ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации
Овчаренко Михаила Александровича
Взвешенные полные пересечения и
зеркальная симметрия для многообразий Фано,
представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Актуальность темы. Многообразия Фано с точки зрения общей проблемы бирациональной классификации произвольных алгебраических многообразий образуют один из важнейших классов. Согласно результату Коллара–Мияоки–Мори для заданной размерности d существует лишь конечно число деформационных семейств гладких d-мерных многообразия Фано. Этот факт служит важной мотивацией для проблемы классификации подобных семейств, которые полностью классифицированы вплоть до размерности 3. Среди всех многообразий Фано с числом Пикара 1 класс взвешенных полных пересечений наиболее интересен, поскольку он является наиболее многочисленным среди всех таких многообразий Фано размерности не более 3. Именно поэтому изучение и классификация взвешенных полных пересечений Фано приобретает особую актуальность.

Научная значимость исследований и новизна. Отметим, что для классификации гладких взвешенных полных пересечений достаточно перечислить соответствующие им веса $(a_0, ..., a_N)$ взвешенного проективного пространства и степени дивизоров $(d_1, ..., d_c)$. Однако количество возможных значений этих комбинаторных инвариантов быстро растет с увеличением размерности многообразий, и проблема классификации взвешенных полных пересечений становится довольно сложной труднообозримой комбинаторной задачей. Многообразия Фано (в частности, взвешенные полные пересечения Фано) представляют большой интерес для изучения зеркальной симметрии, которая достаточно хорошо понята в размерности 2 для поверхностей дель Пеццо. Используя наблюдение Гивенталя, изучение зеркальных многообразий для взвешенных полных пересечений Фано, как и для многообразий Калаби-Яу, приводит к проблеме существования неф-разбиений. С другой стороны, полная классификация всех гладких многообразий Фано в размерности 3 естественно мотивирует изучение зеркальной симметрии также для всех трёхмерных многообразий Фано. Грассманианы являются классическими многообразиями Фано с группой Пикара ранга 1, для которых зеркальная симметрия к настоящему времени хорошо изучена. Возникает естественный открытый вопрос о том, какие результаты о взвешенных полных пересечениях могут быть обобщены на случай полных пересечений во взвешенных грассманианах.

Краткая характеристика основного содержания диссертации. Представленная диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении представлена структура диссертации, её мотивация, проблематика и круг исследуемых вопросов.

Первая глава диссертации посвящена изучению и классификации гладких взвешенных полных пересечений Фано. Для получения структурного описания комбинаторной

классификации этих многообразий в диссертации рассматривается удобный инвариант, разность коиндексом и коразмерностью. Этот новый инвариант называется *отклонением*. Используя понятие отклонения, автору удалось обобщить важный результат Пржиялковского и Шрамова (этот результат является классификацией гладких взвешенных полных пересечений Фано с отклонением 0 и 1). Основная теорема, полученная автором, утверждает, что гладкие взвешенные полные пересечения Фано с фиксированным значением отклонения исчерпываются конечным количеством бесконечных серий и конечным количеством исключений. Более того, в работе в явной форме было получено обобщение классификации Пржиялковского и Шрамова для случая отклонений 2, 3 и 4.

Во второй главе диссертации изучается зеркальная симметрия для взвешенных гладких полных пересечений Фано посредством поиска так называемых *неф-разбиений*. Автором диссертации найдена новая конструкция неф-разбиений в произвольной коразмерности, используемых для построения зеркальной модели Ландау-Гинзбурга для полных пересечений Фано, удовлетворяющих некоторым ограничениям. Во второй части второй главы диссертации автор рассматривает случай трехмерных многообразий Фано с рангом Пикара более 1 и изучает соответствующие им зеркальные торические модели Ландау-Гинзбурга с точки зрения двойственности Долгачева-Никулина. Эта двойственность основана на рассмотрении Λ-поляризованных $K3$-поверхностей, где под Λ подразумевается некоторая подрешетка в решетке вторых целочисленных когомологий $K3$-поверхности. Ситуация для трехмерных многообразий Фано с группой Пикара ранга 1 довольно хорошо изучена благодаря полученному ранее важному результату Голышева, устанавливающему тесную связь зеркальной симметрии для трехмерных многообразий Фано с модулярными рациональными кривыми. Случай зеркальной симметрии для трехмерных многообразий Фано с группой Пикара ранга более 1 является уже технически более сложным. Благодаря полной классификации трехмерных многообразий Фано с точностью до деформации, рассматривая каждый случай в отдельности, диссертанту удалось в них также установить и доказать тесную связь двойственности Долгачева-Никулина с соответствующей торической моделью Ландау-Гинзбурга. В диссертации общая схема доказательства-вычисления подробно представлена на примере трехмерных многообразий Фано с группой Пикара ранга 2, являющихся гиперповерхностями бистепени (1,1) в произведении двух проективых плоскостей.

Третья глава диссертации посвящена взвешенным обобщениям классических грассманианов, которые являются также обобщениями взвешенных проективных пространств. По мнению диссертанта, среди полных пересечений во взвешенных грассманианах (отличных от классических) нельзя найти гладких многообразий Фано. Однако с точки зрения зеркальной симметрии этот класс представляет интерес для построения семейств полных пересечений Фано с терминальными и каноническими особенностями. Для дальнейшего изучения многообразий этого класса очень важны полученные автором явные формулы для численных инвариантов взвешенных грассманианов и, в частности, явные комбинаторные формулы для описания их рядов Гильберта, соответствующих проективному вложению во взвешенное проективное пространство. Замечательным арифметическим добавлением в этой части диссертации является найденая автором многомерное обобщение теоремы Белого для случая гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и во взвешенных грассманианах.

Основные результаты диссертации:

1. Предъявлен явный способ построения классификации взвешенных полных пересечений Фано любого заданного отклонения. Показано, что такая классификация исчерпывается конечным количеством серий и конечным количеством исключений.

2. Доказано существование сильных неф-разбиений для взвешенных полных пересечений Фано при некоторых ограничениях на веса взвешенного проективного пространства. Предъявлен явный контрпример к существованию сильного неф-разбиения в случае любой коразмерности более 3.

3. Проверено, что для любого гладкого трёхмерного многообразия Фано X естественная поляризация его общих антиканонических сечений ограни чением решётки Пикара Pic(X) является двойственной по Долгачёву– Никулину к поляризации общего слоя компактификации его стандартной торической модели Ландау–Гинзбурга.

4. Получен многомерный аналог критерия Белого определимости над числовым полем для комплексных полных пересечений общего типа в обобщённых грассманианах и взвешенных проективных пространствах.

5. Для взвешенных грассманианов получена явная параметризация возможных $\mathbb{Z}$-градуировок на координатах Плюккера. В её терминах дано явное описание дуализирующего пучка и ряда Гильберта.

В целом диссертация представляет собой **законченное научное исследование, содержащее решения актуальных математических задач.**

Замечания по работе. К содержанию работы я имею лишь одно замечание:

1. В диссертации никак не отражен тот факт, что зеркальной симметрия для полных пересечений на основе неф-разбиений непосредственно связана с некоторыми специальными гипергеометрическими функциями, коэффициенты разложения в ряд которых определяются весами $(a_0, ..., a_N)$ взвешенного проективного пространства и степенями $(d_1, ..., d_c)$ соответствующих дивизоров. Замечу, что исторически понятие нэф-разбиения родилось из желания проинтерпретировать этот гипергеометрический ряд как период дифференциальной формы старшей степени на соответствующем зеркальном многообразии Калаби-Яу. С этой точки зрения было бы очень интересным выразить на языке соответствующих гипергеометрических функций полученную автором классификацию гладких взвешенных полных пересечений Фано и найти соответствующие многомерные обобщения утверждений, полученных Голышевым для трехмерных многообразий Фано с группой Пикара ранга 1.

Указанное замечание не снижают значимости полученных в диссертации результатов и не влияют на общую положительную оценку диссертационного исследования М.А.Овчаренко.

Общее заключение. Основные результаты диссертации опубликованы 5 научных статьях в рецензируемых журналах, включенных ВАК в перечень ведущих периодических изданий.

Результаты диссертационного исследования прошли апробацию на нескольких научных конференциях и научных семинарах.

Автореферат и опубликованные работы достаточно полно отражают основное содержание диссертации.

Уровень решаемых математических задач соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Диссертационное исследование Овчаренко Михаила Александровича "Взвешенные полные пересечения и зеркальная симметрия для многообразий Фано"является завершенной научно-квалифицированной работой, которая по критериям своей актуальности, научной новизны, обоснованности и достоверности выводов соответствует требованиям положения "О присуждении учёных степеней".

Диссертант, Овчаренко Михаил Александрович, заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент,
Ведущий науч. сотрудник Центра Фундаментальной Математики МФТИ
Кандидат физ-мат. наук по специальности 01.01.06 – Алгебра, логика и теория чисел (ноябрь 1985 г.)
Habilitation в университете города Эссен, Германия (июль 1993 г.)
Профессор в университете города Тюбинген, Германия (октябрь 1996 г.)
batyrev@math.uni-tuebingen.de

30.08.2025 Батырев В.В. Батырев

Подпись руки В.В. Батырева
заверяю:
Администратор канцелярии
Административного отдела
О.А. Кораблева