ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Алексея Андреевича Басалаева
«Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.5 – Математическая логика,
алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Диссертация А.А.Басалаева посвящена исследованию орбифолдных моделей Ландау-Гинзбурга и их места в зеркальной симметрии – разделе математики, связывающего алгебраическую и комплексную геометрию, теорию особенностей и математическую физику. Зеркальная симметрия, берущая свое начало в работах по теоретической физике, получила несколько строгих формулировок как математическая гипотеза в последней четверти XX века. В частности, данная гипотеза предполагает, что проективные многообразия Калаби-Яу "зеркальны" многочленам, задающим изолированные особенности. Свойство зеркальности может быть понято как изоморфизм фробениусовых алгебр, многообразий Дубровина–Фробениуса или же когомологических теорий поля. Важно заметить, что упомянутые фробениусовы алгебры, многообразия Дубровина–Фробениуса и когомологические теории поля строятся в контексте соверешнно разных разделов математики - теории особенностей и алгебраической геометрии с помощью теории Саито и теории Громова–Виттена соответственно. Зеркальные изоморфизмы такого типа были установлены в работах Й.Руана, Т.Миланова, К.Сабба, С.Баранникова, Х.Иритани.

Однако, полная математическая формулировка гипотезы зеркальной симметрии, как это и было предложено в теоретической физике, должна предполагать "зеркальность" между орбифолдами Калаби-Яу и парами (f, G), где f - многочлен, задающий изолированную особенность, а G - группа его симметрий. Именно такие пары и называются орбифолдами Ландау–Гинзбурга. И если теория Громова–Виттена сформулирована в том числе и для орбифолдов Д. Абрамовичем и А. Вистоли, то орбифолдное обобщение фробениусовой алгебры и многообразия Дубровина–Фробениуса отсутствовали до публикации результатов, предложенных в настоящей диссертации.

В предложенной диссертации автор обобщает классический инвариант теории особенностей - алгебру Якоби на эквивариантный случай, определяя алгебру Якоби орбифолда Ландау–Гинзбурга. Предложенная автором конструкция позволила дать алгебрическую формулировку замеченной В.И. Арнольдом "странной двойственности" между унимодальными особенностями. Также автором дана конструкция многообразия Дубровина–Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга. Для орбифолдов Ландау–Гинзбурга многочленов типа касп был установлен зеркальный изоморфизм предложенного многообразия Дубровина–Фробениуса теории Громова–Виттена орбифолдных прямых Гейгле–Ленцинга. Этот зеркальный изоморфизм был первым результатом зеркальной симметрии с нетривиальной группой симметрий многочлена.

Предложенные автором конструкции открывают новый раздел в зеркальной симметрии. Таким образом, актуальность темы исследований не вызывает сомнений. Полученные в диссератции результаты являются новыми. В работе автор использует современные математические методы, а полученные результаты имеют интересные приложения не только в зеркальной симметрии, но и в некоторых смежных областях, включая теорию особенностей, теорию чисел и математическую физику. Они снабжены детальными доказательствами, опубликованными в журналах высокого уровня. Достоверность полученных результатов не вызывает сомнения.

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и библиографии. Её объём соответствует установленным требованиям. Во введении ясно определены цели, задачи и основные достижения, представлен обзор современного состояния области. Изложение выдержано в строгом и математически последовательном стиле. Список использованной литературы содержит 94 источника.

В **Главе 1** вводится центральный объект диссертации – орбифолд Ландау–Гинзбурга (f, G). Приводятся необходимые определения и конструкции теории особенностей, описываются группы симметрий обратимых многочленов.

Здесь же орбифолды Ландау–Гинзбурга исследуются в контексте крепантного разрешения факторомногообразия $\mathbb{C}^3/G$ – естественной конструкции алгебраической геометрии. Автор изучает орбифолды Ландау–Гинзбурга для нольмодальных особенностей. Каждой паре (f, G) сопоставлен новый многочлен $\overline{f}$, который получается поднятием в карты разрешающего многообразия. Данный многочлен также задает изолированную особенность

Глава 2 является одной из основных в работе – здесь доказывается часть (pre-i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии. А именно, в данной главе даётся определение орбифолдной алгебры Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ для произвольного орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G). В Теореме 2.1 автором доказывается существование и единственность этой алгебры в случае, когда f – обратимый многочлен.

В Теореме 2.30 алгебра $\mathrm{Jac}(f, G)$ исследуется для многочленов f, задающих нольмодальные особенности, установлен изоморфизм $\mathrm{Jac}(f, G) \cong \mathrm{Jac}(\overline{f})$ для многочленов $\overline{f}$, построенных в Главе 1.

Орбифолдная алгебра Якоби изучается также в **Главе 3** — для f, задающих исключительные унимодальные особенности. Главный результат главы – Теорема 3.1, в которой доказывается часть (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для исключительных унимодальных особенностей. Данный результат показывает, что открытая Арнольдом *странная двойственность* между исключительными унимодальными особенностями — пример зеркального изоморфизма.

Глава 4 посвящена исследованию алгебры $\mathrm{Jac}(f, G)$ методами гомологической алгебры. Главный результат главы – Теорема 4.1. В ней установлен изоморфизм между кольцом когомологий Хохшильда категории G–эквивариантных матричных факторизаций многочлена f и орбифолдной алгеброй Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ для обратимых многочленов f. Этот результат подтверждает естественность конструкции алгебры $\mathrm{Jac}(f, G)$, приведенной в Главе 2.

В Разделе 4.4 изучается кольцо когомологий Хохшильда касп–многочлена $f_{A'}$. Многочлены данного типа не являются обратимыми и рассматриваются с параметром. В Предложении 4.3 автором изучена зависимость структуры умножения кольца когомологий Хохшильда от этого параметра.

Глава 5 посвящена многообразиям Дубровина–Фробениуса вообще и частным конструкциям, возникающим в теории Саито изолированных особенностей и теории Громова–Виттена проективных многообразий. Даны формальное определение многообразия Дубровина–Фробениуса, конструкции теории Саито и теории Громова–Виттена, важные факты о многообразиях Дубровина–Фробениуса теории Саито эллиптических особенностей и теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов.

Во введении к данной главе автор утверждает, что ее содержание носит, скорей, реферативный характер. Однако, в Разделе 5.2 А.А. Басалаев приводит важный новый результат - полиномиальное выражение потенциалов рода ноль теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов через квазимодулярные формы. Также им приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентная системе уравнений WDVV, решением которой данные квазимодулярные формы и

являются.

Раздел 5.3 посвящён теории Саито касп–многочлена. Известно, что теория Саито особенности позволяет построить многообразие Дубровина–Фробениуса только после выбора специального объекта – примитивной формы. Такой выбор, как правило, не является однозначным. Вопрос зависимости многообразия Дубровина–Фробениуса от выбора примитивной формы является сложным.

Однако для эллиптических особенностей автор приводит результат (Теорема 5.4), позволяющий явно проследить зависимость потенциала многообразия Дубровина–Фробениуса от примитивной формы. Эта зависимость обнаруживается с помощью естественного действия на множестве квазимодулярных форм, введённых в Разделе 5.2.

Центральной главой диссертации является **Глава 6**. Именно в ней доказываются части (pre-ii) и (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для касп–многочленов $f_{A'}$ - см. Теорему 6.1.

В частности, в Разделе 6.2 строится многообразие Дубровина–Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга строится, в Разделах 6.3 и 6.4 дано доказательство Теоремы 6.1, приведены примеры построенных многообразий Дубровина–Фробениуса. Доказательство Теоремы 6.1 технически сложно и разбито на три случая, каждый из которых доказывается своим специальным методом.

Важно отметить, что посвященная современным аспектам зеркальной симметрии Теорема 6.1, имеет и практические приложения к классическим вопросам. В частности, в Разделе 6.5 автор показывает, что следствием данной теоремы являются несколько соотношений на квазимодулярные формы.

Доказательству Гипотезы глобальной симметрии посвящена также **Глава 7**. В ней доказывается часть (iii) этой гипотезы для одного конкретного орбифолда Ландау–Гинзбурга. Основной результат главы сформулирован в Теореме 7.1.

В первых Разделах главы 7.1 и 7.2 изложены начальные сведения о теории FJRW (Фана, Джарвиса, Руана, Виттена) и когомологических теориях поля, связанных с теорией FJRW и теорией Громова–Виттена. В следующем Разделе 7.3 приведен важный результат автора – Теорема 7.8. В данной теореме А.А. Басалаевым устанавливается связь между потенциалами многообразий Дубровина–Фробениуса теории FJRW и теории Громова–Виттена. Основным инструментом является действие на пространстве квазимодулярных форм, аналогичное действию Теоремы 5.4. Именно с помощью данной теоремы автором доказывает часть (iii) Гипотезы глобальной симметрии. В Леммах 7.14 и 7.15 автор демонстрирует, что использованное в Теореме 7.8 действие имеет прямое приложение в теории чисел и тесно связано с вопросами алгебраической независимости значений квазимодулярных форм.

Завершает диссератцию заключение. В нем автором приводится сразу несколько важных и глубоких задач, которые наглядно демонстрируют, что развитые в диссератции методы и предложенные конструкции будут играть важную роль и в будущем.

Выводы. Полученные в диссератции результаты представляют большой интерес сразу для нескольких разделов математики и открывают новое направление в таком разделе математики как зеркальной симметрия. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. В автореферате приведен список публикаций и выступлений автора по теме диссертации, подтверждающий высокую оценку вклада автора и заметный интерес мирового математического сообщества к полученным результатам.

Таким образом, диссертация А.А.Басалаева удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссератции на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в соответствии с Положением о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ №842, и ее автора, Алексей Андреевич Баса-

лаев, заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Доктор физико-математических наук (01.01.04 - геометрия и топология)
член-корреспондент РАН,
и.о. директора ФГБУН Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
630090, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, 4,
тел. +7(383)-333-28-92, e-mail: mironov@math.nsc.ru

Миронов Андрей Евгеньевич
25 декабря 2025 г.

Подпись Миронова А.Е.
заверяю
Рук. отдела ДОУ ИМ СО РАН
Вещук В.Г. Жигда
25.12.2025