ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук Балашова Максима Викторовича

на диссертационную работу Юрия Вячеславовича Малыхина на тему

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ВЕЛИЧИН

представленную на соискание степени доктора физико-математических наук

по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Работа Ю. В. Малыхина посвящена изучению поперечников по Колмогорову, а также их применению и изучению их связей с различными задачами аппроксимации, в том числе в задачах малорангового приближения матриц, задачах минимизации на матричных многообразиях и т.д.

Понятие поперечника возникло в работе А.Н. Колмогорова в 1936 г. Поперечник Колмогорова порядка n описывает наилучшую возможную ошибку, которую можно достичь, приближая множество с помощью элементов n-мерного линейного подпространства. Возникающее оптимальное подпространство в смысле Колмогорова как правило не может быть явно построено, особенно за разумное время вычислений. Однако, скорость убывания Колмогоровского n-поперечника говорит нам, может ли заданное множество быть хорошо аппроксимировано линейным методом или нет. Кроме того, n-поперечники тесно связаны с различными характеристиками приближаемого множества. Все эти классические вопросы давно вошли в теорию приближений и широко изучались в литературе. Здесь стоит в первую очередь упомянуть А.Н. Колмогорова, С.Б. Стечкина, Г. Лоренца, В.М. Тихомирова и его учеников, Е.Д. Глускина, Р.С. Исмагилова, Б.С. Кашина, А. Пинкуса, Р.А. Девора и мн. др.

Актуальность темы. В работе рассматриваются вопросы верхних и, главным образом, нижних оценок колмогоровских n-поперечников, усилены некоторые известные результаты для этих оценок, в ряде случаев решены открытые проблемы. Кроме того, автором предложены новые методы решения указанных задач. Все это говорит о безусловной научной актуальности исследования.

Содержание и структура работы. Работа состоит из введения, пяти глав, краткого заключения, списка литературы из 165 наименований и содержит 189 страниц текста.

Введение начинается с обсуждения известных результатов и истории исследований колмогоровских поперечников. Также обсуждаются вспомогательные конструкции: s-числа, малоранговое приближение матриц и его приложения в задачах вычислительной алгебры и т.д. Достаточно полно описана история вопроса и даны ссылки на соответствующую библиографию. Кратко сформулированы цели, задачи и методы исследова-

ния, научная новизна. Приведены конференции и научные семинары, где докладывались результаты работы, а также публикации автора по теме диссертации.

Далее во введении перечислены без доказательств формулировки основных результатов пяти глав диссертации с соответствующими обсуждениями и библиографическими ссылками. Заканчивается введение небольшим библиографическим примечанием по публикациям автора.

Первая глава посвящена усредненным колмогоровским поперечникам. Начинается глава с набора вспомогательных сведений в §1.1. Далее приводятся определение усредненного колмогоровского n-поперечника и его основные свойства. Основные результаты: теорема 1.1, которая обобщает нижнюю оценку n-поперечника для октаэдра из $\mathbb{R}^N$ в евклидовой норме на случай p-усредненного n-поперечника при $p \in [1,2]$; теорема 1.2 о достаточных условиях жесткости системы в L_q, $q \in [1,2]$. Также показано, что при $q > 2$ аналог теоремы 1.2 не имеет места; достаточные условия жесткости "безусловно координато-однородного" множества K в ℓ_q^N при $q \in [1,2]$ в теореме 1.3; оценки сверху и снизу на поперечники для двух систем функций — системы Уолша и тригонометрической системы в L_q, $q \in [1,2)$, в теореме 1.4. Показано, что система Уолша не является жесткой в пространстве L_q, $q < 2$.

Вторая глава посвящена точным порядкам колмогоровских поперечников классов Соболева одной переменной W_p^r в L_q (для целых чисел $r, q \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$) на отрезке. Интерес к поперечникам классов Соболева вызван в частности постановками, когда аппроксимируемое множество содержало множество решений некоторых уравнений, например, в частных производных. Случай поперечников классов W_2^r в метрике L_2 был рассмотрен в работе А.Н. Колмогорова 1936 г., где были найдены их порядки. В дальнейшем результаты были обобщены разными авторами на случай $rp > 1$, но случай $rp = 1$ оставался открытым. В теореме 2.1 рассматривается случай $rp = 1$: найден точный порядок n-поперечника W_1^1 в L_q, $q \in (2, +\infty)$. В качестве следствия доказана возможность приближения верхнетреугольной квадратной матрицы матрицами малого ранга. В теореме 2.2 найдены точные порядки поперечников некоторых классов Бесова в L_q, $q \in (2, +\infty)$.

В главе 3 исследуются относительные поперечники, а также чебышевские сплайны. В определении относительного поперечника множество приближается не всем подпространством, а пересечением подпространства с другим множеством. В теоремах 3.1 и 3.2 получены оценки снизу и сверху относительных поперечников, у которых аппроксимация из n-мерного подпространства осуществляется 2π-периодическими функциями из W_p^r, $p = 1$ или $p = \infty$, с r-ой производной, которая ограниченна по норме заданной кон-

стантой. Эти два результата завершают решение задачи об относительных поперечниках в случаях $p = 1$ и $p = \infty$, что обсуждается в работе со ссылками на библиографию. В теореме 3.3 найдено асимптотическое поведение чебышёвских сплайнов, возникающих в задаче о поперечнике класса Соболева в равномерной метрике на отрезке.

Глава 4 посвящена оценкам погрешности полилинейных (n-членных) приближений. В теореме 4.1 показано, что n-членное приближение множества тригонометрических многочленов с ограниченным спектром из единичного шара L_∞ на d-мерном торе элементами L_1 ограничено снизу константой, зависящей от d. Вместе с известным включением с. 148 строка 5 эта теорема дает нижнюю оценку n-членного приближения классов Соболева смешанной гладкости $W_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)$ в изотропном случае $\mathbf{r} = (\mathrm{r}, \ldots, \mathrm{r})$ элементами $L_q(\mathbb{T}^d)$ при $p \geq 2$, $q \in [1, 2]$.

Глава 5 представляет ассорти из разных задач о поперечниках конечномерных множеств и состоит из трех независимых частей.

В первой части рассматриваются поперечники шаров в смешанной норме. Смешанная норма возникает, в частности, при дискретизации функциональных классов. В начале 1990-х годов были получены оценки снизу для некоторых $n = N/2$-поперечников в смешанных нормах. В теореме 5.1 получен точный по порядку результат для этих поперечников произвольного порядка $n < N(1 - \varepsilon)$. В теореме 5.2 некоторые n-поперечники в смешанной норме оценены снизу через 0-поперечник.

Во втором разделе 5 главы рассмотрены свойства матрицы, приближающей единичную $N \times N$ матрицу в чебышевской норме с точностью $\leq \frac{1}{3}$. Показано, что если ранг приближающей матрицы $n \leq K \log N$, то не менее $c(K)N^2$ элементов матрицы по модулю больше $c(K)n^{-\frac{1}{2}}$. Это утверждение в частности дает ответ на вопрос Б.С. Кашина о доле элементов $N \times N$ матрицы ранга $\asymp \log N$, приближающей единичную матрицу $N \times N$, по модулю больших $n^{-\frac{1}{2}}$. При этом оказалось, что порядок $n^{-\frac{1}{2}}$ нельзя увеличить.

В разделе 5.3 доказывается существование в шаре B_p^N, $p \geq 1$, $p \notin (1, 2)$, подмножества W мощности $\leq CN \log N$, для которого для всех достаточно малых n n-поперечник W в ℓ_q^N оценивается снизу n-поперечником B_p^N в ℓ_q^N, $q \in [1, +\infty)$. Множество W названо "свидетелем" поперечника.

Научная новизна.

Все результаты, упомянутые в предыдущем разделе, являются новыми. Так же хотелось бы отметить следующее.

В главе 1 применены новые конструкции, позволяющие использовать вероятностный подход к оценке снизу n-колмогоровских поперечников. В частности, использу-

ются новые оценки для комбинаторной размерности класса функций (лемма 1.1 для доказательства утверждения 1.7) и известная связь комбинаторной размерности и поперечника (1.33), свойства λ-лакунарных последовательностей, приближение матрицы Уолша-Адамара и т.д.

Доказательство важной теоремы 2.1 базируется на утверждении 2.1 о нетривиальной оценке снизу некоторых интегралов. Помимо использования в доказательстве теоремы 2.1, результат утверждения 2.1 и метод его доказательства имеют самостоятельный интерес.

В главе 3 доказан ряд любопытных технических лемм, например лемма 3.1, полностью построенная на двойственности. Также интересно утверждение 3.1 — обобщение теоремы Ал.А. Привалова об оценке снизу величины $\|Uf\|_1/\|f\|_1$ для проектора U и некоторой функции f из пространства непрерывных 2π-периодических функций. Проведенные в разделе 3.2 численные рассчеты показывают эффективность полученных теоретических результатов в вычислениях и оценках чебышевских сплайнов с небольшим числом узлов. В частности, результаты о свойствах чебышевских сплайнов позволяет уточнить один результат В.М. Тихомирова, формула (0.13).

В главе 4 получили развитие методы тензорного анализа, в частности свойства сигнум-тензора, утверждение 4.2.

Из теоремы 5.1 получаются порядковые равенства для линейных поперечников классов Гёльдера–Никольского.

Понятие «свидетель» поперечника представляет существенный интерес, т.к. показывает, что во многих случаях малое количество точек множества определяет оценку снизу для его поперечника. Иными словами, для оценок поперечников некоторых N-мерных шаров снизу шар можно заменять на множество из $\asymp N \log N$ точек, не нарушая порядок оценки. Этот результат идеологически находится в русле современных тенденций борьбы с «проклятием размерности»: с попытками так или иначе уменьшать размерность/мощность объекта в многомерной задаче, не теряя при этом его «качество». При доказательстве использовались новые оценки на основании известных оценок ε-энтропии многообразия Грассмана.

Оппонент также хочет отметить удачное применение при доказательстве основных утверждений диссертации разных результатов функционального анализа (главным образом основанных на выпуклости и двойственности) и теории вероятностей. Многие полученные результаты такого рода будут полезны при дальнейших исследованиях в выпуклой геометрии и геометрии банаховых пространств.

Отметим наконец, что многие доказанные теоремы отвечают на ранее открытые

вопросы, поставленные разными математиками: теорема 3.2 отвечает на вопрос Ю.Н. Субботина и С.А. Теляковского, теорема 4.1 дополняет результаты В.Н. Темлякова и Д. Базарханова, теорема 5.1 отвечает на вопрос Э.М. Галеева, теорема 5.2 на вопрос Б.С. Кашина.

Обоснованность и достоверность полученных результатов. Все результаты доказаны на современном уровне математической строгости. Они неоднократно докладывались и обсуждались со специалистами на научных семинарах и конференциях, полностью опубликованы в широко известных рецензируемых изданиях.

Теоретическая и практическая значимость работы. Большинство результатов носят теоретический характер и существенно развивают рассматриваемое направление. Они могут найти применение в исследованиях по теории приближений и геометрии банаховых пространств в МГУ, МИ РАН, СПбГУ, ИММ УрО РАН и других центрах с сильными школами по теории функций. Часть результатов может быть прочитана в качестве спецкурсов студентам и аспирантам.

Результаты по поперечникам конечномерных множеств, а также некоторые теоретические результаты могут найти применение в задачах о малоранговой аппроксимации матриц и других задачах матричного анализа и линейной алгебры.

Замечания по работе. Работа написана сжато. В достаточно небольшом по объему тексте автор сумел уместить и строго изложить большой научный материал. Для диссертации такая краткость имеет положительную коннотацию.

При чтении возникли следующие замечания редакторского характера:

1. Пространство $L(a, b)$ (с. 23 и далее) не определено.

2.С. 65, строка 8: $N(\delta)$ не определено, хотя из контекста понятно, что это решение неравенства на строке 5.

3. Не очень удачное обозначение сплайнов $x_{n,r}$, с. 23 и далее, т.к. тут же определяются точки канонического набора x_i и возможна путаница.

4. Есть подозрение, что лемма 3.1 есть частный случай некоторого более общего результата для банаховых пространств, основанного на двойственности.

Заключение. Представленная диссертация является сильной работой, в которой решен ряд задач и развиты методы, имеющие существенное значение для теории функций. Работа является завершенной и надлежащим образом оформленной. Все вынесенные на защиту результаты получены автором самостоятельно и полностью опубликованы. Автореферат соответствует содержанию диссертации и верно его отражает. Диссертация соответствует требованиям "Положения о порядке присуждения научных степе-

ней" (утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842), а её автор Ю. В. Малыхин заслуживает присвоения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
д.ф.-м.н., доцент,
в.н.с. ИПУ РАН Балашов Максим Викторович

«18» сентября 2025 г.

специальность 01.01.09
тел. +7 977 648 39 18
e-mail: balashov73@mail.ru
ИПУ РАН Россия, 117997,
Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Подпись Балашова Максима Викторовича
ЗАВЕРЯЮ
ВЕД. ИНЖЕНЕР
ЗАЛОЖНЕВА Л.Л.

