ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Малыхина Юрия Вячеславовича

на тему "Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин"

по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Теория поперечников является важным разделом теории приближений и активно развивается в связи с современными методами анализа данных, теорией оптимальных алгоритмов, численными методами и задачами кодирования информации. Поперечники применяются для изучения оптимальности различных методов приближения: линейных, полиномиальных, интерполяционных и др. Поперечники используются также в теории сжатых измерений (compressed sensing), возникшей в начале XXI века и применяемой в обработке сигналов и изображений. Основные свойства поперечников изложены в монографиях В.М. Тихомирова (МГУ, 1976) и А. Пинкуса (Шпрингер, 1985). Из недавних публикаций в российских журналах о поперечниках и их применениях можно отметить статьи В.М. Бухштабера (Матем. сб., 2025), А.А. Васильевой (Изв. РАН. Сер. матем. 2024), В.М. Тихомирова (Труды МИАН, 2022), Е.Е. Тыртышникова и его соавторов (Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2022).

Колмогоровский поперечник отвечает на следующий вопрос: какой точности приближения заданного класса можно достигнуть, если использовать в качестве аппарата приближения подпространства заданной размерности? В диссертационной работе Ю.В. Малыхина изучаются методы получения нижних оценок колмогоровских поперечников и близких аппроксимативных характеристик, вычислены порядки убывания поперечников некоторых функциональных классов, найдены порядки погрешности полилинейной аппроксимации некоторых классов функций нескольких переменных, решен ряд задач о поперечниках конечномерных множеств. Актуальность избранной темы не вызывает сомнений.

Диссертация объемом 189 страниц состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели и задачи исследования, даны ссылки на основные исследования по теме диссертации и сформулированы все доказанные в диссертации теоремы. В большинстве работ колмогоровский поперечник применяется для центрально-симметричных множеств в нормированных пространствах. В диссертации n-поперечник по Колмогорову множества K в линейном метрическом пространстве X с метрикой ρ обозначается $d_n(K,X)$ и определяеся по формуле

$$d_n(K,X) := \inf_{Q_n \subset X} \sup_{x \in K} \rho(x, Q_n),$$

где $\rho(x,Q_n)$ – расстояние от x до Q_n и точная нижняя грань берется по всем подпространствам Q_n в X размерности n. В относительном поперечнике множество K

приближается не всем подпространством, а его пересечением с другим множеством:

$$d_n(K,V,X) := \inf_{Q_n \subset X} \sup_{x \in K} \rho(x, V \cap Q_n), \quad V \subset X.$$

Многие полученные в диссертации оценки поперечников $d_n(K,X)$ снизу укладываются в следующую схему: строится случайный вектор ξ такой, что $P(\xi \in K) = 1$, оценивается усредненный поперечник $d_n^{\mathsf{avg}}(\xi, X)$ и применяется неравенство

$$d_n(K,X) \geqslant d_n^{\mathsf{avg}}(\xi, X). \tag{1}$$

Если $K = \{x_1, \ldots, x_N\}$ – конечное множество, то вектор ξ берется равномерно распределенным и в правой части неравенства (1) будет

$$d_n^{\mathsf{avg}}(\xi, X) = \inf_{Q_n \subset X} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho(x_k, Q_n) \right).$$

В общем случае случайный вектор $\xi : \Omega \to X$ задан на некотором вероятностном пространстве Ω и усредненный поперечник определяется с помощью математического ожидания:

$$d_n^{\mathsf{avg}}(\xi, X) := \inf_{Q_n \subset X} \mathrm{E}\rho(\xi, Q_n).$$

Для $1 \leqslant p < \infty$ усредненный p-поперечник определяется по формуле

$$d_n^{\mathsf{avg}}(\xi, X)_p := \inf_{Q_n \subset X} (\mathrm{E}\rho(\xi, Q_n)^p)^{1/p}.$$

В частных случаях усредненный поперечник встречался в статьях Воронина и Темиргалиева (1984), А.П. Буслаева (1988), Майорова (1991), Крёйцига (2002) и др.

Пусть B_p^N – единичный шар пространства ℓ_p^n. Следующее равенство хорошо известно:

$$d_n(B_1^N, \ell_2^N) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2}, \quad 0 \leq n < N. \tag{2}$$

Если $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ и $n \leqslant N(1-\varepsilon)$, то

$$1 \geqslant d_n(B_p^N, \ell_q^N) \geqslant d_n(B_1^N, \ell_2^N) \geqslant \varepsilon^{1/2}. \tag{3}$$

Для любой ортонормированной системы $\{f_1, \ldots, f_N\}$ в произвольном евклидовом пространстве E аналогично (2) имеем

$$d_n(\{f_1, \ldots, f_N\}, E) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{1/2}, \quad 0 \leq n < N. \tag{4}$$

В главе 1 доказано несколько утверждений и теорем, имеющих самостоятельное значение и применяемых в последующих главах диссертации. Из (4) следует, что ортонормированная система из N функций является жёсткой в L_2 в том смысле, что ее нельзя хорошо приблизить линейными пространствами размерности существенно меньшей N (сравните с (3)). В пространствах L_p, $p < 2$, существуют системы, допускающие сколь угодно хорошее приближение подпространствами малой размерности; примером такой системы является классическая система Уолша. Согласно теоремам 1.1 и 1.2, каждое из

трёх условий (независимость, безусловность, дизъюнктность) обеспечивает жёсткость системы в L_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Классическим примером независимой системы является система Радемахера. Автором доказано, что любая лакунарная система $\{\varphi(k_j x)\}$ является жёсткой (утверждение 1.13). По теореме 1.3 любое безусловное координатно-однородное множество K является жёстким в ℓ_p^N, $1 \leqslant p \leqslant 2$. В этой теореме в качестве K можно взять: 1) любое множество, инвариантное относительно смен знаков и любых перестановок кординат или только циклических перестановок, 2) множество $B_\infty^N \cap kB_1^N$ при любом $k \in \mathbb{N}$, 3) пересечение любого семейства шаров $r_\alpha B_{p_\alpha}^N$, 4) шары смешанных норм и их пересечения. Теорема 1.4 о поперечниках системы Уолша получена с помощью конструкции, использованной Дж. Алманом и Р. Виллиамсом (2017) при доказательстве следующего свойства: семейство матриц Уолша-Адамара не является жёстким (ранг этих матриц может быть значительно уменьшен путём изменения небольшого количества элементов). Согласно утверждению 1.17, в метрике L_p, $0 < p < 1$, можно хорошо приблизить N подряд идущих гармоник пространством, порожденным некоторыми $o(N)$ гармониками. Показано также (см. следствия 1.5 и 1.6), что для приближения N функций системы Уолша или тригонометрической системы в метрике L_0 достаточно пространств размерности, меньшей любой степени N.

В главе 2 изучаются поперечники классов дифференцируемых функций. Напомним, что для каждого натурального числа r и любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через W_p^r обозначается класс Соболева, состоящий из функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных вместе с производными $f', \ldots, f^{(r-1)}$, для которых $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$ (здесь $\|\cdot\|_p$ – норма пространства $L_p[0,1]$). Теорема 2.1 завершает решение одной из центральных задач теории поперечников – задачи о нахождении порядков убывания поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$ при $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. В решении этой задачи принимали участие В.М. Тихомиров, Б.С. Кашин, Р.С. Исмагилов и др. (см. комментарии на с.18-19 диссертации). Е.Д. Куланин в 1983 году доказал, что при $2 < q < \infty$ и любом $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$c_{q,\varepsilon} n^{-1/2} (\log n)^{1/2-\varepsilon} \leqslant d_n(W_1^1, L_q) \leqslant C_q n^{-1/2} \log n. \tag{5}$$

Теорема 2.1 утверждает, что для любого $q \in (2, \infty)$ справедливо порядковое равенство

$$d_n(W_1^1, L_q) \asymp n^{-1/2} \log n. \tag{6}$$

Согласно (5), для доказательства теоремы 2.1 достаточно получить нижнюю оценку в (6). Автор показывает, что требуемая оценка следует из утверждения 2.1, исчерпывающее доказательство которого приведено на с.81-85 диссертации. При этом используется разложение по системе Хаара, но в отличие от работы Е.Д. Куланина (УМН, 1983) двоичные уровни аппроксимации контролируются одновременно и применяется специально построенное усреднение и двойственность по аналогии с методом Е.Д. Глускина (1981).

В конце раздела 2.1 приведены два результата для конечномерных множеств: 1) порядковое равенство поперечников косого октаэдра $\widetilde{B}_1^N$ в пространстве ℓ_q^N, 2) точная по порядку оценка расстояния в метрике $L_q^{N\times N}$ верхней треугольной матрицы $\Delta^{(N)}$, у которой все ненулевые элементы равны 1, до множества всех матриц размера $N \times N$ ранга n (оказывается, что порядок этих расстояний такой же, как в (6)).

В теореме 2.2 даны точные по порядку оценки поперечников классов Бесова $B_{1,\theta}^1$:

$$d_n(B_{1,\theta}^1, L_q) \asymp n^{-1/2} \log^{1/2} n \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \theta \leqslant 2$$

и

$$d_n(B^1_{1,\theta}, L_q) \asymp n^{-1/2}\log^{1-1/\theta} n \quad \text{при} \quad 2 \leqslant \theta \leqslant \infty,$$

где $2 < q < \infty$. Для доказательства этих соотношений вместо всплесков Хаара использованы (см. леммы 2.2 и 2.3) регулярные всплески Добеши, образующие безусловный базис в пространствах $B^1_{1,\theta}$. Кроме того, применяются известные теоремы о дискретизации классов Бесова и оценка снизу поперечника декартова произведения октаэдров в специальной норме (эта оценка обобщает теорему Б.С. Кашина о поперечнике октаэдра). Из включения $W^1_1 \subset cB^1_{1,\infty}$ видно, что верхняя оценка в (6) следует из теоремы 2.2.

Теоремы 3.1 и 3.2, в основном, завершают решение задачи об относительных поперечниках $d_n(W^r_p, MW^r_p, L_p)$ для $p = 1$, $p = \infty$ и существенно дополняют исследования по этой тематике В.Ф. Бабенко, В.Н. Коновалова, Ю.Н. Субботина, С.А. Теляковского, В.М. Тихомирова и др. (подробности на с.21-23). Ключевым элементом доказательства теоремы 3.2 является теорема Ал.А. Привалова о норме проектора $C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}_n$ на подпространстве заданной размерности.

В.М. Тихомиров в 1969 году выразил колмогоровские поперечники класса W^r_∞ на отрезке $[-1, 1]$ через норму чебышевских сплайнов:

$$d_{n+r}(W^r_\infty[-1,1], L_\infty[-1,1]) = \|x_{n,r}\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Здесь $x_{n,r}$ — это наименее уклоняющаяся от нуля на $[-1, 1]$ функция, у которой r-я производная равна по модулю единице и меняет знак в n точках интервала $(-1, 1)$ (так что $x_{0,r}$ только постоянным множителнм отличается от многочлена Чебышёва T_r). При больших r нормированный чебышевский сплайн близок к многочлену Чебышёва:

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \frac{x_{n,r}}{x_{n,r}(1)} - T_{n+r} \right\|_\infty = 0.$$

В теореме 3.3 даны асимптотические формулы для положительных узлов сплайна $x_{n,r}$ и для отношений $\|x_{n,r}\|_\infty / \|x_{0,r}\|_\infty$ при $r \to \infty$. Для небольших значений n и r на с.113-115 приведены числовые и графические иллюстрации, полученные с помощью авторской программы на GitHub.

Для поперечников $d_n(W^r) := d_n(W^r_\infty, L_\infty)$ верны равенства $d_n(W^r) = \infty$ при $n < r$ и $d_r(W^r) = (r!2^{r-1})^{-1}$. В.М. Тихомировым задавался вопрос: что можно сказать о $d_{r+1}(W^r)$ при больших r? В следствии из теоремы 3.3 содержится ответ на этот вопрос.

В главе 4 получены оценки погрешности полилинейных отображений вида

$$f(x_1, \dots, x_d) \approx \sum_{k=1}^{n} u^{1,k}(x_1) u^{2,k}(x_2) \dots u^{d,k}(x_d), \tag{7}$$

где $f : I^d \to \mathbb{R}$, причем I — это отрезок $[a, b]$ или окружность $\mathbb{T}$. В дискретном варианте в качестве аппарата приближения используются тензоры ранга n. Через $\Theta_n(f)_p$ обозначается величина наилучшего полилинейного приближения вида (7) в метрике L_p. Отмечается, что классическая теорема Шмидта выражает величину $\Theta_n(f)_2$ через сингулярные числа интегрального оператора с ядром $f(x_1, x_2)$. При $p = \infty$ поперечник

семейства $\mathcal{F} := \{f(\cdot, y) : y \in I\}$, параметризованного переменной y и построеннного по функции $f : I^2 \to \mathbb{R}$, равен погрешности билинейной аппроксимации функции f:

$$d_n(\mathcal{F}, L_\infty(I)) = \Theta_n(f)_\infty.$$

В параграфах 4.1 и 4.2 показано, что большинство $m_1 \times \cdots \times m_d$ тензоров с элементами ± 1 являются "жёсткими"в том смысле, что они сильно отличаются от тензоров с рангом существенно меньше минимально возможного (утверждение 4.2). Пользуясь этим утверждением и подходящей дискретизацией, в § 4.3 для класса функций $W_\infty^{\mathbf{r}}$ изотропной гладкости $\mathbf{r} = (r, \dots, r)$ на торе $\mathbb{T}^d$ получена точная по порядку оценка

$$\Theta_n(W_\infty^{\mathbf{r}}, L_1(\mathbb{T}^d)) \gtrsim n^{-\frac{rd}{d-1}}.$$

Отсюда и из найденной В.Н. Темляковым в 1988 году оценки

$$\Theta_n(W_2^{\mathbf{r}}, L_2(\mathbb{T}^d) \lesssim n^{-\frac{rd}{d-1}}$$

выводится, что при $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq 2$, имеет место порядковое равенство

$$\Theta_n(W_p^{\mathbf{r}}, L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp n^{-\frac{rd}{d-1}},$$

которое в случае $d = 2$ было известно. В конце главы 4 доказано утверждение 4.7 об обобщённой полилинейной аппроксимации вещественных тригонометрических полиномов.

Глава 5 посвящена нескольким избранным задачам о поперечниках конечномерных множеств. Для случая, когда $N = sb$ и пространство $\mathbb{R}^n$ разбито на b блоков размера s, определено пространство $\ell_{q_1,q_2}^{s,b}$ с нормой

$$\|x\| := \Big\| \big(\|x[1]\|_{\ell_{q_1}^b}, \dots, \|x[b]\|_{\ell_{q_1}^b} \big) \Big\|_{\ell_{q_2}^b}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где через $x[j]$ обозначена ортогональная проекция вектора x на j-й блок пространства $\mathbb{R}^n$. Единичный шар пространства $\ell_{q_1,q_2}^{s,b}$ обозначается $B_{q_1,q_2}^{s,b}$. Теорема 5.1 утверждает, что для всех $s, b \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ при $N = sb$, $n \leqslant N(1-\varepsilon)$ имеет место точное по порядку неравенство

$$d_n(B_{q_1,q_2}^{s,b}, \ell_{q_1,q_2}^{s,b}) \geqslant c(\varepsilon) b.$$

Из этой теоремы выводятся порядковые равенства для линейных поперечников классов Гёльдера-Никольского. Известно, что при $q > \max\{p, 2\}$ шары B_p^N хорошо приближаются маломерными пространствами, но при $q \leqslant \max\{p, 2\}$ шары B_p^N являются жёсткими в ℓ_q^N. Теорема 5.2 показывает, как этот эффект "дихотомии"проявляет себя в случае смешанных норм. Теорема 5.3 приводит к положительному ответу на следующий вопрос Б.С. Кашина: верно ли, что для матриц ранга $n \asymp \log N$, приближающих единичную, положительная доля элементов будет по модулю больше $cn^{-1/2}$? Теорема 5.4 утверждает, что при всех $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, за исключением случая $1 < p < 2$, $q = \infty$, для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $W \subset B_p^N$ мощности $|W| \leqslant CN \log N$ такое, что

$$d_n(W, \ell_q^N) \leqslant c(p,q)\, d_n(B_p^N, \ell_q^N) \quad \text{для всех } 1 \leqslant n \leqslant cN.$$

В целом диссертационная работа и автореферат оформлены хорошо, основные результаты даны с комментариями, поясняющими новизну полученных результатов и оригинальность применяемых автором методов.

По работе имеются следующие замечания.

1. Во введении можно было подробнее изложить существующие методы получения нижних оценок колмогоровских поперечников. В частности, можно было отметить применения в теории поперечников топологической теоремы Борсука (см., например, [А.П. Буслаев и В.М. Тихомиров, Матем. сб., 1990], [S.D. Fisher and C.A. Micchelli, Duke Math. J., 1980]).

2. В исторических комментариях можно было использовать материалы статьи В.М. Тихомирова "А.Н. Колмогоров и теория приближений" (УМН, 1989).

3. В связи с чебышёвскими сплайнами можно было упомянуть о вариационном методе вычисления поперечников и о золотаревских сплайнах.

4. В дополнение к упомянутым в диссертации нерешенным задачам можно было отметить задачи об оценках снизу поперечников классов Бесова и Трибеля-Лизоркина на различных структурах, включая многообразия Римана и группы Ли[1].

5. На с.13 вместо "n-поперечник $\{f_k\}$"лучше "n-поперечник системы $\{f_k\}$"; на с.44 вместо q должно быть ρ, на с.45 вместо "По определению..."лучше "Из определений следует, что...".

6. На с.67 надо было отметить, что в формуле (1.64) для двоично-рационального числа t берется разложение с конечным числом ненулевых слагаемых.

7. При цитировании на страницах 65, 69, 92, 94, 152, 162 и 171 вместо английских слов Theorem и Lemma, должны быть слова на русском языке.

Эти замечания легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Диссертационное исследование Ю.В. Малыхина "Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин" является существенным вкладом в теорию приближения функций. Особо стоит выделить теорему 2.1, подводящую итог многолетним исследованиям порядков убывания колмогоровских поперечников классов Соболева W_p^r в пространствах $L_q[0,1]$ при $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Содержащиеся в диссертации результаты могут быть использованы специалистами по вещественному, комплексному и функциональному анализу, работающими в ведущих математических центрах, университетах и научных учреждениях как в России, так и за рубежом. Доказанные автором теоремы и разработанный им метод оценки снизу колмогоровских поперечников могут войти в монографии о современных методах кодирования информации и оптимизации численных алгоритмов.

Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, полностью обоснованы и опубликованы в ведущих математических журналах, соответствующих теме диссертации. Полученные результаты являются новыми, установлены автором лично и обладают внутренним единством. Автореферат полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на научно-исследовательских семинарах на механико-математическом факультете МГУ и на семинарах в МИАН

[1]Обзор соответствующих нелинейных всплесковых и фреймовых аппроксимаций приведен в недавней статье: *Ivanov K. G., Kerkyacharian G., Kyriazis G., Petrushev P.* On the construction of bases and frames with applications. In: DeVore R. (ed.) et al., Multiscale, nonlinear and adaptive approximation II. Cham: Springer. 347-381 (2024).

РАН, а также на многочисленных конференциях с участием ведущих специалистов по теории функций и приближений.

Считаю, что диссертация Ю.В. Малыхина "Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин" является крупным научным достижением и соответствует критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842, а ее автор Малыхин Юрий Вячеславович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладных информационных технологий
Общеакадемического факультета ФГБОУ ВО "Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ"

ФАРКОВ Юрий Анатольевич

Контактные данные: тел.: 8 (903) 108-87-79, e-mail: farkov-yu@ranepa.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес места работы:
119571, г.Москва, пр-т Вернадского, 82, РАНХиГС, корпус 2
Общеакадемический факультет
Тел.: 8 (977) 837-52-77, e-mail: samofalova-da@ranepa.ru

Подпись сотрудника Общеакадемического факультета РАНХиГС
Ю. А. Фаркова удостоверяю:

З А В Е Р Я Ю
У Ч Ё Н Ы Й С Е К Р Е Т А Р Ь
РОССИ КОЙ АКА ЕМИИ НАРО НОГО
ЯЙ ТВА И Г ЛЬСТВЕННОЙ
ЖБЫ ПРИ П ЕЗИДЕНТЕ РФ
К.Э.Н. К.К.БОН АРЕВ

03.09.2025