ОТЗЫВ

официального оппонента
о диссертации А. А. Басалаева
«Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия»,
представленной в качестве диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 1.1.5 —
математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Одна из самых активно развивающихся и резонансных тем в современной математике — тема зеркальной симметрии. Возникшая в конце 20-го века, своим появлением она обязана физической теории струн, описывающей поведение элементарных частиц. Математическая суть зеркальной симметрии выражается в том, что многие многообразия разбиваются на пары (хотя и неоднозначно определенные) похожих по своим инвариантам многообразий. В последнее время математиками было сформулировано много конкретных утверждений, уточняющих эту мысль. Одно из них – так называемая гипотеза глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау-Гинзбурга (эти орбифолды представляют собой пару, состоящую из многочлена f с изолированной особенностью, удовлетворяющего условию Калаби-Яу, и группы его симметрий G). Эта гипотеза возникла в работах Берглунда, Хюбша и Хеннингсона в 1990-х годах, и в работе диссертанта сформулирована в виде пяти утверждений об изоморфизме многообразий Дубровина-Фробениуса (введенных Б.А.Дубровиным в 1990-х годах), строящихся по зеркальным партнерам орбифолда (в таком виде гипотеза была сформулирована в работе А. Чиодо и Й. Руана 2011 года). Диссертационная работа А.А. Басалаева посвящена доказательству различных частей гипотезы для широкого класса орбифолдов Ландау-Гинзбурга.

Более конкретно, первые два утверждения гипотезы носят предварительный характер и утверждают существование для данного орбифолда Ландау-Гинзбурга фробениусовой алгебры, совпадающей с алгеброй Якоби многочлена f в случае тривиальной группы G, понятия примитивной формы ζ, а также многообразия Дубровина-Фробениуса, ассоциированного с этой формой и обобщающего фробениусову алгебру, и совпадающего с другим, известным из теории Саито многообразием Дубровина-Фробениуса, ассоциированным с ζ. В следующих двух утверждениях гипотезы сравниваются многообразия Дубровина-Фробениуса, возникающие из других известных конструкций, с многообразиями из второго утверждения гипотезы. А именно, в этих утверждениях гипотезы говорится о существовании зеркальных пар для данного орбифолда Ландау-Гинзбурга, состоящих либо из многообразия Калаби-Яу, либо из другого орбифолда Ландау-Гинзбурга в рамках теории FJRW (Fan-Jarvis-Ruan-Witten), таких что их многообразия Дубровина-Фробениуса изоморфны многообразию Дубровина-Фробениуса, ассоциированного с некоторой примитивной формой для данного орбифолда Ландау-Гинзбурга. Последнее утверждение гипотезы говорит о связи этих многообразий при помощи действия группы Гивенталя.

В целом гипотеза глобальной зеркальной симметрии пока остается открытой. На настоящий момент наибольшее число изоморфизмов зеркальной симметрии известно для орбифолдов Ландау-Гинзбурга (f, G) с обратимыми многочленами f (это многочлены, задающие квазиоднородные особенности, у которых число мономов равно числу переменных и ни один из мономов не имеет вид $x_i x_j$). В работах Миланова, Руана и Шена 2015-16 годов были доказаны второе и третье утверждения гипотезы для обратимых многочленов, задающих простые эллиптические особенности, в случае тривиальной группы симметрий. Последнее утвеждение гипотезы изучалось в работах Приддиса, Шумахера, Шена и Жоу 2016 и 18 годов. Примеры фробениусовых алгебр из первого утверждения гипотезы возникали в работах Кауфмана и Кравица 2003 и 2009 годов, были и другие работы вокруг этой темы. Обилие этих работ с одной стороны служит подтверждением актуальности темы диссертации, с другой стороны указывает на сложность гипотезы в целом.

В диссертации А.А. Басалаева был достигнут значительный прогресс в доказательстве различных утверждений гипотезы. Первое утверждение гипотезы доказано для произвольных орбифолдов (f, G), а для орбифолдов с обратимыми многочленами построен изоморфизм фробениусовой алгебры и кольца когомологий Хохшильда категории G-эквивариантных матричных факторизаций. Второе и третье утверждения доказаны для случая многочленов f типа "касп"с нетривиальной группой симметрий, а последнее утверждение доказано для одного конкретного многочлена, но при этом строится явный соответствующий элемент группы Гивенталя. Четвертое утверждение доказано в "узком смысле"(как изоморфизм соответствующих фробениусовых алгебр) для случая многочленов f, задающих

исключительные унимодальные особенности.

Кроме этих результатов в диссертации есть ряд других интересных побочных результатов: о свойствах подъема многочлена f на крепантное разрешение особенностей в случае когда особенность имеет тип ADE (в главе 1); о многочленах, задающих "странно двойственные"по Арнольду особенности (в главе 2); явное выражение для потенциала многообразия Дубровина-Фробениуса теории FJRW через квазимодулярные формы (в главе 7); получены любопытные нетривиальные соотношения между квазимодулярными формами (в главе 6). В конце диссертации есть интересное заключение с описанием дальнейших перспектив исследований в области эквивариантной теории Саито (вопросы построения такой теории), классической теории особенностей (свойства подъема многочлена f на крепантное разрешение особенностей для общих многочленов), теории Громова-Виттена многообразия Калаби-Яу (возможность выражения потенциала рода нуль через квазимодулярные формы).

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации. Диссертация полным объемом 173 страницы включает в себя Введение, 7 глав, заключения и списка литературы, состоящего из 95 наименований.

Во введении диссертации приведен обзор известных результатов, относящихся к изучаемой теме, представлена литература по теме диссертационного исследования, обоснована актуальность темы и описана структура диссертации.

Глава 1 посвящена изучению орбифолдов Ландау- Гинзбурга (f, G) с точки зрения "классической"теории особенностей. В частности, в этой главе фиксируются обозначения, касающиеся многочлена как объекта теории особенностей. В данной главе рассматривается также вопрос орбифолдной эквивалентности.

В **Главе 2** изучаются орбифолдные фробениусовы алгебры $Jac(f, G)$. Здесь доказывается теорема о существовании и единственности с точностью до изоморфизма алгебр $Jac(f, G)$ для обратимых многочленов f и групп $G \subseteq G_f \cap SL(N, \mathbb{C})$.

В **Главе 3** изучается алгебра $Jac(f, G)$ для многочленов, задающих исключительные унимодальные особенности. В этой главе доказывается результат о многочленах, странно двойственных по Арнольду: пара таких многочленов странно двойственна тогда и только тогда, когда алгебра Якоби первого многочлена изоморфна фробениусовой алгебре второго (для специальной группы G). В этой же главе доказывается четвертое утверждение гипотезы о зеркальной симметрии в узком смысле.

Глава 4 посвящена гомологическому подходу к построению алгебры $Jac(f, G)$. В этой главе построен изоморфизм фробениусовой алгебры и кольца когомологий Хохшильда категории G-эквивариантных матричных факторизаций.

Глава 5 посвящена многообразиям Дубровина-Фробениуса: их определениям для разных теорий, и разным известным их свойствам.

Главе 6 является ключевой. В ней докузываются второе и третье утверждения гипотезы для орбифолдов Ландау-Гинзбурга касп-многочленов с нетривиальной группой симметрий.

Глава 7 посвящена доказательству последнего утверждения гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолда Ландау-Гинзбурга (f, G_f) для $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$ и теории Громова-Виттена орбифолдной прямой $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$.

В целом диссертация показывает, что А. А. Басалаеву удалось внести существенный вклад в решение гипотезы глобальной зеркальной симметрии, получив при этом важные конкретные результаты.

Конструкции и доказательства диссертационной работы явно показывают высокий уровень технической подготовленности диссертанта в одной из современных областей математики, а также не менее высокий уровень общематематической культуры. Диссертация изложена ясным языком и достаточно объемно и иллюстративно оформлена. Среди достоинств диссертации – наличие заключения с описанием дальнейших перспектив исследований, а также сравнение с другими подходами к зеркальной симметрии.

Из замечаний: хотя в работе делается сравнение с другими подходами к зеркальной симметрии, описание других подходов не является полным, в частности, например, не упомянуты работы В.В. Батырева и В.В. Пржиялковского, связанные с гипотезой зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. Однако это замечание не снижают высокой оценки диссертации.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в алгебраической и комплексной геометрии, гомологической алгебре, зеркальной симметрии, математической физике.

Основные результаты диссертации новы, получены ее автором лично и обоснованы тщательными и подробными доказательствами. Они своевременно опубликованы: список публикаций по теме диссертации насчитывает 17 наименований, большая часть из которых — публикации в центральных российских и зарубежных изданиях; в 5 из этих статей он является единственным автором, еще в 10 - имеет единственного соавтора.

Результаты диссертации были представлены на многих научных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом. Они вызвали значительный интерес специалистов и получили достаточное признание.

Полученные результаты могут быть использованы специалистами в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском Отделении Математического института РАН, в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском государственных университетах, Высшей школе экономики, других высших учебных заведениях.

Диссертационная работа А. А. Басалаева «Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия» соответствует специальности 1.1.5 — «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика», по которой она представлена к защите. Автореферат подробно и полно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертация удовлетворяет требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям, а ее автор, Басалаев Алексей Андреевич, заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — «математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

Официальный оппонент,
профессор кафедры Дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
"Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова"
доктор физико-математических наук
(специальность – 01.01.06)
29 декабря 2025 г.

(А. Б. Жеглов)

Москва, Воробьевы горы, МГУ
главное здание, ауд. 16-19
тел. (495) 939-39-40
email: alexander.zheglov@math.msu.ru

Нач. отдела кадров: (Соколова)