ОТЗЫВ
официального оппонента

на диссертацию Малыхина Юрия Вячеславовича «Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Соответствие диссертации специальности и отрасли науки, по которым она представлена к защите

Задачи, исследуемые в диссертации Ю.В. Малыхина, относятся к теории приближения. По постановкам рассматриваемых задач и методам их исследования диссертация относится к действительному анализу, полностью соответствует специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ и отрасли «физико-математические науки», по которым она представлена к защите.

Актуальность темы диссертации

Основной целью диссертации Ю.В. Малыхина является развитие методов получения нижних оценок колмогоровских поперечников и близких аппроксимативных характеристик, а также решение ряда конкретных вопросов о поперечниках.

Понятие поперечника

$$d_n(K,X) = \inf_{Q_n \subset X : \dim Q_n = n} \sup_{x \in K} \inf_{y \in Q_n} \rho(x,y)$$

множества $K \subset X$ в линейном метрическом пространстве (X,ρ) было введено А.Н. Колмогоровым в 1936 году. Эта работа А.Н. Колмогорова послужила исходной точкой большого числа исследований, породив, по-существу, новое направление в современном функциональном анализе. Особенно активно эти исследования стали проводиться начиная с 60-х годов прошлого века.

Одной из основных изучаемых задач в то время было определение порядков по n поперечников классов Соболева W_p^r в L^q в одномерном случае. Позже интересы переместились в область функций многих переменных.

Являясь сами по себе важными аппроксимативными характеристиками множеств, поперечники тесно связаны с другими подобными величинами (ε-энтропия, аппроксимативные s-числа, гельфандовские поперечники и.т.д.).

В последние годы были обнаружены и исследуются связи поперечников со смежными разделами математики и компьютерными науками (малоранговое приближение, теория сложности, сжатые измерения и восстановление информации и т.д.). Связи с этими направлениями прослеживаются и в данной диссертации.

Теории поперечников посвящается огромное число работ, в том числе ей посвящены десятки монографий.

Все это свидетельствует о том, что тема диссертационной работы Ю.В. Малыхина является безусловно актуальной.

Содержание диссертации и степень новизны полученных результатов

В диссертации систематически используется теоретико–вероятностный подход к поперечникам. В первой главе после введения основных обозначений, используемых в диссертации, вводятся усредненные колмогоровские поперечники борелевского случайного элемента $\xi : \Omega \to X$, заданного на вероятностном пространстве Ω

$$d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, X)_p := \inf_{Q_n \subset X : \dim Q_n = n} \left(\mathsf{E}\left([\rho(\xi, Q_n)_X]^p\right)\right)^{1/p}.$$

Такие величины использовались ранее другими авторами. Ключевым свойством для диссертации является неравенство

$$d_n(K, X) \geqslant d_n^{\mathrm{avg}}(\xi, X) \quad \text{если} \quad \mathsf{P}(\xi \in K) = 1.$$

Теорема 1.1 дает оценки снизу для усредненных поперечников конечной минимальной системы векторов. С помощью теоремы 1.1 находятся условия «жесткости» конечных наборов функций (теорема 1.2). При этом под жесткостью N-мерного множества в диссертации понимается его «плохая» приближаемость подпространствами размерности существенно меньше, чем N.

Следующий результат этой главы (теорема 1.3) устанавливает, что безусловные координатно-однородные (инвариантные относительно транзитивного действия группы на множестве координат) множества являются жёсткими в l_q^N, $1 \leqslant q \leqslant 2$ (при $q > 2$ это уже неверно).

Далее в главе 1 изучается приближение некоторых специальных систем функций — Уолша в нумерации Пэли и тригонометрической. Теорема 1.4 дает оценки поперечников для системы Уолша, которая, в частности, оказалась нежесткой в L^q, $1 \leqslant q < 2$).

В главе 2 рассматриваются поперечники классов Соболева W_p^r в L^q. Как уже отмечалось выше, задачей определения правильных порядков таких поперечников во 60-70 годах прошлого века занималось много аналитиков, пока Б.С. Кашин не закрыл задачу для всех остававшихся возможных соотношений между параметрами r (натуральное), $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$, кроме одного — случай $r = p = 1$, $q > 2$ оставался неисследованным до конца.

Глава 2 начинается с теоремы 2.1, которая дает окончательный ответ на этот вопрос:

$$d_n(W_1^1, L^q) \asymp n^{-1/2} \ln n.$$

Оценка поперечника $d_n(W_1^1, L^q)$ Таким образом, в диссертации дано решение довольно старой и хорошо известной задачи. Оценка сверху была известна давно и принципиальным результатом Ю.В. Малыхина является доказательство точности этой оценки сверху.

Кроме этого, в главе 2 рассматривается аналогичный вопрос для классов Бесова $B_{1,\theta}^1$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, которые «окружают» класс Соболева W_1^1 (случаи $\theta = 1$ и $\theta = \infty$). Для них также найден точный порядок поперечников в L^q, $2 < q < \infty$ (теорема 2.2).

В главе 3 рассматриваются относительные поперечники, впервые введенные В.Н. Коноваловым: для $K, V \subset X$ поперечник K относительно V определяется как

$$d_n(K, V; X) := \inf_{Q_n \subset X : \dim Q_n = n} \sup_{x \in K} \inf_{y \in Q_n \cap V} \rho(x, y)_X,$$

которые показывают, как приближаются элементы K элементами из $Q_n \cap V$.

В главе 3 изучаются поперечники $d_n(W_p^r, MW_p^r, L^p)$, $r \geqslant 3$, $p = 1$ или $p = \infty$. Параметр $M \geqslant 1$ ограничивает приближение теми функциями $g \in Q_n$, у которых $\|g^{(r)}\|_{L^p} \leqslant M$. В теоремах 3.1 и 3.2 даны двусторонние оценки для таких поперечников.

Далее в главе 3 найдено (теорема 3.3) асимптотическое поведение L^∞-норм чебышёвских сплайнов. Этот результат связан с исследованиями В.М. Тихомирова, который выразил поперечник $d_{n+r}(W_\infty^r, L^\infty)$ через L^∞-нормы этих сплайнов. Из теоремы 3.3 выводится следующее соотношение для поперечников

$$\frac{d_{n+r}(W_\infty^r, L^\infty)}{d_r(W_\infty^r, L^\infty)} = A_n r^{-n/2}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

(A_n — вполне определенное число). Это, в частности, дает ответ на вопрос В.М. Тихомирова из его книги 1976 года: что можно сказать о поведении $d_{r+1}(W_\infty^r, L^\infty)$ при $r \to \infty$?

В главе 4 рассматриваются некоторые оценки полилинейных приближений, то есть приближений функций, заданных на кубе $\mathbb{T}^d \subset \mathbb{R}^d$ с помощью функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{d} u^{i,k}(x_i), \quad x = (x_1, \ldots, x_d).$$

Пусть $\Theta_n(f)_p$ — наилучшее приближение функции f агрегатами указанного вида в пространстве L^p и для класса $\mathcal{F}$ положим

$$\Theta_n(\mathcal{F}, L^p) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \Theta_n(f)_p.$$

В теореме 4.1 показано, что

$$\Theta_n(\mathcal{T}_m \cap B_\infty, L^1) \geqslant c_1 > 0, \quad n \leqslant c_2 \frac{\prod_{i=1}^d m_i}{\sum_{i=1}^d m_i}.$$

Здесь $\mathcal{T}_m$ — множество тригонометрических полиномов со спектром в $\prod_{i=1}^d [-m_i, v_i]$ $m = (m_1, \ldots, m_d)$, B_∞ — единичный шар в $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Этот результат используется затем для получения следующих оценок (следствие 4.1) полилинейных приближений классов смешанной гладкости $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ (r векторное)

$$\Theta_n(W_p^r, L^q(\mathbb{T}^d)) \asymp n^{-\frac{rd}{d-1}},$$

где $r = (r, \ldots, r)$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant 2$. В случае $d = 2$ эти результаты были известны, а для $d > 2$ они являются новыми.

Глава 5 посвящена нескольким задачам, связанным с поперечниками и не зависящим друг от друга.

В § 5.1 изучаются поперечники шаров в смешанных нормах. Пусть $N = sb$ и координаты пространства $\mathbb{R}^N$ разбиты на b блоков размера s. Для $x \in \mathbb{R}^N$ через $x[j]$ обозначим вектор, образованный координатами из j-го блока. Через $l_{q_1,q_2}^{s,b}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|x\|_{l_{q_1,q_2}^{s,b}} := \left\| \prod_{j=1}^{b} \|x[j]\|_{l_{q_1}^s} \right\|_{l_{q_2}^b}$$

и пусть $B^{s,b}_{q_1,q_2}$ — единичный шар в $l^{s,b}_{q_1,q_2}$.

Э.М. Галеев доказал точную по порядку оценку поперечников шара $B^{1,\infty}_{s,b}$ в $l^{s,b}_{2,q}$ при $q > 1$ и поставил задачу распространения этой оценки на случай $q = 1$. В теореме 5.1 диссертации дается ответ на этот вопрос и доказывается точное по порядку неравенство

$$d_n(B^{s,b}_{1,\infty}, l^{s,b}_{2,1}) \geqslant c(\varepsilon)b \quad \text{при} \quad n \leqslant (1-\varepsilon)N,$$

усиливая одновременно промежуточный результат А.Д. Изаака.

С помощью теоремы 5.1 в диссертации доказываются точные порядковые равенства для линейных поперечников классов Гёльдера–Никольского (следствие 5.2).

Кроме того, в § 5.1 в теореме 5.2 приводятся условия, при выполнении которых шары $B^{s,b}_{p_1,p_2}$ хорошо приближаются в «маломерных» смешанных пространствах $l^{s,b}_{q_1,q_2}$, а при их невыполнении являются жесткими. Этот результат имеет аналог для классов с обычной нормой.

§ 5.2 изучается о структура матриц, приближающих единичную матрицу. Погрешность приближения единичной матрицы размера $N \times N$ матрицами ранга не выше n равна колмогоровскому поперечнику октаэдра $d_b(B^N_1, l_\infty)^N$. В теореме 5.3 при условии

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |A_{i,j} - \delta_{i,j}| < 1/3$$

дается оценка снизу

$$F^*_A(\gamma) \geqslant c \frac{\ln N}{n \ln\left(2 + \frac{n}{\log N}\right)}, \quad \text{где} \quad \gamma = c \max\{n^{-3/2} \ln N, n^{-1}\}$$

для функции распределения

$$F^*_A(\gamma) := N^{-2} \#\{(i,j) : |A_{i,j}| > \gamma\}$$

С помощью этой оценки положительно решается задача Б.С. Кашина (следствие 5.3): при условии теоремы 5.3 и $n \leqslant K \ln N$ при некотором K модули не менее $c(K)N^2$ элементов матрицы A больше, чем $c(K)n^{-1/2}$.

В заключительном § 5.2 рассматривается новая задача о «свидетелях поперечников». Так автор называет конечное множество $W = \{x_1; \dots, m\} \subset K$, удовлетворяющее неравенствам

$$d_n(W, X) \geqslant c d_n(K, X) \quad \text{при} \quad n \leqslant cN.$$

Теорема 5.3 утверждает, что свидетелей нужно не очень много: при всех $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, за исключением случая $1 < p < 2$, $q = \infty$, для любого N существует множество $W \subset B^N_p$ мощности $\#W \leqslant cN \ln N$, для которого

$$d_n(W, l^N_q) \geqslant c d_n(B^N_p, l^N_q) \quad \text{при} \quad n \leqslant cN.$$

Все результаты получены диссертантом самостоятельно и являются новыми. Они дают решение многих задач, которые в явном виде ставились в литературе. Для решения задач, рассмотренных в диссертации, автору пришлось развить или изобрести новые довольно сложные и глубокие методы.

Основные результаты диссертации

Следующие результаты являются основными в диссертации:

— Нижние оценки усреднённых поперечников случайных векторов.

— Достаточные условия жёсткости (слабая лакунарность, безусловность, независимость) для конечных систем функций.

— Жесткость в l_q^N, $1 \leqslant q \leqslant 2$, безусловных координатно-однородных множеств.

— Порядки колмогоровских поперечников класса Соболева W_1^1 и Бесова $B_{1,\theta}^1$ в $2 < q < \infty$. Тем самым завершено решение классической задачи о порядках поперечников классов Соболева целой гладкости на отрезке.

— Оценки относительных поперечников классов W_r^p в L^p для равномерной и интегральной метрик.

— Асимптотическое поведение чебышёвских сплайнов, возникающих в задаче о поперечнике класса Соболева в равномерной метрике на отрезке.

— Оценки снизу для приближений классов равномерно ограниченных тригонометрических полиномов со спектром в параллелепипедах комбинациями полилинейных функций. Порядки погрешности полилинейных приближений классов смешанной гладкости.

— Оценки снизу для поперечников декартовых произведений октаэдров в смешанной $(2,1)$-метрике. Порядки линейных поперечников классов Гёльдера--Никольского в некоторых случаях. Критерий жёсткости для поперечников шаров в смешанных нормах.

— Оценки для функции распределения элементов матриц малого ранга, хорошо приближающих единичную матрицу.

Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты диссертации являются обоснованными и достоверными, что подтверждается их полными и строгими доказательствами в соответствии с правилами, принятыми в математике.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 статьях из списка ВАК (все в центральной математической печати) и прошли апробацию на престижных международных математических конференциях и семинарах.

Диссертация хорошо оформлена в издательской системе LaTeX, принытой в качесте стандарта для математических текстов.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Научная и практическая значимость результатов диссертации

Диссертационная работа Ю.В. Малыхина носит теоретический характер. Ее результаты могут использоваться в функциональном и гармоническом анализе, теории приближения. Возможны приложения в прикладных задачах, связанных с теорией сложности, сжатыми измерениями и восстановлением информации.

Диссертация может использоваться в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском государственном университете, Сибирском федеральном университете, Уральском федеральном университетах, Российском университете дружбы народов, Белорусском государственном университете.

Замечания

По тексту диссертации имеется несколько замечаний редакторского характера:

1) неудачно выражения «случайные метод» на стр. 3 диссертации, лучше писать «вероятностный метод», а то получается, что Б.С. Кашин случайно нашел метод;

2) по всему автореферату и диссертации часто пропускаются инициалы цитируемых авторов (хотя не у всех);

3) на стр. 21 в автореферате неясно, о чем спрашивал Стечкин;

4) в тексте имеется ряд опечаток (например, две опечатки в предпоследнем абзаце на стр. 22 в автореферате), не будем останавливаться на всех.

Приведенные замечания не влияют на общую высокую оценку диссертационной работы Ю.В. Малыхина.

Диссертационная работа Малыхина Юрия Вячесловича «Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин» является законченной научно-квалификационной работой, которую можно характеризовать как крупное научное достижение в области теории приближений. Она соответствует всем требованиям ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени, установленным для диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор Малыхин Юрий Вячеславович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

30.09.2025

ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ
Начальник управления
организационной работы и
документационного обеспечения
Н.Б. Черкасская
30 09 2025

Официальный оппонент:
Вениамин Григорьевич Кротов,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ;
профессор,
профессор кафедры теории функций
Белорусского государственного университета
Адрес: 220030, Республика Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, 4, к. 139;
тел. +375-29-6111302; e-mail: vgkrotov@mail.ru