ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации **А.А. Басалаева**
“Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия”,
представленной на соискание ученой степени доктора физико - математических наук по специальности 1.1.5 – математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Представленная диссертационная работа Басалаева Алексея Андреевича посвящена исследованию орбифолдных моделей Ландау-Гинзбурга в свете одного из подходов к явлению, получившему название Зеркальной симметрии. Как было замечено физиками уже более сорока лет назад компактифицирующие шесть дополнительных (скрытых) размерностей в теории струн, будучи геометрически различными, могут давать эквивалентные ответы в физике элементарных частиц. С математической точки зрения это обьясняется существованием зеркальных партнеров на множестве трехмерных многообразий Калаби - Яу, причем частный пример, представленный в начале 90-ых годов, привел к чисто математическому результату в исчислительной геометрии для трехмерной квинтики. Однако за прошедшее время математические подходы к проблеме зеркальной симметрии существенно разрослись —- при том, что она остается одной из центральных тем на стыке алгебраической геометрии, теории особенностей и математической физики. В диссертации выбран подход, в основе которого лежит теория особенностей, состоящий в исследовании пар (f, G), где f – многочлен, задающий изолированную особенность, а G – группа его симметрий; данный подход имеет глубокие связи с теориями когомологических полей, многообразиями Дубровина–Фробениуса и гомологической зеркальной симметрией. Актуальные задачи, решаемые в диссертации, можно разбить на три класса. В первом классе задач автор фокусируется на построении важных примеров фробениусовых алгебр — орбифолдных алгебр Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ — и исследовании их свойств. Второй класс задач уже непосредственно связан с возникающей двойственностью между различными классами особенностей, что и объясняет явление зеркальной симметрии. Третий класс задач связан с включением данного метода в общую картину, объединяющую различные подходы к зеркальной симметрии, а именно устанавливаются связи с когомологиями Хохшильда, теорией Фана - Джарвиса - Руана - Виттена и многообразиями Дубровина - Фробениуса.

Главными результатами, полученными диссертантом и выносимые им на защиту, являются следующие.

Диссертантом построена орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ для обратимых многочленов и произвольных групп симметрий $G \subseteq G_f$ и доказана её единственность. Явно установлена связь такой алгебры с когомологиями Хохшильда категории матричных факторизаций. Для исключительных унимодальных особенностей диссертантом доказана гипотеза зеркальной симметрии в узком смысле и установлена связь с теорией Фана - Джарвиса - Руана - Виттена. Далее, для орбифолдов Ландау - Гинзбурга, связанных

с касп - многочленами, диссертантом представлено явное доказательство изоморфизма зеркальной симметрии, в том числе построением соответствующих многообразий Дубровина - Фробениуса. Наконец, для конкретного примера (f, G_f) с $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$ диссертантом была подтверждена гипотеза, связывающая теорию Фана - Джарвиса - Руана - Виттена с теорией Громова - Виттена.

Представленные результаты вносят существенный вклад в теорию зеркальной симметрии и алгебраической геометрии. В частности, предложенная аксиоматика орбифолдной алгебры Якоби позволяет единообразно подходить к построению структур, ранее изучавшихся в работах Кауфмана и Кравица; установленные изоморфизмы подтверждают глубокие связи между различными математическими объектами: особенностями, орбифолдами, квантовыми когомологиями и теориями поля; результаты диссертационной работы содержит как теоретические построения, так и явные вычисления, что подчёркивает её конструктивный характер.

Достоверность результатов обеспечивается строгими доказательствами, использованием современных методов алгебраической геометрии, теории особенностей и гомологической алгебры, а также апробацией на многочисленных международных конференциях и семинарах.

Диссертация объемом 173 страницы состоит из Введения, 7 глав, Заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена изучению орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G) с точки зрения "классической" теории особенностей. В частности, в этой главе фиксируются обозначения, касающиеся многочлена как объекта теории особенностей. В данной главе рассматривается также вопрос орбифолдной эквивалентности. Поскольку многочлен f инвариантен относительно действия группы G, он задает отображение и на фактор–пространстве CC^N/G. Данное многообразие является особым, но его особенности можно разрешить. Тогда отображение f поднимается на разрешающее многообразие. В первой главе показано, что если f задает особенность типа ADE, а разрешение крепантное, то поднятие многочлена f задается в картах несколькими многочленами f_i, причем только один из них имеет особенности.

Глава 2 посвящена орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$. В частности, в данной главе приводится аксиоматическая конструкция другой алгебры $\mathrm{Jac}'(f, G)$, такой, что $\mathrm{Jac}(f, G)$ является в ней G–инвариантным подпространством: $\mathrm{Jac}(f, G) = (\mathrm{Jac}'(f, G))^G$. Здесь же доказывается теорема о существовании и единственности с точностью до изоморфизма алгебр $\mathrm{Jac}(f, G)$ для обратимых многочленов f и групп $G \subseteq G_f \cap SL(N, CC)$. Также в данной главе приведено доказывательство того, что $\mathrm{Jac}(f, G) \cong \mathrm{Jac}(\overline{f})$, если f задает особенности типа ADE.

В **Главе 3** исследуется алгебра $\mathrm{Jac}(f, G)$ для многочленов f, задающих исключительные унимодальные особенности. Исключительные унимодальные особенности называются странно двойственными (или двойственными по Арнольду, обнаружившему это явление), если числа Долгачева одной особенности совпадают с числами Габриелова другой и наоборот. Для любых двух исключительных унимодальных особенностей, которые являются странно двойственными по Арнольду, существует специальный выбор

представляющих их многочленов f_1, f_2, такой, что оба многочлена обратимы и $f_1 = \widetilde{f_2}$. Основным результатом данной главы является Теорема 3.1, в которой доказывается, что f_1 и f_2 странно двойственны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм алгебр $\mathrm{Jac}(f_1) \cong \mathrm{Jac}(\widetilde{f_2}, G^S L_{\widetilde{f_2}})$. Вторым важным утверждением данной теоремы является решение части (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии в узком смысле.

Глава 4 посвящена гомологическому подходу к построению алгебры $\mathrm{Jac}(f, G)$. Важным инвариантом, связанным с орбифолдом Ландау–Гинзбурга (f, G), является dg–категория $\mathcal{MF}_G(f)$ G-эквивариантных матричных факторизаций многочлена f. С ней, в свою очередь, естественно связано кольцо когомологий Хохшильда $HH^*(\mathcal{MF}_G(f))$, снабженное $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–градуированно коммутативным $\cup$–произведением. Аксиоматизация алгебр $\mathrm{Jac}'(f, G)$ и $\mathrm{Jac}(f, G)$ Главы 2 во многом мотивирована алгебраической структурой пары $HH^*(\mathcal{MF}_G(f))$ и $HH_*(\mathcal{MF}_G(f))$. Естественно предположить, что алгебра $\mathrm{Jac}(f, G)$ изоморфна $HH^*(\mathcal{MF}_G(f))$. Основным результатом данной главы является Теорема 4.1, в которой доказывается изоморфизм CC–алгебр $\mathrm{Jac}(f, G)$ и $HH^*(\mathcal{MF}_G(f))$.

Глава 5 полностью посвящена многообразиям Дубровина–Фробениуса. Сначала дается определение общего многообразия Дубровина–Фробениуса, а затем определения специфицируются в рамках теории Громова–Виттена и теории Саито. Также приводятся результаты Ишибаши, Шираиши и Такахаши, доказавших часть (i) гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга касп–многочленов fAp с тривиальной группой симметрий $G = \{\mathrm{id}\}$.

Следующая, **шестая, Глава** — ключевая в диссертационной работе. Здесь приведены решения частей (pre-ii) и (ii) гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга касп–многочленов fAp с нетривиальной группой симметрий G. В качестве зеркального партнера орбифолда Ландау–Гинзбурга (fAp, G) Эбелингом и Такахаши было предложено исследовать орбифолд Гейгле–Ленцинга $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$, для некоторого набора $A = (a_1, \ldots, a_r)$, специально определенного дополнительными условиями. Теория Громова–Виттена такого орбифолда $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ корректно определена. При этом соответствующие многообразие Дубровина-Фробениуса $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}$ уже описано автором в предыдущей главе диссертации. Далее в данной главе аксиоматически определяется многообразие Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{(fAp,G)}$ орбифолда Ландау–Гинзбурга (fAp, G) и доказывается часть (pre–ii) гипотезы глобальной зеркальной симметрии. Наконец, в Теореме 6.1 доказывается часть (ii) гипотезы глобальной зеркальной симметрии путем построения изоморфизма $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}} \cong M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$.

Последняя **Глава 7** посвящена доказательству части (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G_f) для $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$ и теории Громова–Виттена орбифолдной прямой $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$. Основная теорема данной главы — Теорема 7.1, утверждающая, что потенциал рода нуль $F_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}$ теории Фана - Руана - Джарвиса - Виттена (f, G_f) совпадает с точностью до линейной замены координат с потенциалом рода нуль $\hat{R}^\sigma \cdot \mathbb{Z}^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$. Часть (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии моментально следует из данной теоремы, так как линейная замена координат является изоморфизмом многообразий Дубровина–Фробениуса.

Диссертация написана на высоком научном уровне. Отдельные опечатки не мешают чтению текста диссертации. Кроме того, диссертация снабжена заключительными замечаниями, открывающими дальнейшие горизонты для исследований.

Диссертация А.А. Басалаева вносит крупный вклад в теорию особенностей и математическую физику, и приложимость представленных в ней результатов имеет широкий спектр в разных областях математики. Результаты диссертации содержатся в 17 статьях, опубликованых в ведущих российских и зарубежных математических журналах, индексируемых в базах WoS и Scopus; все результаты многократно представлялись на международных конференциях и семинарах высочайшего уровня. Все результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и снабжены подробными доказательствами.

Диссертация соответствует специальности 1.1.5 - математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Автореферат полно и выпукло отражает содержание диссертации.

По моему глубокому убеждению диссертация А.А. Басалаева "Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия" удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико - математических наук.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.06)
профессор РАН,
начальник сектора ЛТФ ОИЯИ Н.А. Тюрин
23 декабря 2025 г.

ntyurin@theor.jinr.ru; +7(925)8007367; +7(496)2163005
Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований (Дубна),
141980, Жолио - Кюри, 6, г. Дубна, Московская область

Подпись Н.А. Тюрина удостоверяю.
Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ А.В. Андреев

