Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
(ИММ УрО РАН)
г. Екатеринбург,
почтовый индекс 620108
ул. Софьи Ковалевской, д.16
тел.(343) 374-83-32, факс 374-25-81
E-mail dir-info@imm.uran.ru

26.09.2025 № 16343/15-2171

На № от .

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

доктор физ.-мат. наук, профессор РАН

Антонов Николай Юрьевич

«26» сентября 2025 г.

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертационную работу
МАЛЫХИНА ЮРИЯ ВЯЧЕСЛАВОВИЧА
«ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ВЕЛИЧИН»,
представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена исследованию колмогоровских поперечников множеств (классов) в линейных метрических пространствах. Понятие поперечника возникло в работе А.Н. Колмогорова 1936 года. Величина поперечника порядка $n \in \mathbb{N}$ множества K в линейном метрическом пространстве определяется как величина наилучшего приближения множества K посредством линейных подпространств размерности не выше n. Кроме самой величины, показывающей насколько хорошо можно приблизить K линейными подпространствами размерности не выше n, исследование поперечника даёт наилучший (близкий к наилучшему) аппарат приближения множества K — приближающее подпространство.

Теория поперечников активно развивается много десятилетий. Ей посвящено очень большое число статей и монографий. Введены близкие к колмогоровскому поперечнику характеристики — поперечник по Гельфанду, относительный и линейный поперечники, информационный поперечник и др. Исследованы взаимосвязи поперечников между собой и с другими характеристиками классов. Изучены поперечники конкретных классов в конкретных пространствах. Нахождение точных значений поперечников является сложной экстремальной задачей и они известны лишь в отдельных случаях. Большинство исследований направлено на определение поведения (порядков) поперечников при росте размерности приближающих подпространств.

Одной из классических и хорошо исследованной в данной тематике является задача о порядках колмогоровских поперечников классов Соболева в пространствах Лебега функций одной переменной, активно изучавшаяся со второй половины XX-го века. Один из основных результатов диссертации — установление порядков поперечников в единственном

оставшемся неисследованным случае этой задачи.

Большое число работ посвящено исследованиям поперечников классов функций многих переменных. Одной из важных задач здесь является исследование классов смешанной гладкости.

Задачи теории поперечников активно исследуются и являются актуальными и в настоящее время. Здесь остаётся большое число открытых вопросов. Кроме важности поперечников в теории приближений, геометрии банаховых пространств, функциональном анализе, в последние годы выявлена их непосредственная связь с задачами вычислительной математики и компьютерных наук, в частности – теории сложности (Complexity) и теории сжатых измерений (Compressed Sensing).

Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 165 источников. Общий объём диссертации составляет 189 страниц.

Введение содержит обзор научных результатов по тематике исследования, обоснование его актуальности; сформулированы цели и задачи, методы исследования, научная новизна и ценность; описаны апробация работы на научных конференциях и семинарах, публикации и личный вклад автора. Приведен обзор содержания глав диссертации, сформулированы доказанные теоремы, некоторые их следствия и обсуждаются полученные результаты.

Первый параграф первой главы содержит предварительные сведения: определение понятий и формулировки теорем, используемых в работе. Во втором параграфе обсуждается понятие усреднённого поперечника, активно использующегося в работе для получения оценок колмогоровских поперечников снизу. Теоремы 1.2 и 1.3 содержат достаточные условия «жесткости» (неприближаемости). В четвертом параграфе получены оценки поперечников по Колмогорову множеств, состоящих из первых N функций системы Уолша – Пэли, в пространствах Лебега $L^q, 1 \le q < 2$, и первых N функций тригонометрической системы в $L^q, 1 < q < 2$.

Вторая глава посвящена поперечникам классов Соболева и Бесова. А.Н. Колмогоров в работе 1936 года вычислил поперечники классов Соболева W_2^r. В дальнейшем задача исследования поперечников классов Соболева активно изучалась и имеет большую историю. Для различных значений параметров порядки поперечников были найдены в исследованиях У. Рудина, С.Б. Стечкина, Г.Г. Лоренца, В.М. Тихомирова, Ю.И. Маковоза, М.З. Соломяка, Р.С. Исмагилова, Е.Д. Глускина и известной и принципиальной в данной тематике работе Б.С. Кашина 1977 г. Основным результатом главы является теорема 2.1, в которой найдены порядки поперечников по Колмогорову d_n класса Соболева W_1^1 в пространствах Лебега $L^q, 2 < q < \infty$, — в единственном остававшемся неисследованным случае. А именно, получено следующее соотношение

$$d_n(W_1^1, L^q) \asymp n^{-1/2} \log n, \quad 2 < q < \infty.$$

Глава 3 посвящена относительным поперечникам $d_n(W_p^r, MW_p^r, L^p)$ в случаях $p = \infty$ и $p = 1$. Ключевыми результатами главы являются теоремы 3.1 и 3.2, которые в основном завершают решение задачи об относительных поперечниках для указанных p.

В связи с теорией поперечников в третьей главе исследуется также асимптотика узлов и норм совершенных сплайнов, наименее уклоняющихся от нуля на $[0, 1]$ (чебышевских сплайнов), при фиксированном числе узлов и стремлении к бесконечности порядка сплайна. Как следствие с помощью одного результата В.М. Тихомирова получается асимптотика отношения колмогоровских поперечников $d_{n+r}(W_\infty^r, L^\infty) / d_r(W_\infty^r, L^\infty)$ при $r \to \infty$.

В четвертой главе рассматриваются оценки полилинейных приближений. Основным результатом главы являются теорема 4.1 и следствие 4.1 об оценках наилучших n-членных приближений полилинейными функциями — линейными комбинациями функций вида $\prod_{j=1}^d u_j(x_j)$. В частности, для наилучшего приближения класса $W_p^{\mathbf{r}}$ функций смешанной

гладкости, определяемых условием $\|\frac{\partial^r}{\partial x_1^r}\dots\frac{\partial^r}{\partial x_d^r}f(x_1,\dots,x_d)\|_{L^p}\le 1$, получена порядковая оценка снизу, совпадающая с оценкой сверху В.Н. Темлякова, и как следствие, порядковое равенство

$$\Theta_n(W_p^{\mathbf{r}},L^q(\mathbb{T}^d))\asymp n^{-\frac{rd}{d-1}},\quad d>2,\ 2\le p\le\infty,\ 1\le q\le 2.$$

В пятой главе изучается несколько независимых задач, связанных с поперечниками конечномерных множеств. В теореме 5.1 получена точная по порядку нижняя оценка поперечника шара в смешанной норме: $d_n(B^{s,b}_{1,\infty},\ell^{s,b}_{2,1})\ge c(\varepsilon)d_0(B^{s,b}_{1,\infty},\ell^{s,b}_{2,1})$, $n\le sb(1-\varepsilon)$. Как следствие, в параграфе 5.1 получены порядковые равенства для линейных поперечников классов Гёльдера – Никольского. В параграфе 5.2 изучается вопрос о структуре матриц, равномерно приближающих единичную матрицу. Величина приближения единичной матрицы матрицами ранга не выше заданного равна поперечнику октаэдра. Наконец, в последнем параграфе вводится и обсуждается понятие свидетелей (witness) — конечного набора точек множества, поперечник которого даёт верхнюю оценку поперечника множества.

В заключении автор приводит ряд открытых вопросов по теме диссертации, изучение которых, по его мнению, представляет интерес.

Исходя из вышесказанного можно заключить следующее.

Диссертация Малыхина Юрия Вячеславовича «Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин» является законченной квалификационной научно-исследовательской работой, в которой решены задачи, вносящие существенный вклад в теорию приближения функций.

Актуальность и новизна результатов. Тематика проведённых в диссертационной работе глубоких и обстоятельных исследований является актуальной и активно развивающейся в настоящее время. Ю.В. Малыхин получил ряд трудных и важных результатов, включающих решение известных классических задач. Все результаты диссертации являются новыми. Для их получения Ю.В. Малыхин использовал и разработал новые сложные, тонкие методы, подходы и конструкции.

Результаты диссертации и методы, развитые в ходе их получения, могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; при исследованиях и чтении специальных курсов в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Уральском федеральном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Саратовском национальной исследовательском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского и в других научных и образовательных организациях, где ведутся исследования по теории функций и теории приближений.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность. Полученные в диссертации результаты сформулированы в виде математических утверждений, снабжены полными доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях, в том числе в 8 без соавторства, в журналах из списка рекомендованных ВАК, входящих в международные базы данных и системы цитирования (в том числе в журналах «Известия РАН. Серия математическая», «Математический сборник», «Математические заметки» и «Journal of Complexity»). Все результаты, включенные в диссертацию, принадлежат автору. Основные результаты докладывались на ведущих по тематике диссертации научных семинарах и

профильных конференциях. Таким образом, результаты работы являются обоснованными и достоверными. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Текст диссертации отличает высокое качество, он тщательно продуман и аккуратно изложен. В тексте работы имеется незначительное число опечаток, например, на странице 24 в последней строке. Кроме того, использование термина «тело» в тексте работы не всегда корректно. Приведённые замечания никак не влияют на достоверность и качество результатов и не умаляют высоких достоинств диссертации.

Заключение. Диссертационная работа «Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин» соответствует всем требованиям, установленным пунктами 9-11, 13, 14 Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор, Малыхин Юрий Вячеславович, заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на совместном семинаре отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН 25 сентября 2025 г. (протокол № 112).

Заведующий отделом теории
приближения функций ИММ УрО РАН,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01) Акопян Роман Размикович

Заведующий отделом аппроксимации
и приложений ИММ УрО РАН,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.01) Бабенко Александр Григорьевич

«26» сентября 2025 г.

Адрес: 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16;
тел./факс: +7 (343) 374-25-81; e-mail: dir-info@imm.uran.ru

Подписи Акопяна Р.Р., Бабенко А.Г. удостоверяю

Ученый секретарь
ИММ УрО РАН

Ульянов О.Н.