Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.982.256

512.546.3

517.538.5

Дюжина Наталья Александровна

Плотность сумм сдвигов одной функции

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор РАН П.А.Бородин

Москва 2024

Оглавление

Введение **3**

Глава 1. Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди в полуплоскости **19**

1.1 Определения и вспомогательные результаты 19

1.2 Доказательство основного результата 21

Глава 2. Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди в полуплоскости **33**

2.1 Наипростейшие дроби в пространствах Харди 33

2.2 Производные наипростейших дробей в пространствах Харди 34

2.3 Производные наипростейших дробей с полюсами на горизонтальной прямой 41

Глава 3. Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах L_p на локально компактных абелевых группах **44**

3.1 Случай тора $\mathbb{T}^d$, пространства $\mathbb{R}^d$ и решетки $\mathbb{Z}^d$ 44

3.2 Случай $p = 2$ и компактной абелевой группы 52

3.3 Комплексный случай 65

Заключение **68**

Список литературы **70**

Введение

Диссертация посвящена вопросам теории приближений в функциональных пространствах, связанных с задачей о существовании функции с плотными суммами сдвигов: доказательство того, что существует функция, суммы сдвигов которой плотны в пространствах Харди в верхней полуплоскости; доказательство плотности производных наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости в пространствах Харди в верхней полуплоскости; доказательство существования функций на d-мерном евклидовом пространстве, на d-мерном торе и на d-мерной целочисленной решетке, суммы сдвигов которых плотны в действительных пространствах L_p на этих множествах; полное описание компактных абелевых групп, на которых существует функция, суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним.

Актуальность темы. Задача о плотности сумм сдвигов одной функции в различных банаховых пространствах функций является частным случаем задачи о плотности полугруппы, рассмотренной в работах [7], [14].

Задача А. *Пусть M — некоторое заданное подмножество банахова пространства X. Верно ли, что множество*

$$R(M) = \{x_1 + \cdots + x_n : x_k \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$$

всюду плотно в X, т. е. любой элемент из X сколь угодно точно приближается конечными суммами элементов из M?

Множество $R(M)$ называется *аддитивной полугруппой*, порожденной множеством M. В [29, гл. 8, §2] множество $R(M)$ называется *аддитивным результантом* множества M. В диссертации в качестве порождающего рассматривается множество $M = \{f(x-a) : a \in E\}$ в банаховом пространстве

X функций с некоторой областью определения D, где f — такая фиксированная функция, что сдвиги $f(x-a)$ определены для всех $x \in D$, $a \in E$, и как функции x принадлежат X.

Мотивировкой для исследования задачи A послужила теория приближения наипростейшими дробями (логарифмическими производными многочленов).

Наипростейшей дробью (термин предложен Е. П. Долженко) называется функция вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}, \ \ a_k \in \mathbb{C}. \tag{0.1}$$

Если в задаче A в качестве порождающего взять множество

$$M(E) = \left\{ \frac{1}{z-a} : a \in E \right\},$$

где $E \subset \mathbb{C}$, то получится задача о плотности множества $SF(E) = R(M(E))$, т.е. множества всевозможных наипростейших дробей с полюсами на E, в различных банаховых пространствах X функций. При этом множество E выбирается вне области определения приближаемых функций.

Первые результаты о приближении наипростейшими дробями, полученные западными математиками, датируются второй половиной XX в. (G. R. MacLane [41], [42], J. Korevaar [39], J. M. Elkins [35], D. J. Newman [43], C. K. Chui [33] и др.). При этом во многих работах этих авторов явно не ставится задача об аппроксимации наипростейшими дробями, и соответствующие результаты явно не формулируются, но могут быть выведены из доказанных теорем. Основополагающий результат в теории приближения наипростейшими дробями был фактически получен Я. Кореваром.

Теорема A. [39]. *Для всякой ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ множество $SF(\partial D)$ плотно в пространстве $A(D)$ функций, голоморфных в области D, с топологией равномерной сходимости на компактах в D.*

В России приближения наипростейшими дробями стали изучаться по инициативе Е. П. Долженко в 2000-х гг., и в дальнейшем были получены существенные результаты об аппроксимации наипростейшими дробями в различных пространствах функций комплексного переменного (В. И. Данченко и Д. Я. Данченко [16], [17], О. Н. Косухин [12], [23], П. А. Бородин [4], [5], [6], [8], [11] и К. С. Шкляев [13], [14], В. Ю. Протасов [25], П. В. Чунаев [34], М. А. Комаров [21], [22], [36], [37], [38], Е. В. Абакумов, А. А. Боричев и К. Ю. Федоровский [31] и др.). Общее представление о теории приближения наипростейшими дробями можно получить по обзору [18], содержащему в частности нетривиальные количественные результаты о скорости приближения.

Приближение наипростейшими дробями имеет естественную физическую интерпретацию. Функция напряженности плоского электростатического поля, создаваемого одинаковыми одноименными зарядами, расположенными в точках a_k, комплексно сопряжена наипростейшей дроби (0.1). Поэтому задача состоит в приближении полем, создаваемым одинаковыми зарядами, расположенными в множестве E, произвольного плоского электростатического поля с напряженностью, принадлежащей пространству X, по норме этого пространства.

С одной стороны, наипростейшая дробь (0.1) является суммой сдвигов $f(z-a_k)$ одной функции $f(z) = 1/z$. Естественным образом возникает задача о плотности сумм сдвигов

$$\sum_{k=1}^{n} f(t - a_k)$$

одной функции f в тех банаховых пространствах X функций, где естественно определен оператор сдвига. В качестве X прежде всего рассматриваются различные пространства функций на прямой и на окружности. С другой стороны, эта задача примыкает к задаче о полноте системы сдвигов одной функции, начавшейся с работы Винера [47]. В этой работе была решена задача о

плотности линейных комбинаций сдвигов одной функции в действительных пространствах $L_1(\mathbb{R})$ и $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема B. [47]. *1. Пусть функция f принадлежит действительному пространству $L_1(\mathbb{R})$. Действительные линейные комбинации сдвигов $f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, функции f плотны в действительном пространстве $L_1(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда преобразование Фурье функции f нигде не равно нулю.*

2. Пусть функция f принадлежит действительному пространству $L_2(\mathbb{R})$. Действительные линейные комбинации сдвигов $f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, функции f плотны в действительном пространстве $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда множество нулей преобразования Фурье функции f имеет лебегову меру 0.

В связи с теоремой B, в рамках теории плотности полугруппы можно ставить вопрос о существовании функции с плотными суммами сдвигов в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$.

Сперва в 2017 году П. А. Бородиным был найден целый класс функций на окружности $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, для каждой из которых суммы сдвигов плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$ функций из $L_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним.

Теорема C. [9, теорема 1]. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и 2π-периодическая функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T})$ имеет ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ с условиями:*

a) $c_0 = 0$, $c_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n|^{\min\{2,q\}} < \infty$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(t + a_k), \ a_k \in \mathbb{T}, \ N \in \mathbb{N}, \tag{0.2}$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$.

При этом для всякой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ суммы (0.2) ее сдвигов не могут быть плотны во всем пространстве $L_p(\mathbb{T})$: если среднее значение $\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt$ функции f равно α, то суммами (0.2) нельзя приблизить функции, у которых среднее значение не принадлежит множеству $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$.

В этой же работе показано, что для всякой функции f, принадлежащей $L_p^0(\mathbb{T})$ при $2 \leqslant p < \infty$, с коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условиям $|c_n| \geqslant 1/|n|$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$, суммы сдвигов не плотны в $L_p^0(\mathbb{T})$. Теорема C не верна для комплексных пространств $L_p(\mathbb{T})$. Найден целый класс функций, для каждой из которых суммы сдвигов плотны в действительном пространстве $C_0(\mathbb{T})$, состоящем из непрерывных функций с нулевым средним на окружности, с равномерной нормой [9, теорема 2]. Также найдены классы функций с плотными суммами сдвигов в пространстве $H_p^0(\mathbb{T})$ функций из пространства Харди $H_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним [9, теорема 3] и в пространстве $AC(\overline{U})$ функций, непрерывных на замкнутом единичном круге и аналитических в его внутренних точках [9, теорема 4]. При этом в [9] найдены оценки скорости приближения суммами сдвигов одной конкретной функции на окружности.

Позднее в работе [32] была доказана

Теорема D. *Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$, а также в действительном пространстве $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций, стремящихся к нулю на $\pm\infty$.

В той же работе доказано, что аналоги этой теоремы при $p = 1$ и $p = \infty$ не верны. Неясно, верна ли теорема D при $1 < p < 2$. Кроме того, для комплекс-

ных пространств $L_p(\mathbb{R})$ эта теорема не верна. Естественным образом возникает вопрос о возможности доказательства аналога теоремы D для пространств Харди H_p в верхней полуплоскости и соответствующего пространства функций, непрерывных на замкнутой полуплоскости, аналитических внутри нее и стремящихся к нулю на бесконечности. Положительный ответ дает теорема 1.1 главы 1 диссертации. Отметим, что доказательство теоремы 1.1 идейно повторяет доказательство теоремы D, но технически во многом отличается от него. Доказательства обеих теорем основаны на применении следующего результата С. В. Конягина.

Теорема E. [32, теорема 1]. *Существует последовательность тригонометрических многочленов*

$$Q_\nu(x) = \sum_{s=1}^{s_\nu} m_s^{(\nu)} e^{ik_s^{(\nu)}x},$$

где $k_s^{(\nu)}$ — различные целые числа, $m_s^{(\nu)}$ — натуральные числа, сходящаяся к нулю почти всюду на $\mathbb{R}$.

В теоремах D и 1.1 существование функции f доказывается неконструктивно. Тем не менее, можно указать целые классы функций, для которых суммы плюс-минус-сдвигов плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема F. [7, следствие 2]. *Если для функции f из действительного пространства $L_2(\mathbb{R})$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ обращается в нуль на множестве нулевой меры Лебега на $\mathbb{R}$ и интегральный модуль непрерывности*

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{0\leqslant r\leqslant\delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t+r) - f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$$

обладает свойством $\omega_2^2(f,\delta) = o(\delta)$ при $\delta \to 0$ (например, если f — финитная липшицева функция), то конечные суммы функций $\pm f(t-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, плотны в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Возникает вопрос: можно ли, допустив комплексные сдвиги, найти функцию, суммы комплексных сдвигов которой плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ функций, аналитически продолжающихся в верхнюю полуплоскость, непрерывных на ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности? В качестве такой функции попробуем рассмотреть

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)^l} \text{ при некотором } l \in \mathbb{N}.$$

Тогда при $l = 1$ суммами комплексных сдвигов функции $f(z)$, принадлежащих пространству $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ и $AC_0(\mathbb{R})$, будут наипростейшие дроби

$$SF^1(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k},\ \operatorname{Im} a_k < 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

с полюсами в нижней полуплоскости, а при $l \geqslant 2$ — производные порядка $l-1$ таких наипростейших дробей с точностью до константы. Нетрудно показать, что $SF^1(\Pi_-)$ не плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и в $AC_0(\mathbb{R})$ (см. замечание 2.1 ниже).

Естественным образом возникает задача о плотности производных наипростейших дробей: верно ли, что множество

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - a_k)^2},\ \ \operatorname{Im} a_k < 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$? В главе 2 диссертации дан утвердительный ответ на этот вопрос, а также доказано, что суммы $SF^2(\Pi_-)$ не плотны в пространстве $H_1(\mathbb{R})$.

Наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси принадлежат всем пространствам $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, но не образуют в этих пространствах всюду плотного множества: из результатов работы [16] следует, что никакая

функция $-1/(z-a),\ a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, не может быть приближена в $L_p(\mathbb{R})$ наипростейшими дробями. С другой стороны, наипростейшие дроби с полюсами вне действительной оси плотны в пространстве $C_0(\mathbb{R})$ (см. [12]).

В 2019 году П. А. Бородин получил следующий результат.

Теорема G. [10]. *В действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей существует такой элемент v, что конечные суммы $\sum_{k=1}^{N} T^{n_k} v$, $n_k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$, его сдвигов плотны во всех действительных пространствах $l_p(\mathbb{Z})$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в действительном пространстве $c_0(\mathbb{Z})$.*

Здесь T — оператор сдвига вправо, покоординатно определяемый равенством $(Tx)_n = x_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Эта теорема не верна при $p = 1$, $p = \infty$, в действительном пространстве $c(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей, имеющих предел в обе стороны, с равномерной нормой, а также в случае комплексных пространств [10]. Доказательство теоремы G также опирается на теорему E, и существование вектора v доказывается неконструктивно. Неясно, верна ли теорема G при $1 < p < 2$.

Возникает вопрос о переносе теорем C, D и G на многомерный случай, то есть на случай тора $\mathbb{T}^d$, евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ и целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Эти многомерные аналоги доказаны в главе 3 диссертации (теоремы 3.1, 3.2 и 3.3).

На всякой локально компактной абелевой группе существует мера Хаара m, инвариантная относительно сдвигов, и определены пространства L_p. Так возникла более общая задача, сформулированная в [14].

Задача B. *Пусть G — локально компактная абелева группа с мерой Хаара m. Существует ли функция f, определенная на этой группе, для*

которой суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(g+g_k),\ \ g_k \in G,\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{0.3}$$

ее сдвигов: а) плотны в действительном пространстве $L_2(G)$ (в случае некомпактной группы G); б) плотны в действительном пространстве

$$L_2^0(G) = \left\{ h \in L_2(G) : \int_G h(g)\, dm(g) = 0 \right\}$$

(в случае компактной группы G)?

Выделение компактного случая в задаче B объясняется следующим соображением. Если G — компактная абелева группа, то ее мера Хаара $m(G) < \infty$ (см. [30, гл. 4, §15, теорема 15.9]). Тогда для всякой функции $f \in L_2(G)$ суммы (0.3) ее сдвигов не могут быть плотны во всем пространстве $L_2(G)$: в этом случае определено среднее значение $\int_G f(g)\, dm(g) = \alpha$ функции f, и суммами (0.3) не могут быть приближены функции, у которых среднее значение не принадлежит множеству $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. Теорема 3.4 главы 3 диссертации дает исчерпывающий ответ на вопрос б) задачи B.

Отметим также, что в работе [46] была предпринята попытка обобщить теорему F о плотности сумм плюс-минус-сдвигов одной функции на локально компактные группы, но сформулированный в этой работе результат (следствие 2.11) ошибочен.

В пространстве $\mathbb{R}^d$ можно рассматривать не только сдвиги, но и любые другие линейные преобразования переменных данной функции. Например, в работе [45] найдены достаточные условия на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при выполнении которых суммы или плюс-минус суммы функций вида $f(\alpha x - \theta),\ \alpha \in A \subset \mathbb{R},\ \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, плотны в действительных пространствах L_p, $2 \leqslant p < \infty$, и C_0 на прямой или на ее компактном подмножестве. В этой же работе получено обобщение теоремы D: найдены достаточные условия на функцию

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при которых суммы функций вида $f(x-\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, плотны в действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $2 \leqslant p < \infty$, и $C_0(\mathbb{R})$. В качестве следствия получены условия на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, достаточные для плотности сумм функций вида $f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - \theta)$, $\mathbf{w} \in W \subset \mathbb{R}^d$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, в пространствах $L_p(K)$, $2 \leqslant p < \infty$, и $C(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, а также в пространстве $C(\mathbb{R}^d)$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Отметим еще работу [27], в которой получены результаты о разложении элементов пространств $L_p((0,1]^m)$, $1 \leqslant p < \infty$, по системам функций, состоящим из сжатий и сдвигов одной функции, с целыми коэффициентами.

Цель работы. Исследование плотности сумм сдвигов одной функции в различных функциональных пространствах, а именно в пространствах Харди в верхней полуплоскости и пространствах L_p на локально компактных абелевых группах.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна. В диссертации автором самостоятельно получены следующие новые результаты.

1) Доказано существование функции, определенной в замкнутой верхней полуплоскости, для которой суммы действительных сдвигов плотны во всех пространствах H_p Харди в верхней полуплоскости для $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных в ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности (Теорема 1.1).

2) Доказано, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны во всех пространствах Харди H_p в верхней полуплоскости при $1 < p < \infty$, а также в пространстве функций, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных в ее замыкании и стремящихся к нулю на бесконечности (Теорема 2.1).

3) Доказано существование функции на d-мерной целочисленной решетке, на d-мерном евклидовом пространстве и на d-мерном торе, суммы сдвигов

которой плотны в действительном пространстве L_p на соответствующем множестве (Теоремы 3.1, 3.2 и 3.3).

4) Доказан следующий критерий. Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Действительная функция на G, суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров (Теорема 3.4).

Методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа, теории приближений, комплексного анализа, теории меры, гармонического анализа.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории приближений, функциональном анализе, теории функций, гармоническом анализе.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- семинар «Геометрическая теория приближений» в МГУ под руководством профессора П. А. Бородина (неоднократно, 2016–2023 гг.);
- семинар «Тригонометрические и ортогональные ряды» в МГУ под руководством профессора М. И. Дьяченко, профессора Т. П. Лукашенко, профессора В. А. Скворцова, профессора А. П. Солодова (неоднократно, 2019 г.);
- семинар по теории функций действительного переменного в МГУ под руководством академика РАН Б. С. Кашина, академика РАН С. В. Конягина, профессора Б. И. Голубова, профессора М. И. Дьяченко (2024).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- на международной школе-конференции С. Б. Стечкина по теории функций (Кыштым, 2018 г.);
- на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (неоднократно, Воронеж, 2019 и 2023 гг.);
- на международной конференции «Приближение, разложения и компьютерные науки» (Сочи, 2023 г.);
- на международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2024 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора в журналах из баз данных Web of Science и Scopus, а также представлены в тезисах нескольких международных конференций. Список этих работ приведен в конце диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 54 наименований. Общий объем диссертации — 75 страниц. В каждой главе принята сквозная нумерация теорем, лемм, замечаний и формул. Результаты, доказанные в диссертации, нумеруются двумя арабскими цифрами (первая цифра указывает на номер главы), а известные используемые результаты — латинскими буквами в порядке упоминания.

Краткое содержание диссертации. Во введении дан исторический обзор по тематике работы, обоснована актуальность и сформулированы цели исследования, а также изложены основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации доказывается существование функции на действительной оси $\mathbb{R}$, для которой суммы действительных сдвигов плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ Харди для $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ функций, непрерывно и аналитически продолжающихся в верхнюю полуплоскость и стремящихся к нулю на бесконечности. При этом в случае $p = \infty$ такой функции не существует.

Теорема 1.1. *Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которой суммы действительных сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Во второй главе диссертации доказывается, что производные наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости плотны во всех пространствах Харди H_p на действительной оси при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Теорема 2.1. *Множество*

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z - a_k)^2}, \quad \operatorname{Im} a_k < 0, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

плотно во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

При этом наипростейшие дроби с полюсами в нижней полуплоскости в указанных пространствах не плотны. Показывается также, что при $p = 1$ теорема 2.1 не верна.

Также доказывается, что множество $SF^2(\Pi_-)$ в теореме 2.1 нельзя заме-

нить множеством

$$SF^2(y_0) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2},\ \operatorname{Im} a_k = -y_0,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $y_0 > 0$.

В дополнение к теореме 2.1 доказывается следующий результат.

Теорема 2.2. *При достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ для каждого a из нижней полуплоскости Π_- существует дробь $r \in SF^2(\Pi_-)$ вида*

$$r(z) = \frac{1}{(z-a)^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(z-a_j)^2},\ a_j \in \Pi_-,\ j = 1, ..., k-1,$$

такая, что при $1 < p < \infty$ выполнены неравенства

$$\|r\|_p \leqslant \frac{128}{|\operatorname{Im} a|^{2-1/p}} \cdot \frac{(\ln k)^{2-1/p}}{k^{1-1/p}},$$

и

$$\|r\|_{AC_0} \leqslant \frac{32}{|\operatorname{Im} a|^2} \cdot \frac{(\ln k)^2}{k}. \tag{0.4}$$

Теорема 2.2 частично решает задачу типа задачи Е. А. Горина для класса производных наипростейших дробей и норм пространств $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и $AC_0(\mathbb{R})$ (более подробно см. в работах [16], [18]). Оценка (0.4) следует из результатов В. И. Данченко и является точной по порядку при $k \to \infty$ [16].

В третьей главе диссертации доказываются следующие результаты.

Теорема 3.1. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует такой элемент w в действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$, что суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} T_1^{j_{1,k}} T_2^{j_{2,k}} ... T_d^{j_{d,k}} w,\ j_{1,k}, j_{2,k}, ..., j_{d,k} \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},$$

его сдвигов плотны во всех действительных пространствах $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $c_0(\mathbb{Z}^d)$.

Здесь $T_k,\ k = 1, \ldots, d,$ — операторы сдвигов по каждому из d направлений, покоординатно определяемые равенствами

$$(T_k x)_{n_1 \ldots n_k \ldots n_d} = x_{n_1 \ldots n_{k-1}(n_k - 1)n_{k+1} \ldots n_d},\ k = 1, ..., d,\ n_1, ..., n_d \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3.2. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует функция $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} h(x - a_k),\ a_k \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ при $2 \leqslant p < \infty$.

Теорема 3.3. *Пусть $d \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1$, и функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$ имеет ряд Фурье*

$$f(t_1, ..., t_d) = \sum_{n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}} c_{n_1, \ldots, n_d} e^{in_1 t_1} \ldots e^{in_d t_d} = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}} e^{i(\bar{n}, \bar{t})}$$

с условиями:

a) $c_{\bar{0}} = 0,\ c_{\bar{n}} \neq 0$ *для всех* $\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}$;

b)

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\max_{j=1,\ldots,d} |n_j| \right)^{2d-1} \cdot |c_{\bar{n}}|^{\min\{2,q\}} < \infty.$$

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(\bar{t} + \bar{a}_k),\ \bar{a}_k \in \mathbb{T}^d,\ N \in \mathbb{N},$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ функций из $L_p(\mathbb{T}^d)$ с нулевым средним.

Теорема 3.4. *Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Функция $f : G \to \mathbb{R}$, для которой суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} f(g + g_k),\ g_k \in G,\ n \in \mathbb{N},$$

ее сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$*, существует тогда и только тогда, когда* G *связная и имеет счетную группу характеров.*

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю П. А. Бородину за постановку задач, их обсуждение и поддержку в работе, а также О. Н. Косухину за ценные замечания.

Глава 1. Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди в полуплоскости

1.1 Определения и вспомогательные результаты

Дадим необходимые определения.

Пусть $0 < p < \infty$. Функция F, аналитическая в полуплоскости $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, принадлежит классу $H_p(\Pi_+)$, если существует такая константа C, что при всех $y > 0$ выполнено

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p \, dx \leqslant C.$$

Функции, аналитические и ограниченные в Π_+, составляют класс $H_\infty(\Pi_+)$.

Класс $H_p(\Pi_+)$ является линейным пространством. При $1 \leqslant p < \infty$ на нем вводится норма

$$\|F\|^p_{H_p(\Pi_+)} = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p \, dx,$$

а в $H_\infty(\Pi_+)$ вводится норма

$$\|F\|_{H_\infty(\Pi_+)} = \sup_{z \in \Pi_+} |F(z)|.$$

Функция $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}$ стремится к $w_0 \in \mathbb{C}$ при z, стремящемся к $t_0 \in \mathbb{R}$ по некасательным направлениям, если при всех $0 < \theta \leqslant \pi/2$ выполнено

$$\lim_{z \to t_0,\ z \in S_\theta(t_0)} F(z) = w_0,$$

где $S_\theta(t_0) = \{z = t_0 + re^{i\varphi} : r \geqslant 0,\ \theta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \theta\}$.

Будем обозначать это следующим образом:

$$\lim_{z \xrightarrow[\measuredangle]{} t_0} F(z) = w_0.$$

Отметим, что верна

Теорема H. [24, гл. VI, §C]. *Пусть* $F \in H_p(\Pi_+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *предел*

$$\lim_{z \xrightarrow[\sphericalangle]{} t} F(z) =: f(t)$$

существует и $f \in L_p(\mathbb{R})$.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $H_p(\mathbb{R})$, если в пространстве $H_p(\Pi_+)$ существует такая функция $F(z) = F(x + iy)$, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{z \xrightarrow[\sphericalangle]{} x} F(z) = f(x).$$

Это определение корректно в силу теоремы H.

Класс $H_p(\mathbb{R})$ является линейным подпространством комплексного пространства $L_p(\mathbb{R})$. При $p \geqslant 1$ на нем вводится норма, совпадающая с нормой в $L_p(\mathbb{R})$, относительно которой пространство $H_p(\mathbb{R})$ является полным (см. [15, гл. II, §1]). Кроме того, пространства $H_p(\Pi_+)$ и $H_p(\mathbb{R})$ изометричны (см. [15, гл. II, §3]).

При $1 \leqslant p < \infty$ фактор-пространство $L_q(\mathbb{R})/H_q(\mathbb{R})$, где $q = p/(p-1)$, является сопряженным к пространству $H_p(\mathbb{R})$ (см. [24, гл. VII, §A]).

Класс функций, аналитических в Π_+, будем обозначать через $A(\Pi_+)$.

Функция $F : \overline{\Pi}_+ \to \mathbb{C}$, аналитическая в Π_+, принадлежит классу $AC_0(\Pi_+)$, если F непрерывна в $\overline{\Pi}_+$, а также

$$\lim_{z \to \infty,\ z \in \overline{\Pi}_+} F(z) = 0.$$

На классе $AC_0(\Pi_+)$ вводится равномерная норма $\|F\|_{AC_0} = \max_{z \in \overline{\Pi}_+} |F(z)|$, относительно которой $AC_0(\Pi_+)$ является банаховым пространством.

Из принципа максимума модуля следует, что $\|F\|_{AC_0} = \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x)|$.

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $AC_0(\mathbb{R})$, если в пространстве $AC_0(\Pi_+)$ существует такая функция $F(z)$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$F(x) = f(x)$.

На классе $AC_0(\mathbb{R})$ вводится такая же норма, как и на $AC_0(\Pi_+)$, относительно которой $AC_0(\mathbb{R})$ является замкнутым подпространством в $C_0(\mathbb{R})$.

Пусть $p \geqslant 1$. Будем говорить, что функция $f \in L_p(\mathbb{R})$ принадлежит подпространству $L_p(\mathbb{R}_+)$, если $f(x) = 0$ для почти всех $x < 0$.

В дальнейшем для функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ ее $L_p(\mathbb{R})$-норму будем обозначать через $\|f\|_p$.

1.2 Доказательство основного результата

Сформулируем основной результат настоящей главы.

Теорема 1.1. *Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, для которой суммы действительных сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1. По теореме E существуют последовательность $\{E_n\}$ замкнутых множеств и последовательность $\{p_n\}$ многочленов вида

$$p_n(x) = \sum_{s=1}^{s_n} m_s^{(n)} e^{ik_s^{(n)}x}, \tag{1.2}$$

где $k_s^{(n)}$ — различные целые числа, $m_s^{(n)}$ — натуральные числа, обладающие следующими свойствами:

(a) $E_n \subset [0, n], n \in \mathbb{N}$;

(b) $E_n \subset E_{n+1}, n \in \mathbb{N}$;

(c) $\mu([0, n] \backslash E_n) < 1/2^n, n \in \mathbb{N}$;

(d) $\|p_n\|_{C(E_n)} < 1/n^2, n \in \mathbb{N}$,

где $\mu(E)$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$.

Действительно, свойства (a), (d), а также свойство $\mu([0,n]\backslash E_n) < 1/2^{n+1}$ могут быть получены применением теоремы Егорова к отрезку $[0,n]$ и последовательности многочленов из теоремы E. Заменив E_n на $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$, получаем свойства (a), (b), (c), (d) для новых множеств E_n. Свойство

$$\mu(E_{n+1}\backslash E_n) < 2, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

выводится из свойств (a) и (c).

2. Пусть I_n — индикатор множества $E_n\backslash E_{n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $E_0 = \varnothing$. Положим

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} d_n I_n,$$

где $\{d_n\}$ — последовательность таких положительных чисел, что

$$d_k \|p_n\|_{C(E_k\backslash E_{k-1})} < \frac{1}{k^2}, \;\; n = 1, ..., k-1, \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

$$d_n < e^{-2n}, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Функция g обладает следующими свойствами:

(A) g равна нулю всюду на $(-\infty, 0)$;

(B) g отлична от нуля почти всюду на $[0, +\infty)$;

(C) $g \in L_1(\mathbb{R}) \bigcap L_2(\mathbb{R}) \bigcap L_q(\mathbb{R})$, где $q = p/(p-1)$.

Действительно, свойство (A) получается по определению g и свойству (a) множеств E_n, свойство (B) следует из свойства (c) множеств E_n, (C) следует из неравенств (1.3) и (1.5).

Искомую функцию f определим как обратное преобразование Фурье функции g:

$$f(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{itx} \, dt.$$

По теореме Титчмарша [26, гл. IV, §4.1] обратное преобразование Фурье — ограниченный оператор, действующий из $L_q(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$, с нормой, не превосходящей 1. Значит, $f \in L_p(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля $f \in L_2(\mathbb{R})$.

3. Проверим, что $f \in H_p(\mathbb{R})$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{it(x+iy)}\, dt = \widetilde{g(t)e^{-ty}}.$$

По теореме Титчмарша при $y > 0$ имеем

$$\|F(\cdot + iy)\|_p = \left\| \widetilde{g(t)e^{-ty}} \right\|_p \leqslant \|g(t)e^{-ty}\|_q \leqslant \|g\|_q.$$

Нам понадобится

Теорема I. [20, гл. VIII, §4.2.7]. *Пусть $\alpha > \beta$ — действительные числа, $q(x)e^{((\alpha-\beta)|x|+(\alpha+\beta)x)/2} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда функция*

$$Q(z) = Q(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} q(t) e^{it(x+iy)}\, dt$$

определена и является аналитической в полосе $\{z \in \mathbb{C} : -\alpha < \operatorname{Im}(z) < -\beta\}$.

Из условия (1.5) и свойства (A) функции g получаем, что теорема I применима для $q = g$, $\alpha = 1$ и всех $\beta < 0$. Следовательно, $F(z)$ является аналитической в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}(z) < +\infty\}$.

Таким образом, функция F, непрерывная в $\overline{\Pi}_+$ и совпадающая на действительной прямой с f, принадлежит пространству $H_p(\Pi_+)$. Следовательно, $f \in H_p(\mathbb{R})$.

4. Многочлены $\{p_n\}$ можно представить в виде

$$p_n(t) = \sum_{j=1}^{j_n} e^{-ia_j^{(n)}t},$$

где $\{a_j^{(n)}\}_{j=1}^{j_n}$ — целые не обязательно различные числа. При этом можно считать $a_1^{(n)} = 0$, поскольку свойства многочлена p_n не меняются при умножении на e^{ikt} при любом k.

Сумма

$$\sum_{j=1}^{j_n} f(x - a_j^{(n)})$$

является обратным преобразованием Фурье функции $p_n g$. По теореме Титчмарша

$$\left\| \sum_{j=1}^{j_n} f(x - a_j^{(n)}) \right\|_p^q \leqslant \|p_n g\|_q^q =$$

$$= \int_{E_n} |p_n g|^q \, dy + \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{E_k \setminus E_{k-1}} |p_n g|^q \, dy <$$

$$< n \left(\frac{1}{n^2} \right)^q \max_j d_j^q + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2 d_k^q \|p_n\|_{C(E_k \setminus E_{k-1})}^q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max_j d_j^q}{n^{2q-1}} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2q}} \to 0, \ n \to \infty \quad (1.6)$$

(использовали свойство (d) и неравенства (1.3) и (1.4)).

Так как выше было отмечено, что $a_1^{(n)} = 0$ для каждого n, из (1.6) получаем, что $-f \in G$, где

$$G = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{N} f(x - a_k), \ a_k \in \mathbb{R}, \ N \in \mathbb{N} \right\}}$$

(замыкание в пространстве $H_p(\mathbb{R})$).

Следовательно, функция $-f(\cdot - a)$ принадлежит G для всех $a \in \mathbb{R}$, то есть G — замкнутая аддитивная подгруппа в $H_p(\mathbb{R})$.

5. Оценим интегральный модуль непрерывности

$$\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 \leqslant r \leqslant \delta} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x + r) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

используя теорему Титчмарша:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+r)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} = \|f(x+r)-f(x)\|_p \leqslant \|e^{irt}g(t)-g(t)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n \|(e^{irt}-1)I_n(t)\|_q = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\int_{E_n\setminus E_{n-1}} |e^{irt}-1|^q\,dt\right)^{1/q} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\int_{E_n\setminus E_{n-1}} \left|\int_0^r e^{its}(it)\,ds\right|^q\,dt\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left(\int_{E_n\setminus E_{n-1}} (nr)^q\,dt\right)^{1/q} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} d_n 2^{1/q} nr.$$

Учитывая (1.5), получаем:

$$\omega_p(f,\delta) = O(\delta),\ \delta\to 0. \tag{1.7}$$

6. Нам понадобится

Теорема J. [7, теорема 4]. *Пусть G — замкнутая аддитивная подгруппа равномерно гладкого пространства X с модулем гладкости $s(\tau)$, и непрерывное отображение $\varphi:[0,1]\to G$ имеет такой модуль непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$, что $s(\omega_\varphi(\delta))=o(\delta)$ при $\delta\to 0$. Тогда G содержит замкнутое $\mathbb{R}$–линейное подпространство L, порожденное элементами вида $u-v$, где $u,v\in\varphi([0,1])$.*

Пусть $f_a(x)=f(x-a)$. Для произвольного $a\in\mathbb{R}$ рассмотрим отображение $\varphi:[0,1]\to H_p(\mathbb{R})$, $\varphi(t)=f_{at}$. Его образ $\varphi([0,1])$ содержится в подгруппе G, а его модуль непрерывности оценивается с помощью (1.7):

$$\omega_\varphi(\delta) = \sup\{\|\varphi(t+r)-\varphi(t)\|_p : 0\leqslant t\leqslant 1-r,\ 0\leqslant r\leqslant\delta\} =$$
$$= \sup\{\|f_{ar}-f\|_p : 0\leqslant r\leqslant\delta\} = \omega_p(f,|a|\delta) = O(\delta),\ \delta\to 0.$$

При $2\leqslant p<\infty$ модуль гладкости $s(\cdot)$ пространства $H_p(\mathbb{R})$ не превосходит модуля гладкости пространства $L_p(\mathbb{R})$, то есть $O(\tau^2)$, $\tau\to 0$ (см. [40, гл.1,

§e]). Следовательно, $s(\omega_\varphi(\delta)) = O(\delta^2)$, $\delta \to 0$, и по теореме J подгруппа G содержит замкнутое $\mathbb{R}$–линейное подпространство L, порожденное элементами вида $f_a - f$, $a \in \mathbb{R}$.

7. Покажем, что L совпадает с $H_p(\mathbb{R})$. Если это не так, то найдется такая функция $h \in L_q(\mathbb{R})$, что соответствующий ей элемент $h + H_q(\mathbb{R})$ факторпространства $L_q(\mathbb{R})/H_q(\mathbb{R}) = (H_p(\mathbb{R}))^*$ является ненулевым, а также

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} (f_a(x) - f(x))h(x)\,dx \equiv 0,\ \ a \in \mathbb{R} \\ &\quad\Longrightarrow \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} f_-(a-x)h(x)\,dx = \operatorname{Re}(f_- * h)(a) = \operatorname{Re}(f_- * h)(0) \equiv const \\ &\qquad\qquad\Longrightarrow \frac{1}{2}(f_- * h + \overline{f_-} * \overline{h})(a) \equiv const, \quad (1.8) \end{aligned}$$

где $f_-(x) = f(-x)$.

Так как $f_-, \overline{f_-} \in L_2(\mathbb{R})$, $h, \overline{h} \in L_q(\mathbb{R})$, по другой теореме Титчмарша [26, гл. IV, §4.7, теорема 78], при $q < 2$ свертки $f_- * h$, $\overline{f_-} * \overline{h}$ определены и принадлежат $L_P(\mathbb{R})$ с $P = 2q/(2-q) \in (2, +\infty)$ (следовательно, при $q < 2$ имеем $const = 0$ в (1.8)), а их преобразования Фурье имеют вид

$$\widehat{f_- * h} = \sqrt{2\pi}\widehat{f_-}\widehat{h}, \quad \widehat{\overline{f_-} * \overline{h}} = \sqrt{2\pi}\widehat{\overline{f_-}}\,\widehat{\overline{h}}. \tag{1.9}$$

При $q = 2$ имеем $f_-, h \in L_2(\mathbb{R})$,

$$f_- * h,\ \overline{f_-} * \overline{h} \in C_0(\mathbb{R})$$

и равенства (1.9). Следовательно, при всех $p \geqslant 2$ равенства $const = 0$ в (1.8) и (1.9) верны.

Применим к равенству (1.8) преобразование Фурье:

$$\widehat{f_-}\widehat{h} + \widehat{\overline{f_-}}\,\widehat{\overline{h}} \equiv 0 \Rightarrow g_-(t)\widehat{h}(t) + g(t)\widehat{\overline{h}}(t) \equiv 0 \tag{1.10}$$

(здесь учли, что в силу определения f и действительнозначности функции g справедливы равенства $\widehat{f_-} = g_-$, $\widehat{\widehat{f_-}} = \widehat{\widehat{g}} = \widehat{\widehat{g_-}} = g$).

Тождество (1.10) при $t < 0$ и свойства (A) и (B) функции g приводят к тождеству

$$\widehat{h}(t) = 0, \quad t < 0.$$

Тогда согласно [15, гл. II, «Упражнения и дальнейшие результаты», п. 2], для любой функции $u \in H_p(\mathbb{R})$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}} h(t)u(t)\,dt = 0.$$

Это означает, что элемент $h + H_q(\mathbb{R})$ фактор-пространства $L_q(\mathbb{R})/H_q(\mathbb{R}) = (H_p(\mathbb{R}))^*$ задает нулевой функционал на $H_p(\mathbb{R})$, что противоречит предположению.

Таким образом, подпространство L, а вместе с ним и подгруппа G совпадают с $H_p(\mathbb{R})$.

8. Условия, наложенные в п. 2 на функцию g, могут оказаться недостаточными для доказательства плотности сумм (1.1) в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Заменим (1.5) на более сильное условие

$$d_1 \leqslant 1,\ d_n \leqslant \frac{d_{n-1}}{n^3},\ \ n = 2, 3, 4, ... \tag{1.11}$$

и рассмотрим функции $g = \sum_{n=1}^{\infty} d_n I_n \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $f = \breve{g} \in AC_0(\mathbb{R})$, определенные выше.

Заметим, что в работе [32] в пункте 7 доказательства теоремы 2 допущена неточность при определении d_n: вместо $d_n = 1/n!$ должно быть $d_1 = 1$, $d_n \leqslant d_{n-1}/n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Полагая $p = \infty$ и $q = 1$ в (1.6), получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^{j_n} f(x - a_j^{(n)}) \right\|_\infty \leqslant \|p_n g\|_1 \leqslant \frac{1}{n} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0, \ n \to \infty.$$

Аналогично части 4 доказательства заключаем, что замыкание G множества сумм (1.1) в равномерной норме является замкнутой аддитивной подгруппой в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Теорема J не применима в этом случае, поэтому докажем равенство $G = AC_0(\mathbb{R})$ непосредственно.

9. В силу условия (1.11) имеем $tg(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Значит, производная $f'(x)$ определена и принадлежит $AC_0(\mathbb{R})$.

Для любых $b,\ x,\ \lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left| \left[\frac{\lambda}{b}\right] (f(x+b) - f(x)) - \lambda f'(x) \right| = \\
&\quad = \left| \left[\frac{\lambda}{b}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t)(e^{ibt} - 1)e^{ixt}\, dt - \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} i \int_{\mathbb{R}} tg(t)e^{ixt}\, dt \right| = \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{ixt} \left(\left[\frac{\lambda}{b}\right] (e^{ibt} - 1) - \lambda it \right) dt \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left| \frac{\lambda}{b}(e^{ibt} - 1) - \left\{\frac{\lambda}{b}\right\} (e^{ibt} - 1) - \lambda it \right| dt \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\left| \frac{\lambda}{b}(e^{ibt} - 1 - ibt) \right| + |e^{ibt} - 1| \right) dt \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\left|\frac{\lambda}{b}\right| \frac{|b|^2|t|^2}{2} + |t||b| \right) dt = \\
&\quad = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \left(\frac{|\lambda|t^2}{2} + |t| \right) dt \to 0, \ b \to 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, подгруппа G содержит $\mathbb{R}$-линейное подпространство L, порожденное функциями $f'(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Наша цель — доказать, что L плотно в $AC_0(\mathbb{R})$.

10. Пусть $\{\varphi_n\}$ — такое семейство функций в $L_1(\mathbb{R}_+)$, что множество $\{t\varphi_n(t)\}$ плотно на единичной сфере пространства $L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi_n = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}_+ \backslash (E_n \backslash [0; 1/n])$, $n = 1, 2, \ldots$. Множество $\{\varphi_n(t)\}$ можно получить,

например, взяв произвольное всюду плотное в $L_1(\mathbb{R}_+)$ множество $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и должным образом занумеровав функции

$$\frac{\alpha_k I_{E_m\setminus[0;1/m]}}{t\cdot\left\|\alpha_k I_{E_m\setminus[0;1/m]}\right\|_1},\ m,k=1,2,\dots .$$

Тогда

$$\|\varphi_n\|_1=\int_{E_n\setminus[0;1/n]}\left|t\varphi_n(t)\cdot\frac{1}{t}\right|dt\leqslant n\|t\varphi_n(t)\|_1=n.$$

Отсюда и из определения функций g и φ_n получаем

$$\left\|\frac{\varphi_n}{g}\right\|_{L_1(E_n)}=\int_{E_n}\left|\frac{\varphi_n(t)}{g(t)}\right|dt\leqslant\int_{E_n}\frac{|\varphi_n(t)|}{d_n}\,dt=\frac{\|\varphi_n\|_1}{d_n}\leqslant\frac{n}{d_n},$$

то есть функции $\varphi_n/g,\ n=1,2,\dots$, принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим функцию $\psi_n(t)$, определенную на $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\psi_n(t)=\begin{cases}\varphi_n(t)/g(t),\ t\geqslant 0,\\ \overline{\varphi_n(-t)/g(-t)},\ t<0.\end{cases}$$

Пусть

$$r_n(t)=\sum_{\nu=-\nu_n}^{\nu_n}a_\nu^{(n)}e^{i\pi\nu t/n}$$

— $2n$-периодические полиномы с комплексными коэффициентами, приближающие функции ψ_n на отрезке $[-n,n]$:

$$\|r_n-\psi_n\|_{L_1[-n,n]}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

Тогда полиномы $q_n(t)=(r_n(t)+\overline{r_n(-t)})/2$ имеют действительные коэффициенты и также приближают функции $\psi_n(t)=(\psi_n(t)+\overline{\psi_n(-t)})/2$ на отрезке $[-n,n]$:

$$\|q_n-\psi_n\|_{L_1[-n,n]}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

Имеем

$$\|q_n\|_{L_1[-n,n]}\leqslant\|\psi_n\|_{L_1[-n,n]}+\frac{1}{n^2}=2\left\|\frac{\varphi_n}{g}\right\|_{L_1[0,n]}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{2n}{d_n}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{3n}{d_n}.$$

Отметим также, что при всех $n, k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{(2k+1)n^2(n!)^2}{(((2k-1)n+1)!)^2} \leqslant 3.$$

Используя три последние оценки и условие (1.11), получаем

$$\|tq_n(t)g(t) - t\varphi_n(t)\|_1 =$$

$$= \left\| tg(t)\left(q_n(t) - \frac{\varphi_n(t)}{g(t)}\right)\right\|_{L_1[0,n]} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \|tq_n(t)g(t)\|_{L_1[(2k-1)n,(2k+1)n]} \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot \frac{d_1}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)nd_{(2k-1)n+1}\|q_n\|_{L_1[-n,n]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)nd_{(2k-1)n+1}\cdot 3n}{d_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)n(n!)^3 n}{(((2k-1)n+1)!)^3} \leqslant \frac{1}{n} + 9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!}{((2k-1)n+1)!} \to 0 \ (n\to\infty).$$

Это означает, что действительные линейные комбинации функций $te^{iat}g(t),\ a \in \mathbb{R}$, плотны в $L_1(\mathbb{R}_+)$.

11. Нетрудно показать, что обратное преобразование Фурье любой функции из $L_1(\mathbb{R}_+)$ лежит в $AC_0(\Pi_+)$. Докажем, что образ пространства $L_1(\mathbb{R}_+)$ при обратном преобразовании Фурье плотен в пространстве $AC_0(\Pi_+)$.

Рассмотрим функции $g_{\alpha,\beta}(t) = e^{(-\alpha+i\beta)t}\cdot I_{[0,\infty)}(t)$ при всех $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$, определенные на $\mathbb{R}$. Имеем $g_{\alpha,\beta}(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и

$$\widetilde{g_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{z+\beta+i\alpha}.$$

Таким образом, достаточно доказать, что линейные комбинации функций

$$\frac{1}{z-c},\ \operatorname{Im} c < 0,$$

плотны в $AC_0(\Pi_+)$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что линейные комбинации функций

$$\frac{z-1}{z-d},\ |d| > 1,$$

плотны в пространстве $AC_0(D,1)$ функций, аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, непрерывных в $\overline{D}$ и равных нулю в точке 1, с равномерной нормой $\|\cdot\|_D$.

По теореме Мергеляна для любой $G \in AC_0(D,1)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $\widetilde{P}$, что $\|G - \widetilde{P}\|_D < \varepsilon$. Тогда $|\widetilde{P}(1)| < \varepsilon$, и для многочлена $P(z) = \widetilde{P}(z) - \widetilde{P}(1)$ выполнено

$$\|G - P\|_D < 2\varepsilon.$$

Кроме того, существуют такие комплексные $\{\lambda_j\}_{j=1}^J$ и $\{d_j\}_{j=1}^J \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$, что

$$\left\| \frac{P(z)}{z-1} - \sum_{j=1}^{J} \frac{\lambda_j}{z-d_j} \right\|_D < \varepsilon.$$

Следовательно, так как $|z-1| \leqslant 2$ при $z \in \overline{D}$,

$$\left\| G(z) - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \frac{z-1}{z-d_j} \right\|_D \leqslant \|G-P\|_D + \left\| P(z) - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \frac{z-1}{z-d_j} \right\|_D < 4\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Учитывая результат пункта 10, получаем, что действительные линейные комбинации функций $f'(x-a),\ a \in \mathbb{R}$, плотны в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Теорема 1.1 доказана. □

Отметим, что не существует функции $f \in H_\infty(\mathbb{R})$, для которой суммы (1.1) были бы плотны в $H_\infty(\mathbb{R})$. Действительно, рассмотрим ограниченный линейный функционал Lim, называющийся банаховым пределом [3, гл. II, §3], определенный на действительном $L_\infty(\mathbb{R})$ и обладающий следующими свойствами:

1) если $f(x) \geqslant 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, то $\mathrm{Lim}(f) \geqslant 0$;

2) $\mathrm{Lim}(f \equiv 1) = 1$;

3) $\mathrm{Lim}(f(\cdot - a)) = \mathrm{Lim}\ (f)$ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Для каждой функции $f \in H_\infty(\mathbb{R})$ все суммы (1.1) принадлежат одному из

полупространств $\{g : \operatorname{Lim}(\operatorname{Re} g) \geqslant 0\}$ или $\{g : \operatorname{Lim}(\operatorname{Re} g) \leqslant 0\}$, следовательно, они не могут быть плотны во всем пространстве.

В отличие от теоремы D, неизвестно, верна ли теорема 1.1 в случае $p = 1$. Если функция f принадлежит $L_1(\mathbb{R})$, и ее среднее значение $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \alpha$, то суммами сдвигов функции f нельзя приблизить функции, у которых среднее значение не принадлежит множеству $\{n\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. При этом для всякой функции f, принадлежащей $H_1(\mathbb{R})$, ее среднее значение $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$ [24, гл. VI, §D].

Глава 2. Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди в полуплоскости

2.1 Наипростейшие дроби в пространствах Харди

Множество M в банаховом пространстве X называется *разносторонним*, если для любого ненулевого функционала $F \in X^*$ существует такой элемент $x \in M$, что $F(x) < 0$ в случае действительного X, $\operatorname{Re} F(x) < 0$ в случае комплексного X. Для плотности объединения

$$R(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{M + ... + M}_{n}$$

в X необходимо, чтобы множество M было разносторонним [7]. Это простое утверждение: для неразностороннего M множество $R(M)$ лежит в полупространстве пространства X.

Замечание 2.1. *Наипростейшие дроби $SF^1(\Pi_-)$ с полюсами в нижней полуплоскости не плотны в пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям из [7] рассмотрим функционал

$$F_1(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - i}\, dx,$$

принадлежащий $(H_p(\mathbb{R}))^*$. При всех $a \in \Pi_-$ имеем

$$\operatorname{Re} F_1\left(\frac{1}{z - a}\right) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x - i)(x - a)}\, dx = \operatorname{Re} \frac{2\pi i}{i - a} > 0,$$

так что множество $M = \{1/(z - a),\ a \in \Pi_-\}$ не является разносторонним в $H_p(\mathbb{R})$, откуда $R(M) = SF^1(\Pi_-)$ не плотно в $H_p(\mathbb{R})$.

Функционал $F_2(f) = if(0)$ принадлежит $(AC_0(\mathbb{R}))^*$, причем $\operatorname{Re} F_2(1/(z-a)) > 0$ при всех $a \in \Pi_-$. Значит, $SF^1(\Pi_-)$ не плотно в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. □

2.2 Производные наипростейших дробей в пространствах Харди

Напомним, что

$$SF^2(\Pi_-) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2} : \ \operatorname{Im} a_k < 0, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замечание 2.2. *Суммы $SF^2(\Pi_-)$ не плотны в пространстве $H_1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$F_3(f) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx,$$

принадлежащий $(H_1(\mathbb{R}))^*$. При всех $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$ имеем

$$\operatorname{Im} F_3\left(\frac{1}{(z+a+ib)^2}\right) = \int_a^{+\infty} \frac{-2bx}{(x^2+b^2)^2}\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2} < 0,$$

так что множество $\{1/(z-c)^2 : \ c \in \Pi_-\}$ не является разносторонним в $H_1(\mathbb{R})$, откуда $SF^2(\Pi_-)$ не плотно в $H_1(\mathbb{R})$. □

Основной результат настоящей главы состоит в следующем.

Теорема 2.1. *Суммы $SF^2(\Pi_-)$ плотны во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.*

Доказательство. 1. Докажем, что полугруппа $\overline{SF^2(\Pi_-)}$ является подгруппой во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Рассмотрим многочлены

$$p_{n,m}(z) = (z+in)^{4m} - (n-1)^{4m}, \ \ n, m \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $p_{n,m}(-i)=0$. Корни многочлена $p_{n,m}$ имеют вид

$$a_j(n,m)=(n-1)\xi_j(m)-in,\ \ m,n\in\mathbb{N},\ \ j=1,...,4m,$$

где $\xi_j(m)=e^{\pi ij/(2m)},\quad j=1,...,4m$. Следовательно,

$$p_{n,m}(z)=\prod_{j=1}^{4m}(z-a_j(n,m)).$$

Отметим также, что $a_j(n,m)\in\Pi_-$ при всех $m,n\in\mathbb{N},\ \ j=1,...,4m$. Производная логарифмической производной многочлена $p_{n,m}(z)$ имеет вид $(k=4m)$

$$\begin{aligned}r_{n,m}(z):=\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{z-a_j(n,m)}\right)'=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(z-a_j(n,m))^2}=\left(\frac{p'_{n,m}(z)}{p_{n,m}(z)}\right)'=\\ =\frac{k(k-1)(z+in)^{k-2}((z+in)^k-(n-1)^k)-(k(z+in)^{k-1})^2}{((z+in)^k-(n-1)^k)^2}=\\ =\frac{-k(z+in)^{2k-2}-(n-1)^k k(k-1)(z+in)^{k-2}}{((z+in)^k-(n-1)^k)^2}=\\ =-\frac{k}{(z+in)^2\left(1-((n-1)/(z+in))^k\right)^2}-\frac{(n-1)^k k(k-1)}{(z+in)^{k+2}\left(1-((n-1)/(z+in))^k\right)^2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\left|1-\left(\frac{n-1}{x+in}\right)^k\right|\geqslant 1-\left|\frac{n-1}{x+in}\right|^k=1-\frac{(n-1)^k}{(\sqrt{x^2+n^2})^k}\geqslant\\ \geqslant 1-\frac{(n-1)^k}{n^k}=1-\frac{1}{(1+1/(n-1))^k}\geqslant 1-\frac{1}{e}>\frac{1}{2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

при $k\geqslant n\geqslant 2$ и $x\in\mathbb{R}$. Из (2.1) и (2.2) следует оценка

$$\|r_{n,m}(z)\|_p\leqslant 4k\cdot I_1^{1/p}+4(n-1)^k k^2\cdot I_2^{1/p},$$

где

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+n^2)^p}\,dx = 2\left(\int_0^n \frac{1}{(x^2+n^2)^p}\,dx + \int_n^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^p}\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(n\cdot\frac{1}{n^{2p}} + \int_n^{+\infty}\frac{1}{x^{2p}}\,dx\right) = \frac{4p}{(2p-1)n^{2p-1}},$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+n^2)^{(2m+1)p}}\,dx =$$
$$= 2\left(\int_0^n \frac{1}{(x^2+n^2)^{(2m+1)p}}\,dx + \int_n^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n^2)^{(2m+1)p}}\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(n\cdot\frac{1}{n^{(k+2)p}} + \int_n^{+\infty}\frac{1}{x^{(k+2)p}}\,dx\right) = \frac{2(k+2)p}{((k+2)p-1)n^{(k+2)p-1}}.$$

Следовательно,

$$\|r_{n,m}(z)\|_p \leqslant 4k\left(\frac{4p}{(2p-1)n^{2p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} + 4(n-1)^k k^2\left(\frac{2(k+2)p}{((k+2)p-1)n^{(k+2)p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 16\frac{k}{n^{2-1/p}}\left(1+k\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right). \quad (2.3)$$

Из (2.1) и (2.2) также следует

$$\|r_{n,m}(z)\|_{AC_0} \leqslant 4k\left\|\frac{1}{(x+in)^2}\right\|_{AC_0} + 4(n-1)^k k^2\left\|\frac{1}{(x+in)^{k+2}}\right\|_{AC_0} \leqslant$$
$$\leqslant 4\frac{k}{n^2}\left(1+k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right). \quad (2.4)$$

При $n \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}. \quad (2.5)$$

Положим $n = [k/\ln k]$. Отметим, что при достаточно больших k

$$\frac{k}{\ln k} \geqslant n \geqslant \frac{k}{2\ln k} \to \infty,\ k\to\infty. \quad (2.6)$$

Тогда из (2.3)—(2.6) следуют оценки

$$\|r_{n,m}(z)\|_p < 16\frac{k}{n^{2-1/p}}\left(1+k\left(\frac{1}{e}\right)^{k/n}\right) \leqslant 128\frac{(\ln k)^{2-1/p}}{k^{1-1/p}} \to 0,\ k\to\infty,$$

$$\|r_{n,m}(z)\|_{AC_0} < 4\frac{k}{n^2}\left(1 + k\left(\frac{1}{e}\right)^{k/n}\right) \leqslant 32\frac{(\ln k)^2}{k} \to 0,\ k \to \infty.$$

Имеем

$$\|r_{n,m}(z)\|_p \to 0,\ \|r_{n,m}(z)\|_{AC_0} \to 0,\ n = \left[\frac{4m}{\ln 4m}\right],\ m \to \infty. \tag{2.7}$$

Для каждой пары $n, m \in \mathbb{N}$ одно из чисел $a_j(n,m)$ равно $-i$. Таким образом, (2.7) означает, что функция $-1/(z+i)^2$ сколь угодно точно приближается суммами элементов множества $\left\{1/(z-a)^2,\ a \in \Pi_-\right\}$ в пространствах $H_p(\mathbb{R})$ и $AC_0(\mathbb{R})$. Если

$$\left\|-\frac{1}{(z+i)^2} - r(z)\right\|_p < \varepsilon,\ \left\|-\frac{1}{(z+i)^2} - r(z)\right\|_{AC_0} < \delta,$$

для некоторой функции $r \in SF^2(\Pi_-)$, то при $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 > 0$ имеем

$$\left\|-\frac{1}{(z+iy_0-x_0)^2} - r\left(\frac{z-x_0}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right\|_p^p =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(x+iy_0-x_0)^2} + r\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right|^p dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(x+iy_0)^2} + r\left(\frac{x}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right|^p dx = y_0\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(uy_0+iy_0)^2} + r(u)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right|^p du =$$

$$= \frac{1}{y_0^{2p-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(u+i)^2} + r(u)\right|^p du < \frac{\varepsilon^p}{y_0^{2p-1}},$$

$$\left\|-\frac{1}{(z+iy_0-x_0)^2} - r\left(\frac{z-x_0}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right\|_{AC_0} =$$

$$= \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(x+iy_0-x_0)^2} + r\left(\frac{x-x_0}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right| =$$

$$= \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(x+iy_0)^2} + r\left(\frac{x}{y_0}\right)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right| = \max_{u\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(uy_0+iy_0)^2} + r(u)\cdot\frac{1}{y_0^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{y_0^2}\max_{u\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{(u+i)^2} + r(u)\right| < \frac{\delta}{y_0^2},$$

где $u = x/y_0$, то есть всякий элемент $-1/(z+iy_0-x_0)^2$ приближается суммами элементов множества $\left\{1/(z-a)^2,\ a \in \Pi_-\right\}$.

Попутно мы доказали следующий результат.

Теорема 2.2. *При достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ для каждого $a \in \Pi_-$ существует дробь $r \in SF^2(\Pi_-)$ вида*

$$r(z) = \frac{1}{(z-a)^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(z-a_j)^2},\ a_j \in \Pi_-,\ j = 1, ..., k-1,$$

такая, что при всех $1 < p < \infty$

$$\|r\|_p \leqslant \frac{128}{|\operatorname{Im} a|^{2-1/p}} \cdot \frac{(\ln k)^{2-1/p}}{k^{1-1/p}}$$

и

$$\|r\|_{AC_0} \leqslant \frac{32}{|\operatorname{Im} a|^2} \cdot \frac{(\ln k)^2}{k}.$$

Вернемся к доказательству теоремы 2.1.

2. Покажем, что подгруппа $SF^2(\Pi_-)$ плотна во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$ и в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Дальнейшие рассуждения проводим по аналогии с рассуждениями из работы [12]. Для $m \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C},\ a \in \Pi_-$, имеем

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\lambda}{(z-a)^3} - \left(\frac{m}{\left(z-a-\lambda/(4m)\right)^2} - \frac{m}{\left(z-a+\lambda/(4m)\right)^2} \right) \right\|_p = \\
&\quad = \left\| \frac{\lambda}{(z-a)^3} - \frac{m\left(z-a+\lambda/(4m)\right)^2 - m\left(z-a-\lambda/(4m)\right)^2}{\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2} \right\|_p = \\
&\quad = \left\| \frac{\lambda}{(z-a)^3} - \frac{\lambda(z-a)}{\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2} \right\|_p = \\
&\quad = |\lambda| \left\| \frac{\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2 - (z-a)^4}{(z-a)^3\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2} \right\|_p = \\
&\quad = \frac{|\lambda|^3}{16m^2} \left\| \frac{2(z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)}{(z-a)^3\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2} \right\|_p . \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Так как при $m \geqslant |\lambda|/(2|\operatorname{Im} a|)$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено $|x-a|^2 - |\lambda|^2/(16m^2) \geqslant \frac{3}{4}|x-a|^2$, для указанных m имеем

$$\left\| \frac{2(z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)}{(z-a)^3\left((z-a)^2 - \lambda^2/(16m^2)\right)^2} \right\|_p \leqslant \frac{16}{9} \left\| \frac{2|x-a|^2 + |\lambda|^2/16}{|x-a|^7} \right\|_p = C,$$

где C – константа, не зависящая от m. Следовательно, последнее выражение в (2.8) стремится к 0 при $m \to \infty$. Приведенная оценка верна и для равномерной нормы, то есть в случае пространства $AC_0(\mathbb{R})$. Таким образом, любая дробь вида $\lambda/(z-a)^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \Pi_-$, приближается суммами функций вида $\pm 1/(z-b)^2$, $b \in \Pi_-$, во всех пространствах $H_p(\mathbb{R})$ при $1 < p < \infty$, а также в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$.

Покажем теперь, что линейное подпространство L, порожденное функциями вида $\lambda/(z-a)^3,\ \lambda \in \mathbb{C},\ a \in \Pi_-$, плотно в пространствах $H_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Если это не так, то найдется такая функция $h \in L_q(\mathbb{R})$, что соответствующий ей элемент $h + H_q(\mathbb{R})$ фактор-пространства $L_q(\mathbb{R})/H_q(\mathbb{R}) = (H_p(\mathbb{R}))^*$ является ненулевым, а также

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{(x-a)^3}\,dx \equiv 0,\ a \in \Pi_-.$$

Дважды проинтегрируем это тождество по переменной a:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{x-a}\,dx = C_1 a + C_2,\ a \in \Pi_-,$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ – константы. Устремив a к бесконечности, получаем $C_1 = C_2 = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{x-a}\,dx \equiv 0,\ a \in \Pi_-.$$

Тогда согласно [15, гл. II, «Упражнения и дальнейшие результаты», п. 2] выполнено $h \in H_q(\mathbb{R})$ и, следовательно, h задает нулевой функционал на $H_p(\mathbb{R})$, что противоречит предположению.

Значит, замыкание подпространства L, а вместе с ним и подгруппа $\overline{SF^2(\Pi_-)}$ совпадают с $H_p(\mathbb{R})$.

Теперь докажем полноту L в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$. Аналогично рассуждениям из работы [12] докажем индукцией по n, что подпространством L приближается любая функция вида $\lambda/(z-a)^n,\ a \in \Pi_-,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \geqslant 3$. При

$n = 3$ утверждение верно. Пусть оно верно при каком-то $n \geqslant 3$. Функция

$$R_\varepsilon(z) = \frac{\lambda/\varepsilon}{(z-(a+\varepsilon/n))^n} - \frac{\lambda/\varepsilon}{(z-a)^n}$$

при достаточно малом ε с любой точностью приближается подпространством L, и в то же время

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\lambda}{(z-a)^{n+1}} - R_\varepsilon(z) \right\|_{AC_0} = \\
&\quad = \left\| \frac{\lambda(z-(a+\varepsilon/n))^n - (\lambda/\varepsilon)(z-a)((z-a)^n - (z-(a+\varepsilon/n))^n)}{(z-a)^{n+1}(z-(a+\varepsilon/n))^n} \right\|_{AC_0} = \\
&= |\lambda| \left\| \frac{(z-a)^n - \varepsilon(z-a)^{n-1} - (z-a)^n + \frac{n-1}{2n}\varepsilon(z-a)^{n-1} + O(\varepsilon^2)}{(z-a)^{n+1}(z-(a+\varepsilon/n))^n} \right\|_{AC_0} \to 0, \\
&\qquad\qquad \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

так что утверждение справедливо при всех $n \geqslant 3$.

Пусть $b = \alpha - i\beta,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0$. Если $t > \beta$, то при $x \in \mathbb{R}$ выполнено $0 < t - \beta < |x - \alpha + it|$ и ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda(i(t-\beta))^{n-1}}{(x-\alpha+it)^n}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ сходится к функции

$$\frac{\lambda(i(t-\beta))^2}{(x-\alpha+it)^3} \cdot \frac{1}{1 - i(t-\beta)/(x-\alpha+it)} = \frac{\lambda(i(t-\beta))^2}{(x-\alpha+it)^2(x-b)} =: F_t(x).$$

С другой стороны, $F_t(x)$ при $t \to +\infty$ равномерно по x сходится к функции $\lambda/(x-b)$, так что дробь $\lambda/(z-b)$ при $\lambda \in \mathbb{C},\ b \in \Pi_-$, приближается суммами дробей вида $\gamma/(z-a)^n$, $\gamma \in \mathbb{C},\ a \in \Pi_-,\ n \geqslant 3$, а значит, и элементами подпространства L. Суммы дробей $\lambda/(z-b)$ при $\lambda \in \mathbb{C},\ b \in \Pi_-$, плотны в пространстве $AC_0(\mathbb{R})$ (см. выше пункт 11 доказательства теоремы 1.1). Следовательно, и подпространство L плотно в $AC_0(\mathbb{R})$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1 доказана.

□

2.3 Производные наипростейших дробей с полюсами на горизонтальной прямой

Покажем, что множество $SF^2(\Pi_-)$ в теореме 2.1 нельзя заменить множеством

$$SF^2(y_0) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2},\ \operatorname{Im} a_k = -y_0,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

где $y_0 > 0$.

Замечание 2.3. *Множество $SF^2(y_0)$ является разносторонним в пространстве $H_2(\mathbb{R})$, но оно не плотно в пространстве $H_2(\mathbb{R}) \cong H_2(\Pi_+)$.*

Доказательство. 1. Зафиксируем $y_0 > 0$. Для функции $f \in H_2(\Pi_+)$ верна формула Коши (см. [24, гл. VI, §C]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-z}\, dx,\ z \in \Pi_+.$$

Продифференцируем по z и сделаем замену $a = \overline{z} \in \Pi_-$. Получим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{f(x)}}{(x-a)^2}\, dx = \overline{2\pi i f'(\overline{a})}. \tag{2.9}$$

Покажем, что для любой ненулевой функции $f \in H_2(\Pi_+)$ существует a такое, что $\operatorname{Im} a = -y_0$ и

$$\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{f(x)}}{(x-a)^2}\, dx > 0.$$

Это и будет означать, что $SF^2(y_0)$ разностороннее в $H_2(\Pi_+)$. Учитывая (2.9) и равенство $a = \overline{z}$, достаточно доказать, что существует $z \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im} z = y_0$ и $\operatorname{Re} f'(z) < 0$. Предположим, что $f \in H_2(\mathbb{R})$ и

$$\operatorname{Re} f'(z) \geqslant 0 \tag{2.10}$$

при всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что $\operatorname{Im} z = y_0$. При $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ определим

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy),\ \ v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Неравенство (2.10) перепишем в виде

$$u'_x(x,y_0) \geqslant 0,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Пусть существует $x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $u(x_0,y_0) > 0$. Тогда $u(x,y_0) \geqslant u(x_0,y_0) > 0$ при всех $x \geqslant x_0$. Учитывая это неравенство, а также определения функции $u(x,y)$ и пространства $H_2(\mathbb{R})$, получаем

$$\int_{x_0}^{+\infty} |u(x_0,y_0)|^2\,dx \leqslant \int_{x_0}^{+\infty} |u(x,y_0)|^2\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy_0)|^2\,dx < \infty,$$

что противоречит неравенству $u(x_0,y_0) > 0$. Таким образом, $u(x_0,y_0) \leqslant 0$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}$. Аналогично доказывается, что $u(x_0,y_0) \geqslant 0$ при всех $x_0 \in \mathbb{R}$, так что $u(x,y_0) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Обозначим $\widetilde{u}(x,y) = u(x,y+y_0)$. Имеем

$$\widetilde{u}(x,0) = 0,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Функция $\widetilde{u}(x,y)$ является гармонической в Π_+ и непрерывной в $\overline{\Pi_+}$. Вспомним, что для функции $f \in H_2(\Pi_+)$ при всех $z \in \Pi_+$ выполнено

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{y}},\ \ z \in \Pi_+,$$

(см. [24, гл. VI, §C]). Следовательно,

$$|\widetilde{u}(x,y)| = |u(x,y+y_0)| \leqslant |f(z+iy_0)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{y+y_0}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{y_0}}$$

при всех $x \in \mathbb{R},\ y > 0$. Таким образом, функция $\widetilde{u}(x,y)$ ограничена в Π_+. Для ограниченной гармонической в Π_+ функции $\widetilde{u}(x,y)$, непрерывной на $\overline{\Pi_+}$, выполнено равенство (см. [24, гл. VI, §A])

$$\widetilde{u}(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\widetilde{u}(t,0)\,dt,$$

откуда $\widetilde{u}(x,y) = 0$ при всех $(x,y) \in \Pi_+$, а значит, $f(z) \equiv 0,\ z \in \Pi_+$, что и требовалось.

2. Покажем, что суммы $SF^2(y_0)$ не приближают нулевую функцию в пространстве $H_2(\mathbb{R})$. Оценим снизу

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2} \right\|_2^2.$$

Пусть

$$x_k \in \mathbb{R},\ a_k = x_k - iy_0,\ k = 1, 2, \dots n,\ x_1 = \max_{k=1,\dots,n} x_k,\ A = x_1 + 10y_0.$$

Тогда при всех $x > A$ и $k = 1, 2, \dots n$ выполнено

$$\frac{(x-x_k)^2 - y_0^2}{((x-x_k)^2 + y_0^2)^2} > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-a_k)^2} \right\|_2^2 &\geqslant \int_A^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-a_k)^2} \right|^2 dx \geqslant \\
&\geqslant \int_A^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} \frac{1}{(x-a_k)^2} \right|^2 dx = \int_A^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_k)^2 - y_0^2}{((x-x_k)^2 + y_0^2)^2} \right)^2 dx \geqslant \\
&\geqslant \int_A^{+\infty} \left(\frac{(x-x_1)^2 - y_0^2}{((x-x_1)^2 + y_0^2)^2} \right)^2 dx = \frac{1}{y_0^3} \int_{10}^{+\infty} \left(\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2} \right)^2 du =: \frac{I}{y_0^3},
\end{aligned}$$

где I — абсолютная константа. Таким образом, суммы $SF^2(y_0)$ не приближают нулевую функцию в пространстве $H_2(\mathbb{R})$. $\square$

Глава 3. Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах L_p на локально компактных абелевых группах

3.1 Случай тора $\mathbb{T}^d$, пространства $\mathbb{R}^d$ и решетки $\mathbb{Z}^d$

Пусть $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначает пространство действительных суммируемых в p-й степени последовательностей, нумеруемых точками d-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$, с нормой

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n_1,n_2,...,n_d \in \mathbb{Z}} |x_{n_1 n_2 ... n_d}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $c_0(\mathbb{Z}^d)$ обозначим пространство действительных последовательностей, нумеруемых точками $\mathbb{Z}^d$ и стремящихся к 0 при стремлении любого из индексов к бесконечности, с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n_1,n_2,...,n_d \in \mathbb{Z}} |x_{n_1 n_2 ... n_d}|.$$

Во всех этих пространствах определены операторы сдвигов по каждому из d направлений, покоординатно определяемые равенствами

$$(T_k x)_{n_1 ... n_k ... n_d} = x_{n_1 ... n_{k-1}(n_k - 1) n_{k+1} ... n_d}, \;\; k = 1, ..., d, \;\; n_1, ..., n_d \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3.1. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует такой элемент w в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$, что суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} T_1^{j_{1,k}} T_2^{j_{2,k}} ... T_d^{j_{d,k}} w, \;\; j_{1,k}, j_{2,k}, ..., j_{d,k} \in \mathbb{Z}, \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

его сдвигов плотны во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $2 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $c_0(\mathbb{Z}^d)$.

Доказательство. Согласно [10] существует такой элемент $v \in l_2(\mathbb{Z})$, что суммы его сдвигов

$$\sum_{k=1}^{n} T^{l_k} v, \ l_k \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N},$$

плотны в $l_2(\mathbb{Z})$ (см. теорему G во Введении). Будем представлять d-мерные последовательности $(x_{n_1 \ldots n_d})$ разбитыми на одномерные строки, в каждой из которых индексы $n_2, \ldots, n_d$ фиксированы, а индекс n_1 пробегает все $\mathbb{Z}$. В качестве w возьмем элемент, одна фиксированная строка которого совпадает с v, а остальные — нулевые. Суммами сдвигов элемента w только вдоль этой строки можно сколь угодно точно приблизить элементы с любым вектором из $l_2(\mathbb{Z})$ в этой строке и нулями в остальных строках. Суммами сдвигов получившихся элементов по другим направлениям можно сколь угодно точно приблизить произвольный вектор в любой другой строке, а значит, приблизить любой элемент пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Следовательно, суммы (3.1) плотны в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$, а значит, и во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z}^d)$ с $p \geqslant 2$ и в пространстве $c_0(\mathbb{Z}^d)$.

Теорема 3.1 доказана. □

Теорема 3.2. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ существует функция $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} h(\bar{x} - \bar{a}_k), \ \bar{a}_k \in \mathbb{R}^d, \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ при $2 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Согласно [32], существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой суммы сдвигов

$$\sum_{k=1}^{n} f(x - a_k), \ a_k \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $2 \leqslant p < \infty$ (см. теорему D во Введении). Положим

$$h(\bar{x}) = h(x_1, ..., x_d) = f(x_1) \dots f(x_d),\ \ \bar{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Рассмотрим полугруппу R, являющуюся замыканием в $L_p(\mathbb{R}^d)$ множества сумм

$$\sum_{k=1}^{n} h(\bar{x} - \bar{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_1 - a_{1,k}) \dots f(x_d - a_{d,k}),\ \ a_{j,k} \in \mathbb{R},\ \ j = 1, ..., d,\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Пусть g_1 — произвольная функция из $L_p(\mathbb{R})$. Фиксируя $a_{2,k} = a_2, ..., a_{d,k} = a_d$ и выбирая нужные $a_{1,k}$ в сумме (3.2), получим, что функция

$$g_1(x_1) \cdot f(x_2 - a_2) \cdot \ \dots \ \cdot f(x_d - a_d) \tag{3.3}$$

принадлежит R. Суммируя функции вида (3.3) с фиксированными $a_3, \dots, a_d$ и различными a_2, получим, что любая функция вида $g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot f(x_3 - a_3) \cdot \dots \cdot f(x_d - a_d)$, где g_2 — произвольная функция из $L_p(\mathbb{R})$, тоже принадлежит R. Продолжая этот процесс, получим, что всякое произведение $g_1(x_1) \cdot \ \dots \ \cdot g_d(x_d)$, где $g_k \in L_p(\mathbb{R})$, $k = 1, \dots, d$, принадлежит R. Поскольку суммы таких произведений плотны в $L_p(\mathbb{R}^d)$ (среди них есть функции вида $p(x_1, \dots, x_d) \cdot I_Q$, где p — произвольный многочлен, а Q — произвольный координатный параллелепипед в $\mathbb{R}^d$), получаем, что $R = L_p(\mathbb{R}^d)$, что и требовалось.

Теорема 3.2 доказана. □

Теорема 3.3. *Пусть $d \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1$, и функция f из действительного пространства $L_p(\mathbb{T}^d)$ имеет ряд Фурье*

$$f(t_1, ..., t_d) = \sum_{n_1, ..., n_d \in \mathbb{Z}} c_{n_1, ..., n_d} e^{in_1 t_1} ... e^{in_d t_d} = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}} e^{i(\bar{n}, \bar{t})}$$

с условиями:

a) $c_{\bar 0} = 0$, $c_{\bar n} \neq 0$ *для всех* $\bar n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar 0\}$;

b)

$$\sum_{\bar n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar 0\}} \left(\max_{j=1,\dots,d} |n_j| \right)^{2d-1} \cdot |c_{\bar n}|^{\min\{2,q\}} < \infty. \tag{3.4}$$

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(\bar t + \bar a_k), \ \bar a_k \in \mathbb{T}^d, \ N \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ *функций из* $L_p(\mathbb{T}^d)$ *с нулевым средним.*

Эта теорема обобщает теорему C из Введения ($d = 1$).

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 из [9] (теоремы C из Введения).

1. Утверждение теоремы в случае $1 \leqslant p \leqslant 2$ сводится к случаю $p = 2$: если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то из соответствующего неравенства в условии b) получаем $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, по утверждению теоремы для $p = 2$ суммы (3.5) плотны в $L_2^0(\mathbb{T}^d)$, а значит, и в $L_p^0(\mathbb{T}^d)$ (в силу неравенства Гельдера). Таким образом, достаточно доказать теорему в случае $p \geqslant 2$.

2. Пусть $p \geqslant 2$. Для сумм

$$F_n(t_1, ..., t_d) = \sum_{k_1=0}^{n-1} ... \sum_{k_d=0}^{n-1} f\left(t_1 + \frac{2\pi k_1}{n}, ..., t_d + \frac{2\pi k_d}{n} \right) = n^d \sum_{\bar\nu \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar 0\}} c_{n\bar\nu} e^{i(n\bar\nu, \bar t)}$$

из многомерной теоремы Хаусдорфа-Юнга [2, §3, теорема 3.3 b)] получаем

$$\|F_n\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \leqslant C(p) \left(\sum_{\bar\nu \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar 0\}} |n^d c_{n\bar\nu}|^q \right)^{1/q} \leqslant C(p) \left(n^{2d} \sum_{\bar\nu \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar 0\}} |c_{n\bar\nu}|^q \right)^{1/q}. \tag{3.6}$$

Нам понадобится следующая лемма, обобщающая лемму Кореваара [39].

Лемма 3.1. *Если* $a_{\bar{k}} \geqslant 0,\ \bar{k} = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\},\ u$

$$\sum_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\max_{j=1,...,d} |k_j| \right)^{2d-1} \cdot a_{\bar{k}} < \infty, \tag{3.7}$$

то

$$\liminf_{n \to \infty} n^{2d} \sum_{\bar{k} \in n\mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} a_{\bar{k}} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Имеем

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{2d-1} \sum_{\bar{k} \in p\mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} a_{\bar{k}} = \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\sum_{p | \text{НОД}(m_1,...,m_d)} p^{2d-1} \right) a_{\bar{m}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\sum_{p | \text{НОД}(m_1,...,m_d)} p \right)^{2d-1} a_{\bar{m}} \leqslant \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} (\text{НОД}(m_1, ..., m_d))^{2d-1} a_{\bar{m}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} \left(\max_{j=1,...,d} |m_j| \right)^{2d-1} a_{\bar{m}} < \infty,$$

и, в то же время, $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p = \infty$. Следовательно, для бесконечной последовательности $\{p_l\}$ простых чисел выполнено равенство

$$\lim_{l \to \infty} \left(p_l^{2d-1} \sum_{\bar{k} \in p_l \mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} a_{\bar{k}} \right) : \frac{1}{p_l} = 0,$$

откуда $\liminf_{p \in \mathbb{P}, p \to \infty} p^{2d} \sum_{\bar{k} \in p\mathbb{Z}^d \backslash \{\bar{0}\}} a_{\bar{k}} = 0$.

Лемма 3.1 доказана. □

Применим лемму 3.1 для $a_{\bar{k}} = |c_{\bar{k}}|^q$. Тогда условия (3.7) леммы 3.1 выполнены в силу (3.4). Из леммы и оценки (3.6) получаем, что $\|F_n\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \to 0$ по некоторой бесконечной последовательности номеров n. Следовательно, функция $-f$ может быть с любой точностью приближена в $L_p(\mathbb{T}^d)$ суммами вида (3.5), а значит и всякая функция $-f(\bar{t} + \bar{a})$ также может быть с любой точностью приближена суммами (3.5), так что их замыкание

$$G = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{N} f(\bar{t} + \bar{a}_k) :\ \bar{a}_k \in \mathbb{R}^d,\ N \in \mathbb{N} \right\}}$$

в норме $L_p(\mathbb{T}^d)$ есть замкнутая аддитивная подгруппа пространства $L_p^0(\mathbb{T}^d)$.

Отметим, что для доказательства последнего утверждения по только что приведенной схеме достаточно в формуле (3.4) заменить $\max_{j=1,\dots,d}|n_j|$ на $\min_{j=1,\dots,d:\ n_j\neq 0}|n_j|$, однако с таким условием перейти от подгруппы ко всему пространству уже не удастся.

3. Положим

$$f_{\bar a}(\bar t)=f_{a_1,\dots,a_d}(t_1,\dots,t_d)=f(t_1+a_1,\dots,t_d+a_d),$$
$$\varphi_{\bar a,k}(u)=f_{a_1,\dots,a_{k-1},u,a_{k+1},\dots,a_d},\ \text{где}\ \bar a=(a_1,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots,a_d)\in\mathbb{R}^{d-1},$$
$$k\in\{1,\dots,d\},\ \ u\in\mathbb{R}.$$

Подгруппа G содержит образ $\varphi_{\bar a,k}(\mathbb{R})$ отображения $\varphi_{\bar a,k}:\mathbb{R}\to L_p^0(\mathbb{T}^d)$. Оценим модуль непрерывности этого отображения следующим образом:

$$\omega(\varphi_{\bar a,k},\delta)=\sup\left\{\|\varphi_{\bar a,k}(u+r)-\varphi_{\bar a,k}(u)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}:|r|\leqslant\delta,\ \ u\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\sup\left\{\|f_{0,\dots,0,r,0,\dots,0}-f\|_p:0\leqslant r\leqslant\delta\right\}=\sup_{0\leqslant r\leqslant\delta}\left\|\sum_{\bar n\in\mathbb{Z}^d}c_{\bar n}(e^{in_kr}-1)e^{i(\bar n,\bar t)}\right\|_p\leqslant$$
$$\leqslant C(p)\sup_{0\leqslant r\leqslant\delta}\left(\sum_{\bar n\in\mathbb{Z}^d}|c_{\bar n}|^q|e^{in_kr}-1|^q\right)^{1/q},$$

где в последнем неравенстве снова использована многомерная теорема Хаусдорфа-Юнга.

Выражение $e^{in_kr}-1=in_k\int_0^r e^{in_ky}\,dy$ по модулю не превосходит $\min\{|n_k|r,\,2\}$, поэтому

$$(\omega(\varphi_{\bar a,k},\delta))^q\,(C(p))^{-q}\leqslant\sum_{n_1,\dots,n_{k-1},n_{k+1},\dots,n_d\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{|n_k|\leqslant 1/\delta}|n_k|^q\delta^q|c_{\bar n}|^q+\sum_{|n_k|>1/\delta}2^q|c_{\bar n}|^q\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n_1,\dots,n_{k-1},n_{k+1},\dots,n_d\in\mathbb{Z}}\delta\left(\sum_{|n_k|\leqslant 1/\delta}|n_k|(|n_k|\delta)^{q-1}|c_{\bar n}|^q+2^q\sum_{|n_k|>1/\delta}|n_k||c_{\bar n}|^q\right)\leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{n_1,\dots,n_{k-1},n_{k+1},\dots,n_d\in\mathbb{Z}} \Bigg(\delta^{(q-1)/2} \sum_{|n_k|\leqslant 1/\sqrt{\delta}} |n_k||c_{\bar{n}}|^q + \sum_{1/\sqrt{\delta}<|n_k|\leqslant 1/\delta} |n_k||c_{\bar{n}}|^q + \\ + 2^q \sum_{|n_k|>1/\delta} |n_k||c_{\bar{n}}|^q\Bigg) = o(\delta),\ \delta\to 0,$$

в силу условия b) на коэффициенты $c_{\bar{n}}$. Следовательно, $\omega(\varphi_{\bar{a},k},\delta) = o(\delta^{1/q}),\ \delta\to 0$, и для модуля гладкости s_p пространства L_p [40, гл.1, §e] при $p\geqslant 2$ имеем

$$s_p(\omega(\varphi_{\bar{a},k},\delta)) \leqslant A(p)(\omega(\varphi_{\bar{a},k},\delta))^2 = o(\delta^{2/q}) = o(\delta),\ \delta\to 0.$$

По теореме J из Введения наша подгруппа G содержит замкнутые $\mathbb{R}$-линейные подпространства $L_{\bar{a},k}$, порожденные функциями $\varphi_{\bar{a},k}(u)-\varphi_{\bar{a},k}(0)$ соответственно. Следовательно, подгруппа G содержит замкнутое $\mathbb{R}$-линейное подпространство L, порожденное функциями $f_{\bar{a}} - f,\ \bar{a}\in\mathbb{R}^d$.

4. Покажем, что L совпадает с $L_p^0(\mathbb{T}^d)$. Если это не так, то найдется такая ненулевая функция $h\in L_q^0(\mathbb{T}^d)$ с рядом Фурье $\sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^d} h_{\bar{n}}e^{i(\bar{n},\bar{t})}$ ($h_{\bar{0}}=0$, $h_{-\bar{n}} = \overline{h_{\bar{n}}}$), что

$$\int_{\mathbb{T}^d} (f_{\bar{a}}(\bar{t}) - f(\bar{t}))h(\bar{t})\,d\bar{t} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}}\overline{h_{\bar{n}}}e^{i(\bar{n},\bar{a})} = \sum_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\bar{n}}\overline{h_{\bar{n}}},\ \bar{a}\in\mathbb{R}^d.$$

Левая часть последнего тождества представляет собой абсолютно сходящийся ряд по переменной $\bar{a}$ (последовательность $(c_{\bar{n}})$ принадлежит $l_q(\mathbb{Z}^d)$ по условию b), последовательность $(h_{\bar{n}})$ принадлежит $l_p(\mathbb{Z}^d)$ по другому утверждению теоремы Хаусдорфа-Юнга для $p\geqslant 2$ [2, §3, теорема 3.3 a)]). Следовательно, $c_{\bar{n}}\overline{h_{\bar{n}}} = 0$ для всякого $\bar{n}\in\mathbb{Z}^d\backslash\{\bar{0}\}$, что в силу условия a) и равенства $h_{\bar{0}} = 0$ влечет $h_{\bar{n}} = 0$ для любого $\bar{n}\in\mathbb{Z}^d$. Получаем $h\equiv 0$ и противоречие с предположением. Таким образом, подпространство L, а вместе с ним и подгруппа G совпадают с $L_p^0(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 3.3 доказана.

□

Аналогично работе [9] можно привести пример, подпирающий теорему 3.3: для функции $f(t_1,t_2) = I_{[2\pi-\alpha,2\pi)\times[2\pi-\alpha,2\pi)}(t_1,t_2) - I_{[0,\alpha]\times[0,\alpha]}(t_1,t_2)$ при почти всех $\alpha \in (0,\pi)$ выполнены условия a) теоремы 3.3, но суммы сдвигов (3.5) принимают только целые значения и не плотны в $L_p^0(\mathbb{T}^2)$. Этот пример показывает, что условие b) теоремы 3.3 нельзя заменить на условие

$$|c_{n_1,n_2}| = O\left(\frac{1}{(|n_1|+1)(|n_2|+1)}\right),\ n_1,n_2 \to \pm\infty.$$

Отметим, что в работе [14] получен следующий результат.

Теорема K. [14, теорема 4.12]. *Предположим, что действительнозначная функция $f(x,y)$, заданная на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ и 2π-периодически по обеим переменным продолженная на всю плоскость, имеет ряд Фурье*

$$f(x,y) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

a) $c_{00} = 0$, $c_{mn} \neq 0$ *при* $m^2+n^2 > 0$;

b) $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (m^2+n^2)|c_{mn}|^2 < \infty$ *(т.е. функция f имеет липшицев модуль непрерывности в $L_2(\mathbb{T}^2)$).*

Тогда суммы

$$\sum_{k=1}^{N} f(x+\alpha_k, y+\beta_k),\ \alpha_k,\beta_k \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N},$$

плотны в действительном пространстве $L_2^0(\mathbb{T}^2)$.

Условие b) здесь слабее, чем соответствующее условие

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (\max\{|m|,|n|\})^3 |c_{mn}|^2 < \infty$$

в теореме 3.3. Однако в теореме 3.3 рассматриваются суммы сдвигов в $L_p(\mathbb{T}^d)$ для произвольных $d \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant p < \infty$.

3.2 Случай $p = 2$ и компактной абелевой группы

Дадим необходимые определения.

Топологическая группа G — хаусдорфово топологическое пространство с групповыми операциями (т.е. являющееся группой относительно введенных на нем операций умножения $\circ$ и взятия обратного $^{-1}$), причем умножение $\circ : G \times G \to G$ непрерывно по совокупности переменных, и взятие обратного $^{-1} : G \to G$ непрерывно. Соответственно, *(локально) компактная абелева группа* — топологическая группа, являющаяся (локально) компактным топологическим пространством и абелевой группой. В дальнейшем операцию на абелевой группе будем обозначать знаком «+».

На каждой локально компактной абелевой группе существует не тождественно нулевая неотрицательная мера m, инвариантная относительно сдвигов, т.е. $m(E) = m(E+x)$ для всяких $x \in G$ и борелевского множества $E \subset G$, называемая *мерой Хаара* [44, гл. 1, §1.1.1]. При этом мера Хаара единственна с точностью до умножения на положительную константу [44, гл. 1, §1.1.3].

Для всякой локально компактной абелевой группы G с мерой Хаара m и $1 \leqslant p < \infty$ определено множество $\hat{L}_p(G)$ всех борелевских функций f на G, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty. \tag{3.8}$$

Отождествляя функции, не совпадающие только на множестве меры 0, получаем пространство $L_p(G)$, являющееся банаховым относительно нормы (3.8) [44, app. E7]. Также определим пространство $L_2^0(G) = \left\{ h \in L_2(G) : \int_G h(g)\, dm(g) = 0 \right\}$.

Функция $\gamma : G \to \mathbb{C}$ называется *характером* на группе G, если $|\gamma(x)| = 1$ и $\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$ для любых $x, y \in G$. Множество G^* всех непрерывных

характеров на локально компактной абелевой группе G с операцией

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) := \gamma_1(x)\gamma_2(x),\ \ x \in G,\ \ \gamma_1, \gamma_2 \in G^*,$$

и топологией, базой которой являются множества

$$N(K, r) = \{\gamma \in G^* : \forall x \in K\ \ |\gamma(x) - 1| < r\},\ \ K \subset G \text{ — компакт},\ \ r > 0,$$

и их всевозможные сдвиги, также является локально компактной абелевой группой и называется *группой характеров группы* G [44, гл. 1, §1.2.6].

Сформулируем основной результат настоящего параграфа.

Теорема 3.4. *Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Функция $f : G \to \mathbb{R}$, для которой суммы*

$$\sum_{k=1}^{n} f(g + g_k),\ \ g_k \in G,\ \ n \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.

Отметим, что если G — тривиальная группа, состоящая из одного нейтрального элемента, пространство $L_2^0(G)$ состоит только из тождественно нулевой функции, суммы сдвигов которой плотны в этом пространстве.

Всюду ниже $f_g(\cdot) = f(\cdot + g)$ — сдвиг функции f на элемент $g \in G$. Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3.2. *Если G — конечная нетривиальная абелева группа, то не существует функции $f : G \to \mathbb{R}$, для которой суммы* (3.9) *сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$.*

Доказательство. Зафиксируем действительную функцию $f \in L_2^0(G)$ и занумеруем элементы группы: $G = \{g_1, g_2, ..., g_N\}$, $N \geqslant 2$. Всякий элемент g_k является атомом меры Хаара m группы G, а $m(g_k) = 1/N$. Каждую функцию $h : G \to \mathbb{R}$ будем представлять в виде вектора ее значений

$(h(g_1), h(g_2), ..., h(g_N))$, а пространство $L_2^0(G)$ — в виде пространства L векторов длины N с нулевой суммой координат. Так как функция f имеет нулевое среднее, для каждого $g \in G$ выполнено равенство $\sum_{n=1}^{N} f(g + g_n) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{N} f_{g_n} = 0. \tag{3.10}$$

Рассмотрим множество сумм сдвигов функции f:

$$S := \left\{ \sum_{k=1}^{m} f_{h_k} : \ h_k \in G, \ m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \nu_n f_{g_n} : \ \nu_n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) получаем:

$$S = \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \nu_n f_{g_n} - \nu_N \left(\sum_{n=1}^{N-1} f_{g_n} \right) : \ \nu_n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (\nu_n - \nu_N) f_{g_n} : \ \nu_n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n f_{g_n} : \ \lambda_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Если векторы $f_{g_n}, \ n = 1, ..., N-1$, линейно независимы, то множество S, а значит, и его замыкание $\overline{S}$, является целочисленной решеткой, натянутой на эти векторы, поэтому замыкание $\overline{S}$ не может совпадать с пространством L размерности $N-1$. Если векторы $f_{g_n}, \ n = 1, ..., N-1$, линейно зависимы, то $\overline{S}$ содержится в подпространстве размерности не более $N-2$, а значит, не может совпадать с пространством L размерности $N-1$.

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть G — компактная абелева группа, H — ее замкнутая подгруппа. Если существует функция $f_0 : G \to \mathbb{R}$, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, то существует функция $F_0 : G/H \to \mathbb{R}$, суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_2^0(G/H)$.*

Доказательство. Так как G — компактная абелева группа и H — ее замкнутая подгруппа, G/H является компактной абелевой группой (см. [30, гл. 2, §5, теорема 5.22] и [44, app. B, §B6]). Будем обозначать смежный класс элемента $x \in G$ по подгруппе H через $\hat{x}$. Согласно [44, гл. 2, §2.7.3], на группах G, H и G/H соответственно существуют меры Хаара $m_G, m_H, m_{G/H}$ такие, что $m_H(H) = 1$ и для каждой функции $f \in L_1(G)$ на группе G/H корректно определена функция

$$F(\hat{x}) = \int_H f(x+y)\, dm_H(y), \tag{3.12}$$

причем отображение $T : f \mapsto F$ является ограниченным линейным оператором $T : L_1(G) \to L_1(G/H)$, и выполнено равенство

$$\int_G f\, dm_G = \int_{G/H} F(\hat{x})\, dm_{G/H}(\hat{x}). \tag{3.13}$$

Так как $f_0 \in L_2^0(G)$ и группа G компактна, $f_0 \in L_1(G)$ и определена функция $F_0 = Tf_0 \in L_1(G/H)$. Используя равенство (3.13) для функций $f_0, |f_0|^2 \in L_1(G)$, получаем

$$\int_{G/H} F_0(\hat{x})\, dm_{G/H}(\hat{x}) = \int_G f_0\, dm_G = 0,$$

$$\int_{G/H} |F_0(\hat{x})|^2\, dm_{G/H}(\hat{x}) = \int_{G/H} \left| \int_H f_0(x+y)\, dm_H(y) \right|^2 dm_{G/H}(\hat{x}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{G/H} \int_H |f_0(x+y)|^2\, dm_H(y)\, dm_{G/H}(\hat{x}) = \int_G |f_0(x)|^2\, dm_G(x) = \|f_0\|^2_{L_2(G)} < \infty,$$

то есть $F_0 \in L_2^0(G/H)$.

Докажем, что суммы сдвигов функции F_0 плотны в пространстве $L_2^0(G/H)$. Зафиксируем функцию $P \in L_2^0(G/H)$ и определим функцию p на группе G равенством $p(g) := P(\hat{g})$. Ясно, что $P = Tp$. Согласно [28, гл. VIII, §39, теорема 3], функция p принадлежит $L_1(G)$, причем

$$\int_G p\, dm_G = \int_{G/H} P\, dm_{G/H} = 0, \ \int_G |p|^2\, dm_G = \int_{G/H} |P|^2\, dm_{G/H} < \infty.$$

Таким образом, $p \in L_2^0(G)$, и по условию для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $n \in \mathbb{N},\ g_k \in G,\ k = 1, ..., n$, что

$$\left\| p(g) - \sum_{k=1}^{n} f_0(g + g_k) \right\|_{L_2(G)} < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Используя определение функции F_0, равенства (3.12) и (3.13) для функции $|p(\cdot) - \sum_{k=1}^{n} f_0(\cdot + g_k)|^2$ и оценку (3.14), получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\| P(\hat{g}) - \sum_{k=1}^{n} F_0(\hat{g} + \hat{g}_k) \right\|^2_{L_2(G/H)} = \\
&\quad = \int_{G/H} \left| \int_H \left(p(g+y) - \sum_{k=1}^{n} f_0(g + g_k + y) \right) dm_H(y) \right|^2 dm_{G/H}(\hat{g}) \leqslant \\
&\quad \leqslant \int_{G/H} \left(\int_H \left| p(g+y) - \sum_{k=1}^{n} f_0(g + g_k + y) \right|^2 dm_H(y) \right) dm_{G/H}(\hat{g}) = \\
&\quad = \int_G \left| p(g) - \sum_{k=1}^{n} f_0(g + g_k) \right|^2 dm_G(g) < \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Это и означает, что суммы сдвигов функции F_0 плотны в пространстве $L_2^0(G/H)$.

Лемма 3.3 доказана. □

Через G^* будем обозначать группу непрерывных характеров группы G, а через $\mathbb{1}$ — тождественно единичный характер на G. Пусть H — замкнутая подгруппа локально компактной абелевой группы G, и $H^\perp$ — множество всех таких $\gamma \in G^*$, что $\gamma(h) = 1$ для всех $h \in H$. Множество $H^\perp$ называется *аннулятором* H. Согласно [44, гл.2, §2.1.1], $H^\perp$ — замкнутая подгруппа группы G^*.

Лемма 3.4. *Пусть G — несвязная компактная абелева группа. Тогда не существует функции f в действительном пространстве $L_2^0(G)$, для которой суммы сдвигов* (3.9) *были бы плотны в этом пространстве.*

Доказательство. Согласно [30, гл. 6, §24, теорема 24.25], группа характеров G^* несвязной компактной абелевой группы G имеет кручение, то есть существует нетривиальный элемент $\chi_0 \in G^*$ конечного порядка $n_0 \geqslant 2$. Следовательно, $\Xi := \{\chi_0, \chi_0^2, ..., \chi_0^{n_0} \equiv \mathbb{1}\}$ является замкнутой подгруппой порядка n_0 группы G^*. Пусть $H = \Xi^\perp$ — аннулятор подгруппы $\Xi \subset G^*$. Тогда H является замкнутой подгруппой $(G^*)^*$, а значит, по теореме двойственности Понтрягина [44, гл.1, §1.7.2], H является замкнутой подгруппой G, а фактор-группа G/H совпадает с фактор-группой $(G^*)^*/\Xi^\perp$. Согласно [44, гл.2, §2.1.2], фактор-группа $(G^*)^*/\Xi^\perp$ топологически изоморфна Ξ^*. Согласно [30, гл.6, §23.27, п. d)], группа характеров Ξ^* конечной абелевой группы Ξ топологически изоморфна ей самой. Таким образом, в компактной абелевой несвязной группе G существует такая замкнутая подгруппа H, что фактор-группа G/H топологически изоморфна конечной группе Ξ порядка $n_0 \geqslant 2$.

Предположим, что существует функция f в действительном пространстве $L_2^0(G)$, для которой суммы (3.9) плотны в этом пространстве. Тогда по лемме 3.3 существует функция F в действительном пространстве $L_2^0(G/H)$, суммы сдвигов которой плотны в этом пространстве. Но группа G/H является конечной нетривиальной абелевой группой. Получено противоречие с леммой 3.2.

Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть G — компактная нетривиальная абелева группа, и ее группа характеров G^* не является счетной. Тогда не существует функции f в действительном пространстве $L_2^0(G)$, для которой суммы сдвигов* (3.9) *были бы плотны в этом пространстве.*

Доказательство. Если в группе G^* конечное число элементов, то согласно [30, гл.6, §23.27, п. d)], G топологически изоморфна G^*, поэтому G —

нетривиальная конечная абелева группа, и требуемое утверждение следует из леммы 3.2.

Рассмотрим случай, когда группа G^* более чем счетна. Пусть $f \in L_2^0(G)$. По теореме о полноте системы характеров компактной абелевой группы (см. [1, гл. III, §2, теорема 3.9]), группа характеров G^* является ортонормированным базисом в $L_2(G)$, в частности, функция f раскладывается в ряд Фурье по системе характеров:

$$f(g) = \sum_{\alpha} c_\alpha \chi_\alpha(g), \;\; G^* = \{\chi_\alpha\},$$

причем множество коэффициентов c_α, не равных 0, не более чем счетно (иначе не выполнено равенство Парсеваля). Следовательно,

$$f(g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\alpha_k} \chi_{\alpha_k}(g), \;\; c_{\alpha_k} \neq 0,$$

$$f(g+h) = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_{\alpha_k} \chi_{\alpha_k}(h) \chi_{\alpha_k}(g).$$

Тогда суммы сдвигов функции f лежат в замкнутом подпространстве L действительного пространства $L_2^0(G)$, порожденном функциями χ_{α_k}, $k \in \mathbb{N}$, и так как базис $L_2^0(G)$ несчетен, L не совпадает с $L_2^0(G)$.

Лемма 3.5 доказана. □

Доказательство теоремы 3.4. *Необходимость* следует из лемм 3.4 и 3.5.

Достаточность. Пусть теперь G — связная компактная абелева группа со счетной группой характеров G^*. Доказательство существования искомой функции разобьем на несколько пунктов.

1. Пусть χ — некоторый непрерывный характер на группе G, $\mathbf{0}$ — ноль группы G, $\mathbb{1}$ — единица группы G^*. Тогда $\overline{\chi}$ также является непрерывным характером на G, причем $\chi \equiv \overline{\chi}$ на G тогда и только тогда, когда χ принимает

на G только значения ± 1. Но $\chi(\mathbf{0}) = 1$, а группа G связна, поэтому $\chi \equiv \overline{\chi}$ тогда и только тогда, когда $\chi \equiv \mathbb{1}$. Таким образом, группа G^* имеет вид:

$$G^* = \{\chi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \sqcup \{\overline{\chi}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \sqcup \{\mathbb{1}\}.$$

Отметим, что группа G^* обладает дискретной топологией (см. [44, гл. 1, §2, теорема 1.2.5]), и компактные подмножества группы G^* — в точности ее конечные подмножества. По теореме о полноте системы характеров компактной абелевой группы (см. [1, гл. III, §2, теорема 3.9]), G^* образует ортонормированный базис в $L_2(G)$, и всякая действительная функция $f \in L_2^0(G)$ раскладывается в ряд Фурье по системе G^*:

$$f(g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \chi_\nu(g) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{c_\nu}\,\overline{\chi}_\nu(g), \;\; c_\nu \in \mathbb{C}.$$

Будем искать функцию f с плотными в $L_2^0(G)$ суммами сдвигов в виде

$$f(g) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(\chi_\nu(g) + \overline{\chi}_\nu(g)), \;\; c_\nu \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

2. Согласно [30, гл. 6, §24, теорема 24.15], топологический вес $\mu(G)$ компактной абелевой группы G совпадает с мощностью группы G^*, то есть счетен. Согласно [30, гл. 6, §25, теорема 25.14], если топологический вес $\mu(G)$ связной компактной абелевой группы G не больше континуума, то G *монотетична*, то есть существует элемент $g_0 \in G$ такой, что $\overline{\{ng_0 : n \in \mathbb{Z}\}} = G$. Согласно [30, гл. 6, §25, теорема 25.11], любой неединичный характер не равен единице на элементе g_0: $\chi_\nu(g_0) \neq 1, \;\; \nu \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists \delta_k > 0 : |\chi_\nu(g_0) - 1| \geqslant \delta_k \text{ при } \nu = 1, \ldots, k. \tag{3.16}$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зафиксируем $\varepsilon_k \in (0, \delta_k/k)$. По теореме Дирихле о совместных приближениях (см. [19, гл.1, §5]) можно найти такую последовательность $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ натуральных чисел, что

$$N_0 = 1, \;\; N_k \geqslant kN_{k-1} \text{ и } |(\chi_\nu(g_0))^{N_k} - 1| < \varepsilon_k, \;\; \nu = 1, \ldots, k, \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

в частности, последовательность $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию:

$$N_{k+m} \geqslant (k+m)(k+m-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)N_k,\ \ k,m\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

3. Согласно [30, гл. 6, §25, теорема 25.18, 2) $\Rightarrow$ 3)], для связной компактной абелевой группы G существует гомоморфизм $\varphi : G^* \to \mathbb{R}_d$, где $\mathbb{R}_d$ — группа действительных чисел относительно операции сложения, наделенная дискретной топологией. По другой части этой же теоремы (см. [30, гл. 6, §25, теорема 25.18, 3) $\Rightarrow$ 1)]), G *соленоидальна*, то есть существует непрерывный гомоморфизм $\tau : \mathbb{R} \to G$ такой, что $\overline{\tau(\mathbb{R})} = G$, причем из доказательства следует тождество

$$\forall\chi\in G^*\ \ \forall t\in\mathbb{R}:\ \ \chi(\tau(t)) = e^{it\varphi(\chi)}. \tag{3.19}$$

Обозначим

$$a_m := \min\{1/2^m, 1/(m^2|\varphi(\chi_m)|)\},\ \ m\in\mathbb{N}. \tag{3.20}$$

Здесь $\varphi(\chi_m)\neq 0$, поскольку иначе $\chi_m\equiv 1$ в силу тождества (3.19) и плотности образа гомоморфизма τ в G.

4. Покажем, что функция

$$\rho(g,h) := \sum_{m=1}^{\infty} a_m|\chi_m(g)-\chi_m(h)|,\ \ g,h\in G, \tag{3.21}$$

является метрикой на G. Функция ρ определена корректно, так как из равенств (3.20) получаем оценку $\rho(g,h)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}1/2^{m-1}=2,\ g,h\in G$. Ясно, что ρ неотрицательна, симметрична, и в силу неравенства треугольника для модуля удовлетворяет неравенству треугольника. Если $\rho(g,h)=0$, то $\chi_m(g)=\chi_m(h)$ для каждого $m\in\mathbb{N}$, а значит, $(\alpha(g-h))(\chi)=\chi(g-h)=1$ для всякого $\chi\in G^*$, где $\alpha : G\to(G^*)^*$ — канонический изоморфизм (см. [44, гл.1, §§1.7.1, 1.7.2]). Поэтому $\alpha(g-h)$ — единица группы $(G^*)^*$, а тогда $g-h=\mathbf{0}$. Из (3.21) следует оценка

$$|\chi_m(g)-\chi_m(h)| = |\overline{\chi}_m(g)-\overline{\chi}_m(h)|\leqslant\rho(g,h)/a_m,\ \ m\in\mathbb{N}, \tag{3.22}$$

значит, каждый характер $\chi \in G^*$ липшицев относительно метрики ρ. Кроме того, из определения метрики ρ следует ее инвариантность относительно сдвигов.

Докажем теперь, что топология, индуцированная на G метрикой ρ, совпадает с топологией группы G. Согласно [44, гл.1, §1.2.6] и [44, гл.1, §1.7.2], базой топологии на группе G является семейство множеств вида

$$N(x, C, r) = \{y \in G : \ |\gamma(y) - \gamma(x)| < r \text{ для всех } \gamma \in C\},$$

где $x \in G$, C — компакт в G^*, $r > 0$. Покажем сначала, что для всяких $\varepsilon > 0$ и $x \in G$ существуют компакт $C \subset G^*$ и $r > 0$ такие, что $N(x, C, r) \subset B_\varepsilon(x) := \{y \in G : \ \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Выберем такое $M \in \mathbb{N}$, что $1/2^M < \varepsilon/4$, и положим $r := \varepsilon/2$, $C := \{\chi_1, ..., \chi_M\}$. Тогда для каждого $y \in N(x, C, r)$ и $m = 1, \ldots, M$ выполнена оценка $|\chi_m(y) - \chi_m(x)| < r$, следовательно, по определению коэффициентов a_m, $m \in \mathbb{N}$,

$$\rho(x, y) \leqslant \sum_{m=1}^{M} a_m |\chi_m(y) - \chi_m(x)| + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} < \sum_{m=1}^{M} \frac{r}{2^m} + \frac{1}{2^{M-1}} < \varepsilon,$$

то есть $y \in B_\varepsilon(x)$.

Теперь покажем, что для всяких $r > 0$, $x \in G$ и компакта $C \subset G^*$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(x) \subset N(x, C, r)$. Так как G^* счетна и $C \subset G^*$ — компакт, то C — конечное множество и существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $C \subset \{\mathbb{1}, \chi_1, \overline{\chi}_1, \ldots, \chi_M, \overline{\chi}_M\}$. Положим $\varepsilon := r \cdot \min_{m=1,...,M} a_m$. Если $y \in B_\varepsilon(x)$, то в силу оценки (3.22) $|\chi_m(y) - \chi_m(x)| = |\overline{\chi}_m(y) - \overline{\chi}_m(x)| < \varepsilon/a_m \leqslant r$ при $m = 1, \ldots, M$, то есть $y \in N(x, C, r)$.

Итак, метрика ρ согласована с топологией группы G.

5. Докажем, что непрерывный гомоморфизм $\tau : \mathbb{R} \to G$, определенный в пункте 3, является липшицевым для введенной на группе G метрики ρ. Пусть

$u, v \in \mathbb{R}$. Из равенств (3.19) и (3.21) получаем оценку

$$\rho(\tau(u),\tau(v)) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m |e^{iu\varphi(\chi_m)} - e^{iv\varphi(\chi_m)}| \leqslant$$
$$\leqslant |u-v| \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m |\varphi(\chi_m)| \right) \leqslant |u-v| \left(\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2 \right) \leqslant 2|u-v|,$$

где в предпоследнем неравенстве использовано определение (3.20) коэффициентов a_m.

6. Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ выберем константу c_ν, удовлетворяющую условиям

$$0 < c_\nu < \min\left\{ \frac{1}{N_\nu},\ \frac{a_\nu}{\nu} \right\}, \tag{3.23}$$

где N_ν и a_ν определены в пунктах 2 и 3 доказательства соответственно. Тогда функция f определена по формуле (3.15). Используя неравенства (3.18) и (3.23), оценим норму функции f в пространстве $L_2(G)$:

$$\|f\|_2^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 < 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_\nu^2} \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{N_1^2 (\nu!)^2} \leqslant 4.$$

Следовательно, $f \in L_2^0(G)$. Оценим следующую норму:

$$\left\| \sum_{m=0}^{N_k-1} f(x+mg_0) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{m=0}^{N_k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(c_\nu \chi_\nu(x) (\chi_\nu(g_0))^m + c_\nu \overline{\chi}_\nu(x) (\overline{\chi}_\nu(g_0))^m \right) \right\|_2^2 =$$
$$= \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{m=0}^{N_k-1} (\chi_\nu(g_0))^m \right) \chi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \left(\sum_{m=0}^{N_k-1} (\overline{\chi}_\nu(g_0))^m \right) \overline{\chi}_\nu(x) \right\|_2^2 =$$
$$= 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| c_\nu \sum_{m=0}^{N_k-1} (\chi_\nu(g_0))^m \right|^2 \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{k} |c_\nu|^2 \left| \frac{(\chi_\nu(g_0))^{N_k} - 1}{\chi_\nu(g_0) - 1} \right|^2 + 2\sum_{\nu=k+1}^{\infty} |c_\nu|^2 N_k^2.$$

Используя условия (3.16), (3.17), (3.18), (3.23), а также определение констант

ε_k, получаем:

$$\left\|\sum_{m=0}^{N_k-1} f(x+mg_0)\right\|_2^2 \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{N_\nu^2}\left(\frac{\varepsilon_k}{\delta_k}\right)^2 + 2\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{N_k^2}{N_\nu^2} \leqslant \frac{2}{k^2}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{N_\nu^2} +$$
$$+ 2\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\frac{N_k^2}{\nu^2(\nu-1)^2...(k+1)^2N_k^2} \leqslant \frac{2}{k^2}\cdot k + \frac{2}{(k+1)^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{k} + \frac{4}{(k+1)^2} \to 0,\ k\to\infty.$$

Значит, функция $-f \in S$, где

$$S = \overline{\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x+h_k),\ h_k\in G,\ n\in\mathbb{N}\right\}}$$

(замыкание в пространстве $L_2(G)$). Следовательно, функция $-f(\cdot+h)$ принадлежит S для всех $h\in G$, т.е. S — замкнутая аддитивная подгруппа в $L_2^0(G)$.

7. Нам понадобится

Лемма А. [7, лемма 4]. *Пусть S — замкнутая аддитивная подгруппа в равномерно гладком банаховом пространстве X с модулем гладкости $s(t)$, $t\geqslant 0$. Если $a,b\in S$ и для любого $\varepsilon>0$ существуют $x_0,...,x_n\in S$ такие, что $x_0=a,\ x_n=b$ и $\sum_{k=1}^{n} s(\|x_k-x_{k-1}\|)<\varepsilon$, то весь отрезок $[a,b]$ содержится в S.*

Пусть $h\in G$, $\varepsilon>0$. Так как $\tau:\mathbb{R}\to G$ — гомоморфизм с плотным образом, и метрика ρ согласована с топологией группы G (см. пункты 3 и 4 доказательства), существует такое $w\in\mathbb{R}$, что $\rho(\tau(w),h)<\sqrt{\varepsilon/2}$. Зафиксируем натуральное $N>1+\frac{8|w|^2}{\varepsilon}$ и положим

$$h_k := \tau\left(\frac{kw}{N-1}\right),\ k=0,...,N-1,\ h_N := h.$$

Используя инвариантность метрики ρ относительно сдвигов, а также 2-липшицевость и гомоморфность τ (см. пункты 4 и 5 доказательства), получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{N}(\rho(h_{k-1},h_k))^2=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\rho\left(\tau\left(\frac{(k-1)w}{N-1}\right),\tau\left(\frac{kw}{N-1}\right)\right)\right)^2+(\rho(\tau(w),h))^2<$$
$$<(N-1)\left(\rho\left(\tau(0),\tau\left(\frac{w}{N-1}\right)\right)\right)^2+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant(N-1)\cdot 4\left|\frac{w}{N-1}\right|^2+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{N}\|f(x+h_k)-f(x+h_{k-1})\|_2^2,$$

используя предыдущую оценку, а также неравенства (3.22) и (3.23):

$$\sum_{k=1}^{N}\|f(x+h_k)-f(x+h_{k-1})\|_2^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left\|\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu(\chi_\nu(h_k)-\chi_\nu(h_{k-1}))\chi_\nu(x)+c_\nu(\overline{\chi}_\nu(h_k)-\overline{\chi}_\nu(h_{k-1}))\overline{\chi}_\nu(x))\right\|_2^2=$$
$$=2\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu(\chi_\nu(h_k)-\chi_\nu(h_{k-1}))|^2\leqslant 2\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu^2}{a_\nu^2}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}(\rho(h_{k-1},h_k))^2\right)<$$
$$<2\varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}<4\varepsilon. \quad (3.24)$$

Итак, подгруппа S, определенная в пункте 6, содержится в гильбертовом пространстве $L_2^0(G)$ с модулем гладкости $s(t)=\sqrt{1+t^2}-1=O(t^2)$ (см., например, [40, гл.1, §e], причем функции $f(x+h_0)=f(x),\ f(x+h_1),...,\ f(x+h_N)=f(x+h)$ принадлежат S и выполнена оценка (3.24). Тогда по лемме А для каждого $\lambda\in[0,1]$ функция $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x+h)\in S$. Значит, и для каждого $\lambda\in\mathbb{R}$ функция $\lambda(f(x)-f(x+h))\in S$. Следовательно, подгруппа S содержит замкнутое $\mathbb{R}$-линейное подпространство L, порожденное функциями вида $f(\cdot)-f(\cdot+h),\ h\in G$.

8. Покажем, что L совпадает с действительным пространством $L_2^0(G)$. Если это не так, то найдется такая действительная ненулевая функция $r \in L_2^0(G)$, что выполнено тождество

$$\int_G (f(x+h)-f(x))r(x)\,dm(x) \equiv 0 \Longrightarrow \int_G f(x+h)r(x)\,dm(x) \equiv const,\ \ h \in G.$$

Так как r действительнозначна, ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$r(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \chi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{d_\nu}\overline{\chi}_\nu(x),\ \ d_\nu \in \mathbb{C}.$$

Тогда в силу разложения

$$f(x+h) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \chi_\nu(h)\chi_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \overline{\chi}_\nu(h)\overline{\chi}_\nu(x),$$

имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \overline{d_\nu}\chi_\nu(h) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu d_\nu \overline{\chi}_\nu(h) \equiv const,\ \ h \in G.$$

Так как последовательности $\{c_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}},\ \{d_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ принадлежат l_2, левая часть последнего тождества является абсолютно сходящимся рядом Фурье по переменной h, а значит, $c_\nu d_\nu = c_\nu \overline{d_\nu} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}$. Так как $c_\nu > 0$ при $\nu \in \mathbb{N}$, получаем $d_\nu = 0$ для $\nu \in \mathbb{N}$, то есть $r \equiv 0$, что противоречит предположению.

Таким образом, подпространство L, а вместе с ним и подгруппа S, совпадают с действительным пространством $L_2^0(G)$.

Теорема 3.4 доказана. □

3.3 Комплексный случай

Замечание 3.1. *Пусть G — компактная нетривиальная абелева группа. Тогда не существует функции f в комплексном пространстве $L_2^0(G)$, для которой суммы сдвигов* (3.9) *были бы плотны в этом пространстве.*

Доказательство. Если G — несвязная компактная абелева группа или компактная абелева нетривиальная группа с не счетной группой характеров G^*, и если бы существовала функция f, суммы сдвигов которой плотны в комплексном пространстве $L_2^0(G)$, то суммы сдвигов функции $\operatorname{Re} f$ были бы плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, что противоречило бы лемме 3.4 или лемме 3.5 соответственно.

Пусть теперь G — связная компактная абелева группа со счетной группой характеров $G^* = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \sqcup \{\mathbb{1}\},\ \Gamma_1 = \{\chi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty},\ \Gamma_2 = \{\overline{\chi}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, и пусть существует функция f в комплексном пространстве $L_2^0(G)$, суммы сдвигов которой плотны в этом пространстве. Пусть $m_G,\ m_{G^*}$ — меры Хаара на группах G и G^* соответственно. Тогда преобразование Фурье

$$g(\chi) := \widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\chi(-x)\, dm_G(x)$$

функции f и функция

$$g_1 : G^* \to \mathbb{C},\ g_1(\chi) := \begin{cases} g(\overline{\chi}),\ \chi \in \Gamma_1, \\ -g(\overline{\chi}),\ \chi \in \Gamma_2, \\ 0,\ \chi \equiv \mathbb{1}, \end{cases}$$

принадлежат $L_2(G^*)$ (см. [44, гл.1, т. 1.6.1]), а обратное преобразование Фурье $f_1 := \check{g_1}$ принадлежит $L_2^0(G)$, так как $\int_G f_1(x)\, dm_G(x) = \widehat{f_1}(\mathbb{1}) = g_1(\mathbb{1}) = 0$. Отметим, что, согласно предположению, функция f не нулевая, а значит, функции g, g_1, f_1 также не нулевые. Для $y \in G$ выполнено

$$\int_G f(x+y)\overline{f_1(x)}\, dm_G(x) = \int_{G^*} \widehat{f(\cdot + y)}(\chi)\overline{\widehat{f_1(\cdot)}(\chi)}\, dm_{G^*}(\chi) =$$
$$= \int_{G^*} \chi(y)\widehat{f}(\chi)\overline{g_1(\chi)}\, dm_{G^*}(\chi) = \int_{G^*} \chi(y)g(\chi)\overline{g_1(\chi)}\, dm_{G^*}(\chi) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \chi(y)g(\chi)\overline{g(\overline{\chi})}\, dm_{G^*}(\chi) - \int_{\Gamma_2} \chi(y)g(\chi)\overline{g(\overline{\chi})}\, dm_{G^*}(\chi) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \chi(y)g(\chi)\overline{g(\overline{\chi})}\, dm_{G^*}(\chi) - \int_{\Gamma_1} \overline{\chi}(y)g(\overline{\chi})\overline{g(\chi)}\, dm_{G^*}(\chi) =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \left(\chi(y)g(\chi)\overline{g(\overline{\chi})} - \overline{\chi(y)g(\chi)\overline{g(\overline{\chi})}}\right)\, dm_{G^*}(\chi).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re} \int_G f(x+y)\overline{f_1(x)}\, dm_G(x) = 0$$

для всех $y \in G$, а значит, суммы сдвигов функции f лежат в действительной гиперплоскости комплексного пространства $L_2^0(G)$, и следовательно, не могут быть плотны в этом пространстве. □

Непонятно, обобщается ли замечание 3.1 на произвольные группы, не обязательно компактные. При этом в работе [32] доказано, что не существует функции f в комплексном пространстве $L_2(\mathbb{R})$, для которой суммы сдвигов были бы плотны в этом пространстве.

Заключение

В диссертации решаются несколько не изучавшихся ранее задач о плотности сумм сдвигов одной функции в различных функциональных пространствах. Данная тематика богата направлениями для дальнейшего исследования. Отметим самые основные из этих направлений, связанных с диссертацией.

Во-первых, в связи с доказанной теоремой 1.1 естественно возникает задача: при $1 \leqslant p < 2$ существует ли функция в пространстве H_p Харди в верхней полуплоскости, для которой суммы действительных сдвигов плотны в этом пространстве? Напомним, что при доказательстве теоремы 1.1 существенно используется теорема E. В связи с теоремой E возникает вопрос о существовании последовательности тригонометрических многочленов с натуральными коэффициентами, сходящейся нулю по норме L_2 или даже в равномерной норме на всяком отрезке $[\delta,\ 2\pi - \delta]$, $\delta \in (0, \pi)$. Положительный ответ на этот вопрос дал бы возможность распространить теоремы D, G и 1.1 на все $p \in (1, \infty)$. В частности, возникает более конкретная задача, ранее сформулированная в работе [14].

Задача C. *Верно ли, что для всякого $\delta > 0$ найдется такой многочлен*

$$Q_\delta(x) = \sum_{s=1}^{S} n_s e^{ik_s x},$$

где $k_s \in \mathbb{Z}$ и $n_s \in \mathbb{N}$, что $|Q_\delta(x)| < 1$ при $x \in [\delta,\ 2\pi - \delta]$?

Для $\delta = 0.88$ такой многочлен

$$e^{18ix} + 4e^{17ix} + 10e^{16ix} + 20e^{15ix} + 34e^{14ix} + 51e^{13ix} + 69e^{12ix} + 85e^{11ix} + 96e^{10ix} +$$

$$+100e^{9ix} + 96e^{8ix} + 85e^{7ix} + 69e^{6ix} + 51e^{5ix} + 34e^{4ix} + 20e^{3ix} + 10e^{2ix} + 4e^{ix} + 1$$

найден автором. Для произвольного $\delta \in (0, \pi)$ такой многочлен Q_δ дал бы последовательность Q_δ^n тригонометрических многочленов с натуральными коэффициентами, сходящуюся к нулю равномерно на отрезке $[\delta,\ 2\pi - \delta]$.

Во-вторых, было бы интересно исследовать плотность производных l-го порядка ($l \geqslant 2$) наипростейших дробей с полюсами в нижней полуплоскости в пространствах H_p в верхней полуплоскости.

Наконец, остается открытой задача В а), а также аналог задачи В для случая неабелевых локально компактных групп.

Список литературы

[1] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах, Баку, Элм, 1981, 180 с.

[2] А. П. Антонов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко, Некоторые вопросы теории кратных тригонометрических рядов, М., МАКС Пресс, 2014, 92 с.

[3] С. Банах, Теория линейных операций, М.-Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 272 с.

[4] П. А. Бородин, Оценки расстояний до прямых и лучей от полюсов наипростейших дробей, ограниченных по норме L_p на этих множествах // Матем. заметки, **82**:6 (2007), 803—810.

[5] П. А. Бородин, Приближение наипростейшими дробями на полуоси // Матем. сб., **200**:8 (2009), 25—44.

[6] П. А. Бородин, Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы // Матем. сб., **203**:11 (2012), 23—40.

[7] П. А. Бородин, Плотность полугруппы в банаховом пространстве // Изв. РАН. Сер. матем., **78**:6 (2014), 21–48.

[8] П. А. Бородин, Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы. II // Матем. сб., **207**:3 (2016), 19—30.

[9] П. А. Бородин, Приближение суммами сдвигов одной функции на окружности // Изв. РАН. Сер. матем., **81**:6 (2017), 23–37.

[10] П. А. Бородин, Плотность сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей // Труды МИАН, **303** (2018), 39–44.

[11] П. А. Бородин, Приближение наипростейшими дробями: универсальные множества полюсов // Матем. заметки, **111**:1 (2022), 3—7.

[12] П. А. Бородин, О. Н. Косухин, О приближении наипростейшими дробями на действительной оси // Вестн. Моск. ун-та Сер. 1. Матем., мех., **1** (2005), 3–8.

[13] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Приближение наипростейшими дробями в неограниченных областях // Матем. сб., **212**:4 (2021), 3—28.

[14] П. А. Бородин, К. С. Шкляев, Плотность квантованных приближений // УМН, **78**:5(473) (2023), 3–64.

[15] Дж. Гарнетт, Ограниченные аналитические функции, М., Мир, 1984, 469 с.

[16] В. И. Данченко, Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Матем. сб., **185**:8 (1994), 63–80.

[17] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, О приближении наипростейшими дробями // Матем. заметки, **70**:4 (2001), 553—559.

[18] В. И. Данченко, М. А. Комаров, П. В. Чунаев, Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей // Изв. вузов. Матем., **12** (2018), 9–49.

[19] Дж. В.С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений, М., ИЛ, 1961, 213 с.

[20] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука, 1976, 543 с.

[21] М. А. Комаров, Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс // Матем. заметки, **97**:5 (2015), 718—732.

[22] М. А. Комаров, О скорости аппроксимации в единичном круге функций класса H_1 логарифмическими производными полиномов с корнями на границе круга // Изв. РАН. Сер. матем., **84**:3 (2020), 3—14.

[23] О. Н. Косухин, Об аппроксимационных свойствах наипростейших дробей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2001, №4, 54—59.

[24] П. Кусис, Введение в теорию пространств H_p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне, М., Мир, 1984, 364 с.

[25] В. Ю. Протасов, Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. матем., **73**:2 (2009), 123—140.

[26] Э. Ч. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Л., ГИТТЛ, 1948, 479 с.

[27] В. И. Филиппов, Целочисленное разложение по системам из сжатий и сдвигов одной функции // Изв. РАН. Сер. матем., **84**:4 (2020), 187—197.

[28] П. Халмош, Теория меры, М., ИЛ, 1953, 292 с.

[29] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962, 829 с.

[30] Э. Хьюитт, К. Росс, Абстрактный гармонический анализ. Том I, М., Мир, 1975, 654 с.

[31] E. Abakumov, A. Borichev, K. Fedorovskiy, Chui's conjecture in Bergman spaces // Math. Ann., **379**:3-4 (2021), 1507—1532.

[32] P. A. Borodin, S. V. Konyagin, Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a single function on the line // Anal. Math., **44**:2 (2018), 163–183.

[33] C. K. Chui, On approximation in the Bers spaces // Proc. Amer. Math. Soc., **40**:2 (1973), 438—442.

[34] P. Chunaev, Least deviation of logarithmic derivatives of algebraic polynomials from zero // J. Approx. Theory, **185** (2014), 98—106.

[35] J. M. Elkins, Approximation by polynomials with restricted zeros // J. Math. Anal. Appl., **25**:2 (1969), 321—336.

[36] M. A. Komarov, A lower bound for the $L_2[-1,1]$-norm of the logarithmic derivative of polynomials with zeros on the unit circle // Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**:2 (2019), 67—72.

[37] M. A. Komarov, Extremal properties of logarithmic derivatives of polynomials // J. Math. Sci. (N.Y.), **250**:1 (2020), 1—9.

[38] M. A. Komarov, A Newman type bound for $L_p[-1,1]$-means of the logarithmic derivative of polynomials having all zeros on the unit circle // Constr. Approx., **58** (2023), 551–563.

[39] J. Korevaar, Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation // Ann. of Math. (2), **80**:3 (1964), 403–410.

[40] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, v. II: Function Spaces, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[41] G. R. MacLane, Polynomials with zeros on a rectifiable Jordan curve // Duke Math. J., **16**:3 (1949), 461—477.

[42] G. R. MacLane, Limits of rational functions // Pacific J. Math., **6**:1 (1956), 111–116.

[43] D. J. Newman, A lower bound for an area integral // Amer. Math. Monthly, **79**:9 (1972), 1015–1016.

[44] W. Rudin, Fourier analysis on groups, New York – London, Interscience publishers, 1962, 285 p.

[45] K. Shklyaev, Approximation by sums of shifts and dilations of a single function and neural networks // J. Approx. Th., **291** (2023), 105915.

[46] S. M. Tabatabaie, The problem of density on $L^2(G)$ // Acta Math. Hungar., **150**:2 (2016), 339—345.

[47] N. Wiener, Tauberian theorems // Ann. of Math. (2), **33** (1932), 1–100.

Работы автора по теме диссертации:

[48] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди в полуплоскости // Матем. заметки, **106**:5 (2019), 669–678.

[49] Н. А. Дюжина, Плотность производных наипростейших дробей в пространствах Харди в полуплоскости // Матем. заметки, **109**:1 (2021), 57–66.

[50] Н. А. Дюжина, Многомерные аналоги теорем о плотности сумм сдвигов одной функции // Матем. заметки, **113**:5 (2023), 775–779.

[51] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространстве L_2^0 на компактной абелевой группе // Матем. сб., **215**:6 (2024), 29–40.

Тезисы конференций:

[52] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2019, стр. 121–122.

[53] Н. А. Дюжина, Плотность сумм сдвигов одной функции в многомерном случае // Современные методы теории функций и смежные проблемы, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 2023, стр. 143–145.

[54] Н. А. Дюжина, Приближение суммами сдвигов одной функции на компактной абелевой группе // Современные проблемы теории функций и их приложения, Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, Саратов, 2024, стр. 93–94.