Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.982.256

512.546.3

517.538.5



Дюжина Наталья Александровна

Плотность сумм сдвигов одной функции

1.1.1 вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2025

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:

Бородин Петр Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (специальность 01.01.01)

Официальные оппоненты:

Скопина Мария Александровна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики факультета прикладной математики – процессов управления Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»
(специальность 01.01.01)

Волосивец Сергей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и стохастического анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
(специальность 01.01.01)

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Защита состоится 27 марта 2025 г. на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi-ras.ru/dis/ref25/dyuzhina/dis.pdf.

Автореферат разослан «30» января 2025 г.

Ученый секретарь диссертационного
Совета 24.1.167.01
Доктор физико-математических наук, профессор В.А. Ватутин

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена вопросам теории приближений в функциональных пространствах, связанных с задачей о существовании функции с плотными суммами сдвигов: доказательство того, что существует функция, суммы сдвигов которой плотны в пространствах Харди в верхней полуплоскости; доказательство плотности производных наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости в пространствах Харди в верхней полуплоскости; доказательство существования функций на d-мерном евклидовом пространстве, на d-мерном торе и на d-мерной целочисленной решетке, суммы сдвигов которых плотны в действительных пространствах L_p на этих множествах; полное описание компактных абелевых групп, на которых существует функция, суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним.

Актуальность темы. Задача о плотности сумм сдвигов одной функции в различных банаховых пространствах функций является частным случаем задачи о плотности полугруппы, рассмотренной в работах[1,2].

Задача А. *Пусть M — некоторое заданное подмножество банахова пространства X. Верно ли, что множество*

$$R(M) = \{x_1 + \cdots + x_n : \ x_k \in M, \ n \in \mathbb{N}\}$$

всюду плотно в X, т. е. любой элемент из X сколь угодно точно приближается конечными суммами элементов из M?

Множество $R(M)$ называется *аддитивной полугруппой*, порожденной множеством M. В [3, гл. 8, §2] множество $R(M)$ называется *аддитивным результантом* множества M. В диссертации в качестве порождающего рассматривается множество $M = \{f(x-a) : a \in E\}$ в банаховом пространстве X функций с некоторой областью определения D, где f — такая фиксированная функция, что сдвиги $f(x-a)$ определены для всех $x \in D$, $a \in E$, и как функции x принадлежат X.

Мотивировкой для исследования задачи А послужила теория приближения наипростейшими дробями (логарифмическими производными многочленов).

[1] П. А. Бородин, Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем., **78**:6 (2014), 21–48.

[2] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Плотность квантованных приближений // УМН, **78**:5(473) (2023), 3–64.

[3] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962, 829 с.

Наипростейшей дробью (термин предложен Е. П. Долженко) называется функция вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C}. \tag{0.1}$$

Если в задаче A в качестве порождающего взять множество

$$M(E) = \left\{ \frac{1}{z - a} : a \in E \right\},$$

где $E \subset \mathbb{C}$, то получится задача о плотности множества $SF(E) = R(M(E))$, т.е. множества всевозможных наипростейших дробей с полюсами на E, в различных банаховых пространствах X функций. При этом множество E выбирается вне области определения приближаемых функций.

Первые результаты о приближении наипростейшими дробями, полученные западными математиками, датируются второй половиной XX в. (G. R. MacLane[4,5], J. Korevaar[6], J. M. Elkins[7], D. J. Newman[8], C. K. Chui[9] и др.). При этом во многих работах этих авторов явно не ставится задача об аппроксимации наипростейшими дробями, и соответствующие результаты явно не формулируются, но могут быть выведены из доказанных теорем. Основополагающий результат в теории приближения наипростейшими дробями был фактически получен Я. Кореваарром[6].

Теорема A. *Для всякой ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ множество $SF(\partial D)$ плотно в пространстве $A(D)$ функций, голоморфных в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах в D.*

В России приближения наипростейшими дробями стали изучаться по инициативе Е. П. Долженко в 2000-х гг., и в дальнейшем были получены существенные результаты об аппроксимации наипростейшими дробями в различных пространствах функций комплексно-

[4] G. R. MacLane, Polynomials with zeros on a rectifiable Jordan curve // Duke Math. J., **16**:3 (1949), 461—477.

[5] G. R. MacLane, Limits of rational functions // Pacific J. Math., **6**:1 (1956), 111–116.

[6] J. Korevaar, Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation // Ann. of Math. (2), **80**:3 (1964), 403–410.

[7] J. M. Elkins, Approximation by polynomials with restricted zeros // J. Math. Anal. Appl., **25**:2 (1969), 321—336.

[8] D. J. Newman, A lower bound for an area integral // Amer. Math. Monthly, **79**:9 (1972), 1015—1016.

[9] C. K. Chui, On approximation in the Bers spaces // Proc. Amer. Math. Soc., **40**:2 (1973), 438—442.

го переменного (В. И. Данченко и Д. Я. Данченко[10,11], О. Н. Косухин[12], П. А. Бородин[13,14] и К. С. Шкляев[15,16], В. Ю. Протасов, П. В. Чунаев, М. А. Комаров[17,18], Е. В. Абакумов, А. А. Боричев, К. Ю. Федоровский и др.). Общее представление о теории приближения наипростейшими дробями можно получить по обзору[19], содержащему в частности нетривиальные количественные результаты о скорости приближения.

Приближение наипростейшими дробями имеет естественную физическую интерпретацию. Функция напряженности плоского электростатического поля, создаваемого одинаковыми одноименными зарядами, расположенными в точках a_k, комплексно сопряжена наипростейшей дроби (0.1). Поэтому задача состоит в приближении полем, создаваемым одинаковыми зарядами, расположенными в множестве E, произвольного плоского электростатического поля с напряженностью, принадлежащей пространству X, по норме этого пространства.

С одной стороны, наипростейшая дробь (0.1) является суммой сдвигов $f(z-a_k)$ одной функции $f(z)=1/z$. Естественным образом возникает задача о плотности сумм сдвигов

$$\sum_{k=1}^{n} f(t-a_k)$$

одной функции f в тех банаховых пространствах X функций, где естественно определен оператор сдвига. В качестве X прежде всего рассматриваются различные пространства функций на прямой и на окружности. С другой стороны, эта задача примыкает к задаче о полноте

[10] В. И. Данченко, Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб., **185**:8 (1994), 63–80.

[11] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, О приближении наипростейшими дробями // Матем. заметки, **70**:4 (2001), 553—559.

[12] О. Н. Косухин, Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2001, №4, 54—59.

[13] П. А. Бородин, Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах // Матем. заметки, **82**:6 (2007), 803—810.

[14] П. А. Бородин, Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб., **200**:8 (2009), 25—44.

[15] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Приближение наипростейшими дробями в неограниченных областях // Матем. сб., **212**:4 (2021), 3—28.

[16] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Плотность квантованных приближений // УМН, **78**:5(473) (2023), 3–64.

[17] М. А. Комаров, Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс // Матем. заметки, **97**:5 (2015), 718—732.

[18] M. A. Komarov, A lower bound for the $L_2\,[-1,1]$-norm of the logarithmic derivative of polynomials with zeros on the unit circle // Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**:2 (2019), 67—72.

[19] В. И. Данченко, М. А. Комаров, П. В. Чунаев, Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем., **12** (2018), 9–49.

системы сдвигов одной функции, начавшейся с работы Винера[20]. В этой работе была решена задача о плотности линейных комбинаций сдвигов одной функции в действительных пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема B. *1. Пусть функция f принадлежит действительному пространству $L_1(\mathbb{R})$. Действительные линейные комбинации сдвигов $f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, функции f плотны в действительном пространстве $L_1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье функции f нигде не равно нулю.*

2. Пусть функция f принадлежит действительному пространству $L_2(\mathbb{R})$. Действительные линейные комбинации сдвигов $f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, функции f плотны в действительном пространстве $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда множество нулей преобразования Фурье функции f имеет лебегову меру 0.

В связи с теоремой B, в рамках теории плотности полугруппы можно ставить вопрос о существовании функции с плотными суммами сдвигов в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$.

Сперва в 2017 году П. А. Бородиным был найден целый класс функций на окружности $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, для каждой из которых суммы сдвигов плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$ функций из $L_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним.

Теорема C. [[21], теорема 1]. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и 2π-периодическая функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T})$ имеет ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ с условиями:*

a) $c_0 = 0$, $c_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n|^{\min\{2,q\}} < \infty$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(t + a_k), \quad a_k \in \mathbb{T}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{0.2}$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$.

При этом для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ суммы (0.2) ее сдвигов не могут быть плотны во всем пространстве $L_p(\mathbb{T})$: если среднее значение $\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$ функции f равно α, то суммами

[20] N. Wiener, Tauberian theorems // Ann. of Math. (2), **33** (1932), 1—100.

[21] П. А. Бородин, Приближение суммами сдвигов одной функции на окружности // Изв. РАН. Сер. матем., **81**:6 (2017), 23–37.

(0.2) нельзя приблизить функции, у которых среднее значение не принадлежит множеству $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$.

В этой же работе показано, что для всякой функции f, принадлежащей $L_p^0(\mathbb{T})$ при $2 \leqslant p < \infty$, с коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условиям $|c_n| \geqslant 1/|n|$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, суммы сдвигов не плотны в $L_p^0(\mathbb{T})$. Теорема C не верна для комплексных пространств $L_p(\mathbb{T})$. Найден целый класс функций, для каждой из которых суммы сдвигов плотны в действительном пространстве $C_0(\mathbb{T})$, состоящем из непрерывных функций с нулевым средним на окружности, с равномерной нормой [21, теорема 2]. Также найдены классы функций с плотными суммами сдвигов в пространстве $H_p^0(\mathbb{T})$ функций из пространства Харди $H_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним [21, теорема 3] и в пространстве $AC(\overline{U})$ функций, непрерывных на замкнутом единичном круге и аналитических в его внутренних точках [21, теорема 4]. При этом в работе[21] найдены оценки скорости приближения суммами сдвигов одной конкретной функции на окружности.

Позднее П.А.Бородиным[22] была доказана

Теорема D. *Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$, а также в действительном пространстве $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций, стремящихся к нулю на $\pm\infty$.

В той же работе доказано, что аналоги этой теоремы при $p = 1$ и $p = \infty$ не верны. Неясно, верна ли теорема D при $1 < p < 2$. Кроме того, для комплексных пространств $L_p(\mathbb{R})$ эта теорема не верна. Естественным образом возникает вопрос о возможности доказательства аналога теоремы D для пространств Харди H_p в верхней полуплоскости и соответствующего пространства функций, непрерывных на замкнутой полуплоскости, аналитических внутри нее и стремящихся к нулю на бесконечности. Положительный ответ дает теорема 1.1 главы 1 диссертации. Отметим, что доказательство теоремы 1.1 идейно повторяет доказательство теоремы D, но технически во многом отличается от него. Доказательства обеих теорем основаны на применении следующего результата С. В. Конягина.

[22] P. A. Borodin, S. V. Konyagin, Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a single function on the line // Anal. Math., **44**:2 (2018), 163–183.

Теорема E. [22, теорема 1]. *Существует последовательность тригонометрических многочленов*

$$Q_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s_\nu} m_s^{(\nu)} e^{ik_s^{(\nu)}x},$$

где $k_s^{(\nu)}$ *— различные целые числа,* $m_s^{(\nu)}$ *— натуральные числа, сходящаяся к нулю почти всюду на* $\mathbb{R}$.

В теоремах D и 1.1 существование функции f доказывается неконструктивно. Тем не менее, можно указать целые классы функций, для которых суммы плюс-минус-сдвигов плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема F. [23, следствие 2]. *Если для функции* f *из действительного пространства* $L_2(\mathbb{R})$ *преобразование Фурье* $\widehat{f}$ *обращается в нуль на множестве нулевой меры Лебега на* $\mathbb{R}$ *и интегральный модуль непрерывности*

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0\leqslant r\leqslant\delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

обладает свойством $\omega_2^2(f,\delta) = o(\delta)$ *при* $\delta \to 0$ *(например, если* f *— финитная липшицева функция), то конечные суммы функций* $\pm f(t-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *плотны в пространстве* $L_2(\mathbb{R})$.

Возникает вопрос: можно ли, допустив комплексные сдвиги, найти функцию, суммы комплексных сдвигов которой плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ функций, аналитически продолжающихся в верхнюю полуплоскость, непрерывных на ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности? В качестве такой функции попробуем рассмотреть

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^l} \text{ при некотором } l \in \mathbb{N}.$$

Тогда при $l = 1$ суммами комплексных сдвигов функции $f(z)$, принадлежащих пространству $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ и $AC_0(\mathbb{R})$, будут наипростейшие дроби

$$SF^1(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}, \ \operatorname{Im} a_k < 0, \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

с полюсами в нижней полуплоскости, а при $l \geqslant 2$ — производные порядка $l-1$ таких наипростейших дробей с точностью до константы. Нетрудно показать, что $SF^1(\Pi_-)$ не плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и в $AC_0(\mathbb{R})$ (см. замечание 2.1 в тексте диссертации).

[23] П. А. Бородин, Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем., **78**:6 (2014), 21–48.

Естественным образом возникает задача о плотности производных наипростейших дробей: верно ли, что множество

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2}, \quad \operatorname{Im} a_k < 0, \;\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$? В главе 2 диссертации дан утвердительный ответ на этот вопрос, а также доказано, что суммы $SF^2(\Pi_-)$ не плотны в пространстве $H_1(\mathbb{R})$.

Наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси принадлежат всем пространствам $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, но не образуют в этих пространствах всюду плотного множества: из результатов работы В. И. Данченко[24] следует, что никакая функция $-1/(z-a)$, $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, не может быть приближена в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями. С другой стороны, наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси плотны в пространстве $C_0(\mathbb{R})$[25].

В 2019 году П. А. Бородин[26] получил следующий результат.

Теорема G. *В действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей существует такой элемент v, что конечные суммы $\sum_{k=1}^{N} T^{n_k} v$, $n_k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, его сдвигов плотны во всех действительных пространствах $l_p(\mathbb{Z})$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в действительном пространстве $c_0(\mathbb{Z})$.*

Здесь T — оператор сдвига вправо, покоординатно определяемый равенством $(Tx)_n = x_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Эта теорема не верна при $p = 1$, $p = \infty$, в действительном пространстве $c(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей, имеющих предел в обе стороны, с равномерной нормой, а также в случае комплексных пространств[26]. Доказательство теоремы G также опирается на теорему E, и существование вектора v доказывается неконструктивно. Неясно, верна ли теорема G при $1 < p < 2$.

Возникает вопрос о переносе теорем C, D и G на многомерный случай, то есть на случай тора $\mathbb{T}^d$, евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ и целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Эти многомерные аналоги доказаны в главе 3 диссертации (теоремы 3.1, 3.2 и 3.3).

[24] В. И. Данченко, Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб., **185**:8 (1994), 63–80.

[25] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем., мех., **1** (2005), 3–8.

[26] П. А. Бородин, Плотность сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей // Труды МИАН, **303** (2018), 39–44.

На всякой локально компактной абелевой группе существует мера Хаара m, инвариантная относительно сдвигов, и определены пространства L_p. Так возникла более общая задача, сформулированная в обзоре[27].

Задача В. *Пусть G — локально компактная абелева группа с мерой Хаара m. Существует ли функция f, определенная на этой группе, для которой суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} f(g+g_k), \quad g_k \in G, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.3}$$

ее сдвигов: а) плотны в действительном пространстве $L_2(G)$ (в случае некомпактной группы G); б) плотны в действительном пространстве

$$L_2^0(G) = \left\{ h \in L_2(G) : \int_G h(g)\, dm(g) = 0 \right\}$$

(в случае компактной группы G)?

Выделение компактного случая в задаче В объясняется следующим соображением. Если G — компактная абелева группа, то ее мера Хаара $m(G) < \infty$ [[28], гл. 4, §15, теорема 15.9]. Тогда для всякой функции $f \in L_2(G)$ суммы (0.3) ее сдвигов не могут быть плотны во всем пространстве $L_2(G)$: в этом случае определено среднее значение $\int_G f(g)\, dm(g) = \alpha$ функции f, и суммами (0.3) не могут быть приближены функции, у которых среднее значение не принадлежит множеству $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. Теорема 3.4 главы 3 диссертации дает исчерпывающий ответ на вопрос б) задачи В.

Отметим также, что в работе[29] была предпринята попытка обобщить теорему F о плотности сумм плюс-минус-сдвигов одной функции на локально компактные группы, но сформулированный в этой работе результат (следствие 2.11) ошибочен.

В пространстве $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать не только сдвиги, но и любые другие линейные преобразования переменных данной функции. Например, в работе К. С. Шкляева[30] найдены достаточные условия на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при выполнении которых суммы или плюс-минус суммы функций вида $f(\alpha x - \theta)$, $\alpha \in A \subset \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, плотны в действительных пространствах L_p, $2 \leqslant p < \infty$, и C_0 на прямой или на ее компактном подмножестве. В

[27] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Плотность квантованных приближений // УМН, **78**:5(473) (2023), 3–64.

[28] Э. Хьюитт, К. Росс, Абстрактный гармонический анализ. Том I, М., Мир, 1975, 654 с.

[29] S. M. Tabatabaie, The problem of density on $L^2(G)$ // Acta Math. Hungar., **150**:2 (2016), 339—345.

[30] K. Shklyaev, Approximation by sums of shifts and dilations of a single function and neural networks // J. Approx. Th., **291** (2023), 105915.

этой же работе получено обобщение теоремы D: найдены достаточные условия на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при которых суммы функций вида $f(x - \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, плотны в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $2 \leqslant p < \infty$, и $C_0(\mathbb{R})$. В качестве следствия получены условия на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, достаточные для плотности сумм функций вида $f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - \theta)$, $\mathbf{w} \in W \subset \mathbb{R}^d$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, в пространствах $L_p(K)$, $2 \leqslant p < \infty$, и $C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, а также в пространстве $C(\mathbb{R}^d)$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Отметим еще работу В. И. Филиппова[31], в которой получены результаты о разложении элементов пространств $L_p((0, 1]^m)$, $1 \leqslant p < \infty$, по системам функций, состоящим из сжатий и сдвигов одной функции, с целыми коэффициентами.

Цель работы. Исследование плотности сумм сдвигов одной функции в различных функциональных пространствах, а именно в пространствах Харди в верхней полуплоскости и пространствах L_p на локально компактных абелевых группах.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна. В диссертации автором самостоятельно получены следующие новые результаты.

1) Доказано существование функции, определенной в замкнутой верхней полуплоскости, для которой суммы действительных сдвигов плотны во всех пространствах H_p Харди в верхней полуплоскости для $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных в ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности (Теорема 1.1).

2) Доказано, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны во всех пространствах Харди H_p в верхней полуплоскости при $1 < p < \infty$, а также в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных в ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности (Теорема 2.1).

3) Доказано существование функции на d-мерной целочисленной решетке, на d-мерном евклидовом пространстве и на d-мерном торе, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве L_p на соответствующем множестве (Теоремы 3.1, 3.2 и 3.3).

4) Доказан следующий критерий. Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Действительная функция на G, суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним, существует тогда и только

[31] В. И. Филиппов, Целочисленное разложение по системам из сжатий и сдвигов одной функции // Изв. РАН. Сер. матем., **84**:4 (2020), 187—197.

тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров (Теорема 3.4).

Методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа, теории приближений, комплексного анализа, теории меры, гармонического анализа.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории приближений, функциональном анализе, теории функций, гармоническом анализе.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар «Геометрическая теория приближений» в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2016–2023 гг.);
- семинар «Тригонометрические и ортогональные ряды» в МГУ под руководством профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, профессора А. П. Солодова (неоднократно, 2019 г.);
- семинар по теории функций действительного переменного в МГУ под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко (2024).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- на международной школе-конференции С. Б. Стечкина по теории функций (Кыштым, 2018 г.);
- на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (неоднократно, Воронеж, 2019 и 2023 гг.);
- на международной конференции «Приближение, разложения и компьютерные науки» (Сочи, 2023 г.);
- на международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2024 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, а также представлены в тезисах нескольких международных конференций. Список этих работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 54 наименований. Общий объем диссертации — 75 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, замечаний и формул. Результаты, доказанные в диссертации, нумеруются двумя арабскими цифрами (первая цифра указывает на номер главы), а известные используемые результаты — латинскими буквами в порядке упоминания.

Краткое содержание диссертации. Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации доказывается существование функции на действительной оси $\mathbb{R}$, для которой суммы действительных сдвигов плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ Харди для $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ функций, непрерывно и аналитически продолжающихся в верхнюю полуплоскость и стремящихся к нулю на бесконечности. При этом в случае $p = \infty$ такой функции не существует.

Теорема 1.1. *Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которой суммы действительных сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Во второй главе диссертации доказывается, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны во всех пространствах Харди H_p на действительной оси при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Теорема 2.1. *Множество*

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - a_k)^2}, \quad \operatorname{Im} a_k < 0, \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

При этом наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости в указанных пространствах не плотны. Показывается также, что при $p = 1$ теорема 2.1 не верна.

Также доказывается, что множество $SF^2(\Pi_-)$ в теореме 2.1 нельзя заменить множеством

$$SF^2(y_0) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2},\ \ \operatorname{Im} a_k = -y_0,\ \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $y_0 > 0$.

В дополнение к теореме 2.1 доказывается следующий результат.

Теорема 2.2. *При достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ для каждого a из нижней полуплоскости Π_- существует дробь $r \in SF^2(\Pi_-)$ вида*

$$r(z) = \frac{1}{(z-a)^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(z-a_j)^2},\ \ a_j \in \Pi_-,\ \ j = 1, ..., k-1,$$

такая, что при всех $1 < p < \infty$ выполнены неравенства

$$\|r\|_p \leqslant \frac{128}{|\operatorname{Im} a|^{2-1/p}} \cdot \frac{(\ln k)^{2-1/p}}{k^{1-1/p}},$$

и

$$\|r\|_{AC_0} \leqslant \frac{32}{|\operatorname{Im} a|^2} \cdot \frac{(\ln k)^2}{k}. \tag{0.4}$$

Теорема 2.2 частично решает задачу типа задачи Е. А. Горина для класса производных наипростейших дробей и норм пространств $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и $AC_0(\mathbb{R})$ (более подробно см. в работах[32,33]). Оценка (0.4) следует из результатов В. И. Данченко[32] и является точной по порядку при $k \to \infty$.

В третьей главе диссертации доказываются следующие результаты.

Теорема 3.1. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует такой элемент w в действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$, что суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} T_1^{j_{1,k}} T_2^{j_{2,k}} ... T_d^{j_{d,k}} w,\ \ j_{1,k}, j_{2,k}, ..., j_{d,k} \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N},$$

его сдвигов плотны во всех действительных пространствах $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $c_0(\mathbb{Z}^d)$.

[32] В. И. Данченко, Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб., **185**:8 (1994), 63–80.

[33] В. И. Данченко, М. А. Комаров, П. В. Чунаев, Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем., **12** (2018), 9–49.

Здесь $T_k,\ k = 1, \ldots, d,$ — операторы сдвигов по каждому из d направлений, покоординатно определяемые равенствами

$$(T_k x)_{n_1 \ldots n_k \ldots n_d} = x_{n_1 \ldots n_{k-1}(n_k - 1)n_{k+1} \ldots n_d},\ \ k = 1, ..., d,\ \ n_1, ..., n_d \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3.2. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует функция $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} h(x - a_k),\ \ a_k \in \mathbb{R}^d,\ \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ при $2 \leqslant p < \infty$.

Теорема 3.3. *Пусть $d \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1$, и функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$ имеет ряд Фурье*

$$f(t_1, ..., t_d) = \sum_{n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}} c_{n_1, \ldots, n_d} e^{in_1 t_1} \ldots e^{in_d t_d} = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}} e^{i(\bar{n}, \bar{t})}$$

с условиями:

a) $c_{\bar{0}} = 0$, $c_{\bar{n}} \neq 0$ для всех $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}$;

b)

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\max_{j=1,\ldots,d} |n_j| \right)^{2d-1} \cdot |c_{\bar{n}}|^{\min\{2,q\}} < \infty.$$

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(\bar{t} + \bar{a}_k),\ \ \bar{a}_k \in \mathbb{T}^d,\ \ N \in \mathbb{N},$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ функций из $L_p(\mathbb{T}^d)$ с нулевым средним.

Теорема 3.4. *Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Функция $f : G \to \mathbb{R}$, для которой суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} f(g + g_k),\ \ g_k \in G,\ \ n \in \mathbb{N},$$

ее сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю П. А. Бородину за постановку задач, их обсуждение и поддержку в работе, а также О. Н. Косухину за ценные замечания.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди в полуплоскости // Матем. заметки, **106**:5 (2019), 669–678.

[2] Н. А. Дюжина, Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди в полуплоскости // Матем. заметки, **109**:1 (2021), 57–66.

[3] Н. А. Дюжина, Многомерные аналоги теорем о плотности сумм сдвигов одной функции // Матем. заметки, **113**:5 (2023), 775–779.

[4] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространстве L_2^0 на компактной абелевой группе // Матем. сб., **215**:6 (2024), 29–40.

Тезисы конференций:

[5] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2019, стр. 121–122.

[6] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в многомерном случае // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2023, стр. 143–145.

[7] Н. А. Дюжина, Приближение суммами сдвигов одной функции на компактной абелевой группе // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 2024, стр. 93–94.