Отзыв официального оппонента

на диссертацию Дюжиной Натальи Александровны "Плотность сумм сдвигов одной функции"

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 1.1.1 - вещественный, комплексный и функциональный анализ)

В диссертационной работе изучается плотность множества конечных линейных комбинаций сдвигов некоторой функции с натуральными коэффициентами в различных пространствах. Этот раздел теории функций формируется в настоящее время и связан с работами П.А.Бородина и его учеников, а также С.В.Конягина. Близкие результаты для целочисленных линейных комбинаций по системам сдвигов и сжатий получен недавно В.И.Филипповым. Часть результатов диссертации посвящена приближению линейными комбинациями с натуральными коэффициентами сдвигов функции $1/z$, т.е. наипростейших дробей. Теория приближения такими функциями, зародившаяся в середине XX века, в настоящее время развивается чрезвычайно активно. Здесь можно назвать таких математиков, как В.И.Данченко, И.Р.Каюмов и П.А.Бородин. Актуальность и востребованность тематики работы не подлежит сомнению.

Полученные результаты носят в основном теоретический характер. Впрочем, как указано во введении, наипростейшие дроби допускают электростатическую интерпретацию, поэтому полученные утверждения могут иметь физический смысл. Отметим также, что теоремы глав 1 и 2 связаны с классическими пространствами Харди в полуплоскости и можно предположить, что их аналоги могут быть получены в пространствах Харди-Орлича, Харди-Лоренца и т.п.

В первой главе диссертации строится функция, для которой суммы действительных сдвигов плотны в пространствах Харди H_p, $2 \le p < \infty$, в верхней полуплоскости с нормой, равной L^p-норме ее некасательного предела на $\mathbb{R}$, и обозначаемом как $H_p(\mathbb{R})$. Такой же результат получен в заменяющем пространство H_∞ пространстве функций $AC_0(\mathbb{R})$, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных на ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности. Приведенные выше случаи значительно отличаются по методам доказательства.

Во второй главе показано, что конечные суммы производных наипростейших дробей с полюсами из нижней полуплоскости плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Этот результат является первым в данном направлении и его важность подчеркивается тем фактом, что сами наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости таким свойством не обладают.

В третьей главе приведены две группы результатов. Сначала строятся функции на многомерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, на многомерной евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ и многомерном торе $\mathbb{T}^d$, суммы сдвигов которых плотны в соответствующем пространстве L_p при $2 \leq p < \infty$ в первых двух случаях и при $1 \leq p < \infty$ в последнем случае (причем приближаемые функции берутся с нулевым средним значением). Наконец, в теореме 3.4 доказан следующий критерий. Пусть G — нетривиальная компактная группа, тогда существование действительной функции на G, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$ с нулевым средним значением, равносильно связности G и счетности ее группы характеров. Этот результат, по моему мнению, является самым выдающимся в диссертации.

В работе использованы методы теории функций действительного и комплексного переменного, функционального анализа, топологии и теории чисел. Доказательства являются строгими и убедительными вплоть до констант. К сожалению, автор часто пишет сжато и чтение работы требует от читателя непрерывной проверки ряда мелких утверждений, которые, однако, являются верными.

К работе имеются следующие замечания.

1. В теореме D (страница 7, 3 строка снизу) лучше писать "стремящихся к нулю при стремлении аргумента к $\pm\infty$".

2. Отсутствие понятия связности группы или множества в формулировке теоремы 3.4 на стр. 17 во Введении вполне допустимо, но его нет и в главе 3, где эта теорема доказывается. Найти его, конечно, нетрудно (например, книга Рудина [44], Appendices, A8), но это понятие не входит в программу кандидатского экзамена в качестве обязательного.

3. Свойства (b) и (B) на страницах 21 и 22 можно было бы объяснить поподробнее.

4. В теореме I (на странице 23) приводится ссылка на §4.2.7 главы VIII учебника Колмогорова и Фомина. Правильная ссылка должна быть на свойство 7 из пункта 2 параграфа 4 главы VIII. Лучше, конечно, было сослаться на книгу, где это подробно доказывается.

5. В теореме J (на странице 25) и перед ней нет определения равномерно гладкого пространства и модуля гладкости, тем более что последнее понятие многозначно и означает разные объекты в теории приближений и в теории банаховых пространств.

6. Применяемая на странице 26, 10 строка снизу, теорема 78 из монографии Титчмарша обычно называется неравенством Юнга.

7. На стр. 26, 6 строка снизу, утверждается что свертка функций из $L^2(\mathbb{R})$ принадлежит $C_0(\mathbb{R})$. Ограниченность и равномерная непрерывность понятны, а вот стремление к нулю в бесконечности не совсем. Можно было сослаться на [44], пункт d) теоремы 1.1.6 главы 1.

8. В неравенстве на стр. 28, 8 строка снизу, стоило бы увеличить константу. Впрочем на результате п.9 доказательства теоремы 1.1 это не отразится. .

9. На стр. 29, 3 строка сверху, стоило бы вставить "(t)"в числителе, поскольку в знаменателе стоит "t".

10. В довольно ценном замечании 2.2 (стр.34, 8-9 строки снизу) следовало бы рассмотреть iF_3 или $-iF_3$, чтобы пользоваться введенным ранее определением разносторонности.

11. В неравенстве из последней строки на стр. 38 слева надо использовать "x"вместо "z".

Указанные недочеты не носят принципиального характера и ничуть не умаляют научных достоинств диссертации. Как отмечено выше, доказательства являются убедительными. Работа представляет собой полноценное завершенное математическое исследование, а также содержит гипотезы и указания на нерешенные проблемы, дающие перспективу дальнейших исследований.

Полученные результаты являются новыми и важными. Они могут быть применены в теории приближений, теории функций действительного и комплексного переменных, гармоническом анализе. Полученные утверждения будут интересны специалистам из Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова, Математического института им.В.А.Стеклова РАН, Казанского, Владимирского, Саратовского государственных университетов. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих научных изданиях (3 публикации в "Математических заметках"и одна в "Математическом сборнике"). Математические результаты и разработанные методы достаточны для защиты кандидатской диссертации. Диссертационная работа Н.А.Дюжиной соответствует всем критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней, установленным для кандидатской диссертации, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

05.03.2025

Официальный оппонент,
кандидат физико-математических наук
(специальность 1.1.1 вещественный, комплексный и
функциональный анализ),
доцент кафедры теории функций и стохастическогоанализа СГУ
(410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83)
8452 29 06 95, VolosivetsSS@mail.ru
Волосивец Сергей Сергеевич

Подпись Волосивец С.С. удостоверяю
Ученый секретарь
Ученого совета СГУ В.Г. Семенова
«05» марта 2025