«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
и цифровому развитию
ФГБОУ ВО «Владимирский
государственный университет
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых»
_____ А.О. Кучерик
«05» февраля 2025

Отзыв ведущей организации

на диссертацию Дюжиной Натальи Александровны
«Плотность сумм сдвигов одной функции», представленную на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена вопросам существования функции, суммы сдвигов которой плотны в том или ином функциональном пространстве, причем, в отличие от классической проблемы Н. Винера о полноте системы сдвигов одной функции, здесь все сдвиги берутся с коэффициентом 1.

Эта тематика и, более общо, теория плотности аддитивной полугруппы в банаховом пространстве, развиваемая П.А. Бородиным и его учениками, берет начало в известной задаче о приближениях наипростейшими рациональными дробями

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

исследованию которой посвящены работы многих зарубежных и отечественных математиков — Я. Кореваара, Ч. Чуи, Д. Ньюмана, В.И. и Д.Я. Данченко, О.Н. Косухина, П.А. Бородина, Я.В. Новака, Е.Н. Кондаковой, В.Ю. Протасова, И.Р. Каюмова, Е.В. Абакумова, А.А. Боричева, К.Ю. Федоровского и других. Очевидно, что всякая такая дробь может рассматриваться как сумма сдвигов функции $f_0(z) = 1/z$. Аппроксимационные свойства ряда естественных обобщений наипростейших дробей — например, операторов взвешенных сдвигов и поворотов, определяемых как конечные суммы $\sum \mu_j f(z - \lambda_j)$ и $\sum \mu_j f(z\lambda_j)$ с варьируемыми параметрами μ_j и λ_j, — изучались в работах В.И. Данченко и его учеников.

В 2018 году П.А. Бородин доказал существование вещественнозначной функции $f(x)$, суммы действительных сдвигов которой

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $2 \le p < \infty$, и $C_0(\mathbb{R})$ (где индекс 0 означает, что функции стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$), причем на комплексные

пространства $L_p(\mathbb{R})$ теорема не переносится. В первой главе диссертации доказывается, однако, что аналог теоремы Бородина (теорема 1.1) имеет место и в комплексном случае, если вместо комплексных пространств $L_p(\mathbb{R})$ рассматривать их подпространства $H_p(\mathbb{R})$, изометричные пространствам Харди H_p для верхней полуплоскости Π_+ (соответственно, аналогом $C_0(\mathbb{R})$ становится пространство $AC_0(\mathbb{R}) \simeq AC_0(\Pi_+)$ функций, непрерывных в замыкании Π_+, аналитических внутри Π_+ и стремящихся к нулю на бесконечности). Доказательство теоремы 1.1 нетривиально и, как и доказательство теоремы Бородина, опирается на результат С.В. Конягина о существовании последовательности тригонометрических полиномов с натуральными коэффициентами, сходящейся к нулю почти всюду на $\mathbb{R}$. Оба доказательства неконструктивны, и вопрос о поиске конкретных функций с плотными суммами *действительных* сдвигов в $H_p(\mathbb{R})$ либо в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ остается открытым.

Вместе с тем, во второй главе диссертации предпринимается успешная попытка решить этот важный вопрос в случае *комплексных* сдвигов a_k. Подходящей оказывается функция $f(z) = 1/z^2$. А именно, автор доказывает (теорема 2.1), что множество

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2}, \quad \operatorname{Im} a_k < 0, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, а также в $AC_0(\mathbb{R})$. Ясно, что суммы из $SF^2(\Pi_-)$ лишь постоянным множителем отличаются от производных наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости Π_- (сами наипростейшие дроби не плотны ни в одном из указанных пространств).

Интересно отметить, что при доказательстве теоремы 2.1 автором устанавливается односторонняя оценка в задаче типа Е.А. Горина для производных наипростейших дробей с полюсами в полуплоскости (теорема 2.2): при каждом достаточно большом n строится наипростейшая дробь ρ_n порядка n с полюсами $z_1, \ldots, z_n \in \Pi_-$, один из которых фиксирован ($z_1 = -i$), для производной которой верна оценка

$$\|\rho_n'\|_{L_p(\mathbb{R})} < 128 \frac{(\ln n)^{2-1/p}}{n^{1-1/p}} \quad (1 < p \le \infty).$$

Из результатов В.И. Данченко (1994) следует, что порядок оценки точен при $p = \infty$. Было бы интересно выяснить точность порядка при конечных p. В качестве еще одного открытого вопроса, примыкающего к тематике второй главы, отметим задачу о плотности наипростейших дробей (или их производных порядка l) с полюсами $z_1, \ldots, z_n \in \Pi_-$ в пространствах Бергмана для верхней полуплоскости.

В заключительной, третьей главе доказываются многомерные обобщения цитированной выше теоремы Бородина (для $L_p(\mathbb{R})$) и его же теорем о плотности в $L_p(\mathbb{T})$ сумм сдвигов одной функции на окружности и о плотности сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей, а также исследуется поставленная в обзоре П.А. Бородина и К.С. Шкляева (УМН, 2023) задача о плотности сумм сдвигов одной функции в пространстве $L_2^0(G)$ (состоящем из вещественнозначных функций $f \in L_2(G)$ с нулевым средним) на компактной абелевой группе G. Основной результат главы (теорема 3.4) доставляет *критерий* существования подходящей функции. Представленные доказательства этой и других теорем диссертации трудны технически, содержат интересные идеи и показывают высокий уровень владения автором методами функционального, комплексного и гармонического анализа.

Работа аккуратно оформлена и хорошо написана, практически не содержит опечаток. Приведем некоторые замечания, часть из которых носит скорее характер рекомендаций.

1. Во введении имеет смысл добавить, что активное изучение аппроксимационных свойств наипростейших дробей в России началось после публикации В.И. и Д.Я. Данченко в 1999 году первой работы по этой тематике, и что постановка задачи типа Е.А. Горина для первой и последующих производных наипростейших дробей принадлежит А.О. Гельфонду (1966).

2. Для большей замкнутости текста нелишне соотнести теорему 3.4 о плотности сумм сдвигов одной функции в $L_2^0(G)$ на компактной абелевой группе G с получавшимися ранее результатами о плотности таких сумм в конкретных пространствах (например, с теоремой С).

3. Стр. 7: в [9] найдена оценка скорости приближения суммами *плюс-минус* сдвигов одной конкретной функции, но не суммами сдвигов.

4. На стр. 31 обозначение полюсов d_j аппроксимирующей суммы $\sum_{j=1}^{J} \frac{\lambda_j}{z-d_j}$ надо изменить, чтобы не было путаницы с числами d_n из определения функции g.

5. В замечании 2.1 неплотность наипростейших дробей из $SF^1(\Pi_-)$ в $H_p(\mathbb{R})$, $p > 1$, обосновывается при помощи понятия неразностороннего множества. Можно отметить, что этот факт вытекает и из цитируемого на стр. 9-10 результата Данченко.

6. В теореме 3.3 в случае $d \geq 2$ (который и является новым) условие b) можно ослабить, заменив показатель степени $2d-1$ на $d \cdot \min\{2, q\} - 1$. Доказательство не меняется; достаточно лишь не переходить от qd к $2d$ в (3.6) и в лемме 3.1, воспользовавшись тем, что при $q > 1$, $d \geq 2$ имеем $qd - 1 > 1$. Интересно, можно ли сделать такую замену при $d = 1$.

Перечисленные замечания никоим образом не снижают значимости результатов и не влияют на высокую оценку работы.

Диссертация носит теоретический характер и представляет собой законченное научное исследование в актуальной области теории нелинейных приближений. Все поставленные вопросы решаются автором исчерпывающе либо близким к исчерпывающему образом. Результаты новы и интересны и содержат хороший задел на будущее; в заключении диссертации особо перечисляется ряд интересных трудных задач, непосредственно примыкающих к теме исследования.

Все результаты опубликованы Н.А. Дюжиной без соавторства в центральных журналах («Математический сборник», «Математические заметки») и докладывались на крупных конференциях и семинарах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Полученные результаты могут использоваться в научных исследованиях, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском, Саратовском, Владимирском государственных университетах и других учебных и научных центрах.

Учитывая вышесказанное, считаем, что диссертация Н.А. Дюжиной «Плотность сумм сдвигов одной функции» соответствует всем требованиям пп. 9–11, 13, 14 Постановления Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842 «О порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Дюжина Наталья Александровна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук, доцентом кафедры функционального анализа и его приложений ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» Комаровым Михаилом Анатольевичем.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры функционального анализа и его приложений 30 января 2025 года, протокол №5.

Председательствующий на заседании:

Заведующий кафедрой функционального анализа и его приложений, кандидат физико-математических наук, доцент — В.Д. Бурков

Подпись В.Д. Буркова заверяю

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
УЧ. СЕКРЕТАРЬ ВЛГУ
КОЧНОВА Т.Н.

600000, г. Владимир, ул. Горького, 87
Тел.: +7 (4922) 47-96-06
E-mail.: oid@vlsu.ru