}(\rho)) \simeq \mathbb{Z}$ и определены над $\mathbb{Q}$. Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении и формула присоединения верны для любого гладкого хорошо сформированного взвешенного полного пересечения $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ (см. предложения 1.1.37 и 1.1.38). Отображение ограничения $H^0(\mathbb{P}(\rho), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\rho)}(k)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(k))$ сюръективно (см. лемму 1.1.29). Более того, следствие 1.1.26 утверждает, что взвешенное полное пересечение является гладким и хорошо сформированным тогда и только тогда, когда оно является квази-гладким и не пересекает особый локус многообразия $\mathbb{P}(\rho)$. Следовательно, гладкий дивизор на гладком хорошо сформированном взвешенном полном пересечении X также является гладким хорошо сформированным взвешенным полным пересечением, и любое сопряжённое к нему взвешенное полное пересечение X^σ также является гладким и хорошо сформированным для любого автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ (ср. с леммой 3.1.22). Наконец, любое гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение общего типа $W \subseteq \mathbb{P}(\rho)$ т.ч. $\dim(|\mathcal{O}_W(1)|) \geqslant 2$ удовлетворяет инфинитезимальной теореме Торелли по лемме 1.1.30 и [97, Theorem 2.1].

Отметим, что линейная система $|\mathcal{O}_X(1)|$ является *очень* обильной тогда

и только тогда, когда $\mathbb{P}(\rho) = \mathbb{P}^n$. Следовательно, если $\mathbb{P}(\rho) \neq \mathbb{P}^n$, то гладкий дивизор $D \subset X$, лежащий в очень обильной линейной системе, удовлетворяет $D \notin |\mathcal{O}_X(1)|$, откуда $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) = \dim(|\mathcal{O}_D(1)|)$ (см. лемму 1.1.30). Иными словами, мы можем применить инфинитезимальную теорему Торелли. □

Вопрос 3.2.15. Мы предполагаем $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$ лишь потому, что это важно для доказательства инфинитезимальной теоремы Торелли (см [97] и [70]). Напомним идею доказательства. Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_N)$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение общего типа, заданное регулярной последовательностью $(f_1, \dots, f_c)$ многочленов степени d_j.

Рассмотрим *кольцо Якоби* многообразия X:

$$R = \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N; y_1, \dots, y_c]}{(\partial_{x_0}(F), \dots, \partial_{x_N}(F), \partial_{y_1}(F), \dots, \partial_{y_c}(F))}, \quad F = \sum_{j=1}^{c} y_j f_j.$$

Обозначим через $R_{(i,j)}$ его однородные компоненты относительно би-градуировки $\deg(x_i) = (0,1)$, $\deg(y_j) = (1, -d_j)$. Тогда отображение

$$\Psi\colon H^1(X, \mathcal{T}_X) \to \bigoplus_{p+q=\dim(X)} \operatorname{Hom}(H^p(X, \Omega_X^q), H^{p+1}(X, \Omega_X^{q-1}))$$

может быть представлено следующим образом:

$$H^1(X, \mathcal{T}_X) \simeq R_{(1,0)}, \quad H^p(X, \Omega_X^q) \simeq \operatorname{Hom}(R_{(q,-S)}, \mathbb{C}), \quad S = \sum_{i=0}^{N} a_i - \sum_{j=1}^{c} d_j,$$

$$R_{(1,0)} \xrightarrow{\Psi_q} \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(R_{(q,-S)}, \mathbb{C}), \operatorname{Hom}(R_{(q-1,-S)}, \mathbb{C})) = \operatorname{Hom}(R_{(q-1,-S)}, R_{(q,-S)}).$$

Иными словами, Ψ переводит любой элемент $r \in R_{1,0}$ в отображение умножения на r, и инфинитезимальная теорема Торелли выполнена в точности тогда, когда отображение Ψ невырождено. Усуи доказал данное утверждение при предположении $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$. Излишне ли данное предположение?

Определение 3.2.16. Пусть X — гладкое проективное многообразие.

Расслоение Лефшеца $f\colon Y = \operatorname{Bl}_{\operatorname{Bs}(\mathcal{L})}(X) \to \mathbb{P}^1$ над X — разрешение неопределённостей рационального отображения $\Phi_{\mathcal{L}}\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, заданного пучком Лефшеца $\mathcal{L}$, одним раздутием в базисном множестве пучка. Морфизм f является собственным и плоским (см. [31, Exposé XVII]). Расслоение Лефшеца f называется *жёстким*, если оно является жёстким как плоское семейство над $\mathbb{P}^1$. Равносильно, ограничение $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus \operatorname{Crit}(f)}$ является жёстким гладким семейством (см. [52, Proposition III.9.8]).

Лемма 3.2.17. *Пусть $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ — открытое подмножество в топологии Зарисского, и $h \in \mathbb{Z}[T]$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{X}_{B,h}$ множество классов изоморфизма над $\mathbb{P}^1$ всех расслоений Лефшеца $f\colon Y = \mathrm{Bl}_{\mathrm{Bs}(\mathcal{L})}(X) \to \mathbb{P}^1$ над всеми гладкими проективными многообразиями X т.ч. ограничение $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus \mathrm{Crit}(f)}$ — жёсткое гладкое семейство канонически поляризованным многообразий с многочленом Гильберта h, и морфизм f является гладким над B, т.е., выполнено $B \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Crit}(f)$. Тогда $\mathcal{X}_{B,h}$ конечно.*

Доказательство. Следует из [67, Theorem 2.2]. □

Следствие 3.2.18. *Пусть $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ — открытое подмножество в топологии Зарисского, и $h \in \mathbb{Z}[T]$ — многочлен с целыми коэффициентами. Обозначим через $\mathcal{Y}_{B,h,n}$ множество классов изоморфизма гладких проективных многообразий общего типа $X \subseteq \mathbb{P}^n$, допускающих расслоение Лефшеца $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ над X т.ч. ограничение $f|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus \mathrm{Crit}(f)}$ — жёсткое гладкое семейство канонически поляризованных многообразий с многочленом Гильберта h, и морфизм f является гладким над B, т.е., имеем $B \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Crit}(f)$. Тогда множество $\mathcal{Y}_{B,h,n}$ конечно.*

Доказательство. Следует из леммы 3.2.17 и [58, Theorem 2.2]. □

Лемма 3.2.19. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, и $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ — расслоение Лефшеца над X. Предположим, что слои ограничения $f|_B$ на $B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Crit}(f)$ удовлетворяют инфинитезимальной теореме Торелли.*

Тогда $f|_B$ — жёсткое гладкое семейство (т.е., $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ — жёсткое расслоение Лефшеца).

Доказательство. Дословно следует доказательству [58, Theorem 2.5]. □

Лемма 3.2.20. *Пусть X — гладкое комплексное проективное многообразие, и $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ — расслоение Лефшеца над X. Положим $B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Crit}(f)$. Предположим, что $\mathrm{Crit}(f) \subseteq \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$, и орбита морфизма $f^\sigma\colon Y^\sigma \to \mathbb{P}^1$ при действии группы $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})}(B^\sigma)$ конечна для любого $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Тогда морфизм $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ может быть определён над $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Доказательство. Согласно слабой версии критерия рациональности Вейля, полученной Гонзалезом-Диезом (см. [47, с. 60—61]), наше утверждение эквивалентно следующему: множество сопряжённых морфизмов $\{f^\sigma\colon Y^\sigma \to \mathbb{P}^1\}$ при

действии группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ конечно. В свою очередь, это следует из наших предположений, а также [52, Proposition III.9.8]. □

Теорема 3.2.21 (см. [58, Theorem 4.2]). *Пусть Y — комплексное пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, определённое над $\mathbb{Q}$, и $X \subseteq Y$ — гладкое комплексное допустимое полное пересечение (см. определение 3.2.12) общего типа размерности хотя бы 3. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$.*
2. *Существует пучок Лефшеца $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с $\mathrm{Crit}(f) \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$.*
3. *Существует функция Лефшеца $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с $\mathrm{Crit}(f) \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$.*
4. *Существует функция Лефшеца $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с $|\mathrm{Crit}(f)| \leqslant 3$.*
5. *Существует расслоение Лефшеца $\widetilde{f}\colon Y \to \mathbb{P}^1$ с X т.ч. $\mathrm{Crit}(\widetilde{f}) \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Доказательство. Следствие (1) $\Longrightarrow$ (2) выполнено в силу существования пучка Лефшеца на проективном многообразии над полем $\overline{\mathbb{Q}}$. Следствия (2) $\Longrightarrow$ (3) и (4) $\Longrightarrow$ (5) выполнены по определению. Следствие (3) $\Longrightarrow$ (4) получается применением алгоритма Белого (см. [99]). Докажем следствие (5) $\Longrightarrow$ (1).

Предположим, что существует расслоение Лефшеца $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ над X, чьи критические точки лежат в $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$. Положим $B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Crit}(f)$. По определению пучок Лефшеца содержится в очень обильной линейной системе. Мы предположили, что $X \subset Y$ — допустимое полное пересечение, поэтому ограничение $f|_B$ является гладким семейством канонически поляризованных допустимых полных пересечений в Y. В самом деле, слои $f|_B$ также являются допустимыми полными пересечениями, и нам достаточно применить формулу присоединения. Более того, в силу того же предположения слои семейства $f|_B$ удовлетворяют инфинитезимальной теореме Торелли. Отсюда $f|_B$ — жёсткое семейство по лемме 3.2.19.

Напомним, что действие группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ сохраняет мультистепень полного пересечения в силу леммы 3.1.22. Следовательно, многочлен Гильберта сопряжённого многообразия X^σ не зависит от выбора автоморфизма $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, так как все они деформационно эквивалентны. Тогда мы можем применить следствие 3.2.18 и заключить, что число сопряжённых морфизмов к морфизму f при действии группы $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})}(B^\sigma)$ конечно для любого автоморфизма

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Таким образом, морфизм $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ и многообразие Y могут быть определены над $\overline{\mathbb{Q}}$ по лемме 3.2.20. Наконец, из этого следует, что и само многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ (см. [58, Lemma 3.3]). □

Доказательство теорем 3.2.7 и 3.2.8. Пусть выполнено одно из условий:

- $X \subset Y$ — гладкое комплексное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3 в обобщённом грассманиане Y;
- $X \subset \mathbb{P}(\rho)$ — гладкое хорошо сформированное комплексное взвешенное полное пересечение общего с $\dim(X) \geqslant 3$ и $\dim(|\mathcal{O}_X(1)|) \geqslant 2$.

Из предложения 3.2.14 следует, что X — допустимое полное пересечение (в смысле определения 3.2.12) общего типа. Применим теорему 3.2.21. □

3.2.2 Возможное обобщение доказательства

Как мы видели в предыдущем подразделе, теорема Белого выполнена для гладких (хорошо сформированных) полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах. Более того, теорема Белого доказана для любого *допустимого* гладкого полного пересечения общего типа в комплексном пространстве мечты Мори Y с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, определённого над $\mathbb{Q}$. Естественно задаться вопросом, не обобщается ли данная ситуация на *взвешенные обобщённые грассманианы*.

Определение 3.2.22 (см. [30], [92])**.** Пространство мечты Мори Y с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ называется *взвешенным обобщённым грассманианом*, если его кольцо Кокса $\mathcal{R}(Y)$ допускает однородные порождающие т.ч. идеал соотношений совпадает с идеалом (обобщённых) соотношений Плюккера в кольце Кокса обычного обобщённого грассманиана (также см. определение 3.3.11 и предложение 3.3.14).

Иными словами, взвешенный обобщённый грассманиан — замкнутое подмногообразие во взвешенном проективном пространстве, заданное соотношениями в кольце Кокса обычного обобщённого грассманиана (см. [10, 3.2.3]).

Таким образом, Y — пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, определённое над $\mathbb{Q}$. Взвешенные грассманианы в смысле [30] являются частным случаем взвешенных обобщённых грассманианов. Мы отсылаем читателя к [89, 90, 91] за явными примерами полных пересечений в таких многообразиях.

Взвешенные проективные пространства являются частным случаем взвешенных обобщённых грассманианов, так что мы должны ввести аналогичное понятие хорошо сформированности (см. подраздел 1.1.1).

Определение 3.2.23 (ср. с определением 1.1.23)**.** Пусть $Y \subset \mathbb{P}(\rho)$ — взвешенный обобщённый грассманиан. Он называется *хорошо сформированным*, если $\operatorname{codim}_Y(Y \cap \operatorname{Sing}(\mathbb{P}(\rho))) \geqslant 2$. Замкнутая подсхема $X \subseteq Y$ *хорошо сформирована*, если $Y \subset \mathbb{P}(\rho)$ хорошо сформировано, и $\operatorname{codim}_X(X \cap \operatorname{Sing}(Y)) \geqslant 2$.

Теоремы 3.2.7 и 3.2.8 приводят нас к следующему естественному вопросу.

Вопрос 3.2.24. Являются ли гладкие хорошо сформированные полные пересечения во взвешенных обобщённых грассманианах допустимыми в смысле определения 3.2.12?

Следствие 3.2.25 (см. теорему 3.2.21)**.** *Предположим, что вопрос 3.2.24 имеет положительный ответ. Пусть Y — взвешенный обобщённый грассманиан, и $X \subset Y$ — гладкое хорошо сформированное комплексное полное пересечение общего типа размерности хотя бы 3. Многообразие X может быть определено над $\overline{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда существует функция Лефшеца $X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ с не более чем 3 критическими точками.*

Пример 3.2.26. Пусть $V = \langle e_0, e_1, e_2, e_3\rangle$ и $W = \wedge^2(V) = \langle e_{0,1}, \dots, e_{2,3}\rangle$ — векторные пространства, и (a_0, a_1, a_2, a_3) — набор целых чисел т.ч. $a_i + a_j > a_0$ для любого $0 \leqslant i < j \leqslant 3$. Обозначим через $T_{i,j}$ координаты на W, тогда взвешенное проективное пространство $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,3})$ с весами

$$a_{i,j} = \deg(T_{i,j}) = -a_0 + a_i + a_j > 0$$

содержит гиперповерхность $Y \subset \mathbb{P}$, заданную соотношением Плюккера

$$T_{0,1}T_{2,3} + T_{1,2}T_{0,3} - T_{0,2}T_{1,3} = 0,$$

имеющим (взвешенно-однородную) степень $-a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Предположим, что многообразие Y хорошо сформировано. Тогда из формулы присоединения следует, что

$$\deg(-K_{\mathbb{P}}) = 3(-a_0 + a_1 + a_2 + a_3), \quad \deg(-K_Y) = 2(-a_0 + a_1 + a_2 + a_3).$$

Пусть $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}$ — общая гиперповерхность степени d т.ч. $X = Y \cap \widetilde{X} \subset \mathbb{P}$ — гладкое хорошо сформированное полное пересечение двух гиперповерхностей

мультистепени $(d, -a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$. Мы можем рассмотреть X как гладкую хорошо сформированную гиперповерхность $X \subset Y$ степени d. Тогда выполнено

$$\deg(-K_X) = \deg(-K_{\mathbb{P}}) - (-a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - d = \deg(-K_Y) - d.$$

Если $d > -a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, то X — многообразие общего типа, так что мы можем применить теорему 3.2.8.

3.3 Явное описание взвешенных грассманианов

В данном разделе мы приводим явное описание взвешенных грассманианов: мы описываем возможные $\mathbb{Z}$-градуировки координат Плюккера, дуализирующий пучок, особый локус и ряд Гильберта.

Полные пересечения в проективных пространствах — это стандартные примеры проективных многообразий, чьи геометрические свойства выражаются в терминах комбинаторики. Например, если $X \subset \mathbb{P}^n$ — это гладкое полное пересечение гиперповерхностей степеней $(d_1, \ldots, d_c)$, то его антиканонический пучок $\omega_X^\vee$ изоморфен пучку $\mathcal{O}_X(n + 1 - \sum_{j=1}^c d_j)$. В частности, если выполнено $\sum_{j=1}^c d_j < n + 1$, то X — *многообразие Фано*, т.е., пучок $\omega_X^\vee$ обилен: такие многообразия образуют важнейшую часть классификации проективных многообразий.

Естественно заменить объемлющее пространство полного пересечения другим (возможно, особым) многообразием Фано со схожими геометрическими свойствами, и рассмотреть полные пересечения в нём. Двумя основными источниками таких объемлющих многообразий являются *взвешенные проективные пространства* и *обобщённые грассманианы*. Мы отсылаем читателя к разделу 1.1 за предварительными сведениями о взвешенных проективных пространствах, и к [78, Section 2] за кратким обзором рациональных однородных пространств. Гладкие многообразия Фано естественно появляются таким образом, данная идея восходит ещё к известной работе Мукаи (см. [19, 77]).

Геометрические свойства таких полных пересечения выражаются в терминах комбинаторики. А именно, в случае полных пересечений во взвешенных проективных пространствах мы имеем дело с комбинаторикой весов и степеней (например, см. [25, 83, 85, 101]). Геометрические же свойства полного пересечения в обобщённом грассманиане зависят от теории представлений соответствующей простой линейной алгебраической группы (например, см. [64, 65, 66]).

Естественно задаться вопросом, пересекаются ли данные подходы, т.е., можем ли мы ввести веса в конструкцию обобщённого грассманиана (с точки зрения теории представлений). Работа в этом направлении была начата в [30], и продолжена в серии статей [89, 90, 91]. Опишем основную идею данного подхода.

Пусть G — редуктивная линейная алгебраическая группа, и $P \subset G$ — максимальная параболическая подгруппа. Обозначим через $Y = G/P$ соответствующий обобщённый грассманиан. Он допускает минимальное G-эквивариантное вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}$, где $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ — соответствующее фундаментальное представление. Его аффинный конус $\widehat{Y} \subset \mathbb{A}(W)$ допускает естественное действие как группы G, так и группы $Z(\mathrm{GL}(W)) \simeq \mathbb{G}_m$, где $\mathbb{A}(W)$ — ассоциированное аффинное пространство с W. Пусть $\mu^\vee$ — (мультипликативный) ковес для G, и

$$\tau_W^\vee\colon \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{GL}(W), \quad \tau_W^\vee(c) = c \cdot \mathrm{Id}_W \in \mathrm{GL}(W)$$

— центральный ковес. Тогда ковес $\gamma^\vee = \psi(\mu^\vee) + m \cdot \tau_W^\vee$ задаёт $\mathbb{Z}_+$-градуировку на векторном пространстве W при $m \gg 0$ (заметим, что данная поправка необходима в случае, когда группа G — простая). Соответствующий GIT-фактор $\widehat{Y}//\mathbb{G}_m$ относительно ковеса $\gamma^\vee$ обычно называется *взвешенным обобщённым грассманианом* (см. [91, Sections 2–3]).

В частности, если $\mu^\vee = 0$, то мы получаем обычные обобщённые грассманианы. Другим примером является взвешенное проективное пространство: оно строится по стандартному представлению группы $G = \mathrm{GL}(V)$. Заметим, что мы не можем заменить $\mathrm{GL}(V)$ на действие группы $\mathrm{SL}(V) \times \mathbb{G}_m$: таким образом мы получим лишь взвешенные проективные пространства $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$ т.ч. $\sum_{i=0}^n a_i$ делится на $\dim(V) = n+1$. В [6, 12, 30] взвешенные грассманианы определялись в терминах ковесов группы $\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{G}_m$ (см. замечание 3.3.2).

В данном разделе мы предлагаем явную конструкцию взвешенных обобщённых грассманианов. А именно, для данного фундаментального представления $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ любой простой алгебраической группы G мы даём явный способ описания решётки ковесов группы $G(\psi) = \psi(G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$ и вычисления её целочисленного базиса. Отметим, что данный подход требует довольно громоздких вычислений для каждого фундаментального представления в отдельности (см. пример 3.3.22). В данном разделе мы также приводим явное описание $\mathbb{Z}_+$-градуировок для *взвешенных грассманианов* (т.е., для серии A). Оно совпадает с естественным описанием $\mathbb{Z}_+$-градуировки взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$, но в общем случае имеются некоторые отличия.

А именно, в случае взвешенного проективного пространства имеется очевидное перестановочное действие на его $\mathbb{Z}$-градуировке, сохраняющее многообразие с точностью до изоморфизма. Можно проверить, что это действие отождествляется с действием группы Вейля $\mathcal{W} \simeq S_{n+1}$. Для произвольного взвешенного обобщённого грассманиана мы также имеем действие группы Вейля на $\mathbb{Z}$-градуировке, и оно также сохраняет многообразие с точностью до изоморфизма (см. подраздел 3.3.1). Мы показываем, что для произвольного взвешенного грассманиана соответствующее целочисленное представление группы $\mathcal{W}$ не является перестановочным, так что не существует "канонического" описания $\mathbb{Z}$-градуировок. Однако, мы предъявляем "достаточно хороший" целочисленный базис для решётки ковесов группы $G(\psi) = \psi(G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$.

Легко видеть, что решётка ковесов группы $G(\psi) = \psi(G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$ содержит все возможные ковеса группы $\mathrm{GL}(W)$, действующие на аффинном конусе $\widehat{Y}$ грассманиана Y. В самом деле, напомним, что $\mathrm{Aut}^0(Y) \simeq \mathrm{PGL}(V)$ (например, см. [32]). Обозначим через $T_{G(\psi)} = \psi(T_G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$ максимальный тор группы $G(\psi)$. Заметим, что мы имеем $\psi(Z(G)) = \psi(G) \cap Z(\mathrm{GL}(W))$ в силу леммы Шура. Тогда мы можем отождествить тор $T_{G(\psi)}/Z(\mathrm{GL}(W)) \simeq T_G/Z(G)$ с максимальным тором группы $\mathrm{PGL}(V) \simeq \mathrm{Aut}^0(Y)$.

Сформулируем основные результаты данного раздела.

Теорема 3.3.1 (см. следствие 3.3.36)**.** *Пусть $\widehat{Y}//\mathbb{G}_m$ — взвешенный грассманиан. Тогда существует набор $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ т.ч. данное многообразие изоморфно подмногообразию вида $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \ldots, a_n) \subset w\mathbb{P}$, где мы задаём многообразия Y и $w\mathbb{P}$ следующим образом.*

Пусть $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ — фундаментальное представление группы $G = \mathrm{SL}(V)$. Выберем плюккеровы координаты на V и W:

$$\mathrm{Sym}(V^\vee) \simeq \Bbbk[T_0, \ldots, T_n], \quad \mathrm{Sym}(W^\vee) \simeq \Bbbk[\{T_{i_1<\cdots<i_k}\}].$$

Определим $w\mathbb{P}$ как взвешенное проективное пространство, заданное следующей $\mathbb{Z}_+$-градуировкой на векторном пространстве W:

$$\deg(T_{i_1<\cdots<i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > 0,$$

а подмногообразие $Y \subset w\mathbb{P}$ зададим обычными соотношениями Плюккера.

Замечание 3.3.2. В [6, 12, 30] взвешенные грассманианы определялись через действие группы $\mathrm{GL}(V) \times \mathbb{G}_m$. Параметризация $\mathbb{Z}$-градуировок имеет вид

$$w_0, \dots, w_n, u \in \mathbb{Z}, \quad \deg(T_{i_1<\dots<i_k}) = \sum_{j=1}^{k} w_{i_j} + u.$$

С одной стороны, данный подход по существу эквивалентен нашему:

$$a_i = \left(\sum_{l=0}^{k-2} w_l\right) + u + w_i, \quad \deg(T_{i_1<\dots<i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} = \sum_{j=1}^{k} w_{i_j} + u.$$

Заметим также, что мы можем получить любой вектор вида $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте, положив $w_i = 1$, $w_j = u = 0$, если $i > k-2$, и положив $w_i = 1$, $u = -1$, $w_j = 0$ иначе. С другой стороны, данная параметризация не является эффективной: любой выбор параметров $(w_0, \dots, w_n; u)$ определён лишь с точностью до прибавления

$$(w_0, \dots, w_n; u) = \left(-\frac{1}{k}, \dots, -\frac{1}{k}, 1\right).$$

Таким образом, для исключения параметра $u \in \mathbb{Z}$ нам приходится разрешать параметрам w_i быть рациональными, что приводит к комбинаторным трудностям (данный эффект был впервые замечен в [30]).

Помимо этого, наш подход может быть непосредственно перенесён на другие обобщённые грассманианы (см. обсуждение ниже), в то время как описанный подход специфичен для серии A. Обобщение нашего подхода может иметь приложения к классификации трёхмерных многообразий $\mathbb{Q}$-Фано (см. [22]): дополнительные $\mathbb{Z}$-градуировки могут быть использованы для построения новых примеров семейств трёхмерных многообразий $\mathbb{Q}$-Фано.

Более того, мы явно описываем дуализирующий пучок и ряд Гильберта взвешенного грассманиана в терминах введённой параметризации $\mathbb{Z}$-градуировок. Мы также следуем обозначениям теоремы 3.3.1.

Теорема 3.3.3 (см. предложение 3.3.52)**.** *Пусть* $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n) \subset w\mathbb{P}$ — *хорошо сформированный взвешенный грассманиан. Дуализирующие пучки для*

многообразий Y и $w\mathbb{P}$ изоморфны пучкам

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y\left(-k\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + (n+1)\left(\sum_{i=0}^{k-2} a_i\right)\right),$$
$$\omega_{w\mathbb{P}} \simeq \mathcal{O}_{w\mathbb{P}}\left(-\binom{n}{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + \binom{n+1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-2} a_i\right)\right).$$

Замечание 3.3.4. Кажется, что теорема 3.3.3 и предшествующее ей обсуждение противоречат друг другу. С одной стороны, действие группы Вейля $\mathcal{W} \simeq S_{n+1}$ должно сохранять взвешенный грассманиан с точностью до изоморфизма. С другой стороны, формулы из теоремы 3.3.3 очевидно асимметричны: у нас есть "выделенные" параметры $(a_0, \ldots, a_{k-2})$ среди всех параметров $(a_0, \ldots, a_n)$. Как мы уже упоминали, в общем случае решётка ковесов как целочисленное представление группы Вейля не допускает перестановочного базиса. В частности, целочисленный базис из теоремы 3.3.1 — не перестановочный. Заметим, что перестановки параметров $(a_0, \ldots, a_n)$, сохраняющие разбиение множества $\{0, \ldots, n\}$ в подмножество $\{0, \ldots, k-2\}$ и его дополнение, сохраняют формулы из теоремы 3.3.3. Для произвольной же перестановки её действие на параметрах $(a_0, \ldots, a_n)$ неочевидно, но может быть явно вычислено (см. замечание 3.3.39).

Пример 3.3.5. В обозначениях замечания 3.3.2 теорема 3.3.3 утверждает, что

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y\left(-k\left(\sum_{i=0}^{n} w_i\right) - (n+1)u\right).$$

Таким образом, данная формула обобщает аналогичные формулы в [30, 91].

Теорема 3.3.6 (см. предложение 3.3.57)**.** *Пусть $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \ldots, a_n)$ — взвешенный грассманиан. Его ряд Гильберта (см. определение 3.3.29) имеет вид $\mathcal{H}(Y) = \mathcal{P}(Y)/\mathcal{Q}(Y)$, где*

$$\mathcal{P}(Y) = \sum_{I=(i_1<\cdots<i_k)} \frac{F(I)}{1-t^{a(I)}}, \quad \mathcal{Q}(Y) = \prod_{\substack{i,j=0,\ldots,n \\ i<j}} (1-t^{a_j-a_i});$$
$$a(I) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > 0, \quad F(I) = \left(\sum_{\sigma\in S_I} (-1)^\sigma t^{f(\sigma)}\right);$$
$$S_I = \{\sigma \in S_{n+1} : \sigma(\{0, \ldots, k-1\}) = I\}, \quad f(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (i - \sigma^{-1}(i))a_i.$$

Наш подход в основном касается комбинаторики неприводимых систем корней, так что мы ожидаем, что полученные результаты обобщаются на другие взвешенные обобщённые грассманианы (см. пример 3.3.22 и вопрос 3.3.50). Заметим, что случай серии B должен быть достаточно простым, т.к. группа SO_{2n+1} — присоединённого типа (см. пример 3.3.19).

3.3.1 Взвешенные обобщённые грассманианы

В данном подразделе мы излагаем конструкцию взвешенного обобщённого грассманиана, а также способ явного описания его $\mathbb{Z}$-градуировок.

3.3.1.1 Обозначения

Начнём с введения следующих обозначений. Мы отсылаем читателя к [53, 72] за различными сведениями о теории представлений.

Обозначение 3.3.7. Пусть G — простая линейная алгебраическая группа. Мы фиксируем максимальный тор $T_G \subset G$. Обозначим через $X(T_G)$ и $Y(T_G)$ решётки весов и ковесов группы T_G, соответственно. Мы также обозначим через $\Phi \subset X(T_G)$ и $\Phi^\vee \subset Y(T_G)$ систему корней группы G, а также двойственную систему корней к ней.

Мы выбираем базис $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Phi$ системы корней Φ, и обозначаем через $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \Phi^\vee$ соответствующие простые кокорни.

Определение 3.3.8. Пусть $P \subset G$ — максимальная параболическая подгруппа. Однородное пространство $Y = G/P$ называется *обобщённым грассманианом*.

Замечание 3.3.9. Многообразие Y допускает минимальное G-эквивариантное вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}$, где $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ — фундаментальное представление группы G, соответствующее максимальной параболической подгруппе P.

Обозначение 3.3.10. Для фундаментального представления $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ выберем максимальный тор $T_W \subset \mathrm{GL}(W)$. Обозначим через $G(\psi)$ произведение $\psi(G) \cdot \mathbb{G}_m$ в $\mathrm{GL}(W)$, где $\mathbb{G}_m = Z(\mathrm{GL}(W))$. Заметим, что $G(\psi)$ снабжено максимальным тором $T_{G(\psi)} = \psi(T_G) \cdot \mathbb{G}_m \subset T_W$. Обозначим через $X(G(\psi))$ и $Y(G(\psi))$ решётки весов и ковесов группы $G(\psi)$. Наконец, обозначим через $Y_+(G(\psi)) \subset Y(G(\psi))$ подполугруппу, состоящую из ковесов, задающих $\mathbb{Z}_+$-градуировку на пространстве W.

3.3.1.2 Конструкция

Определение 3.3.11 (ср. [30, 91])**.** Пусть $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ — фундаментальное представление. Тогда группа $G(\psi) = \psi(G) \cdot \mathbb{G}_m$ действует на аффинном конусе $\widehat{Y} \subset \mathbb{A}(W)$ обобщённого грассманиана, где $\mathbb{A}(W)$ — ассоциированное аффинное пространство с W. *Взвешенным обобщённым грассманианом* называется GIT-фактор $\widehat{Y}//\mathbb{G}_m$ относительно ковеса $\gamma^\vee \in Y_+(G(\psi))$, задающего $\mathbb{Z}_+$-градуировку на пространстве W.

Пример 3.3.12. Пусть $G = \mathrm{SL}(V)$, и $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — стандартное представление, так что $G(\psi) = \mathrm{GL}(V)$. После выбора базиса на V мы можем отождествить ковеса в $Y_+(G(\psi))$ с положительными целочисленными векторами $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Иными словами, мы получаем взвешенные проективные пространства $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$ для любой возможной $\mathbb{Z}_+$-градуировки.

Замечание 3.3.13. По конструкции любой взвешенный обобщённый грассманиан $Y \subset w\mathbb{P}$ снабжается вложением во взвешенное проективное пространство, и задаётся в нём теми же (обобщёнными) соотношениями Плюккера. Заметим также, что существует естественный конечный морфизм $\mathbb{P} \twoheadrightarrow w\mathbb{P}$, представляющий многообразие $w\mathbb{P}$ как фактор проективного пространства $\mathbb{P}$ по действию конечной абелевой группы на $\mathbb{P}$ умножением координат на корни из единицы. Это позволяет реализовать многообразие Y как фактор обобщённого грассманиана $G/P \hookrightarrow \mathbb{P}$ по той же конечной абелевой группе.

В частности, отсюда следует, что многообразие Y покрывается аффинными картами, полученными из $\mathbb{A}^{\dim(Y)}$ факторизацией по конечной циклической группе, т.е., образами больших клеток Шуберта в многообразии G/P.

Предложение 3.3.14. *Взвешенный обобщённый грассманиан Y — пространство мечты Мори с $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ (см. подраздел 3.1.1).*

Доказательство. По построению $Y \simeq \mathrm{Proj}(R)$, где R — однородное координатное кольцо обобщённого грассманиана $\widetilde{Y}$ (снабжённое соответствующей $\mathbb{Z}_+$-градуировкой). Хорошо известно, что многообразие $\widetilde{Y}$ — пространство мечты Мори с кольцом Кокса R (со стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой). Также и наоборот, для данного т.н. *кольца со связкой* R (неформально говоря, градуированного кольца с дополнительными комбинаторными данными) можно восстановить пространство мечты Мори с кольцом Кокса R (см. [10, 3.2]). Многообразие $\widetilde{Y}$

можно явно построить таким образом (см. [10, 3.2.3]). Следуя изложению в [10, 3.2.3], можно проверить, что для нестандартной $\mathbb{Z}_+$-градуировки кольцо R всё ещё является кольцом со связкой. Тогда многообразие Y является пространством мечты Мори с кольцом Кокса R и $\mathrm{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$ по [10, Theorem 3.2.14]. □

3.3.1.3 Вычисление решётки $Y(G(\psi))$

Замечание 3.3.15. В наших обозначениях мы имеем естественные включения решёток ковесов $Y(G) \hookrightarrow Y(G(\psi)) \hookrightarrow Y(\mathrm{GL}(W))$ и точную последовательность

$$0 \to Y(G) \to Y(G(\psi)) \xrightarrow{\det} \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \to \mathbb{Z}/\dim(W)\mathbb{Z} \to 0.$$

Как следствие, *рациональная* решётка ковесов $Y(G(\psi))_{\mathbb{Q}} = Y(G(\psi)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ допускает расщепление $Y(G(\psi))_{\mathbb{Q}} \simeq Y(G)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}$, которое задаётся рациональным ковесом $\dim(W)^{-1} \cdot \tau_W^\vee$.

Определение 3.3.16. Положим $\Omega = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Phi^\vee, \mathbb{Z})$. Имеют место включения $\mathbb{Z}\Phi \subset X(G) \subset \Omega$, где $X(G) \simeq \mathrm{Hom}(Y(G), \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\Phi^\vee, \mathbb{Z}) = \Omega$. *Фундаментальная группа* для G определяется как $\Lambda(G) = \Omega/X(G)$.

Если $X(G) = \Omega$, то группа G называется *односвязной*, и если $X(G) = \mathbb{Z}\Phi$, то группа G — *присоединённого типа*.

Определение 3.3.17. В обозначениях выше целочисленные веса $\omega_i \in X(G)$ т.ч. $\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ для всех i, j называются *фундаментальными весами* группы G. Аналогично, *рациональные* ковеса $\omega_j^\vee \in Y(G)_{\mathbb{Q}}$ т.ч. $\langle \alpha_i, \omega_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ называются *фундаментальными ковесами* группы G. Заметим, что последние являются целочисленными тогда и только тогда, когда группа G — присоединённого типа.

Замечание 3.3.18. Заметим, что рациональная решётка ковесов $Y(G(\psi))_{\mathbb{Q}}$ из замечания 3.3.15 порождается фундаментальными ковесами $\{\omega_i^\vee\}$ и ковесом $\dim(W)^{-1} \cdot \tau_W^\vee$. Более точно, целочисленная решётка ковесов $Y(G(\psi))$ допускает естественное вложение в целочисленную решётку

$$L(\psi) = \mathbb{Z}\langle \{\omega_1^\vee, \ldots, \omega_n^\vee, \dim(W)^{-1} \cdot \tau_W^\vee\} \rangle \subset Y(\mathrm{GL}(W))_{\mathbb{Q}}.$$

Другими словами, мы можем вычислить нашу решётку ковесов $Y(G(\psi))$ как пересечение двух решёток $L(\psi) \cap Y(\mathrm{GL}(W))$ внутри $Y(\mathrm{GL}(W))_{\mathbb{Q}}$.

Пример 3.3.19. Группа $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ — присоединённого типа, отсюда мы получаем $Y(G(\psi)) \simeq Y(G) \times \mathrm{End}(\mathbb{G}_m)$.

Замечание 3.3.20. Матрица Картана C для системы корней Φ (относительно базиса Δ) даёт замену координат от фундаментальных весов $\{\omega_i\}$ к простым корням $\{\alpha_i\}$. Отсюда обратно-транспонированная матрица Картана C^{-T} даёт замену координат от простых кокорней $\{\alpha_i^\vee\}$ к фундаментальным ковесам $\{\omega_i^\vee\}$.

Вычисление 3.3.21. *Замечания 3.3.18 и 3.3.20 дают нам естественный способ явно вычислять решётку ковесов $Y(G(\psi))$. Отождествим решётку ковесов $Y(\mathrm{GL}(W))$ со стандартной решёткой $\mathbb{Z}^m$. Напомним, что образы простых корней $\psi(\alpha_i^\vee) \in Y(\mathrm{GL}(W))$ хорошо описаны (например, см. [20, VIII.13]). Тогда мы можем вычислить $Y(G(\psi))$ как пересечение $L(\psi) \cap \mathbb{Z}^m$ внутри $\mathbb{Q}^m$. Заметим, что данное вычисление зависит лишь от системы корней Φ. Более точно, на практике нас интересуют лишь максимальные торы линейных групп G и $G(\psi)$, так что для явных вычислений мы можем работать с подалгеброй Картана $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(G)$ в соответствующей алгебре Ли.*

Пример 3.3.22. Хоть вычисление 3.3.21 и позволяет нам свести задачу описания возможных $\mathbb{Z}$-градуировок к явным вычислениям, нам всё ещё нужно явно построить целочисленный базис решётки $L(\psi) \cap \mathbb{Z}^m$. В каждом конкретном случае мы можем применить алгоритм Зассенхауса (см. [40, с. 207—210]), но это приводит к довольно громоздким вычислениям даже в простых ситуациях. Например, пусть $G = \mathrm{SO}(10)$, и $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — стандартное представление. Соответствующий обобщённый грассманиан $\widetilde{Y}$ задаётся уравнением

$$Q = X_0X_5 + X_1X_6 + X_2X_7 + X_3X_8 + X_4X_9 = 0.$$

Применяя вычисление 3.3.21, можно проверить, что решётка ковесов $Y(G(\psi))$ порождена следующими элементами (записанными в стандартном базисе):

$$\omega_1^\vee = (1,0,0,0,0,-1,0,0,0,0), \quad \omega_2^\vee - \omega_1^\vee = (0,1,0,0,0,0,-1,0,0,0),$$
$$\omega_3^\vee - \omega_2^\vee = (0,0,1,0,0,0,0,-1,0,0), \quad \omega_4^\vee + \omega_5^\vee - \omega_3^\vee = (0,0,0,1,0,0,0,0,-1,0),$$
$$\omega_5^\vee - \omega_4^\vee = (0,0,0,0,1,0,0,0,0,-1), \quad \frac{1}{2}\tau_V^\vee - \omega_5^\vee = (0,0,0,0,0,1,1,1,1,1),$$

где $\langle \alpha_i, \omega_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$. Иными словами, все $\mathbb{Z}$-градуировки имеют вид

$$\deg(X_i) = a_i, \quad \deg(X_{5+i}) = -a_i + a_5, \quad i = 0, \ldots, 4; \quad \deg(Q) = a_5.$$

Заметим, что если a_5 нечётно, то такая $\mathbb{Z}$-градуировка не может возникнуть как целочисленный ковес группы $G \times \mathbb{G}_m$.

Существуют и другие способы вычисления целочисленного базиса решётки ковесов $Y(G(\psi))$, по крайней мере, в случае, когда простая группа G не является исключительной (см. предложение 3.3.35 и вопрос 3.3.50).

3.3.1.4 Канонический целочисленный базис решётки $Y(G(\psi))$, а также его отсутствие

Мы также хотим получить "канонический" целочисленный базис для решётки ковесов $Y(G(\psi))$. Из обсуждения выше легко видеть, что решётка $Y(G(\psi))$ снабжена действием группы Вейля $\mathcal{W}$ системы корней Φ. Возможно проверить (см. доказательство [30, Lemma 3.3]), что данное действие сохраняет взвешенный обобщённый грассманиан с точностью до изоморфизма. Иными словами, в конструкции взвешенного обобщённого грассманиана мы всегда можем заменить ковес $\gamma^\vee$ ковесом вида $w \cdot \gamma^\vee$ для любого $w \in \mathcal{W}$.

В подразделе 3.3.2 мы увидим, что в случае примера 3.3.12 (т.е., для взвешенных проективных пространств) данное действие отождествляется с естественным перестановочным действием на $\mathbb{Z}$-градуировке взвешенного проективного пространства. Было бы естественно рассмотреть решётку $Y(G(\psi))$ как целочисленное представление группы Вейля и попытаться найти его перестановочный базис. К сожалению, в общем случае для взвешенных грассманианов такого базиса нет, см. замечание 3.3.39. Отметим, для серии B соответствующее целочисленное представление группы Вейля устроено достаточно просто (см. пример 3.3.19). В общем случае мы можем пытаться найти "достаточно хороший" целочисленный базис, что и проделано в подразделе 3.3.2 для взвешенных грассманианов. Было бы интересно завершить это описание для других неприводимых систем корней.

3.3.1.5 Хорошо сформированность

Аналогично случаю взвешенных проективных пространств, часто приходится ограничиваться *хорошо сформированными* взвешенными грассманианами (см. связанные определения и различные патологические примеры в разделе 1.1).

Определение 3.3.23. Взвешенный обобщённый грассманиан $Y \subset w\mathbb{P}$ называется *хорошо сформированным*, если $w\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, и $\operatorname{codim}_Y(Y \cap \operatorname{Sing}(w\mathbb{P})) \geqslant 2$.

Замечание 3.3.24. Ожидается (см. [30, Problem 3.4]), что многообразие $Y \subset w\mathbb{P}$ хорошо сформировано тогда и только тогда, когда $w\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство.

Лемма 3.3.25. *Если $Y \subset w\mathbb{P}$ — хорошо сформированный взвешенный обобщённый грассманиан, то имеем* $\mathrm{Sing}(Y) = Y \cap \mathrm{Sing}(w\mathbb{P})$.

Доказательство. Мы можем повторить доказательство [33, Proposition 8] в силу [109, Remark 2.5]. Заметим, что подмногообразие $Y \subset w\mathbb{P}$ всегда квазигладко, т.к. обычный обобщённый грассманиан является гладким. □

3.3.1.6 Скручивающий пучок Серра и ряд Гильберта

Определение 3.3.26 (см. [93, Definition 2.1])**.** Пусть $Y \subset w\mathbb{P}$ — взвешенный обобщённый грассманиан (не обязательно хорошо сформированный). Обозначим соответствующие координатные кольца через $\mathcal{R}(w\mathbb{P})$ и $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(w\mathbb{P})/I(Y)$, где $I(Y)$ — идеал (обобщённых) соотношений Плюккера. Определим $\mathcal{O}_Y(k)$ как когерентный пучок на многообразии Y, ассоциированный с градуированным $\mathcal{R}(Y)$-модулем $R(k)$, чья однородная компонента степени i равна $R(k)_i = \mathcal{R}(Y)_{k+i}$.

Лемма 3.3.27 (см. [93, Proposition 2.3(1)])**.** *Пусть $Y \subset w\mathbb{P}$ — взвешенный обобщённый грассманиан. Тогда $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k)) \simeq \mathcal{R}(Y)_k$ для всех $k \geqslant 0$.*

Замечание 3.3.28. Если взвешенный обобщённый грассманиан $Y \subset w\mathbb{P}$ не является хорошо сформированным, то пучок $\mathcal{O}_Y(k)$ может вести себя неочевидным образом (ср. [93, Remark 2.5]).

Определение 3.3.29. Пусть $Y \subset w\mathbb{P}$ — взвешенный обобщённый грассманиан (не обязательно хорошо сформированный). Определим его *ряд Гильберта* как формальный ряд $\mathcal{H}(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$, где $d_k = \dim(H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k))) = \dim(\mathcal{R}(Y)_k)$ выполнено в силу леммы 3.3.27.

Лемма 3.3.30. *Пусть $Y \subset w\mathbb{P}$ — хорошо сформированный взвешенный обобщённый грассманиан. Положим $Y^\circ = Y \setminus \mathrm{Sing}(w\mathbb{P})$, и пусть $i\colon Y \hookrightarrow w\mathbb{P}$ и $j\colon Y^\circ \hookrightarrow Y$ — естественные вложения. Тогда имеют место следующие изоморфизмы пучков на многообразии Y для любого k:*

$$\mathcal{O}_Y(k) \simeq j_* j^* \mathcal{O}_Y(k) \simeq j_* j^* i^* \mathcal{O}_{w\mathbb{P}}(k).$$

Доказательство. Мы можем повторить доказательство [93, Proposition 2.3]. В самом деле, напомним, что грассманиан в своём плюккеровом вложении всегда является *арифметически коэн-маколеевым*, т.е., его аффинный конус является коэн-маколеевым во всех точках, включая вершину (например, см. [68, Theorem 4.6.0.2]). Если мы обозначим через $\mathfrak{m} \subset R$ идеал в однородном координатном кольце R грассманиана, порождённый элементами положительной степени, то условие $\mathrm{depth}_{\mathfrak{m}}(R) \geqslant 2$ в формулировке [93, Proposition 2.3(ii)] становится равносильно условию $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geqslant 2$ (see [23, Proposition 1.5.15, Corollary 2.1.4]). Наконец, доказательство [93, Proposition 2.3(iii)] использует лишь то, что аффинный конус многообразия $Y \subset w\mathbb{P}$, т.е., $\mathrm{Spec}(R)$, является коэн-маколеевым. □

3.3.2 Параметризация $\mathbb{Z}$-градуировок взвешенных грассманианов

3.3.2.1 Результаты и примеры

Пусть $G = \mathrm{SL}(V)$ и $n+1 = \dim(V) = \mathrm{rank}(G)+1$. Далее мы строим целочисленный базис решётки ковесов группы $G(\psi) = \psi(G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$, где $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$ — фундаментальное представление.

Предложение 3.3.31 (см. [20, VIII.13.1])**.** *Любое фундаментальное представление группы* $\mathrm{SL}(V)$ *изоморфно внешней степени стандартного представления* $\mathrm{SL}(V) \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$.

Обозначение 3.3.32. Пусть $\{\omega_i\}$ и $\{\omega_i^\vee\}$ — фундаментальные веса и ковеса группы G, соответственно (см. определение 3.3.17). Для всех $i = 0, \ldots, n$ положим $e_i = -\omega_{i-1} + \omega_i$ и $e_i^\vee = -\omega_{i-1}^\vee + \omega_i^\vee$, где $\omega_0 = \omega_{n+1} = 0$ и $\omega_0^\vee = \omega_{n+1}^\vee = 0$.

Замечание 3.3.33. Выберем координаты $\{T_i : i = 0, \ldots, n\}$ на векторном пространстве V. Тогда мы можем отождествить множество $\{T_i\}$ с орбитой группы Вейля $\mathcal{W} \cdot \omega_1 = \{e_i\}$ фундаментального веса ω_1 (т.е., старшего веса стандартного представления V). Явные вычисления показывают, что $\psi(e_i^\vee) + \dim(V)^{-1} \cdot \tau_V^\vee$ отождествляется с i-м стандартным вектором в V. Так что ковеса вида $\{\psi(e_i^\vee) + \dim(V)^{-1} \cdot \tau_V^\vee\}$ образуют двойственные координаты на $V^\vee$.

Аналогично можно показать, что если $W = \wedge^k(V)$ — представление старшего веса ω_k, то координаты $\{T_i : i = 0, \ldots, n\}$ на V задают координаты $\{T_{i_1 < \cdots < i_k}\}$

на пространстве W, и мы можем отождествить их с орбитой $\mathcal{W} \cdot \omega_k$ группы Вейля (см. лемму 3.3.64).

Используя введённые обозначения, мы можем восстановить $\mathbb{Z}$-градуировку взвешенного проективного пространства.

Пример 3.3.34. Любое взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \operatorname{Proj}(\Bbbk[T_0, \dots, T_n])$ задаётся ковесом вида $\gamma^\vee = \psi(\mu^\vee) + m \cdot \tau_W^\vee$, где

$$\mu^\vee = \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - a_i)\omega_i^\vee, \quad m = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n+1}, \quad \deg(T_i) = \langle e_i, \mu^\vee \rangle + m = a_i.$$

Цель данного подраздела — доказать следующее обобщение примера 3.3.34.

Предложение 3.3.35. *Пусть $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ — фундаментальное представление. Тогда решётка ковесов группы $G(\psi) = \psi(G) \cdot Z(\mathrm{GL}(W))$ допускает целочисленный базис*

$$\gamma_i^\vee = \begin{cases} (k/(n+1) - 1) \cdot \tau_W^\vee + \psi(e_i^\vee) & \text{при } 0 \leqslant i \leqslant k-2; \\ k/(n+1) \cdot \tau_W^\vee + \psi(e_i^\vee) & \text{при } k-1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Мы отложим доказательство предложения 3.3.35 до конца данного параграфа. Вначале обсудим её непосредственные следствия.

Следствие 3.3.36. *Пусть $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ — фундаментальное представление. Мы выбираем базис $V = \langle e_0, \dots, e_n \rangle$ и соответствующие координаты на пространствах V и W:*

$$\operatorname{Sym}(V^\vee) \simeq \Bbbk[T_0, \dots, T_n], \quad \operatorname{Sym}(W^\vee) \simeq \Bbbk[\{T_{i_1 < \dots < i_k}\}],$$

Произвольный ковес $\sum_{i=0}^{n} a_i \gamma_i^\vee$ группы $G(\psi)$ задаёт следующую $\mathbb{Z}$-градуировку на векторном пространстве W:

$$\deg(T_{i_1 < \dots < i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j}.$$

Доказательство. Представим ковес $\sum_{i=0}^{n} a_i \gamma_i^\vee$ из предложения 3.3.35 в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \gamma_i^\vee = \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - a_i)\omega_i^\vee + m \cdot \tau_W^\vee, \quad m = \left(\frac{k}{n+1} \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{k-2} a_i \right).$$

Тогда из замечания 3.3.33 следует, что

$$\deg(T_{i_1<\dots<i_k}) = \left\langle \sum_{j=1}^{k} e_{i_j}, \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - a_i)\omega_i^\vee \right\rangle + m.$$

Применяя лемму 3.3.49 ниже, нетрудно вычислить данное спаривание:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k} e_{i_j}, \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} - a_i)\omega_i^\vee \right\rangle = -\frac{k}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j}.$$

В самом деле, это достаточно проверить для случаев вида

$$(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0). \qquad \square$$

Замечание 3.3.37. Заметим, что $\deg(T_{0,\dots,k-2,l}) = a_l$ для всех $l = k-1, \dots, n$. В частности, при $k = 1$ это означает, что $\deg(T_i) = a_i$ для всех $i = 0, \dots, n$, что согласуется с привычными обозначениями.

Пример 3.3.38. При $k = 2$, $n = 4$, соотношения Плюккера имеют вид

$$T_{0,1}T_{2,3} + T_{1,2}T_{0,3} - T_{0,2}T_{1,3} = 0, \quad T_{0,1}T_{2,4} + T_{1,2}T_{0,4} - T_{0,2}T_{1,4} = 0,$$
$$T_{0,1}T_{3,4} + T_{1,3}T_{0,4} - T_{0,3}T_{1,4} = 0, \quad T_{0,2}T_{3,4} + T_{2,3}T_{0,4} - T_{0,3}T_{2,4} = 0,$$
$$T_{1,2}T_{3,4} + T_{2,3}T_{1,4} - T_{1,3}T_{2,4} = 0.$$

Легко видеть, что данные уравнения — взвешенно-однородные степеней

$$-a_0 + a_1 + a_2 + a_3,\ -a_0 + a_1 + a_2 + a_4,\ -a_0 + a_1 + a_3 + a_4,$$
$$-a_0 + a_2 + a_3 + a_4,\ -2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Замечание 3.3.39. Группа Вейля $\mathcal{W}$ действует на решётке ковесов группы $G(\psi)$ (обратными) перестановками элементов $\psi(e_i^\vee)$, а также оставляет на месте элемент $\tau_W^\vee$. Мы также можем заменить подмножество $\{0, \dots, k-2\}$ любым другим подмножеством в $\{0, \dots, n\}$ того же размера, но это даст нам другой целочисленный базис. Иными словами, если мы реализуем рациональную решётку ковесов $Y(G(\psi))_\mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}\langle \psi(e_0^\vee), \dots, \psi(e_n^\vee), \deg(W)^{-1} \cdot \tau_W^\vee \rangle$ как столбцы матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ \alpha_k & \alpha_k & \alpha_k & \cdots & \beta_k & \beta_k & \beta_k \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha_k = (\frac{k}{n+1} - 1)\binom{n+1}{k}, \\ \beta_k = \frac{k}{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1}, \\ \det(M) = (n-k+2)\beta_k + \\ \quad +(k-1)\alpha_k = \binom{n+1}{k}, \end{cases}$$

то группа $\mathcal{W}$ действует (обратными) перестановками её столбцов, сохраняя при этом последнюю строку. Например, мы переводим вектор $(1, 0, \dots, 0, \alpha_k)$ в $(0, \dots, 0, -1, \alpha_k)$, а не в $(0, \dots, 0, -1, \beta_k)$, т.к. группа $\mathcal{W}$ оставляет на месте центральный ковес $\tau_W^\vee$. Более того, различные выборы подмножества в $\{0, \dots, n\}$ соответствуют перестановкам элементов последней строки.

Нетрудно проверить, что решётка ковесов является перестановочным представлением группы Вейля $\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда $\min(k, n+1-k) = 1$ (см. доказательство следствия 3.3.36).

Вопрос 3.3.40. Другими словами, замечание 3.3.39 означает, что решётка ковесов группы $G(\psi)$ даёт нам нетривиальную $\mathbb{Z}$-форму стандартного перестановочного представления группы $\mathcal{W} \simeq S_{n+1}$. Как такие целочисленные представления явно выглядят для других систем корней?

Замечание 3.3.41. Нетрудно проверить, что для $\widetilde{k} = n + 1 - k$ следующие две матрицы элементарно эквивалентны над $\mathbb{Z}$ по столбцам (см. базис индукции доказательства предложения 3.3.35):

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1 & -1 & 0}^{k-1} & \cdots & \overbrace{0 & 0 & 0}^{\widetilde{k}+1} \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ \alpha_k & \alpha_k & \alpha_k & \cdots & \beta_k & \beta_k & \beta_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overbrace{-1 & 1 & 0}^{\widetilde{k}-1} & \cdots & \overbrace{0 & 0 & 0}^{k+1} \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \beta_{\widetilde{k}} & \beta_{\widetilde{k}} & \beta_{\widetilde{k}} & \cdots & \alpha_{\widetilde{k}} & \alpha_{\widetilde{k}} & \alpha_{\widetilde{k}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что по определению $\alpha_{\widetilde{k}} + \beta_k = \alpha_k + \beta_{\widetilde{k}} = 0$. Отождествим векторные пространства представлений:

$$W = \Lambda^k(V) \xrightarrow{\sim} W^\vee = \Lambda^{n+1-k}(V), \quad T_I \mapsto T_{I^\circ}, \quad I^\circ = \{0, \dots, n\} \setminus I.$$

Рассуждая как в доказательстве следствия 3.3.36, мы видим, что новый целочисленный базис решётки ковесов (для некоторого k) даёт те же $\mathbb{Z}$-градуировки на пространстве $W \simeq W^\vee$, что и изначальный целочисленный базис для "двойственной" решётки ковесов (т.е., для $\widetilde{k} = n + 1 - k$). Другими словами, если мы обозначим через $\mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n)$ и $\mathrm{Gr}^k(a_0, \dots, a_n)$ взвешенные грассманианы, соответствующие данным целочисленным базисам (см. обозначение 3.3.44 ниже), то многообразие $\mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n)$ изоморфно многообразию $\mathrm{Gr}^{\widetilde{k}}(a_0, \dots, a_n)$ вместе со своим вложением во взвешенное проективное пространство.

Напомним, что для определения взвешенного грассманиана мы ограничивались рассмотрением $\mathbb{Z}_+$-градуировок. В наших обозначениях положительность можно описать следующим образом:

Следствие 3.3.42 (см. следствие 3.3.36)**.** *Обозначим через $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ фундаментальное представление группы G. Ковеса группы $G(\psi)$, задающие $\mathbb{Z}_+$-градуировку на векторном пространстве W, отождествляются с элементами следующей полугруппы:*

$$\Gamma(n,k) = \left\{ (a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > \sum_{l=0}^{k-2} a_l \quad \forall I = \{i_1 < \dots < i_k\} \right\}.$$

Как следствие, любой взвешенный грассманиан с точностью до изоморфизма задаётся ковесом $\sum_{i=0}^{n} a_i\gamma_i^\vee$, где $(a_0,\dots,a_n) \in \Gamma(n,k)$, а ковес $\{\gamma_i^\vee\}$ приведён в предложении 3.3.35.

Замечание 3.3.43. Наше описание весов применимо к вычислению обычных и эквивариантных когомологий взвешенных грассманианов, которое было проделано в серии работ [6, 7, 21, 48].

Обозначение 3.3.44. Для любого $(a_0,\dots,a_n) \in \Gamma(n,k)$ мы обозначим через $\mathrm{Gr}_k(a_0,\dots,a_n)$ взвешенный грассманиан, заданный ковесом $\sum_{i=0}^{n} a_i\gamma_i^\vee$.

Замечание 3.3.45. При $k = 1$ мы имеем $\mathrm{Gr}_1(a_0,\dots,a_n) = \mathbb{P}(a_0,\dots,a_n)$, а при $a_0 = \dots = a_n = 1$ мы получаем обычные грассманианы для любого k.

Замечание 3.3.46. Для любых $k > 0$ и $(a_0,\dots,a_m) \in \Gamma(m,k)$ имеют место следующие включения:

$$\dots \subset \mathrm{Gr}_k(a_0,\dots,a_{n-1}) \subset \mathrm{Gr}_k(a_0,\dots,a_n) \subset \mathrm{Gr}_k(a_0,\dots,a_{n+1}) \subset \dots$$

Замечание 3.3.47. Если $k > 1$, то в общем случае некоторые из коэффициентов a_i могут быть *отрицательны*, однако мы всё ещё получим положительную градуировку при условии $(a_0,\dots,a_n) \in \Gamma(n,k)$.

3.3.2.2 Доказательство предложения 3.3.35

Лемма 3.3.48 (см. [80, Table 2])**.** *Пусть A_n — матрица Картана типа A_n. Тогда обратная матрица A_n^{-1} к ней имеет следующий вид:*

$$(A_n^{-1})_{ij} = \min(i,j) - \frac{ij}{n+1}.$$

Лемма 3.3.49. *Пусть $V \simeq \langle e_0, \dots, e_n\rangle$, и $\psi\colon G \hookrightarrow \mathrm{GL}(W)$, $W = \wedge^k(V)$ — фундаментальное представление. При отождествлении $Y(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{Z}\langle e_0, \dots, e_n\rangle$ подрешётка $L(\psi) \subset Y(\mathrm{GL}(W))_{\mathbb{Q}}$ из вычисления 3.3.21 порождается векторами*

$$w_0 = \sum_{i_1<\dots<i_k} \binom{n+1}{k}^{-1} e_{i_1<\dots<i_k},\ w_j = \sum_{i_1<\dots<i_k} \left(-\frac{kj}{n+1} + |\{t : j > i_t\}|\right) e_{i_1<\dots<i_k}.$$

Доказательство. Обратная матрица к (транспонированной) матрице Картана из леммы 3.3.48 задаёт замену координат от простых кокорней к фундаментальным ковесам. Заметим, что при отождествлении $Y(\mathrm{GL}(V)) \simeq \mathbb{Z}\langle e_0, \dots, e_n\rangle$ образы простых кокорней $\{\alpha_i^\vee\}$ для стандартного представления $G \hookrightarrow \mathrm{SL}(V)$ отождествляются с векторами $e_{i-1} - e_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. □

Доказательство предложения 3.3.35. Выберем $k > 0$. Докажем утверждение индукцией по $l = n + 1 - k > 0$. Для этого мы введём следующие обозначения.

Для любого $l > 0$ обозначим через $V_l = \langle e_0, \dots, e_n\rangle$ векторное пространство размерности $(l + k)$ с выбранным базисом. Положим $G_l = \mathrm{SL}(V_l)$, и обозначим через $G_l \hookrightarrow \mathrm{GL}(V_l)$ стандартное представление. Пусть также $\psi_l\colon G_l \hookrightarrow \mathrm{GL}(W_l)$, $W_l = \wedge^k(V_l)$ — соответствующее фундаментальное представление группы G_l. Как и раньше, рассмотрим произведение $G_l(\psi_l) = G_l \cdot \mathbb{G}_m \subset \mathrm{GL}(W_l)$, где $\tau_{W_l}^\vee\colon \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{GL}(W_l)$, $\tau_{W_l}^\vee(c) = c \cdot \mathrm{Id}_{W_l}$ — центральный ковес группы $\mathrm{GL}(W_l)$. Обозначим через $Y(G_l)$, $Y(G_l(\psi_l))$, и $Y(W_l)$ решётки ковесов групп G_l, $G_l(\psi_l)$, и $\mathrm{GL}(W_l)$, соответственно.

Наконец, пусть $M_l \subset Y(G_l(\psi_l))_{\mathbb{Q}} \simeq Y(G_l)_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}\langle \deg(W_l)^{-1} \cdot \tau_{W_l}^\vee\rangle \subset Y(W_l)_{\mathbb{Q}}$ — целочисленная подрешётка, порождённая столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ \alpha_l & \alpha_l & \alpha_l & \cdots & \beta_l & \beta_l & \beta_l \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \alpha_l = (\frac{k}{l+k} - 1)\binom{l+k}{k}, \\ \beta_l = \frac{k}{l+k}\binom{l+k}{k} = \binom{l+k-1}{k-1}, \\ (l+1)\beta_l + (k-1)\alpha_l = \binom{l+k}{k}, \end{cases}$$

относительно базиса $(\omega_1^\vee, \dots, \omega_l^\vee, \deg(W_l)^{-1} \cdot \tau_{W_l}^\vee)$, где α_l повторяется $(k-1)$ раз. Умножение данной матрицы на матрицу из леммы 3.3.49 показывает, что M_l — подгруппа (конечного индекса) в $Y(G_l(\psi_l))$. Обозначим данные порождающие через $g_0^l, \dots, g_n^l$.

Подытоживая, наша цель — доказать, что $M_l = Y(G_l(\psi_l))$, и применить вычисление 3.3.21.

Базис индукции. Если $l = 1$, то лемма 3.3.49 даёт нам невырожденную $(k+1) \times (k+1)$-матрицу, обратная к которой определена над $\mathbb{Z}$ и имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что данная матрица элементарно эквивалентна над $\mathbb{Z}$ по столбцам следующей матрице:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{matrix}}^{k-1} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ & \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ n & n \end{matrix}}^{2} \end{pmatrix}, \quad n+1 = k+l.$$

Для этого мы умножим первые $(k-1)$ столбца на (-1), переставим местами два последних столбца, и вычтем из каждого из них сумму первых $(k-1)$ столбцов. Как следствие, имеем $M_1 = Y(G_1(\psi_1))$, что и требовалось.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение доказано для некоторого $l > 0$. Докажем его для $l+1$.

Для этого рассмотрим включение групп $i_l \colon G_l \hookrightarrow G_{l+1}$ и соответствующее включение ковесов $i_l \colon Y(G_l) \hookrightarrow Y(G_{l+1})$. По построению эти включения продолжаются до включения групп $i_l \colon \mathrm{GL}(W_l) \hookrightarrow \mathrm{GL}(W_{l+1})$ и соответствующего включения ковесов $i_l \colon Y(W_l) \hookrightarrow Y(W_{l+1})$. Заметим, что последнее включение расщепляется, где расщепление задаётся выбором базиса на каждом из пространств V_l, как следствие, и на пространствах W_l. Тогда мы можем корректно определить отображение кограничения $\pi_{l+1} \colon Y(W_{l+1}) \to Y(W_l)$, задающее отображение кограничения $\pi_{l+1} \colon Y(G_{l+1}(\psi_{l+1})) \to Y(G_l(\psi_l))$. Проще говоря, отображение π_{l+1} переводит фундаментальный ковес $\omega_{n+1}^\vee$ в 0, а центральный ковес $\tau_{W_{l+1}}^\vee$ группы $\mathrm{GL}(W_{l+1})$ — в центральный ковес $\tau_{W_l}^\vee$ группы $\mathrm{GL}(W_l)$.

Мы получаем точную последовательность подгрупп в решётке $Y(W_{l+1})$:

$$0 \to \ker(\pi_{l+1}) \cap Y(G_{l+1}(\psi_{l+1})) \to Y(G_{l+1}(\psi_{l+1})) \xrightarrow{\pi_{l+1}} \\ \xrightarrow{\pi_{l+1}} Y(G_l(\psi_l)) \to \operatorname{coker}(\pi_{l+1}) \cap Y(G_l(\psi_l)) \to 0.$$

Легко видеть, что $\pi_{l+1}(g_i^{l+1}) = g_i^l$ для всех $i = 0, \ldots, n$. Следовательно, имеем $\pi_{l+1}(M_{l+1}) = M_l$, а эта решётка совпадает с $Y(G_l(\psi_l))$ по предположению индукции. Отсюда коядро $\operatorname{coker}(\pi_{l+1}) \cap Y(G_l(\psi_l))$ тривиально. Более того, легко проверить, что выполнено равенство

$$(l+1+k) \cdot \omega_{l+1}^\vee = k \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} g_i^{l+1} \right) - (l+1) \cdot g_{n+1}^{l+1} \in M_{l+1} \subset Y(G_{l+1}(\psi_{l+1})).$$

Заметим, что $(l+1+k)/\gcd(l+1,k) \cdot \omega_{l+1}^\vee$ является наименьшим целым кратным для $\omega_{l+1}^\vee$ (см. лемму 3.3.49). Тогда (одномерное) ядро $\ker(\pi_{l+1}) \cap Y(G_{l+1}(\psi_{l+1}))$ порождается элементом $(l+1+k)/\gcd(l+1,k) \cdot \omega_{l+1}^\vee \in M_{l+1}$. Отсюда мы получаем $M_{l+1} = Y(G_{l+1}(\psi_{l+1}))$, что и завершает доказательство. □

Вопрос 3.3.50. Скорее всего, доказательство предложения 3.3.35 может быть обобщено на другие системы корней, для этого достаточно явного описания образов простых корней при выбранном фундаментальном представлении. В самом деле, явное описание обратных к матрицам Картана для любой неприводимой системы корней можно найти в [80, Table 2]. Однако наше доказательство сильно использовало существование "хорошего" базиса для каждой решётки $M_l = Y(G_l(\psi_l))$. Возможно ли найти подобный базис для других систем корней?

3.3.3 Геометрические инварианты взвешенных грассманианов

В данном подразделе мы вычислим степень антиканонического класса взвешенного грассманиана и его ряд Гильберта в терминах нашей параметризации $\mathbb{Z}$-градуировок. Мы продолжим следовать обозначениям, введённым в подразделе 3.3.2. Начнём со следующего критерия хорошо сформированности взвешенного грассманиана.

Лемма 3.3.51. *Пусть* $Y = \operatorname{Gr}_k(a_0, \ldots, a_n) \subset w\mathbb{P}$, *и* $(\deg(T_{i_1<\cdots<i_k}))$ — *значения* $\mathbb{Z}_+$*-градуировки взвешенного проективного пространства* $w\mathbb{P}$, *где*

$$\deg(T_{i_1<\cdots<i_k}) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j}.$$

Многообразие Y *хорошо сформировано тогда и только тогда, когда* $w\mathbb{P}$ — *хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, т.е., после удаления из последовательности любого элемента НОД оставшихся равен 1.*

Доказательство. Пусть $w\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство. Известно (например, см. [55, 5.15]), что для любого хорошо сформированного взвешенного проективного пространства $w\mathbb{P} = \mathbb{P}(b_0, \dots, b_N) = \mathrm{Proj}(R)$ его особый локус — это объединение координатных страт

$$\mathrm{Sing}(w\mathbb{P}) = \bigcup_I \{T'_i = 0 \mid i \notin I\}, \quad R = \Bbbk[T'_0, \dots, T'_N], \quad \deg(T'_i) = b_i.$$

по всем подмножествам I в $\{0, \dots, N\}$ т.ч. $\gcd(\{b_i \mid i \in I\}) > 1$.

Представим многообразие $Y \subset w\mathbb{P}$ как фактор $\widetilde{Y} \to Y$ обычного грассманиана $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}$, заданный факторотображением $\mathbb{P} \to w\mathbb{P}$ (см. замечание 3.3.13). Обозначим через $\{\widetilde{T}_I\}$ и $\{T_I\}$ координаты Плюккера на многообразиях $\mathbb{P}$ и $w\mathbb{P}$, соответственно. В данных обозначениях мы должны потребовать выполнения $\gcd(\{\deg(a_I) \mid I \notin M\}) = 1$ для любого подмножества $M \subset \{I = (i_1, \dots, i_k)\}$ т.ч. уравнения $\{\widetilde{T}_I = 0,\ I \in M\}$ задают дивизор Шуберта на грассманиане $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}$. Но это может произойти лишь тогда и только тогда, когда $|M| = 1$ (например, см. [68, Chapter 4]). Иными словами, мы должны потребовать $\gcd(\{\deg(a_I) \mid I \notin M\}) = 1$ при $|M| = 1$, но это и есть определение хорошо сформированного взвешенного проективного пространства. □

3.3.3.1 Дуализирующий пучок

Предложение 3.3.52. *Пусть $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n) \subset w\mathbb{P}$ — хорошо сформированный взвешенный грассманиан. Дуализирующие пучки для многообразий Y и $w\mathbb{P}$ изоморфны пучкам*

$$\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y\left(-k\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + (n+1)\left(\sum_{i=0}^{k-2} a_i\right)\right),$$
$$\omega_{w\mathbb{P}} \simeq \mathcal{O}_{w\mathbb{P}}\left(-\binom{n}{k-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) + \binom{n+1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-2} a_i\right)\right).$$

Пример 3.3.53. При $k = 2$, $n = 3$, соотношение Плюккера имеет вид

$$T_{0,1}T_{2,3} + T_{1,2}T_{0,3} - T_{0,2}T_{1,3} = 0.$$

Легко видеть, что оно — взвешенно-однородное степени

$$-a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \deg(-K_{w\mathbb{P}}) - \deg(-K_Y).$$

Получаем формулу присоединения для взвешенной гиперповерхности $Y \subset w\mathbb{P}$.

Замечание 3.3.54. Заметим, что при $k = 1$ или $(a_0, \dots, a_n) = (1, \dots, 1)$ мы получаем формулы для взвешенных проективных пространств и грассманианов.

Доказательство предложения 3.3.52. Представим многообразие $Y \subset w\mathbb{P}$ как фактор $\pi\colon \widetilde{Y} \to Y$ обычного грассманиана $\widetilde{Y} \subset \mathbb{P}$, заданный факторотображением $\pi\colon \mathbb{P} \to w\mathbb{P}$ (см. замечание 3.3.13), где конечная абелева группа $\mathcal{G}$ действует на координатах проективного пространства $\mathbb{P}$ умножением на корни из единицы. Обозначим через $\{\widetilde{T}_I\}$ и $\{T_I\}$ координаты Плюккера на $\mathbb{P}$ и $w\mathbb{P}$, соответственно. Заметим, что $\operatorname{Sing}(Y) = Y \cap \operatorname{Sing}(w\mathbb{P})$ в силу леммы 3.3.25

Напомним, что дуализирующий пучок ω_Y удовлетворяет свойству $(S2)$ в силу [63, Corollary 5.69]. Лемма 3.3.30 означает, что мы имеем изоморфизмы пучков $\mathcal{O}_Y(k) \simeq j_*j^*\mathcal{O}_Y(k) \simeq j_*j^*i^*\mathcal{O}_{w\mathbb{P}}(k)$ для всех k, где мы обозначаем через $j\colon Y^\circ \hookrightarrow Y$ и $i\colon Y \hookrightarrow w\mathbb{P}$ естественные вложения. Иными словами, достаточно доказать изоморфизм вдоль гладкой открытой части

$$Y^\circ = Y \setminus \operatorname{Sing}(Y) = Y \setminus \operatorname{Sing}(w\mathbb{P}).$$

Напомним, что вдоль гладкой открытой части дуализирующий пучок изоморфен обычному каноническому пучку (см. [71, Theorem 6.4.32]). Более того, известно, что $\omega_Y = (\pi_*\omega_{\widetilde{Y}})^{\mathcal{G}}$ (например, см. [81]). Иными словами, достаточно явно построить $\mathcal{G}$-инвариантную рациональную дифференциальную форму на открытом множестве $\widetilde{Y}^\circ = \pi^{-1}(Y^\circ)$.

Заметим, что торы $T_{G(\psi)}/\operatorname{im}(\tau_W^\vee)$ и $T_{G(\psi)}/\operatorname{im}(\gamma^\vee)$ действуют на $\widetilde{Y}$ и Y, соответственно. Более того, выполнено $Y = \widehat{Y}/\!/\operatorname{im}(\gamma^\vee) \simeq \widetilde{Y}/\mathcal{G}$, где $\gamma^\vee$ действует на $\widetilde{Y}$ через $T_{G(\psi)}/\operatorname{im}(\tau_W^\vee)$. Напомним, что $\widetilde{Y}$ допускает $T_{G(\psi)}$-инвариантную рациональную дифференциальную форму с дивизором на $\widetilde{Y}$ вида

$$-\sum_{\sigma\in\langle(0,\dots,n)\rangle} \widetilde{D}_{\sigma(\{0,\dots,k-1\})}, \quad \widetilde{D}_I = \{\widetilde{T}_I = 0\} \cap \widetilde{Y} \subset \widetilde{Y}, \quad \langle(0,\dots,n)\rangle \simeq \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}.$$

Данная рациональная дифференциальная форма корректно определяет рациональную дифференциальную форму на Y°. Обозначим через K_Y соответствующий дивизор на многообразии Y.

Осталось вычислить степени дивизоров, пользуясь предложением 3.3.35:

$$\deg(-K_Y) = \sum_{\sigma\in\langle(0,\dots,n)\rangle} \deg(T_{\sigma(\{0,\dots,k-1\})}), \quad \deg(-K_{w\mathbb{P}}) = \sum_{I=\langle i_1,\dots,i_k\rangle} \deg(T_I). \quad \square$$

3.3.3.2 Ряд Гильберта

Любому взвешенному обобщённому грассманиану $Y \subset w\mathbb{P}$ мы можем сопоставить его *ряд Гильберта* (см. определение 3.3.29). Мы можем явно вычислить ряд Гильберта для любого взвешенного обобщённого грассманиана $Y \subset w\mathbb{P}$ с помощью следующей версии формулы Вейля для характеров.

Предложение 3.3.55 (см. [91, Theorem 3.2]). *Пусть $Y \subset w\mathbb{P}$ — взвешенный обобщённый грассманиан, заданный фундаментальным весом λ и положительным ковесом $\gamma^\vee = \psi(\mu^\vee) + d \cdot \tau^\vee_{V_\lambda}$, где $\psi\colon G \hookrightarrow w\mathbb{P}(V_\lambda)$ — соответствующее представление старшего веса λ, и $\mu^\vee \in Y(G)$ — целочисленный ковес.*

Тогда ряд Гильберта для $Y \subset w\mathbb{P}$ имеет вид

$$\mathcal{H}(Y) = \frac{\widetilde{\mathcal{P}}(Y)}{\widetilde{\mathcal{Q}}(Y)}, \quad \widetilde{\mathcal{P}}(Y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^\sigma \frac{t^{\langle\sigma\rho,\mu^\vee\rangle}}{1 - t^{\langle\sigma\lambda,\mu^\vee\rangle+d}},$$
$$\widetilde{\mathcal{Q}}(Y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^\sigma t^{\langle\sigma\rho,\mu^\vee\rangle} = t^{\langle\rho,\mu^\vee\rangle} \prod_{\alpha\in\Phi_+} (1 - t^{\langle-\alpha,\mu^\vee\rangle}),$$

где $\mathcal{W}$ — группа Вейля, $\alpha \in \Phi_+$ — положительные корни, и ρ — вектор Вейля.

Замечание 3.3.56. Нам удобнее переписать данный формальный ряд как

$$\mathcal{H}(Y) = \frac{\mathcal{P}(Y)}{\mathcal{Q}(Y)}, \quad \mathcal{P}(Y) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}} (-1)^\sigma \frac{t^{\langle\sigma\rho-\rho,\mu^\vee\rangle}}{1 - t^{\langle\sigma\lambda,\mu^\vee\rangle+d}}, \quad \mathcal{Q}(Y) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - t^{\langle-\alpha,\mu^\vee\rangle}).$$

Тогда $\langle\sigma\rho - \rho, \omega_i^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$ для любого фундаментального ковеса $\omega_i^\vee$ группы G.

Далее $G = \mathrm{SL}(V)$, и $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \ldots, a_n)$ — взвешенный грассманиан.

Предложение 3.3.57. *Пусть $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \ldots, a_n)$ — взвешенный грассманиан. Его ряд Гильберта (см. определение 3.3.29) имеет вид $\mathcal{H}(Y) = \mathcal{P}(Y)/\mathcal{Q}(Y)$, где*

$$\mathcal{P}(Y) = \sum_{I=(i_1<\cdots<i_k)} \frac{F(I)}{1 - t^{a(I)}}, \quad \mathcal{Q}(Y) = \prod_{\substack{i,j=0,\ldots,n \\ i<j}} (1 - t^{a_j - a_i});$$
$$a(I) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} > 0, \quad F(I) = \left(\sum_{\sigma\in S_I} (-1)^\sigma t^{f(\sigma)}\right);$$
$$S_I = \{\sigma \in S_{n+1} : \sigma(\{0, \ldots, k-1\}) = I\}, \quad f(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (i - \sigma^{-1}(i)) a_i.$$

Замечание 3.3.58. Заметим, что $S_I = \sigma_I \cdot \mathrm{Stab}(I)$, где $\mathrm{Stab}(I) \simeq S_k \times S_{n+1-k}$ сохраняет разбиение множества $\{0, \dots, n\}$ в I и его дополнение, а элемент $\sigma_I \in S_{n+1}$ — перестановка, отправляющая l в i_{l+1} для всех $l = 0, \dots, k-1$.

Пример 3.3.59. Пусть $k = 1$ и $n = 2$, т.е., $Y = \mathbb{P}(a_0, a_1, a_2)$. Тогда имеем

$$\mathcal{P}(Y) = \frac{1 - t^{-a_1+a_2}}{1 - t^{a_0}} + \frac{-t^{-a_0+a_1} + t^{-2a_0+a_1+a_2}}{1 - t^{a_1}} + \frac{-t^{-2a_0+2a_2} + t^{-a_0-a_1+2a_2}}{1 - t^{a_2}},$$
$$\mathcal{Q}(Y) = (1 - t^{a_2-a_1})(1 - t^{a_2-a_0})(1 - t^{a_1-a_0}).$$

Явными вычислениями можно проверить, что $\mathcal{P}(Y)/\mathcal{Q}(Y) = \prod_{i=0}^{2}(1 - t^{a_i})^{-1}$.

Пример 3.3.60. Пусть $k = 2$ и $n = 4$, т.е., $Y = \mathrm{Gr}_2(a_0, \dots, a_4)$ — взвешенный грассманиан прямых в пятимерном векторном пространстве. Имеем

$$\mathcal{P}(Y) = \sum_{i=1}^{4} \frac{F(0,i)}{1 - t^{a_i}} + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,4 \\ i<j}} \frac{F(i,j)}{1 - t^{a_i+a_j-a_0}}, \quad \mathcal{Q}(Y) = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,4 \\ i<j}} (1 - t^{a_j-a_i});$$
$$F(i,j) = \left(\sum_{\sigma \in S(i,j)} (-1)^{\sigma} t^{f(\sigma)} \right); \quad f(\sigma) = \sum_{i=0}^{4} (i - \sigma^{-1}(i)) a_i;$$
$$S(i,j) = \{\sigma \in S_5 : \sigma(\{0,1\}) = \{i,j\}\}.$$

Можно непосредственно проверить (см. замечание 3.3.2), что наша формула совместима с формулой для ряда Гильберта многообразия $Y = \mathrm{Gr}_2(a_0, \dots, a_4)$, полученной Корти–Ридом (см. [30]).

Замечание 3.3.61. Теорема Гильберта–Серра даёт нам, что ряд Гильберта любого взвешенного грассманиана можно записать в виде $\mathcal{H}(Y) = P(t)/\prod_I (1 - t^{\deg(T_I)})$. Таким образом, происходит большое количество сокращений при переходе от изначального вида ряда Гильберта для взвешенного грассманиана, который приведён в предложении 3.3.57, к данной компактной форме.

Задача 3.3.62. Найти замкнутую формулу для многочлена Гильберта $\mathcal{H}(Y) \cdot \prod_I (1 - t^{\deg(T_I)})$ взвешенного грассманиана $Y = \mathrm{Gr}_k(a_0, \dots, a_n)$.

Для доказательства предложения 3.3.57 нам достаточно лишь вместе применить предложения 3.3.35 и 3.3.55.

Лемма 3.3.63. *Знаменатель $\mathcal{Q}(Y)$ имеет вид*

$$\mathcal{Q}(Y) = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,n \\ i<j}} (1 - t^{a_j-a_i}).$$

Доказательство. Следует непосредственно из параметризации в предложении 3.3.35 и стандартного описания положительных корней для $\mathrm{SL}(V)$. □

Лемма 3.3.64. *Для любого $k = 1, \dots, n$ пусть ω_k — фундаментальный вес группы $G = \mathrm{SL}(V)$. Тогда орбита группы Вейля $\mathcal{W} \cdot \omega_k$ имеет вид*

$$\lambda_I = \sum_{j=1}^{k} e_{i_j}, \quad I = (i_1 < \dots < i_k).$$

В частности, мы имеем $\omega_k = \lambda_I$ при $I = \{0, \dots, k-1\}$.

Доказательство. Напомним, что группа Вейля $\mathcal{W}$ порождена простыми отражениями $r_1, \dots, r_n$. Они действуют на фундаментальных весах ω_i как

$$r_i(\omega_j) = \begin{cases} \omega_j, & \text{при } i \neq j; \\ \omega_i - \alpha_i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, $\mathcal{W} \simeq S_{n+1}$ переводит элемент e_i в $e_{\sigma(i)}$, а элемент λ_I — в $\lambda_{\sigma(I)}$. □

Следствие 3.3.65. *Для всех $I = (i_1 < \dots < i_k)$ стабилизатор $\mathrm{Stab}(\lambda_I)$ изоморфен группе $S_k \times S_{n+1-k}$ и состоит из перестановок множества $\{0, \dots, n\}$, сохраняющих разбиение $\{0, \dots, n\}$ в $I \subset \{0, \dots, n\}$ и его дополнение.*

Лемма 3.3.66. *Числитель $\mathcal{P}(Y)$ имеет вид*

$$\mathcal{P}(Y) = \sum_{I=(i_1<\dots<i_k)} \frac{F(I)}{1 - t^{a(I)}}, \quad F(I) = \left(\sum_{\sigma \in S_I} (-1)^\sigma t^{f(\sigma)} \right),$$
$$a(I) = -\sum_{l=0}^{k-2} a_l + \sum_{j=1}^{k} a_{i_j}, \quad f(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (i - \sigma^{-1}(i)) a_i,$$
$$S_I = \{\sigma \in S_{n+1} : \sigma(\{0, \dots, k-1\}) = I\}.$$

Доказательство. Мы можем переписать элемент $f(\sigma)$ в следующем виде:

$$f(\sigma) = \langle \sigma\rho, \mu^\vee \rangle - \langle \rho, \mu^\vee \rangle = \langle \rho, \sigma^{-1}(\mu^\vee) \rangle - \langle \rho, \mu^\vee \rangle.$$

Представим вектор Вейля как линейную комбинацию простых корней:

$$\rho = \sum_{l=1}^{n} \omega_l = \sum_{l=1}^{n} c_l \alpha_l, \quad c_l = \sum_{j=1}^{n} \min(l, j) - \frac{ln}{2}.$$

Заметим, что $c_0 = c_{n+1} = 0$, и $c_{l+1} - c_l = (n-l) - n/2$.

Представим действие группы Вейля на ковесе $\mu^\vee$ следующим образом:

$$\sigma^{-1}(\mu^\vee) = \sigma^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i e_i^\vee\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i e_{\sigma^{-1}(i)}^\vee = \sum_{i=0}^{n} a_{\sigma(i)} e_i^\vee = \sum_{j=1}^{n} (a_{\sigma(j-1)} - a_{\sigma(j)})\omega_j^\vee.$$

Как следствие, из предложения 3.3.35 получаем, что

$$f(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} c_j(a_{\sigma(j-1)} - a_{\sigma(j)}) - \sum_{j=1}^{n-1} c_j(a_{j-1} - a_j) =$$

$$f(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (c_{\sigma^{-1}(i)+1} - c_{\sigma^{-1}(i)})a_i - \sum_{i=0}^{n} (c_{i+1} - c_i)a_i = \sum_{i=0}^{n} (i - \sigma^{-1}(i))a_i. \qquad \square$$

Доказательство предложения 3.3.57. Применим предложение 3.3.55. $\square$

Заключение

Перечислим основные результаты данной диссертации.

1. Предъявлен явный способ построения классификации взвешенных полных пересечений Фано любого заданного отклонения. Показано, что такая классификация исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.

2. Доказано существование сильных неф-разбиений для взвешенных полных пересечений Фано (как следствие, моделей Ландау–Гинзбурга в смысле Гивенталя и Батырева) при некоторых ограничениях на веса взвешенного проективного пространства. Предъявлен явный контрпример к существованию сильного неф-разбиения в случае любой коразмерности более 3.

3. Проверено, что для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограничением решётки Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ является двойственной по Долгачёву–Никулину к поляризации общего слоя компактификации его стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга решёткой инвариантов монодромии, которая явно найдена для каждого трёхмерного многообразия Фано.

4. Получен многомерный аналог критерия Белого определимости над числовым полем для комплексных полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах. Предложен явный подход к обобщению данного результата на полные пересечения общего типа в других пространствах мечты Мори.

5. Для взвешенных грассманианов получена явная параметризация возможных $\mathbb{Z}$-градуировок на координатах Плюккера. В её терминах дано явное описание дуализирующего пучка и ряда Гильберта. Предложенный общий подход применим к любым взвешенным обобщённым грассманианам.

Публикации по теме диссертации

[1] Ovcharenko, M. «On the existence of nef-partitions for smooth well-formed Fano weighted complete intersections». В: *Siberian Electronic Mathematical Reports* 20.2 (2023), с. 1405—1419.

[2] Ovcharenko, M. «The classification of smooth well-formed Fano weighted complete intersections». В: *International Journal of Mathematics* 34.11, 2350064 (2023).

[3] Доран, Ч., Хардер, Э., Кацарков, Л., Овчаренко, М. А. и Пржиялковский, В. В. «Модулярность моделей Ландау–Гинзбурга». В: *Труды МИАН* 328 (2025), с. 165—310.

[4] Овчаренко, М. А. «Взвешенные грассманианы и их явное описание». В: *Труды МИАН* 329 (2025).

[5] Овчаренко, М. А. «Теорема Белого для гладких полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах». В: *Математический сборник* 216.6 (2025), с. 59—76.

Литература

[6] Abe, H. и Matsumura, T. «Equivariant Cohomology of Weighted Grassmannians and Weighted Schubert Classes». В: *International Mathematics Research Notices* 2015.9 (2014), с. 2499—2524.

[7] Abe, H. и Matsumura, T. «Schur polynomials and weighted Grassmannians». В: *Journal of Algebraic Combinatorics* 42.3 (2015), с. 875—892.

[8] Akhtar, M., Coates, T., Corti, A., Heuberger, L., Kasprzyk, A., Oneto, A., Petracci, A., Prince, T. и Tveiten, K. «Mirror symmetry and the classification of orbifold del Pezzo surfaces». В: *Proceedings of the American Mathematical Society* 144.2 (2016), с. 513—527.

[9] Akhtar, M., Coates, T., Galkin, S. и Kasprzyk, A. «Minkowski polynomials and mutations». В: *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* 8.094 (2012), с. 1—707.

[10] Arzhantsev, I., Derenthal, U., Hausen, J. и Laface, A. *Cox rings*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 144. Cambridge University Press, 2014.

[11] Auroux, D. «Mirror symmetry and T-duality in the complement of an anticanonical divisor». В: *Journal of Gökova Geometry Topology* 1 (2007), с. 51—91.

[12] Azam, H., Nazir, S. и Qureshi, M. I. «The equivariant cohomology of weighted flag orbifolds». В: *Mathematische Zeitschrift* 294.3 (2020), с. 881—900.

[13] Ballmann, W. *Lectures on Kähler manifolds*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society, 2017.

[14] Batyrev, V. «On the classification of toric Fano 4-folds». В: *Journal of Mathematical Sciences* 94.1 (1999), с. 1021—1050.

[15] Batyrev, V. «Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds». В: The Fano conference. Università di Torino. 2004, с. 109—122.

[16] Batyrev, V., Kim, B., Ciocan-Fontanine, I. и Straten, D. van. «Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds». В: *Acta Mathematica* 184.1 (2000), с. 1—39.

[17] Bauer, I., Catanese, F. и Grunewald, F. «Faithful actions of the absolute Galois group on connected components of moduli spaces». В: *Inventiones Mathematicae* 199.3 (2015), с. 859—888.

[18] Beauville, A. «Fano threefolds and K3 surfaces». В: *The Fano Conference proceedings*. Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 2004.

[19] Biase, L. D., Fatighenti, E. и Tanturri, F. «Fano 3-folds from homogeneous vector bundles over Grassmannians». В: *Revista Matemática Complutense* 35 (2022), с. 649—710.

[20] Bourbaki, N. *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 7–9*. Elements of Mathematics. Springer, 2005.

[21] Brahma, K. «Integral generalized equivariant cohomologies of weighted Grassmann orbifolds». В: *Algebraic & Geometric Topology* 24.4 (2024), с. 2209—2244.

[22] Brown, G. и Kasprzyk, A. *Graded Ring Database*. URL: `http://grdb.co.uk/` (дата обр. 20.04.2025).

[23] Bruns, W. и Herzog, J. *Cohen–Macaulay rings*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39. Cambridge University Press, 1998.

[24] Cheltsov, I. и Przyjalkowski, V. «Fibers over infinity of Landau–Ginzburg models». В: *Communications in Number Theory and Physics* 16.4 (2022), с. 673—693.

[25] Chen, J.-J., Chen, J. и Chen, M. «On quasismooth weighted complete intersections». В: *Journal of Algebraic Geometry* 20.2 (2011), с. 239—262.

[26] Clingher, A. и Doran, C. «Lattice polarized K3 surfaces and Siegel modular forms». В: *Advances in Mathematics* 231.1 (2012), с. 172—212.

[27] Clingher, A. и Doran, C. «Modular invariants for lattice polarized K3 surfaces». В: *Michigan Mathematical Journal* 55.2 (2007), с. 355—393.

[28] Coates, T., Kasprzyk, A., Pitton, G. и Tveiten, K. «Maximally mutable Laurent polynomials». В: *Proceedings of the Royal Society A* 477, 20210584 (2021).

[29] Coates, T., Kasprzyk, A. и Prince, T. «Laurent inversion». В: *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 15.4 (2019), с. 1135—1179.

[30] Corti, A. и Reid, M. «Weighted Grassmannians». В: *Algebraic geometry: a volume in memory of Paolo Francia*. De Gruyter Proceedings in Mathematics. De Gruyter, 2002, с. 141—163.

[31] Deligne, P. и Katz, N. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie VII*. Т. 2: *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*. Lecture Notes in Mathematics 340. Springer, 1973.

[32] Demazure, M. «Automorphismes et deformations des varietes de Borel». В: *Inventiones mathematicae* 39 (1977), с. 179—186.

[33] Dimca, A. «Singularities and coverings of weighted complete intersections». В: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 366 (1986), с. 184—193.

[34] Dolgachev, I. «Integral quadratic forms: applications to algebraic geometry». В: *Séminaire N. Bourbaki* 25.611 (1982), с. 251—278.

[35] Dolgachev, I. «Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces». В: *Journal of Mathematical Sciences* 81.3 (1996), с. 2599—2630.

[36] Dolgachev, I. «Weighted projective varieties». В: *Group Actions and Vector Fields*. Lecture Notes in Mathematics 956. Springer, 1982, с. 34—71.

[37] Easton, R. и Vakil, R. «Absolute Galois acts faithfully on the components of the moduli space of surfaces: A Belyi-type theorem in higher dimension». В: *International Mathematics Research Notices* 2007, rnm080 (2007).

[38] Ebeling, W. *Lattices and codes*. Advanced Lectures in Mathematics. Berlin: Springer, 2013.

[39] Eisenbud, D. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 150. Springer, 1995.

[40] Fischer, G. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer, 2017.

[41] Flajolet, P. и Sedgewick, R. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.

[42] Franke, J., Manin, Y. и Tschinkel, Y. «Rational points of bounded height on Fano varieties». В: *Inventiones mathematicae* 95 (1989), с. 421—435.

[43] Garra, U. и Zucconi, F. «Very ampleness and the infinitesimal Torelli problem». В: *Mathematische Zeitschrift* 260.1 (2008), с. 31—46.

[44] Givental, A. «A Mirror Theorem for Toric Complete Intersections». В: *Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics*. Progress in Mathematics 160. Birkhäuser, 1998, с. 141—175.

[45] Golyshev, V. «Classification problems and mirror duality». В: *Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics*. London Mathematical Society Lecture Note Series 338. Cambridge University Press, 2007, с. 88.

[46] Golyshev, V. «Modularity of equations D3 and the Iskovskikh classification». В: *Doklady Mathematics* 69.3 (2004), с. 443—449.

[47] González-Diez, G. «Belyi's theorem for complex surfaces». В: *American Journal of Mathematics* 130.1 (2008), с. 59—74.

[48] Graham, W. и Larson, S. J. «Positivity in Weighted Flag Varieties». В: (2024). arXiv: 2412.20863.

[49] Gritsenko, V. и Hulek, K. «Minimal Siegel modular threefolds». В: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 123.3 (1998), с. 461—485.

[50] Gritsenko, V. и Hulek, K. «Uniruledness of orthogonal modular varieties». В: *Journal of Algebraic Geometry* 23.4 (2014), с. 711—725.

[51] Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algébrique*. Т. 2: *Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publications mathématiques de l'I.H.É.S. 8. Institut des Hautes Études Scientifiques, 1961.

[52] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 47. Springer, 1997.

[53] Humphreys, J. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics 9. Springer, 1980.

[54] Huybrechts, D. *Lectures on K3 surfaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 158. Cambridge University Press, 2016.

[55] Iano-Fletcher, A. «Working with weighted complete intersections». В: *Explicit Birational Geometry of 3-folds*. London Mathematical Society Lecture Note 281. Cambridge University Press, 2000, с. 101—173.

[56] Ilten, N., Lewis, J. и Przyjalkowski, V. «Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau–Ginzburg Models». В: *Journal of Algebra* 374 (2013), с. 104—121.

[57] Iskovskikh, V. и Prokhorov, Y. *Fano Varieties*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 47. Springer, 1999.

[58] Javanpeykar, A. «Belyi's theorem for complete intersections of general type». В: *Michigan Mathematical Journal* 66.1 (2017), с. 85—97.

[59] Katzarkov, L., Kontsevich, M. и Pantev, T. «Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models». В: *Journal of Differential Geometry* 105.1 (2017), с. 55—117.

[60] Kobayashi, S. и Ochiai, T. «Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics». В: *Kyoto Journal of Mathematics* 13.1 (1973), с. 31—47.

[61] Köck, B. «Belyi's theorem revisited». В: *Beiträge zur Algebra und Geometrie* 45.1 (2004), с. 253—265.

[62] Kollár, J., Miyaoka, Y. и Mori, S. «Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds». В: *Journal of Differential Geometry* 36.3 (1992), с. 765—779.

[63] Kollár, J. и Mori, S. *Birational Geometry of Algebraic Varieties*. Cambridge Tracts in Mathematics 134. Cambridge University Press, 1998.

[64] Konno, K. «Infinitesimal Torelli theorem for complete intersections in certain homogeneous Kähler manifolds, I». В: *Tohoku Mathematical Journal* 38.4 (1986), с. 609—624.

[65] Konno, K. «Infinitesimal Torelli theorem for complete intersections in certain homogeneous Kähler manifolds, II». В: *Tohoku Mathematical Journal* 42.3 (1990), с. 333—338.

[66] Konno, K. «Infinitesimal Torelli theorem for complete intersections in certain homogeneous Kähler manifolds, III». В: *Tohoku Mathematical Journal* 43.4 (1991), с. 557—568.

[67] Kovács, S. и Lieblich, M. «Erratum for Boundedness of families of canonically polarized manifolds: a higher-dimensional analogue of Shafarevich's conjecture». В: *Annals of Mathematics* 173.1 (2011), с. 585—617.

[68] Lakshmibai, V. и Raghavan, K. *Standard Monomial Theory: Invariant Theoretic Approach*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 137. Springer, 2008.

[69] Lazarsfeld, R. *Positivity in Algebraic Geometry*. Т. 1: *Classical Setting: Line Bundles and Linear Series*. A Series of Modern Surveys in Mathematics 48. Springer, 2004.

[70] Licht, P. «Infinitesimal Torelli for weighted complete intersections and certain Fano threefolds». В: *Contributions to Algebra and Geometry* 65 (2024), с. 97—127.

[71] Liu, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 6. Oxford University Press, 2006.

[72] Malle, G. и Testerman, D. *Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 133. Cambridge University Press, 2011.

[73] Matsuki, K. *Introduction to the Mori program*. Universitext. Springer, 2092.

[74] Miller, E. и Sturmfels, B. *Combinatorial Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 227. Springer, 2005.

[75] Mora, T. *Solving Polynomial Equation Systems*. T. 3: *Algebraic Solving*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 157. Cambridge University Press, 2015.

[76] Mori, S. и Mukai, S. «Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geqslant 2$». В: *Manuscripta mathematica* 36.2 (1981), с. 147—162.

[77] Mukai, S. «Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3». В: *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA* 86 (1989), с. 3000—3002.

[78] Muñoz, R., Occhetta, G., Conde, L. E. S., Watanabe, K. и Wiśniewsk, J. A. «A survey on the Campana–Peternell conjecture». В: *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste* 47 (2015), с. 127—185.

[79] Okada, T. «Stable rationality of orbifold Fano threefold hypersurfaces». В: *Journal of Algebraic Geometry* 28.1 (2019), с. 99—138.

[80] Onishchik, A. и Vinberg, E. *Lie Groups and Algebraic Groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer, 1990.

[81] Peskin, B. «On the dualizing sheaf of a quotient scheme». В: *Communications in Algebra* 12.15 (1984), с. 1855—1869.

[82] Pieropan, M. «On Galois descent of complete intersections». В: *Mathematical Research Letters* 28.4 (2021), с. 1243—1254.

[83] Pizzato, M., Sano, T. и Tasin, L. «Effective nonvanishing for Fano weighted complete intersections». В: *Algebra & Number Theory* 11.10 (2017), с. 2369—2395.

[84] Przyjalkowski, V. «Hori–Vafa mirror models for complete intersections in weighted projective spaces and weak Landau–Ginzburg models». В: *Central European Journal of Mathematics* 9.5 (2011), с. 972—977.

[85] Przyjalkowski, V. и Shramov, C. «Bounds for smooth Fano weighted complete intersections». В: *Communications in Number Theory and Physics* 14.3 (2020), с. 511—553.

[86] Przyjalkowski, V. и Shramov, C. «Hodge level for weighted complete intersections». В: *Collectanea Mathematica* 71.3 (2020), с. 549—574.

[87] Przyjalkowski, V. и Shramov, C. «Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections». В: *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V* 19.3 (2019), с. 827—845.

[88] Pukhlikov, A. *Birationally Rigid Varieties*. Mathematical Surveys and Monographs 190. American Mathematical Society, 2013.

[89] Qureshi, M. I. «Constructing projective varieties in weighted flag varieties II». В: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 158.2 (2015), с. 193—209.

[90] Qureshi, M. I. и Szendrői, B. «Calabi-Yau threefolds in weighted flag varieties». В: *Advances in High Energy Physics* 2012, 547317 (2012).

[91] Qureshi, M. I. и Szendrői, B. «Constructing projective varieties in weighted flag varieties». В: *Bulletin of the London Mathematical Society* 43.4 (2011), с. 786—798.

[92] Qureshi, M. I. и Wrobel, M. «Smooth Fano intrinsic Grassmannians of type $(2, n)$ with Picard number two». В: *International Mathematics Research Notices* 2022.22 (2021), с. 17999—18034.

[93] Sano, T. и Tasin, L. «Delta invariants of weighted hypersurfaces». В: (2024). arXiv: 2408.03057.

[94] Scattone, F. *On the compactification of moduli spaces for algebraic K3 surfaces*. Memoirs of the American Mathematical Society 374. American Mathematical Society, 1987.

[95] Stanley, R. *Enumerative Combinatorics*. T. 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49. Cambridge University Press, 2012.

[96] Szamuely, T. *Galois groups and fundamental groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 117. Cambridge University Press, 2009.

[97] Usui, S. «Local Torelli Theorem for some non-singular weighted complete intersections». В: *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry: Kyoto, 1977*. 1978, с. 723—734.

[98] Voisin, C. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*. T. 2. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 77. Cambridge University Press, 2003.

[99] Белый, Г. В. «О расширениях Галуа максимального кругового поля». В: *Известия Академии наук СССР. Серия математическая* 43.2 (1979), с. 267—276.

[100] Манин, Ю. И. *Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей*. Факториал Пресс, 2002.

[101] Пржиялковкий, В. В. и Шрамов, К. А. «Автоморфизмы взвешенных полных пересечений». В: *Труды МИАН* 307.1 (2019), с. 217—229.

[102] Пржиялковкий, В. В. и Шрамов, К. А. «Взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности». В: *Сибирский математический журнал* 61.2 (2020), с. 377—384.

[103] Пржиялковский, В. В. «Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8». В: *Математический сборник* 198.3 (2007), с. 145—158.

[104] Пржиялковский, В. В. «Компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано». В: *Математический сборник* 208.7 (2017), с. 84—108.

[105] Пржиялковский, В. В. «Об особых компактификациях лог-Калаби–Яу моделей Ландау–Гинзбурга». В: *Математический сборник* 213.1 (2022), с. 95—118.

[106] Пржиялковский, В. В. «Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано». В: *Известия Российской академии наук. Серия математическая* 77.4 (2013), с. 135—160.

[107] Пржиялковский, В. В. «Торические модели Ландау–Гинзбурга». В: *Успехи математических наук* 73.6 (2018), с. 95—190.

[108] Пржиялковский, В. В. и Шрамов, К. А. «Гладкие полные пересечения Фано основной серии в торических многообразиях». В: *Математические заметки* 109.4 (2021), с. 590—596.

[109] Пржиялковский, В. В. и Шрамов, К. А. «Об автоморфизмах квазигладких взвешенных полных пересечений». В: *Математический сборник* 212.3 (2021), с. 112—127.

[110] Чельцов, И. А. «Бирационально жёсткие многообразия Фано». В: *Успехи математических наук* 60.5 (2005), с. 71—160.

[111] Чельцов, И. А. и Пржиялковский, В. В. «Гипотеза Кацаркова–Концевича–Пантева для трехмерных многообразий Фано». В: *Труды МИАН* 328 (2025), с. 5—164.