Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи



Малыхин Юрий Вячеславович

Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин

Специальность 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в отделе теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Официальные оппоненты:

Балашов Максим Викторович — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Лаборатории №7 Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (специальность 01.01.09),

Кротов Вениамин Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета (специальность 01.01.01),

Фарков Юрий Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных информационных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации» (специальность 01.01.01).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится 23 октября 2025 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д.8

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref25/malykhin/dis.pdf`

Автореферат разослан “ ” июня 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор ф.-м.наук, профессор  В.А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основной предмет диссертационного исследования — поперечник по Колмогорову. Это понятие ввёл А.Н. Колмогоров[1] в 1936 году. Для множества K в линейном метрическом пространстве (X, ρ) поперечник порядка n определяется как величина наилучшего приближения множества K посредством n-мерных линейных подпространств в X:

$$d_n(K, X) := \inf_{\substack{Q_n \subset X \\ \dim Q_n \leqslant n}} \sup_{x \in K} \inf_{y \in Q_n} \rho(x, y).$$

Поперечник d_n — фундаментальная аппроксимативная характеристика и, более того, — важное и актуальное понятие функционального анализа в целом. Последовательность n-поперечников $(d_n(K, X))_{n=1}^{\infty}$ характеризует "массивность" тела K в нормированном пространстве, поведение этой последовательности связано с ε-энтропией и другими характеристиками тела.

Теории поперечников посвящено множество работ; результаты представлены в ряде монографий и книг[2,3,4,5,6,7,8].

Классическая задача о колмогоровских поперечниках классов Соболева одной переменной W_p^r в L_q активно изучалась в 1960-х — 1980-х гг. советскими (и некоторыми западными) математиками. После случая $p = q = 2$, рассмотренного Колмогоровым, порядки этих поперечников в ряде других случаев были вычислены усилиями С.Б. Стечкина, Г.Г. Лоренца, В.М. Тихомирова, Р.С. Исмагилова, Е.Д. Глускина и других математиков. Б.С. Кашин[9] в 1977 году завершил решение этой задачи в случае $rp > 1$, когда пространство Соболева компактно вложено в C, построив для этого случайным методом n-мерные подпространства, хорошо приближающие в равномерной норме евклидов шар B_2^N большой размерности N. Один

[1] A. Kolmogoroff, "Über Die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse", *Ann.Math.*, **37**:1 (1936), 107–110.

[2] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

[3] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer Berlin, 1985.

[4] В.М. Тихомиров, *Теория приближений.* Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фунд. направления. **14**, ВИНИТИ, М., 1987, 103–260.

[5] G.G. Lorentz, M. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Springer, 1996.

[6] R.M. Trigub, E.S. Belinskii, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Springer, 2004.

[7] V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge University Press, 2018.

[8] D. Dung, V. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic Cross Approximation*. Birkhäuser, Cham. 2018.

[9] Б.С. Кашин, "Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351.

из основных результатов диссертации — нахождение порядков поперечников в единственном остававшемся открытым (для целой гладкости) случае $r = p = 1$, $2 < q < \infty$.

В связи с поперечниками классов Соболева изучалась задача о поперечниках конечномерных ℓ_p^N-шаров в ℓ_q^N. Точные значения были найдены при $p = 1$, $q = 2$ и при $p \geqslant q$. Ряд окончательных результатов получен Глускиным (1983). Результат Кашина 1977 года о поперечнике шара, дающий правильный порядок этой величины при $n \asymp N$, был уточнён А.Ю. Гарнаевым и Глускиным (1984); ими было доказано порядковое равенство, справедливое при всех $n < N$:

$$d_n(B_2^N, \ell_\infty^N) \asymp \min\{1, n^{-1/2} \log^{1/2}(2N/n)\}. \tag{1}$$

Позже основной интерес сместился к классам функций многих переменных, в том числе классам смешанной гладкости; их исследовали К.И. Бабенко, В.Н. Темляков, Э.М. Галеев, Динь Зунг, А.А. Васильева, Ян Выбирал, Т. Ульрих и другие (см. книги[7,8]). Важные результаты по теории поперечников принадлежат также М.Ш. Бирману и М.З. Соломяку, В.Е. Майорову, Ю.И. Маковозу, А.П. Буслаеву, А. Пичу, М.И. Стесину, Г.Г. Магарил-Ильяеву, Н.П. Корнейчуку, Ю.Н. Субботину, А. Пинкусу. Упомянем и направление, связанное с поперечниками аналитических функций (Г. Видом, Ч. Мичелли, К.Ю. Осипенко, Ю.А. Фарков, ...).

Двойственный к колмогоровскому поперечнику — гельфандовский поперечник — измеряет минимальный диаметр сечения тела подпространствами заданной коразмерности. Эта величина важна в теории восстановления.

Поперечники играют важную роль в геометрии банаховых пространств. Теорема Кашина о поперечнике шара (1977) в терминах поперечника по Гельфанду влечёт существование подпространств $\mathbb{R}^N$ размерности $N(1-\delta)$, где $\delta > 0$ произвольно мало, в которых евклидова и ℓ_1-нормы пропорциональны: $c(\delta)N^{1/2}|x| \leqslant \|x\|_1 \leqslant N^{1/2}|x|$. Одновременно, Т. Фигелем, Дж. Линденштраусом и В.Д. Мильманом был получен результат о подпространствах ℓ_1^N размерности εN, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, с почти евклидовой нормой: $a(1-\varepsilon)N^{1/2}|x| \leqslant \|x\|_1 \leqslant a(1+\varepsilon)N^{1/2}|x|$. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах С. Шарека, Н. Томчак-Егерман, А. Пажора, М. Пизье, Р. Вершинина и других специалистов по асимптотическому геометрическому анализу; см. книгу[10].

В теории функциональных пространств изучаются s-числа операторов, определение которых в общем виде предложил Пич. Частными случаями

[10] S. Arstein–Avidan, A. Giannopoulos, V.D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis*, Part I. Mathematical surveys and monographs, 202. AMS, Providence, 2015.

s-чисел являются колмогоровские и гельфандовские числа: для оператора компактного вложения $\mathrm{Id}\colon X \to Y$ они равны соответствующим поперечникам шара $K = B(X)$ в пространстве Y. Другой пример связан с классической задачей о приближении компактных операторов конечномерными: аппроксимативные s-числа и соответствующие им линейные поперечники. Эти и другие s-числа служат важным инструментом изучения операторов и, в частности, вложений функциональных пространств. Существенный вклад в теорию s-чисел внесли также Б. Карл, Х. Трибель, Д.Е. Эдмундс.

Подчеркнём важную (особенно в последние годы) связь поперечников с компьютерными науками и смежными разделами математики. Задача о поперечнике конечного множества векторов в равномерной метрике эквивалентна приближению составленной из этих векторов матрицы в чебышёвской (равномерной) норме матрицами заданного ранга:

$$d_n(\{A^1,\dots,A^N\},\ell_\infty^M) = \min_{\operatorname{rank} B\leqslant n} \|A-B\|_C, \quad \text{где } \|X\|_C := \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant M\\ 1\leqslant j\leqslant N}} |X_{i,j}|. \quad (2)$$

Малоранговое приближение возникает в различных контекстах. Оно используется в численных методах для ускорения алгоритмов, в машинном обучении — для регуляризации. Е.Е. Тыртышников и его ученики разрабатывают численные алгоритмы малоранговой аппроксимации. Здесь проявляется связь теории приближений (нижних оценок) и теории сложности; приведём два примера. Минимальный ранг, нужный для приближения заданной булевой матрицы с фиксированной погрешностью (ε-ранг) играет важную роль в коммуникационной сложности; это хорошо представлено в обзорах[11,12]. Понятию ε-ранга посвящен ряд работ специалистов по Computer Science (А.А. Разборов, Н. Алон, А. Кливанс и А. Шерстов, ...). Другой вариант задачи о малоранговом приближении использует метрику Хэмминга (количество отличий) вместо равномерной метрики. Л. Вэлиант[13] показал, что достаточно "жёсткие", т.е. плохо приближаемые (в метрике Хэмминга) матрицы дают пример (линейного) отображения с суперлинейной оценкой схемной сложности. Важная задача о построении конструктивного семейства таких матриц до сих пор не решена, хотя в недавнее время появился ряд прорывных работ по этой тематике. Некоторые методы и конструкции из теории сложности удалось использовать

[11] S.V. Lokam, "Complexity Lower Bounds using Linear Algebra", *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, **4**:1-2 (2008), 1–155.

[12] T. Lee, A. Shraibman, "Lower Bounds in Communication Complexity", *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, **3**:4 (2009), 263–399.

[13] L.G. Valiant, "Graph-theoretic arguments in low-level complexity", *Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS)* (1977), 162–176.

в этой диссертации. Ещё одна важная связь с поперечниками была обнаружена в 2000-х годах в теории сжатых измерений (Compressed Sensing), которая была разработана Д. Донохо и Э. Кандесом, Т. Тао, Дж. Ромбергом, и другими математиками, см. книгу[14]. Ключевую роль в этой теории играют подпространства, хорошо приближающие евклидов шар в равномерной метрике, см. (1). Этим подпространствам соответствуют матрицы, позволяющие эффективно восстанавливать разреженные векторы высокой размерности с помощью малого числа линейных измерений. Наконец, задача о вычислении колмогоровского поперечника и поиске экстремальных подпространств есть частный случай задачи минимизации на многообразии Грассмана; численные алгоритмы такой минимизации изучались, в том числе российскими математиками (В.М. Бухштабер, М.В. Балашов).

Тихомиров в известном обзоре[4] теории приближений предложил разделить развитие этой теории на три этапа. В основе первого, чебышёвского этапа — приближение индивидуальных функций посредством полиномов и рациональных дробей. Второй этап — приближение классов функций (аналитических, дифференцируемых, липшицевых и т.п.) классическими методами (суммы Фурье, интерполяция, наилучшие полиномы, ...). На третьем этапе был поставлен вопрос о сравнении разных средств аппроксимации и отыскании оптимальных. Колмогоровский поперечник является одним из важнейших понятий "третьего этапа". Многие задачи о поперечниках ещё не решены и исследования по этой тематике продолжают оставаться актуальными.

Нахождение точных значений поперечников — сложная задача; сделать это удаётся лишь в редких случаях. Чаще речь идёт о порядках убывания d_n, т.е. их нахождении с точностью до мультипликативной константы. Задача, таким образом, разделяется на две: верхние оценки — т.е. построение хорошей аппроксимации, и нижние оценки — доказательство, что "слишком хорошая" аппроксимация невозможна. Верхние оценки и используемые при их доказательстве методы полезны с точки зрения приложений; нижние оценки помогают обосновать оптимальность существующих методов, они необходимы для нахождения окончательного ответа в задаче. В диссертации делается упор на нижние оценки; как правило, там, где были получены новые порядки убывания поперечников, была улучшена именно нижняя оценка. Неформально, будем называть N-мерное множество "жёстким", если его нельзя хорошо приблизить подпространствами размерности существенно меньше N. Пример экстремально жёсткого множества даёт теорема Тихомирова о поперечнике шара: любое N-мерное сечение

[14] S. Foucart, H. Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*, Birkhäuser, 2013.

единичного шара в нормированном пространстве X нельзя приблизить в X с погрешностью меньше 1 никаким n-мерным подпространством, если $n < N$. Многие нижние оценки поперечников, полученные в диссертации, можно интерпретировать как некоторого рода "жёсткость".

Характерной чертой диссертации является последовательное использование теоретико–вероятностного подхода к поперечникам. Отметим, что в классической теории функций теоретико–вероятностный подход внедрили А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, В. Орлич, Р. Пэли, А. Зигмунд и успешно применяли Ж.П. Кахан, М. Талагран, С.В. Бочкарёв, Ж. Пизье, Б.С. Кашин, С.В. Асташкин и другие.

Цели и задачи исследования. Целью работы является развитие методов получения нижних оценок колмогоровских поперечников и близких аппроксимативных характеристик, а также решение ряда конкретных вопросов о поперечниках. В работе рассматриваются следующие задачи.

- Получить нижние оценки усреднённых поперечников случайных векторов; с их помощью найти достаточные условия жёсткости (плохой приближаемости) конечных систем функций и конечномерных множеств.
- Вычислить порядки поперечников классов функций "критической" гладкости.
- Исследовать свойства поперечников классов дифференцируемых функций, специфичные для случая высокой гладкости.
- Найти порядки погрешности полилинейной аппроксимации некоторых классов функций нескольких переменных.
- Найти порядки поперечников шаров в смешанных нормах в новых случаях, ответить на некоторые другие вопросы о поперечниках конечномерных множеств.

Методы исследования. Применяются теоретико–вероятностные методы (неравенства больших уклонений, свойства векторов с безусловным распределенем), методы функционального анализа (операторы, двойственность, интерполяция, тип пространства), гармонического анализа (классические ядра, теория Литлвуда–Пэли, всплески), выпуклой геометрии (оценки объёмов, энтропия многомерных тел, балансировка векторов), комбинаторики (комбинаторная размерность), методы из алгебры и некоторые результаты вещественной алгебраической геометрии.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Получены нижние оценки усреднённых поперечников случайных векторов.

2. Получены достаточные условия жёсткости (слабая лакунарность, безусловность, независимость) для конечных систем функций. Установлено, что система Уолша не является жёсткой в пространствах L_q, $1 \leqslant q < 2$.

3. Доказано, что безусловные координатно-однородные (инвариантные относительно транзитивного действия на множестве координат) множества являются жёсткими в ℓ_q^N, $1 \leqslant q \leqslant 2$.

4. Найдены порядки колмогоровских поперечников класса Соболева W_1^1 в L_q, $2 < q < \infty$. Тем самым завершено решение классической задачи о порядках поперечников классов Соболева целой гладкости на отрезке. Найдены порядки поперечников классов Бесова в аналогичном случае.

5. Получены оценки относительных поперечников классов W_p^r в L_p для равномерной и интегральной метрик. В частности, показано, что невозможна аппроксимация этих классов n-мерными подпространствами с равномерно ограниченными нормами r-х производных приближающих функций и погрешностью, не более чем в константу раз большей n-поперечника.

6. Найдено асимптотическое поведение чебышёвских сплайнов, возникающих в задаче о поперечнике класса Соболева в равномерной метрике на отрезке.

7. Доказано, что классы равномерно ограниченных тригонометрических полиномов со спектром в параллелепипедах плохо приближаются комбинациями полилинейных функций. В качестве следствия получены новые порядки погрешности полилинейных приближений классов смешанной гладкости.

8. Доказано, что декартово произведение октаэдров плохо приближается в смешанной $(2,1)$-метрике. В качестве следствия получены порядки линейных поперечников классов Гёльдера–Никольского в некоторых случаях. Найден критерий жёсткости для поперечников шаров в смешанных нормах.

9. Изучена функция распределения элементов матриц малого ранга, хорошо приближающих единичную матрицу.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории приближений, в функциональном и гармоническом анализе. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности "Математика".

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на конференциях: Саратовская зимняя математическая школа (2016, 2018, 2024); Воронежская зимняя математическая школа (2017, 2023, 2025); Summer Symposium in Real Analysis XLII (Санкт-Петербург, 2018); High-dimensional approximation and discretization (Москва, 2018); Approximation, sampling and compression in data science (Cambridge, Великобритания, 2019); Approximation and Data Analysis (Нижний Новгород, 2019); Вторая конференция Математических центров России (Москва, 2022); Applied Functional Analysis (Oaxaca, Мексика, online, 2022); Школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций (Кыштым, 2023, 2024); Приближение, разложения и компьютерные науки (Сочи, 2023); Вероятностные методы в анализе и теория аппроксимации (Санкт–Петербург, 2024).

Были сделаны доклады по теме диссертации на научных семинарах: по теории приближений в МГУ, рук. проф. И.Г. Царьков, А.С. Кочуров, А.Р. Алимов, А.А. Васильева (2023, 2024), по теории приближений в МИАН, рук. проф. С.А. Теляковский (неоднократно, 2015–2019 гг.); по теории функций действительного переменного в МГУ, рук. акад. РАН Б.С. Кашин, акад. РАН С.В. Конягин, проф. П.А. Бородин, проф. М.И. Дьяченко (2018, 2021, 2022, 2025); по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) в МИАН, рук. чл.-корр. РАН О.В. Бесов (2016, 2025); по теории операторов и теории функций в ПОМИ, рук. акад. РАН С.В. Кисляков (2025); по геометрической теории приближений в МГУ, рук. проф. П.А. Бородин (2022); "Математика и ее приложения" — общеинститутский семинар МИАН (2023); "Бесконечномерный анализ и стохастика" в МГУ, рук. проф. В.И. Богачев, проф. С.В. Шапошников, Н.А. Толмачев, Е.Д. Косов (2024); объединённый семинар отделов теории приближения функций и теории аппроксимаций и приложений в ИММ УрО РАН (2024).

Публикации. Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в 11 работах. Все статьи опубликованы в журналах, входящих в соответствующий перечень ВАК.

Личный вклад. Результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертации — в том числе опубликованные в совместных статьях — получены автором самостоятельно.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 165 наименований. Общий объём диссертации — 189 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, приводится обзор полученных в диссертации результатов, излагается история вопроса и приводятся ссылки на литературу.

Первая глава "Усреднённый колмогоровский поперечник" является центральной для диссертации. Развиваемые в ней методы и доказанные оценки усреднённых поперечников используются в других главах работы.

Глава начинается с **§1.1**, в котором даются полные определения используемых в диссертации понятий, а также формулируются применяемые в доказательствах утверждения. Приведём здесь некоторые основные обозначения. Через L_q обозначается обычное пространство Лебега функций, суммируемых в q-й степени. Пространство ℓ_q^N состоит из векторов $x \in \mathbb{R}^N$ с нормой $\|x\|_q = (|x_1|^q + \ldots + |x_N|^q)^{1/q}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$. Через q' обозначается сопряжённый показатель: $1/q + 1/q' = 1$. Запись $A \lesssim B$ означает $A = O(B)$; мы пишем $A \asymp B$, если $A \lesssim B$ и $A \gtrsim B$. Мы используем стандартные обозначения из теории вероятностей; в частности, P обозначает вероятность; E — математическое ожидание.

В **§1.2** даётся определение усреднённого колмогоровского поперечника.

В классическом колмогоровском поперечнике ошибка аппроксимации понимается в "худшем случае" — берётся максимум погрешности по элементам приближаемого множества. Естественный и полезный метод оценки поперечников снизу состоит в замене максимума на среднее по некоторой мере. В вероятностных терминах — на математическое ожидание. Так мы приходим к следующему определению.

Усреднённым n-поперечником случайного элемента ξ в линейном метрическом пространстве X называется величина

$$d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, X) := \inf_{\dim Q_n \leqslant n} \mathsf{E}\rho(\xi, Q_n)_X \tag{3}$$

(где $\rho(x, M)$ — это кратчайшее расстояние от точки до множества). Сказанное выше можно выразить в виде неравенства

$$d_n(K, X) \geqslant d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, X), \quad \text{если } \mathsf{P}(\xi \in K) = 1. \tag{4}$$

Впервые определение усреднённого поперечника было дано в работе С.М. Воронина и Н.Т. Темиргалиева[15], они рассмотрели случай меры Банаха в L_2. Ряд результатов о поперечниках классов гладких функций в пространствах Винера, а также о поперечниках для гауссовой меры в ℓ_q^N, были получены Буслаевым, Майоровым, а также Я. Крёйцигом. Ещё в конце 1950-х годов аппроксимацию в функциональных пространствах с мерой и усреднение ошибки по этой мере изучал А.В. Сульдин. Подход "ошибки в среднем" систематически развивался в теории "Information Based Complexity" (IBC) такими математиками, как Дж. Трауб, Дж. Васильковский, Г. Вожняковский[16], Э. Новак и другими. Основной мотивацией в IBC и других упомянутых исследованиях было то, что в задаче аппроксимации может быть известно, какие приближаемые элементы встречаются чаще других (или "важнее" других), на элементах есть вероятностное распределение; в этом случае естественно вычислять ошибку в среднем, а не ошибку в наихудшем случае, как в классическом поперечнике.

Для нас основной мотивацией является неравенство (4) (хотя усреднённый поперечник интересен и сам по себе). Многие нижние оценки поперечников $d_n(K, X)$ получены в диссертации по следующей схеме: строится случайный вектор ξ, принимающий значения в K (обычно, в небольшом подмножестве K — например, часто работает равномерное распределение на множестве крайних точек), оценивается усреднённый поперечник $d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, X)$ и применяется неравенство (4). Многие идеи мы заимствовали из работ Глускина, который успешно применял метод усреднений для получения нижних оценок.

Обозначение (3) является новым, по этому поводу см. §1.2. Нам потребуется ещё несколько определений. Если $K = \{x_1, \ldots, x_N\}$ — конечное

[15] С.М. Воронин, Н.Т. Темиргалиев, "О некоторых приложениях меры Банаха", *Изв. АН КазССР, сер.физ.-мат.*, **5** (1984), 8–11.

[16] J.F. Traub, G.W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, 1988.

множество, то через $d_n^{\mathrm{avg}}(K,X)$ обозначим усреднённый поперечник случайно и равномерно выбранной точки из K (т.е. минимизируется среднее арифметическое расстояний от этих точек). Наконец, если вместо усреднения берётся p-усреднение, $(\mathsf{E}\rho(\xi,Q_n)_X^p)^{1/p}$, то мы пишем $d_n^{\mathrm{avg}}(\xi,X)_p$.

Основная часть главы начинается в **§1.3** с несложного, но общего результата.

Теорема 1.1. *Пусть $x_1,\dots,x_N$ — система элементов нормированного пространства X, система $x_1^*,\dots,x_N^*\in X^*$ является сопряжённой к $(x_k)_1^N$: $\langle x_i,x_j^*\rangle=\delta_{i,j}$, и для некоторых $1\leqslant s\leqslant 2$ и $B>0$ выполнено неравенство:*

$$\|\sum_{k=1}^N a_k x_k^*\|_{X^*}\leqslant B(\sum_{k=1}^N |a_k|^s)^{1/s},\quad \forall a_1,\dots,a_N\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Тогда при $1\leqslant p\leqslant 2$ справедливо неравенство:

$$d_n^{\mathrm{avg}}(\{x_1,\dots,x_N\},X)_p\geqslant B^{-1}\cdot\begin{cases}(1-n/N)^{1/p}, & \text{если } s=2,\ n<N,\\ c\,\min\{1,n^{-1/2}N^{1/s'}\}, & \text{если } s<2,\ n\leqslant\frac{N}{4}.\end{cases}$$

Хорошо известно, что для любой ортонормированной системы $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ в евклидовом пространстве E верно равенство

$$d_n(\{\varphi_1,\dots,\varphi_N\},E)=(1-n/N)^{1/2}. \tag{6}$$

(Обычно его записывают в эквивалентном виде $d_n(B_1^N,\ell_2^N)=(1-n/N)^{1/2}$). Оценка снизу в (6) следует из работы Колмогорова, А.А. Петрова и Ю.М. Смирнова, оценка сверху была доказана А.И. Мальцевым; в терминах поперечников равенство записал и применил Стечкин[17].

Таким образом, любая ортонормированная система функций $f_1,\dots,f_N$ является "жёсткой" в L_2 в том смысле, что n-поперечник $\{f_k\}$ отделён от нуля, если $n\leqslant N(1-\varepsilon)$. В работе[17] это обстоятельство применялось для оценок снизу поперечников функциональных классов в L_2 (по выражению Стечкина, он помещал внутрь класса "ежа" — систему $\{f_k\}$). Мы изучим, что происходит в других пространствах L_q.

Как мы увидим дальше, в L_q при $q<2$ ортонормированная система иногда может быть хорошо приближена пространствами размерности $o(N)$. Теорема 1.1 всё же позволяет получить достаточные условия жёсткости в этом случае. Неравенство (5) при $s=2$ превращается в хорошо

[17] С.Б. Стечкин, "О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами", *УМН*, **9**:1(59) (1954), 133–134.

известную p-лакунарность, или S_p-условие, для $p = q'$:

$$\|\sum_{k=1}^{N} a_k f_k\|_{q'} \leqslant B(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2)^{1/2}, \quad \forall a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, ортонормированные системы с этим свойством являются жёсткими в L_q. Глубокий результат Ж. Бургейна о Λ_p-множествах (1989) утверждает, что из любой равномерно ограниченной ортонормированной системы можно выделить q'-лакунарную подсистему размера $N^{2/q'}$. Следовательно, при n, существенно меньших $N^{2/q'}$, хорошая аппроксимация равномерно ограниченных О.Н.С. невозможна.

Эта техника работает при $q \in (1, 2)$. Случай $q = 1$ сложнее и требует более ограничительных условий.

Теорема 1.2. *Пусть $1 \leqslant q \leqslant 2$, случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N \in L_q(\Omega)$ и $\|\xi_i\|_q \geqslant 1$ при $i = 1, \ldots, N$. Предположим, что случайный вектор $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ удовлетворяет хотя бы одному из условий:*

- *$\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и обладают нулевым средним;*
- *распределение вектора ξ безусловно (не меняется при изменении знака у любой координаты);*
- *ξ_i дизъюнктны: $\xi_i \xi_j \equiv 0$, $i \neq j$.*

Тогда при $n \leqslant N(1 - \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, справедливо неравенство

$$d_n^{\mathrm{avg}}(\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}, L_q(\Omega))_q = N^{-1/q} d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, \ell_q^N)_q \geqslant c(q, \varepsilon). \tag{7}$$

Таким образом, каждое из трёх условий (независимость, безусловность, дизъюнктность) обеспечивает жёсткость системы в L_q, $1 \leqslant q \leqslant 2$, включая случай $q = 1$. Простейшим примером независимой системы является система Радемахера.

Обратим внимание, что в теореме оцениваются два равных (с точностью до нормировки) поперечника. В левой части равенства (7) усреднение происходит по конечному множеству в L_q, аналогично теореме 1.1; в правой части усреднение происходит по распределению случайного вектора в $\mathbb{R}^N$. Равенство этих двух поперечников позволяет получать следствия для поперечников множеств в $\mathbb{R}^N$. Приведём такое следствие.

Напомним, что действие группы H на множестве транзитивно, если для любых его элементов x, y найдётся $h \in H$ такой, что $h(x) = y$.

Теорема 1.3. *Пусть группа H транзитивно действует на множестве $\{1,\dots,N\}$, и K — безусловное множество в $\mathbb{R}^N$, инвариантное относительно действия группы H, то есть, для любого элемента $h \in H$,*

$$(x_1,\dots,x_N) \in K \quad \Rightarrow \quad (\pm x_{h(1)},\dots,\pm x_{h(N)}) \in K.$$

Тогда при $1 \leqslant q \leqslant 2$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$d_n(K,\ell_q^N) \geqslant c(q,\varepsilon) d_0(K,\ell_q^N) = c(q,\varepsilon) \sup_{x\in K} \|x\|_q, \quad \text{при } n \leqslant N(1-\varepsilon).$$

Неформально говоря, это означает, что безусловное координатно-однородное множество K является жёстким в ℓ_q^N. В качестве K можно взять любое множество, инвариантное относительно смен знаков и любых перестановок координат (или только циклических перестановок). Приведём ещё ряд примеров: $V_k^N := B_\infty^N \cap kB_1^N$ (в этом случае "жёсткость" доказал Глускин); пересечение любого семейства шаров $r_\alpha B_{p_\alpha}^N$ и шары смешанных норм и их пересечения (их изучали Галеев, Васильева).

Отметим, что при n, очень близких к N, поперечники таких множеств всё же могут быть малы — в этом отличие от случая теоремы Тихомирова о сечениях шара. Б. Грин (2020) и А. Сах, М. Соуни, Я. Чжао (2023) рассмотрели поперечники орбиты Gx фиксированного единичного вектора под действием конечной подгруппы G ортогональной группы $\mathrm{O}(N)$ и доказали, что $d_{N-k}(Gx,\ell_2^N) \lesssim \log^{-1/2}(N/k)$ для любого такого множества при $1 \leqslant k \lesssim N/\log^C(3N)$.

При $q > 2$ аналог теоремы 1.2 не имеет места. Пример поперечника $d_n(B_1^N,\ell_q^N)$ показывает, что и теорема 1.3 не верна в этом случае.

В основные результаты главы не вошёл ряд других утверждений, доказанных в этом параграфе. Кратко упомянем некоторые из них: оценка поперечников класса функций, определяемого условием $\sum k^\alpha |\langle f, f_k\rangle| \leqslant 1$; жёсткость изотропных лог-вогнутых векторов; оценки в L_q, $q > 2$; жёсткость независимых функций в метрике L_0 (см. ниже); жёсткость лакунарных систем вида $\{\varphi(k_j x)\}$.

В **§1.4** получены оценки сверху на поперечники вида $d_n(\{f_1,\dots,f_N\},L_q)$ для двух классических систем функций — системы Уолша и тригонометрической системы.

Теорема 1.4. *Пусть $w_0, w_1, w_2, \dots$ — система Уолша в нумерации Пэли. Для любого $q \in [1,2)$ существует $\delta = \delta(q) > 0$ такое, что справедливо неравенство*

$$d_n(\{w_0,\dots,w_{N-1}\},L_q[0,1]) \leqslant C_q N^{-\delta}, \quad \text{при } n \geqslant N^{1-\delta}.$$

Кроме того,

$$d_n(\{w_0,\dots,w_{N-1}\},L_q[0,1]) \geqslant c\min\{1,n^{-1/2}N^{1/q'}\} \quad \textit{при } n \leqslant N/4.$$

Мы видим, что некоторые равномерно ограниченные ортонормированные системы могут быть хорошо приближены пространствами малой размерности во всех L_q, $q<2$. Это показывает содержательность результатов предыдущего параграфа.

Теорема 1.4 получена с помощью конструкции, возникшей в теории сложности в связи с близкой задачей о *жёсткости матриц*. Функция жёсткости матрицы A определяется как расстояние Хэмминга от A до множества матриц заданного ранга:

$$\mathrm{Rig}(A,n) := \min_{\operatorname{rank} B\leqslant n} \#\{(i,j)\colon A_{i,j}\neq B_{i,j}\}.$$

Эта величина была введена Л. Вэлиантом[13] в 1977 г. как способ получения нижних оценок на схемную сложность — скажем, неравенство $\mathrm{Rig}(A_N,\varepsilon N) \geqslant N^{1+\varepsilon}$ с некоторым фиксированным $\varepsilon>0$ влечёт суперлинейную оценку схемной сложности отображения $x\mapsto A_N x$. Функция жёсткости выражается через усреднённый поперечник для метрики Хэмминга в $\mathbb{R}^M$ (для единообразия мы её нормируем), аналогично (2):

$$\mathrm{Rig}(A,n) = MN d_n^{\mathrm{avg}}(\{A^1,\dots,A^N\},L_{\mathrm{H}}^M).$$

Недавно был получен достаточно неожиданный результат[18]: Дж. Алман и Р. Виллиамс доказали, что семейство матриц Уолша–Адамара не является жёстким — их ранг может быть значительно уменьшен путём изменения небольшого количества элементов. Теорема 1.4 использует эту конструкцию.

Далее в параграфе рассматриваются метрика L_0, отвечающая за сходимость по мере: $\|f-g\|_{L_0} := \inf\{\varepsilon\geqslant 0\colon \mu\{x\colon |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon\}$, и функциональный аналог метрики Хэмминга: $\|f-g\|_{L_{\mathrm{H}}} := \mu\{x\colon f(x)\neq g(x)\}$. Отметим, что метрика L_{H} возникает в теории функций в контексте теорем об "исправлении". Так, классическая теорема Лузина утверждает, что C плотно в пространстве всех измеримых функций в метрике L_{H}, а теорема Меньшова — что плотно множество функций с равномерно сходящимся рядом Фурье. Данную тематику развивали Кашин, М.Г. Григорян, В.Г. Кротов и другие математики.

[18] J. Alman, R. Williams, "Probabilistic rank and matrix rigidity", *STOC 2017: Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing* (2017), 641–652.

Те же соображения, что в теореме 1.4, позволяют установить интересный эффект: для приближения N функций систем Уолша в L_{H} или тригонометрической системы в метрике L_0 достаточно пространств очень малой размерности (меньше любой степени N).

Естественно задать вопрос: возможна ли аппроксимация как в теореме 1.4, для тригонометрической системы, хотя бы в пространстве L_1? К сожалению, удалось построить хорошую аппроксимацию лишь при $q < 1$. В этом случае возможно приближение гармоники другими гармониками. Имеет место результат В.И. Иванова и В.А. Юдина 1980 года: для любого $0 < q < 1$ равномерно по M и $N > M$,

$$\rho(\cos Mx,\ \operatorname{span}\{e^{ikx} \colon |k| \leqslant N,\ k \neq M\})_q \asymp (N - M + 1)^{1-1/q}.$$

Мы доказываем, что при любом $q \in (0, 1)$ можно хорошо приблизить N подряд идущих гармоник пространством, порождённым некоторыми $o(N)$ гармониками.

Глава 2 "Поперечники классов функций критической гладкости".

Для $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $W_p^r[a, b]$ обозначим класс Соболева, состоящий из функций $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных вместе с производными $f', \ldots, f^{(r-1)}$, для которых $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$. Классы 2π-периодических функций $W_p^r(\mathbb{T})$ определяются аналогично.

Колмогоров в работе 1936 года не только ввёл понятие поперечника, но и вычислил точные значения поперечников классов $W_2^r[0, 1]$ и $W_2^r(\mathbb{T})$ в метрике L_2. Оказалось, что

$$d_{2n-1}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2) = d_{2n}(W_2^r(\mathbb{T}), L_2) = n^{-r}$$

и экстремальным пространством является пространство $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка меньше n. В случае отрезка ответ был дан в терминах спектра специального дифференциального оператора.

Нетрудно видеть, что порядки убывания поперечников в периодическом и непериодическом случае совпадают; в этом контексте мы можем записывать класс просто как W_p^r.

Тем самым, возникла задача: найти порядки поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$ при $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

В **§2.1** доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого $q \in (2, \infty)$ справедливо порядковое равенство*

$$d_n(W_1^1, L_q) \asymp n^{-1/2} \log n.$$

Этот результат завершает решение упомянутой задачи. Ответ в ней получился таким:

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } p \geqslant q \text{ или } 2 < p < q, \\ n^{-r-1/2+1/p}, & \text{если } p \leqslant 2 < q,\ rp > 1, \\ n^{-r-1/q+1/p}, & \text{если } p < q \leqslant 2, \\ n^{-1/2}\log n, & \text{если } r = p = 1,\ 2 < q < \infty. \end{cases}$$

Поперечник класса W_1^1 в L_∞, очевидно, равен бесконечности.

Поперечник можно оценить сверху погрешностью приближения тригонометрическими полиномами, т.е. величиной $\rho(W_p^r(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n)_q \asymp n^{-r+(1/p-1/q)_+}$ при всех p, q. Это порядковое равенство давно известно специалистам; для оценок используются классические методы Фурье, Валле Пуссена, Фавара; см. книгу[2]. (Как мы увидим, такая оценка поперечника не всегда точна.)

Задача о поперечниках классов Соболева обладает большой историей. Библиографию можно найти в работе [11] или во введении к диссертации. Перечислим основные этапы в решении этой задачи. После случая $p = q = 2$, рассмотренного Колмогоровым, У. Рудиным (1952) были, по сути, найдены порядки поперечников $d_n(W_1^1, L_2)$ и $d_n(W_\infty^1, L_2)$. Стечкин[17] нашёл порядки для $p = \infty$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$ (и всех r). Лоренц (1960) получил точную по порядку нижнюю оценку для $p = \infty$, $q = 1$; отсюда следуют порядки для всего "верхнего треугольника" $p \geqslant q$ (название связано с традицией рисовать множество параметров (p, q) как единичный квадрат с осями $(1/p, 1/q)$, см. рис. 1). Независимо, порядки (а также некоторые точные значения) в верхнем треугольнике были найдены Тихомировым и Маковозом в работах 1960–1972 гг. М.З. Соломяк и Тихомиров разобрали (в двойственной формулировке) случай $p = 1$, $q \leqslant 2$. Исмагилов получил точные оценки снизу для $1 \leqslant p < q = 2$ и позже при $1 \leqslant p < q \leqslant 2$. В итоге оказалось, что при $q \leqslant \max\{p, 2\}$ тригонометрические полиномы оптимальны; открытым оставался случай "трапеции" $q > \max\{p, 2\}$.

Исмагилов (1974) обнаружил, что для трапеции тригонометрические полиномы не обязательно оптимальны, в частности, $d_n(W_1^2, L_\infty) \lesssim n^{-6/5}\log n$. Прорыв в этой задаче был совершён Кашиным в известной работе[9] 1977 года, он нашёл порядки для почти всех оставшихся случаев, включая принципиальный случай $p = 2$, $q = \infty$.

Оставался открытым только один случай: $r = p = 1$, $2 < q < \infty$. Название "критическая гладкость" связано с тем, что при $rp > 1$ пространство Соболева $\mathcal{W}_p^r[a, b]$ компактно вложено в $C[a, b]$, а при $r = p = 1$ это вложе-

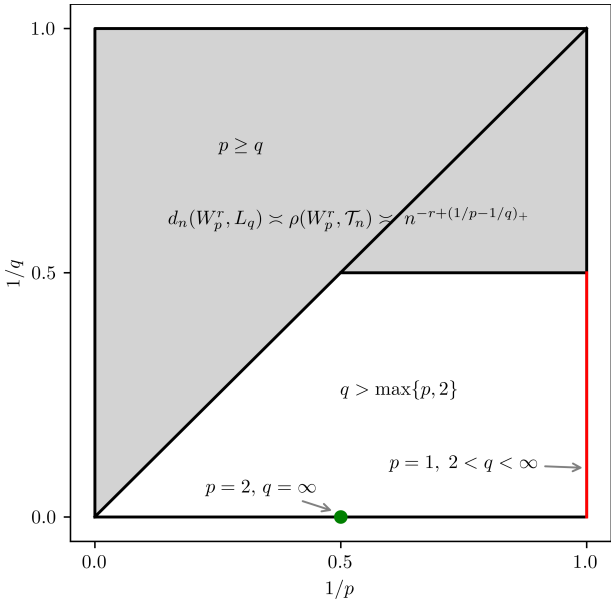


Рис. 1: Параметры (p, q) в задаче о поперечниках $d_n(W_p^r, L_q)$.

ние нарушается. Е.Д. Куланин[19] получил следующие оценки:

$$n^{-1/2} \log^{1/2-\varepsilon} n \lesssim d_n(W_1^1, L_q) \lesssim n^{-1/2} \log n, \tag{8}$$

для любого фиксированного $\varepsilon > 0$; оказалось, что порядок поперечников содержит логарифмический множитель. Э.С. Белинский доказал, что верхняя оценка точна, если рассматривать только подпространства, порождённые произвольными n гармониками: $d_n^T(W_1^1, L_q) \asymp n^{-1/2} \log n$. Позже, в работе [9] удалось убрать ε из (8), но логарифмический зазор оставался. Наконец, в работе автора [11] была доказана теорема 2.1 и тем самым найден порядок поперечника.

Отметим, что доказательство теоремы 2.1 использует усредненный поперечник. Пусть χ_t – "ступенька", т.е. функция, заданная как $\chi_t(x) := 1$, $0 \leqslant x < t$ и $\chi_t(x) := -1$, $t \leqslant x \leqslant 1$. Поскольку $\chi_t \in 2\overline{W_1^1}$, то оценка снизу поперечника класса W_1^1 сводится к оценке поперечника множества ступенек $\{\chi_t\}_{t\in(0,1)}$. При доказательстве теоремы устанавливается следующее

[19] Е.Д. Куланин, "О поперечниках класса функций ограниченной вариации в пространстве $L^q(0,1)$, $2 < q < \infty$", *УМН*, **38**:5(233) (1983), 191–192.

порядковое равенство:

$$d_n^{\mathrm{avg}}(\chi_{\mathbf{t}}, L_q)_q \asymp n^{-1/2}\log n, \quad 2 < q < \infty,$$

где $\mathbf{t}$ — случайно и равномерно распределённая точка на $[0,1]$ и $\chi_{\mathbf{t}}$, стало быть, случайный элемент L_q.

Параграф **§2.2** посвящён близким к W_1^1 классам Бесова. Пусть заданы параметры $r > 0$, $p, \theta \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L_p[0,1]$ полунорму (где $s = 1 + \lfloor r \rfloor$):

$$|f|_{B^r_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-r}\omega_s(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, & 1 \leqslant \theta < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{-r}\omega_s(f,t)_p, & \theta = \infty, \end{cases}$$

где $\omega_s(f,t)_p$ — обычный модуль гладкости в L_p. Класс Бесова $B^r_{p,\theta} := B^r_{p,\theta}[0,1]$ состоит из функций, для которых $\|f\|_p + |f|_{B^r_{p,\theta}} \leqslant 1$.

Порядки поперечников классов Бесова были получены в работах Динь Зунга, А.С. Романюка, Галеева во всех случаях $1 < p, q < \infty$, кроме $q < p < 2$ и $p \geqslant 2 > q$, $\theta < 2$ (есть также некоторые результаты о граничных случаях $p, q \in \{1, \infty\}$).

Хорошо известно, что имеют место вложения соответствующих пространств

$$\mathcal{B}^1_{1,1}[0,1] \subset \mathcal{W}^1_1[0,1] \subset \mathcal{B}^1_{1,\infty}[0,1]. \tag{9}$$

В связи с задачей о W_1^1 и соотношением (9) был рассмотрен случай $r = p = 1$ для классов Бесова.

Теорема 2.2. *При $2 < q < \infty$ и $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливо порядковое равенство*

$$d_n(B^1_{1,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} n^{-1/2}\log^{1/2} n, & 1 \leqslant \theta \leqslant 2, \\ n^{-1/2}\log^{1-1/\theta} n, & 2 \leqslant \theta \leqslant \infty. \end{cases}$$

Глава 3 "Поперечники классов функций высокой гладкости". При $r > 1$ порядки поперечников классов Соболева W_p^r давно известны. В этой главе рассматриваются две задачи, связанные с более тонкими аппроксимативными свойствами этих классов.

§3.1 посвящён относительным поперечникам в интегральной и равномерной метриках. Относительный поперечник был введён В.Н. Коноваловым[20]; это вариант колмогоровского поперечника, в котором множество

[20] В.Н. Коновалов, "Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций", *Матем. заметки*, **35**:3 (1984), 369–380.

приближается не всем подпространством, а его пересечением с другим множеством. Формально, для $W, V \subset X$ определим n-поперечник W относительно V равенством

$$d_n(W, V, X) := \inf_{\substack{Q_n \subset X \\ \dim Q_n \leqslant n}} \rho(W, Q_n \cap V)_X.$$

Нас будут интересовать поперечники $d_n(W_p^r, MW_p^r, L_p)$. Параметр $M \geqslant 1$ ограничивает аппроксимацию теми функциями $g \in Q_n$, у которых $\|g^{(r)}\|_p \leqslant M$. Мы докажем две теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$. Для всех $\varepsilon \in [n^{-2}, 1]$ справедливо неравенство:*

$$d_n(W_\infty^r(\mathbb{T}), (1+\varepsilon)W_\infty^r(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})) \geqslant c(r) n^{-r} \varepsilon^{1-r/2}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$, $M \geqslant 2$; $p = 1$ или $p = \infty$.*

1. Для $\delta_1 := \exp(-c_1 M)$ и всех $n \geqslant \delta_1^{-1}$ имеет место неравенство

$$d_{2n}(W_p^r(\mathbb{T}), MW_p^r(\mathbb{T}), L_p(\mathbb{T})) \geqslant \frac{1}{8} \left(\frac{1+\delta_1}{n} \right)^r.$$

2. Для $\delta_2 := \exp(-c_2 M)$ и всех $n \geqslant C\delta_2^{-1}$ справедливо неравенство

$$d_{2n-1}(W_p^r(\mathbb{T}), MW_p^r(\mathbb{T}), L_p(\mathbb{T})) \leqslant \mathcal{K}_r \left(\frac{1+C\delta_2}{n} \right)^r.$$

($\mathcal{K}_r$ — константа Фавара.)

Эти два результата, в основном, завершают решение задачи об относительных поперечниках в случаях $p = 1$ и $p = \infty$. Опишем получившуюся картину и одновременно историю вопроса. Начнём для определённости с $p = \infty$. Обозначим

$$d_n := d_n(W_\infty^r(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})), \quad K_n := d_n(W_\infty^r(\mathbb{T}), MW_\infty^r(\mathbb{T}), L_\infty(\mathbb{T})).$$

(Ясно, что d_n и K_n зависят ещё от параметра r, а K_n зависит ещё и от M.) Поперечник d_n был найден Тихомировым[21,22]:

$$d_{2n-1} = d_{2n} = \mathcal{K}_r n^{-r}. \tag{10}$$

[21] В.М. Тихомиров, "Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений", *УМН*, **15**:3(93) (1960), 81–120.

[22] В.М. Тихомиров, "Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$", *Матем. сб.*, **80(122)**:2(10) (1969), 290–304.

При $r = 1, 2$ поперечники совпадают: $K_n = d_n$. Пусть $r \geqslant 3$; будем двигаться в сторону увеличения M. Случай $M = 1$, с которого и началось исследование относительных поперечников, был изучен Коноваловым в работе[20]. Им был обнаружен интересный эффект порядкового отличия относительного ($K_n \asymp n^{-2}$) и колмогоровского ($d_n \asymp n^{-r}$) поперечников:

- Если $M = 1$, то $c_1(r)n^{-2} \leqslant K_n \leqslant c_2(r)n^{-2}$.

(То же верно при $M \leqslant 1 + 1/n^2$.) Позже простое и изящное доказательство результата Коновалова было дано Тихомировым.

"Фазовый переход" между случаями $M = 1$ и $M > 1$ описывается следующим образом.

- Если $M = 1 + \varepsilon$, где $1/n^2 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, то

$$c_1(r)n^{-r}\varepsilon^{1-r/2} \leqslant K_n \leqslant c_2(r)n^{-r}\varepsilon^{1-r/2}. \tag{11}$$

Верхняя оценка в (11) была получена В.Ф. Бабенко (1991) с помощью приближения сплайнами. Нижняя оценка составляет теорему 3.1. Из верхней оценки вытекает, что при фиксированном $M > 1$ порядки колмогоровских и относительных поперечников совпадают:

- При фиксированном $M > 1$ имеем $K_n \asymp n^{-r}$.

(Тем самым Бабенко ответил на вопрос Стечкина.)

Ю.Н. Субботин и С.А. Теляковский в работе[23] изучили вопрос о том, когда относительные и колмогоровские поперечники в точности совпадают.

- При достаточно большом M поперечники равны:

$$d_n = K_n, \quad \text{если } M = \tfrac{4}{\pi^2} \ln \min(n, r) + C_0.$$

Оставался открытым вопрос, можно ли в качестве M взять абсолютную постоянную. Другими словами, возможно ли приближение класса W_∞^r линейными подпространствами заданной размерности, при котором 1) погрешность приближения не более чем в фиксированное число раз хуже, чем колмогоровский поперечник и 2) нормы r-х производных приближающих функций равномерно ограничены? Отрицательный ответ на этот вопрос следует из п.1 теоремы 3.2. Действительно, оценка поперечника снизу гарантирует следующее.

[23] Ю.Н. Субботин, С.А. Теляковский, "Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций", *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 871–879.

- Если $M = c\ln r$, где c достаточно мало, то при достаточно больших r: $\varliminf\limits_{n\to\infty} K_n/d_n \geqslant \exp(r^{1/2})$.

В случае L_1 все результаты аналогичны, см. Введение.

Ключевым элементом доказательства теоремы 3.2 является теорема Ал.А. Привалова о норме проектора $C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ на подпространстве заданной коразмерности. Мы переносим результат Привалова с равномерной метрики на интегральную.

Следующий параграф, **§3.2**, посвящён чебышёвским сплайнам. Тихомиров в работе[22] выразил колмогоровские поперечники класса W^r_∞ на отрезке в равномерной метрике через норму так называемых чебышёвских сплайнов:

$$d_{n+r}(W^r_\infty[-1,1], L_\infty[-1,1]) = \|x_{n,r}\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}. \tag{12}$$

Сплайн $x_{n,r}$ определяется как наименее уклоняющаяся от нуля на $[-1,1]$ функция, у которой r-я производная равна по модулю единице и меняет знак в n точках внутри $[-1,1]$. Ясно, что при $n = 0$ получается последовательность многочленов Чебышёва: $x_{0,r} = T_r/(r!2^{r-1})$; отсюда название *чебышёвский сплайн*. Как устроена последовательность $\{x_{n,r}\}_{r\geqslant 1}$ при фиксированном $n > 0$? Во сколько раз (асимптотически, при $r \to \infty$) уменьшится норма по сравнению с $x_{0,r}$, если разрешить n "изломов", и где они будут располагаться? Мы ответим на эти вопросы дальше.

Для формулировки теоремы потребуется следующее определение. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^M$ — система функций в $L(0,\infty)$. Набор точек $\{x_i\}_{i=1}^K$, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_K < \infty$, называется *каноническим набором* для $\{\psi_j\}$, если выполняются соотношения (в которых полагаем $x_0 := 0$, $x_{K+1} := \infty$):

$$\sum_{k=0}^{K} (-1)^k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi_j(x)\,dx = 0, \quad j = 1,\ldots,M.$$

Сплайн $x_{n,r}$ симметричен относительно нуля и его узлы тоже; при четном $n = 2n'$ он имеет n' положительных узлов $\{\tau_j\}_{j=1}^{n'}$ и n' отрицательных $\{-\tau_j\}_{j=1}^{n'}$; при нечетном $n = 2n'+1$ имеем n' положительных узлов, n' отрицательных и узел $\tau = 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geqslant 1$ фиксировано, $n' := \lfloor n/2 \rfloor$. При $n \geqslant 2$ положительные узлы $\{\tau_j\}$ сплайнов $x_{n,r}$ удовлетворяют асимптотике при $r \to \infty$:*

$$\tau_k(x_{n,r}) = \varkappa_k r^{-1/2}(1 + o(1)), \quad k = 1,\ldots,n',$$

где числа $0 < \varkappa_1 < \ldots < \varkappa_{n'} < \infty$ *образуют канонический набор для системы* $\{x^{n-2q}e^{-x^2}\}_{q=1}^{n'}$ *в* $L(0,\infty)$. *Имеет место асимптотика при* $r \to \infty$*:*

$$\frac{\|x_{n,r}\|_\infty}{\|x_{0,r}\|_\infty} = A_n r^{-n/2}(1+o(1)),$$

где числа $A_n > 0$ *определяются следующим образом:* $A_1 = 1/\sqrt{\pi}$,

$$A_n = (-1)^{n'-1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n'}(-1)^{k-1}\varkappa_k^{n-1}e^{-\varkappa_k^2}, \quad n \geqslant 2.$$

Что это означает для поперечников? При фиксированном r известна асимптотика

$$d_n(W_\infty^r[-1,1], L_\infty) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^r \mathcal{K}_r n^{-r}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Это соответствует периодическому случаю, в котором значение поперечника вычисляется явно, см. (10). Другими словами, при $n \to \infty$ и фиксированном r "концевые эффекты" пропадают, и рассматриваемая нами задача оказывается эквивалентна периодической. Однако в общем случае при произвольных n и r, формула (12) не дает исчерпывающего представления о поведении величины $d_n(W^r) := d_n(W_\infty^r, L_\infty)$. Рассмотрим, например, следующий вопрос. Ясно, что $d_n(W^r) = \infty$ при $n < r$ и $d_r(W^r) = \|x_{0,r}\| = (r!2^{r-1})^{-1}$. Что можно сказать о $d_{r+1}(W^r)$ при больших r? Этот вопрос задавался в книге[2]. Из сказанного выше вытекает

Следствие. *Для фиксированного* $n \geqslant 1$ *имеем*

$$\frac{d_{n+r}(W_\infty^r, L_\infty)}{d_r(W_\infty^r, L_\infty)} = A_n r^{-n/2}(1+o(1)), \quad \textit{при } r \to \infty.$$

Проделанные нами вычисления являются шагом к явным оценкам величины поперечника (12) при произвольных N и r; по-видимому, получение хороших оценок в общем случае представляет собой трудоемкую задачу.

Сплайны $x_{n,r}$ используются для построения совершенных сплайнов на полупрямой, которые также обладают важными экстремальными свойствами. Пример чебышёвского сплайна показан на рисунке 2.

Глава 4 "Полилинейные приближения" посвящена некоторым оценкам погрешности полилинейных приближений. Рассмотрим функции d переменных, $f\colon I^d \to \mathbb{R}$, где для определённости $I = [a,b]$ или $I = \mathbb{T}$. Полилинейные приближения — это приближения вида

$$f(x_1,\ldots,x_d) \approx \sum_{k=1}^{n} u^{1,k}(x_1)u^{2,k}(x_2)\cdots u^{d,k}(x_d) \tag{13}$$

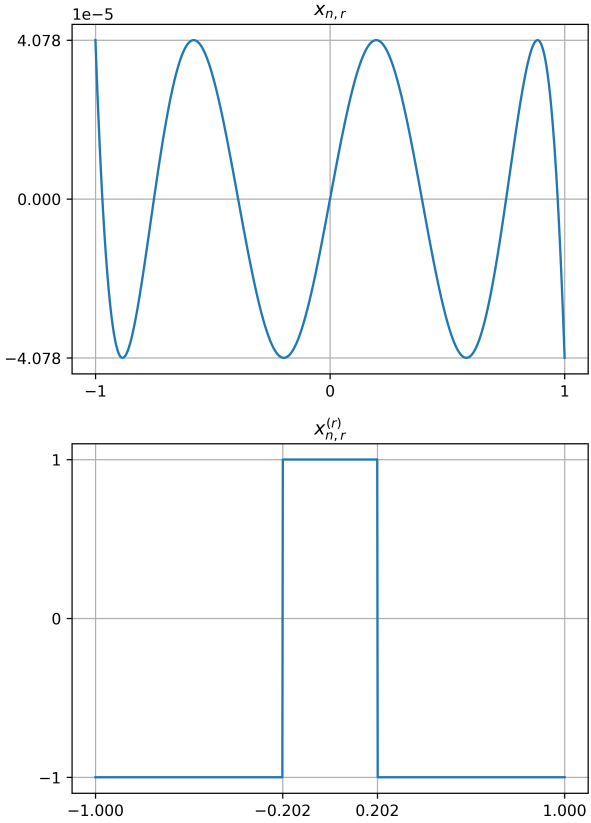


Рис. 2: Чебышёвский сплайн $x_{n,r}$ при $n = 2$, $r = 5$.

или, по современной терминологии, n-членные приближения по словарю полилинейных функций. В дискретном варианте речь идёт о тензорах $\mathbb{R}^{m_1 \times \cdots \times m_d} = \mathbb{R}^{m_1} \otimes \mathbb{R}^{m_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{R}^{m_d}$ и приближении тензорами ранга n. Понятие ранга и его вариации играют важную роль в численных методах.

Обозначим через $\Theta_n(f)_p$ величину наилучшего полилинейного приближения вида (13) в метрике L_p. Для класса функций положим $\Theta_n(\mathcal{F}, L_p) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \Theta_n(f, L_p)$.

При $d = 2$ получается билинейное приближение. Классическая теорема Шмидта выражает величину $\Theta_n(f)_2$ через сингулярные числа интегрального оператора с ядром $f(x_1, x_2)$. Отметим, что равномерная погрешность

билинейной аппроксимации равна соответствующему поперечнику, аналогично (2).

В **§4.1, §4.2** мы показываем, что большинство $m_1 \times \cdots \times m_d$ тензоров с элементами ± 1 являются "жёсткими" в том смысле, что они сильно отличаются от тензоров вида $\operatorname{sign} T$ с рангом существенно меньше максимально возможного: $\operatorname{rank} T \lesssim \prod m_j / \max m_j$. В доказательстве используется алгебро–геометрический результат Шапиро–Уоррена[24] о количестве векторов, составленных из знаков многочленов от нескольких переменных. Отметим, что матричные методы часто не работают для тензоров (при $d > 2$); например, нет хорошего аналога сингулярного разложения (SVD). Оказалось, что подход Шапиро–Уоррена, применённый ранее[25] в случае матриц, работает и для тензоров.

Используя жёсткость тензоров и подходящую дискретизацию, в **§4.3** мы получаем нижние оценки на погрешность полилинейных приближений функциональных классов.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathbf{m}}$, где $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, множество вещественных тригонометрических полиномов с со спектром в $\prod_{j=1}^d [-m_j, m_j]$. Пусть также B_∞ — единичный шар $L_\infty(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 4.1. *Для любых $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ имеем*

$$\Theta_n(\mathcal{T}_{\mathbf{m}} \cap B_\infty, L_1(\mathbb{T}^d)) \geqslant c_2(d), \quad \text{при } n \leqslant c_1(d) \frac{\prod_{j=1}^d m_j}{\sum_{j=1}^d m_j}.$$

Мы применим этот результат к классам функций смешанной гладкости $W_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$. Для целых гладкостей такой класс можно определить условием

$$\left\| \frac{\partial^{r_1}}{\partial x_1^{r_1}} \cdots \frac{\partial^{r_d}}{\partial x_d^{r_d}} f(x_1, \ldots, x_d) \right\|_p \leqslant 1.$$

(В общем случае класс определяется через свёртку с ядром Бернулли.) По поводу классов смешанной гладкости см. книги[8,7]. Нас интересует изотропный случай $\mathbf{r} = r\mathbf{1} = (r, r, \ldots, r)$.

Полилинейные приближения классов $W_p^{\mathbf{r}}$ подробно изучались В.Н. Темляковым. В работе[26] им была получена оценка сверху:

$$\Theta_n(W_2^{\mathbf{r}}, L_2(\mathbb{T}^d)) \lesssim n^{-\frac{rd}{d-1}}.$$

[24] H.E. Warren, "Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds", *Trans. AMS*, **133**:1 (1968), 167–178.

[25] N. Alon, P. Frankl, V. Rödl, "Geometrical realization of set systems and probabilistic communication complexity", *Proc. 26th Ann. Symposium on Foundations of Computer Science* (1985), 277-280.

[26] В.Н. Темляков, "Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций", *Тр. МИАН СССР*, **181** (1988), 250–267.

Используя теорему 4.1, мы получаем точную по порядку нижнюю оценку

$$\Theta_n(W^{\mathbf{r}}_\infty, L_1(\mathbb{T}^d)) \gtrsim n^{-\frac{rd}{d-1}}.$$

Объединяя эти неравенства, получим

Следствие 4.1. *Для любых* $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, $r > 0$, $\mathbf{r} := (r, \dots, r)$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant 2$ *справедливо порядковое равенство*

$$\Theta_n(W^{\mathbf{r}}_p, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp n^{-\frac{rd}{d-1}}.$$

Отметим, что случай $d = 2$ хорошо изучен, теорема 4.1 и порядки в следствии 4.1 при $d = 2$ известны; основную новизну результатов этой главы составляет случай $d > 2$. Приведённое следствие уточняет теорему из работы[27].

Глава 5 называется "Избранные задачи о поперечниках в $\mathbb{R}^N$". Параграфы этой главы независимы друг от друга.

§5.1 посвящён поперечникам шаров в смешанной норме. Хорошо известно, что оценки поперечников функциональных классов часто сводятся к оценкам поперечников специальных конечномерных множеств. Так, при дискретизации классов Соболева W^r_p возникают ℓ^N_p-шары. Галеев[28] исследовал поперечники некоторых классов функций многих переменных и получил нижние оценки для них через поперечники шаров в смешанных нормах.

Дадим определение смешанной нормы в интересующем нас случае. Пусть $N = sb$ и координаты пространства $\mathbb{R}^N$ разбиты на b блоков размера s. Для $x \in \mathbb{R}^N$ через $x[j]$ обозначим вектор, образованный координатами из j-го блока. Через $\ell^{s,b}_{q_1,q_2}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|x\| := \Big\| (\|x[1]\|_{\ell^s_{q_1}}, \dots, \|x[b]\|_{\ell^s_{q_1}}) \Big\|_{\ell^b_{q_2}}.$$

Единичный шар этого пространства обозначаем $B^{s,b}_{q_1,q_2}$.

В работе[28] Галеев доказал точное по порядку неравенство:

$$d_{N/2}(B^{s,b}_{1,\infty}, \ell^{s,b}_{2,q}) \geqslant c_q b^{1/q}, \quad 1 < q < \infty.$$

[27] D. Bazarkhanov, V. Temlyakov, "Nonlinear tensor product approximation of functions", *J. Complexity*, **31**:6 (2015), 867–884.

[28] Э.М. Галеев, "Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 418–430.

Он поставил вопрос о случае $q = 1$; А.Д. Изаак[29] получил оценку

$$d_{N/2}(B^{s,b}_{1,\infty}, \ell^{s,b}_{2,1}) \geqslant cb\frac{\sqrt{\log\log b}}{\log b}.$$

При этом, как нетрудно видеть, $d_0(B^{s,b}_{1,\infty}, \ell^{s,b}_{2,1}) = b$.

Нами получен точный по порядку результат:

Теорема 5.1. *Для всех $s, b \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $N := sb$, имеет место неравенство*

$$d_n(B^{s,b}_{1,\infty}, \ell^{s,b}_{2,1}) \geqslant c(\varepsilon)b, \quad \textit{при } n \leqslant N(1-\varepsilon).$$

Из теоремы 5.1 получаются порядковые равенства для линейных поперечников классов Гёльдера–Никольского.

Следствие 5.2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\mathbf{r} = (r, r, \dots, r)$. При (а) $1/p + 1/q < 1$, $p \leqslant 2$, $r > 1 - 1/q$; (б) $2 \leqslant p < q$, $r > 1/p - 1/q$, справедливы порядковые равенства:*

$$\lambda_n(H^{\mathbf{r}}_p(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^{d-1} n}{n}\right)^{r-1/2+1/q} \log^{(d-1)/q} n, & \textit{в случае (а)}, \\ \left(\frac{\log^{d-1} n}{n}\right)^{r-1/p+1/q} \log^{(d-1)/q} n, & \textit{в случае (б)}. \end{cases}$$

Рядом математиков были получены порядки поперечников шаров в смешанных нормах для других наборов параметров (p_1, p_2, q_1, q_2). Большинство результатов относятся к случаю "жёсткости"; точнее говоря, доказывались соотношения вида $d_n(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2}) \asymp d_0(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2})$ при $n \leqslant N/2$. См. работы Галеева, Васильевой, А.Д. Изаака, С. Дирксена и Т. Ульриха, перечисленные в §5.1 диссертации. Оценки этих поперечников применялись в изучении аппроксимативных свойств разных функциональных классов: Гёльдера–Никольского классов Бесова смешанной гладкости, весовых классов Бесова.

Известно, что имеет место "дихотомия": при $q > \max\{p, 2\}$ шары B^N_p хорошо приближаются маломерными пространствами: $d_0(B^N_p, \ell^N_q) = 1$, но $d_n(B^N_p, \ell^N_q) \leqslant C(p,q)N^{-\delta}$, если $n \geqslant N^{1-\delta}$, $\delta = \delta(p,q) > 0$. Однако при $q \leqslant \max\{p, 2\}$ шары B^N_p являются жёсткими в ℓ^N_q: $d_n(B^N_p, \ell^N_q) \geqslant c(\varepsilon)d_0(B^N_p, \ell^N_q)$, при $n \leqslant N(1-\varepsilon)$.

Нам получен аналогичный критерий для смешанных норм.

[29] А.Д. Изаак, "Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой", *Матем. заметки*, **55**:1 (1994), 43–52.

Теорема 5.2. *Пусть* $1 \leqslant p_1, p_2, q_1, q_2 \leqslant \infty$; $s, b \in \mathbb{N}$ *и* $N := sb$.

A) Предположим, что набор (p_1, p_2, q_1, q_2) *удовлетворяет трём условиям: (i)* $q_1 \leqslant \max\{p_1, 2\}$; *(ii)* $q_2 \leqslant \max\{p_2, 2\}$; *(iii) он не попадает в "исключительный случай"*

$$q_1 < \min\{p_1, q_2\} \text{ и } p_2 < q_2 \leqslant 2.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *справедливо неравенство*

$$d_n(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2}) \geqslant c(q_2, \varepsilon) d_0(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2}), \quad \text{при } n \leqslant N(1-\varepsilon).$$

B) Для любого набора (p_1, p_2, q_1, q_2), *не удовлетворяющего A), существует* $\gamma > 0$ *такое, что для достаточно больших* $t := \min(s, b)$ *имеем*

$$d_n(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2}) \leqslant t^{-\gamma} d_0(B^{s,b}_{p_1,p_2}, \ell^{s,b}_{q_1,q_2}), \quad \text{если } n \geqslant Nt^{-\gamma}.$$

Отметим, что п.A) легко выводится из теорем 1.3 и 5.1.

В **§5.2** рассматривается вопрос о структуре матриц, поэлементно приближающих единичную матрицу. Погрешность приближения единичной матрицы размера $N \times N$ матрицами ранга не выше заданного n равна колмогоровскому поперечнику октаэдра:

$$\min_{\operatorname{rank} A \leqslant n} \max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |A_{i,j} - \delta_{i,j}| = d_n(B_1^N, \ell_\infty^N). \tag{14}$$

Этот поперечник изучался в ряде работ (см. Введение). Вероятностный метод ($A_{i,j} = n^{-1}\langle x^i, x^j\rangle$ со случайно выбранными $x^1, \dots, x^N \in \{-1, 1\}^n$) даёт оценку $d_n(B_1^N, \ell_\infty^N) \leqslant 2\sqrt{\ln(N)/n}$, из которой следует, что возможна хорошая аппроксимация единичной матрицы при $n \asymp \log N$. С другой стороны, как хорошо известно, для нетривиальной аппроксимации требуется как минимум логарифмический ранг.

Кашин задал следующий вопрос: верно ли, что для матриц ранга $n \asymp \log N$, приближающих единичную, положительная доля элементов будет по модулю больше $cn^{-1/2}$?

С матрицей $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ свяжем функцию распределения

$$F_A^*(\gamma) := N^{-2} |\{(i,j) \colon |A_{i,j}| > \gamma\}|.$$

Теорема 5.3. *Пусть* A — *матрица размера* $N \times N$, *ранга* n *такая, что*

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |A_{i,j} - \delta_{i,j}| \leqslant 1/3.$$

Тогда справедливо неравенство

$$F_A^*(\gamma) \geqslant c \frac{\log N}{n \log(2 + \frac{n}{\log N})}, \quad \text{где } \gamma := c \max\{n^{-3/2} \log N,\, n^{-1}\}.$$

Следствие 5.3. *В условиях теоремы, если* $n \leqslant K \log N$ *для некоторого* K*, то не менее* $c(K)N^2$ *элементов матрицы* A *по модулю больше* $c(K)n^{-1/2}$*.*

Это следствие даёт положительный ответ на вопрос Кашина. Вероятностный метод показывает, что порядок $n^{-1/2}$ нельзя увеличить.

§5.3. Постановка задачи этого параграфа является новой. Пусть K — выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^N$. Ясно, что приблизить всё тело K линейным подпространством — это то же самое, что приблизить крайние точки K. Однако множество крайних точек может быть большим и даже бесконечным. Если мы интересуемся порядком поперечников, то можно построить конечное множество точек $W = \{x_1, \dots, x_m\} \subset K$ такое, что

$$d_n(W, X) \geqslant c\, d_n(K, X), \quad \text{при } n \lesssim N. \tag{15}$$

Неформально будем называть такое W множеством "свидетелей" (в англоязычной литературе в похожих контекстах употребляется слово "witness"). Другими словами, речь идёт об аппроксимации тела K многогранником $\operatorname{conv} W \subset K$ в смысле близости поперечников (15). Ясно, что в качестве свидетелей можно взять какое-либо множество точек $x_1, \dots, x_m \in K$, для которых $K \subset C \operatorname{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_m\}$. Однако и в этом случае может потребоваться много точек. Скажем, для евклидова шара $|W| = m \geqslant \exp(cN)$, что следует из результата Глускина (1988) об оценке объёма многогранников, вписанных в евклидов шар.

Оказалось, что во многих случаях свидетелей нужно не очень много. Этот феномен ещё не вполне изучен, и первым шагом является следующая

Теорема 5.4. *При всех* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$*, за исключением случая* $1 < p < 2$*,* $q = \infty$*, для любого* $N \in \mathbb{N}$ *существует множество* $W \subset B_p^N$ *мощности* $|W| \leqslant CN \log N$ *такое, что*

$$d_n(W, \ell_q^N) \geqslant c(p, q) d_n(B_p^N, \ell_q^N) \quad \textit{для всех } 1 \leqslant n \leqslant cN.$$

Работы автора по теме диссертации

[1] Y. Malykhin, "Matrix and tensor rigidity and L_p-approximation", *J. Complexity*, **72** (2022), 101651, 13 pp.

[2] Ю.В. Малыхин, "Поперечники и жесткость", *Матем. сб.*, **215**:4 (2024), 117–148.

[3] Ю.В. Малыхин, К.С. Рютин, "Поперечники и жесткость безусловных множеств и случайных векторов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **89**:2 (2025), 45–59.

[4] Ю.В. Малыхин, К.С. Рютин, "Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $\ell_{2,1}$", *Матем. заметки*, **101**:1 (2017), 85–90.

[5] Ю.В. Малыхин, "Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^1_{1,\theta}$ и произведений октаэдров", *Труды МИАН*, **312** (2021), 224–235.

[6] Ю.В. Малыхин, "Асимптотические свойства чебышёвских сплайнов с фиксированным числом узлов", *Фундамент. и прикл. матем.*, **19**:5 (2014), 143–166.

[7] Ю.В. Малыхин, "Полное описание относительных поперечников классов Соболева в равномерной метрике", *Труды ИММ УрО РАН*, **28**:4 (2022), 137–142.

[8] Ю.В. Малыхин, "Относительные поперечники классов Соболева в равномерной и интегральной метриках", *Труды МИАН*, **293** (2016), 217–223.

[9] Б.С. Кашин, Ю.В. Малыхин, К.С. Рютин, "Поперечник по Колмогорову и аппроксимативный ранг", *Труды МИАН*, **303** (2018), 155–168.

[10] Ю.В. Малыхин, "О структуре матриц малого ранга, приближающих единичную матрицу", *Матем. заметки*, **117**:5 (2025), 795–798.

[11] Ю.В. Малыхин, "Колмогоровские поперечники класса W^1_1", *Матем. заметки*, **117**:6 (2025), 922–927.