Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

На правах рукописи

Басалаев Алексей Андреевич

Орбифолдные модели Ландау-Гинзбурга и зеркальная симметрия

1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н. С.К. Ландо

Москва 2025

Оглавление

Введение 5

Глава 1. Изолированные особенности и их симметрии 21
1.1. Предварительные сведения 21
1.2. Обратимые многочлены 23
1.3. Орбифолдная эквивалентность для ADE-орбифолдов 25
1.4. Группа симметрий касп-многочлена 29

Глава 2. Орбифолдная алгебра Якоби 31
2.1. Орбифолдные алгебры Якоби 33
2.2. Орбифолдные алгебры Якоби обратимых многочленов 38
2.3. Краткое описание орбифолдной алгебры Якоби обратимых многочленов 61
2.4. Орбифолдные алгебры Якоби ADE–орбифолдов 62

Глава 3. Орбифолдная алгебра Якоби исключительных унимодальных особенностей 71
3.1. Доказательство Теоремы 3.1 73

Глава 4. Когомологии Хохшильда орбифолда Ландау–Гинзбурга 83
4.1. Описание когомологий Хохшильда по Шклярову 84
4.2. Доказательство теоремы 4.1 86
4.3. Категорная эквивалентность 91
4.4. Когомологии Хохшильда касп-многочленов 91

Глава 5. Многообразия Дубровина–Фробениуса теории Саито и теории Громова–Виттена 97
5.1. Многообразия Дубровина–Фробениуса 97
5.2. Орбифолдная теория Громова-Виттена 100
5.3. Теория Саито касп–многочлена 110
5.4. Замена примитивной формы для простых эллиптических особенностей 113
5.5. Зеркальная симметрия с тривиальной группой симметрии 113

Глава 6. Зеркальная симметрия для касп многочлена 115

6.1. G–инварианты теории Саито 116
6.2. Многообразие Дубровина–Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга 117
6.3. Доказательство Теоремы 6.1 119
6.4. Примеры 129
6.5. Соотношения в кольце квазимодулярных форм 137

Глава 7. Теория FJRW и гипотеза о Калаби–Яу / Ландау–Гинзбург соответствии 143
7.1. Определение теории FJRW 144
7.2. Когомологические теории поля на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 149
7.3. CY/LG соответствие через модулярность 153
7.4. Действие Гивенталя и соответствие CY/LG 160

Глава 8. Заключение 165

Библиография 169

Введение

Актуальность темы исследования

Зеркальная симметрия получила широкое распространение в математике в последней четверти XX после работ [**LVW89, CDloGP91, W91, St96**]. Сформулированная изначально в физике, идея зеркальной симметрии получила различные математические формулировки в таких разделах математики как комплексная и алгебраическая геометрия, теория особенностей и гомологическая алгебра [**Ko95, G95, KKP08, CR11**]. Некоторые результаты, полученные при исследовании зеркальной симметрии, позволяют связать объекты этих a priori разных разделов математики.

Ключевую роль во всех математических формулировках зеркальной симметрии играет теория особенностей [**AGV85**]. Важнейший вклад в развитие данного раздела математики внесли В.И.Арнольд и созданная им школа. В зеркальной симметрии рассматриваются особенности, задаваемые многочленами $f = f(x_1, \dots, x_N)$ с комплексными коэффициентами, однако, вместе с некоторым дополнительным выбором - группой симметрий G этого многочлена. Такие пары (f, G) и называются орбифолдными моделями Ландау–Гинзбурга, если G нетривиальна (см. [**IV90**]). Изучение орбифолдных моделей Ландау–Гинзбурга необходимо для нужд зеркальной симметрии, однако одновременно полезно как изучение "эквивариантной" теории особенностей.

Орбифолды Ландау–Гинзбурга. Рассмотрим $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ как отображение $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$. Будем говорить, что f задает изолированную особенность в $0 \in \mathbb{C}^N$, если $0 \in C_f := \{\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_N} = f = 0\} \subset \mathbb{C}^N$ и является изолированной точкой данного множества.

Примером такого многочлена является многочлен типа касп $f = f_{A'}$

$$f_{A'} := x_1^{a'_1} + x_2^{a'_2} + x_3^{a'_3} - c^{-1} x_1 x_2 x_3,$$

где $A' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ — некоторый набор натуральных чисел, а c — отличный от нуля комплексный параметр. Многочлен $f_{A'}$ задает изолированную особенность в нуле

для любого набора A', однако если $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a'_k} < 1$, то он имеет также и другие особые точки.

Многочлен f называется квазиоднородным, если существуют натуральные числа $d, w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{N}$, такие, что

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_N} x_N) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_N), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Если такое условие выполнено, мы будем называть особенность, задаваемую многочленом f, квазиоднородной. В дальнейшем также мы будем говорить, что f удовлетворяет условию Калаби-Яу, если он квазиоднороден и $d = \sum_{k=1}^{N} w_k$.

Заметим, что $f_{A'}$ является квазиоднородным только если $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a'_k} = 1$. Такие многочлены задают так называемые *простые эллиптические* особенности.

Вопросу классификации квазиоднородных изолированных особенностей посвящено несколько работ В.И.Арнольда. В частности, им дана классификация по *модальности особенности*, полностью классифицированы нульмодальные и унимодальные особенности, выписаны многочлены, задающие все такие особенности [**A72**]. Для особенностей старшей модальности составление таких списков не представляется целесообразным.

Другой подход к классификации квазиоднородных особенностей был предложен M.Kreuzer и H.Skarke в [**KS92**]. Они выделили класс так называемых обратимых многочленов — многочленов, задающих квазиоднородные особенности, у которых число мономов равно числу переменных и ни один из мономов не имеет вид $x_i x_j$. Соответствующие особенности могут иметь сколь угодно большую модальность, такими многочленами также можно задать нульмодальные и унимодальные особенности. Данный класс многочленов играет важную роль в зеркальной симметрии.

Определим группу *максимальных диагональных симметрий* многочлена f как

$$G_f := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_N x_N) = f(x_1, \ldots, x_N) \right\}.$$

Мы всегда будем отождествлять G_f с подгруппой группы диагональных матриц из $\mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$. Заметим, что для квазиоднородных многочленов f группа G_f не является тривиальной, так как она всегда содержит циклическую подгруппу J_f, порожденную элементом

$$(e^{2\pi\sqrt{-1}w_1/d}, \ldots, e^{2\pi\sqrt{-1}w_N/d}).$$

Орбифолдом Ландау–Гинзбурга называется пара (f, G), где f задает изолированную особенность, а $G \subseteq G_f$.

Орбифолды Ландау–Гинзбурга являются одним из основных объектов изучения зеркальной симметрии. Другим таким объектом являются многообразия Калаби–Яу.

Многообразия Калаби-Яу. В данной работе мы будем называть многообразием Калаби-Яу проективное многообразие X с нулевым первым классом Черна, $c_1(X) = 0$. Здесь и далее мы будем рассматривать не только гладкие многообразия Калаби-Яу. Например, важную роль будут играть так называемые орбифолдные прямые Гейгле–Ленцинга $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$. Эти прямые определяются следующим образом.

Пусть $A = (a_1, \ldots, a_r)$ набор из $r \geq 3$ натуральных чисел, а $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ — набор из r попарно различных точек на $\mathbb{P}^1$, таких, что $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 1$. Тогда $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ — одномерный орбифолд с подлежащим топологическим пространством $\mathbb{P}^1$ и нетривиальной группой изотропии только в точках λ_k, $k = 1, \ldots, r$. В этих точках группа изотропии изоморфна $\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$. В дальнейшем мы будем опускать символ Λ, если $r = 3$.

Если $A = (3,3,3)$, $(4,4,2)$, $(6,3,2)$ или $(2,2,2,2)$, то орбифолд Гейгле–Ленцинга является многообразием Калаби-Яу и носит специальное название *эллиптического орбифолда*, так как $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ изоморфен фактору эллиптической кривой по действию конечной группы.

Многообразие Калаби–Яу также может быть построено по орбифолду Ландау–Гинзбурга следующим образом. Пусть (f, G) такие, что f квазиоднороден, $J_f \subseteq G$ и выполнено условие $\sum_{k=1}^N w_k = d$. Тогда

$$X_{f,G} := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_N) \mid f(x_1, \ldots, x_N) = 0\} \Big/ (G/J_f)$$

имеет нулевой первый класс Черна. Заметим, что $X_{f,G} \cong \mathbb{P}^1_{A'}$ для $A' = (3,3,3)$, $(4,4,2)$, $(6,3,2)$, $f = f_{A'}$ и $G = G_{f_{A'}}$.

Инструментарий зеркальной симметрии. *Фробениусова алгебра* — это конечномерная алгебра с ассоциативным умножением $\circ$ и билинейным спариванием η, такими, что $\eta(X \circ Y, Z) = \eta(X, Y \circ Z)$ для любых трех элементов X, Y, Z алгебры.

Примером такой алгебры является алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f) := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$ многочлена f, задающего изолированную особенность Спариванием в данном случае служит так называемое вычетное спаривание. Оно определено на векторном пространстве $\Omega_f := \Omega^N_{\mathbb{C}^N}/(df \wedge \Omega^{N-1}_{\mathbb{C}^N})$. Для всякой ненулевой голоморфной дифференциальной формы $\zeta := \lambda dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, отображение

$[\phi] \mapsto [\phi \cdot \zeta]$ задает изоморфизм $\mathrm{Jac}(f) \xrightarrow{\sim} \Omega_f$. Зафиксировав λ вычетное спаривание поднимается на $\mathrm{Jac}(f)$.

Фробениусовой алгеброй многообразия Калаби–Яу является кольцо когомологий $H^*(X, \mathbb{C})$, снабженное спариванием Пуанкаре, если X — гладкое многообразие и кольцо когомологий Чена–Руана $H^*_{orb}(X, \mathbb{C})$, если X — орбифолд. Структура фробениусовой алгебры на кольце когомологий Чена–Руана строится с помощью теории Громова–Виттена, о которой будет сказано далее.

Многообразие Дубровина–Фробениуса обобщает понятие фробениусовой алгебры. Это гладкое комплексное многообразие M, каждое касательное пространство T_pM которого снабжено структурой фробениусовой алгебры. Зависимость этой структуры от точки $p \in M$ должна удовлетворять дополнительным условиям интегрируемости, описание которых мы откладываем до соответствующего раздела данной работы ввиду их объёмности. Отметим, что эти условия интегрируемости влекут существование регулярной на M функции $\mathcal{F}_M$, называемой *потенциалом многообразия Дубровина–Фробениуса*, с помощью которой может быть выписана структура фробениусовой алгебры T_pM в любой точке $p \in M$.

Для задающего изолированную особенность многочлена f многообразие Дубровина–Фробениуса строится с помощью теории Саито [**ST08, S83**]. Для орбифолдов Ландау–Гинзбурга с нетривиальной группой симметрий сама конструкция многообразия Дубровина–Фробениуса также является частью гипотезы зеркальной симметрии.

Для многообразия Калаби-Яу X многообразие Дубровина–Фробениуса строится с помощью теории Громова–Виттена, являющейся частным случаем когомологической теории поля [**Ab08**].

Когомологические теории поля (кратко — КогТП). Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ компактификацию Делиня–Мамфорда пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Пусть (V, η) — конечномерное $\mathbb{C}$–векторное пространство V со спариванием η. Когомологической теорией поля над (V, η) называется набор линейных отображений $c_{g,n} : V^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{C})$, удовлетворяющих некоторому набору аксиом. Пусть $e_1, \ldots, e_\mu$ – некоторый базис пространства V, а $t_1, \ldots, t_\mu$ — формальные переменные. *Потенциалом рода g* называется производящая функция чисел пересечений

$$\mathcal{F}_g := \sum_n \frac{1}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} c_{g,n}(\mathbf{t}, \ldots, \mathbf{t}),$$

где суммирование по n начинается с 3 если $g = 0$ и с 1 иначе, а $\mathbf{t} := e_1 t_1 + \cdots + e_\mu t_\mu$. Удобно также использовать формальный ряд $\mathcal{Z} := \exp(\sum_{g\geq 0} \hbar^{g-2} \mathcal{F}_g)$ — статсумму когомологической теории поля.

Когомологические теории поля могут считаться обобщениями конструкций многообразий Дубровина–Фробениуса, так как потенциал рода нуль $\mathcal{F}_0$ является потенциалом некоторого многообразия Дубровина–Фробениуса [**KM94**]. Координатами на этом многообразии Дубровина–Фробениуса будут служить переменные t_α.

Важным примером является так называемая *тривиальная когомологическая теория поля* $c_{g,n} \equiv 1$ на $V = \mathbb{C}$. Ее статсумма обозначается также $\mathcal{Z}^{pt}$, так как она совпадает со статсуммой теории Громова–Виттена точки.

Теория Громова–Виттена многообразия Калаби–Яу X может рассматриваться и как пример когомологической теории поля, и сама по себе. Нам будут полезны оба эти подхода в настоящей работе. Первый подход позволяет работать с теорией Громова–Виттена используя инструментарий когомологических теорий поля и определить многообразие Дубровина–Фробениуса M_X. Второй подход будет особенно важен для нас в контексте *малых квантовых когомологий* $QH^*(X)$.

Для всякого класса $\beta \in H_2(X, \mathbb{Q})$, определено $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ — *пространство модулей стабильных отображений* в X, обобщающее пространство модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Потенциал рода g теории Громова–Виттена является производящей функцией $\mathcal{F}_g^X$ для чисел пересечения на пространстве модулей стабильных отображений и зависит от дополнительной переменной q, контролирующей выбор класса β. Теория пересечений на $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(X, \beta)$ позволяет определить малые квантовые когомологии $QH^*(X)$ как ассоциативную, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–коммутативную алгебру, обобщающую $H^*_{orb}(X, \mathbb{C})$ и снабженную структурой $\mathbb{C}[[q]]$–модуля.

Теория Саито. Пусть многочлены $\phi_1, \ldots, \phi_\mu \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ таковы, что $\mathrm{Jac}(f) \cong \mathbb{C}\langle [\phi_1], \ldots, [\phi_\mu] \rangle$. Рассмотрим *развертку* многочлена f — новый многочлен $F := f(x) + \sum_{\alpha=1}^{\mu} s_\alpha \phi_\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N, s_1, \ldots, s_\mu]$. Пусть переменные развертки $s_1, \ldots, s_\mu$ варьируются в некоторой малой окрестности нуля $\mathcal{S}$. Именно это пространство и снабжается структурой многообразия Дубровина–Фробениуса, обобщающей $\mathrm{Jac}(f)$. Пусть $p : \mathbb{C}^N \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ является проекцией на второй множитель. Умножение на голоморфном касательном пучке $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ индуцируется из естественного умножения на $p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}$, где $\mathcal{O}_\mathcal{C} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N \times \mathcal{S}, 0} / \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \right)$ посредством изоморфизма $\mathcal{T}_\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} p_* \mathcal{O}_\mathcal{C}$, $X \mapsto X \cdot F$. Спаривание фробениусовой структуры в каждой точке многообразия $\mathcal{S}$ определяется подобно случаю $\mathrm{Jac}(f)$ выше с помощью вычетного

спаривания. Однако форма ζ может зависеть от переменных развертки, и не всякий выбор этой формы позволяет получить многообразие Дубровина–Фробениуса. В частности, для того, чтобы фробениусова структура могла быть записана с помощью потенциала $\mathcal{F}_M$, ζ должна удовлетворять специальным условиям, найденным K.Saito в [**S82, S83**]. Такие формы называются в настоящее время *примитивными формами*, а соответствующее многообразие Дубровина–Фробениуса обозначается M_f^ζ. Заметим, что для разных выборов примитивной формы одной и той же особенности соответствующие многообразия Дубровина–Фробениуса могут быть неизоморфны.

Теория FJRW. В зеркальной симметрии многообразия Дубровина–Фробениуса теории Саито называются Б–моделями, а теории Громова–Виттена А–моделями. Однако для орбифолдов Ландау–Гинзбурга существуют также и А–модель, называемая теорией FJRW в честь H.Fan, T.Jarvis, Y.Ruan, E.Witten (см. [**FJR13, FJR07**]).

Пусть орбифолд Ландау–Гинзбурга (f, G) таков, что $J_f \subseteq G$. Теория FJRW сопоставляет ему пространство модулей $\overline{\mathcal{W}}_{g,n}$ стабильных пунктированных кривых рода g с некоторой дополнительной структурой, определяемой парой (f, G). Подобно теории Громова–Виттена, определена производящая функция $\mathcal{F}_g^{(f,G)}$ рода g для всех $g \geq 0$, причем $\mathcal{F}_0^{(f,G)}$ является потенциалом некоторого многообразия Дубровина–Фробениуса, которое мы будем обозначать $M_{(f,G)}^{FJRW}$. Обозначим также через $\mathcal{A}_{(f,G)}^{FJRW}$ фробениусову алгебру этой когомологической теории поля в точке $t_1 = \cdots = t_\mu = 0$.

Важно заметить, что в теории FJRW группа G не может быть тривиальной. Обратим внимание и на то, что в теории FJRW орбифолду Ландау–Гинзбурга сопоставляется в точности одно многообразие Дубровина–Фробениуса, в то время как теория Саито сопоставляет особенности f семейство многообразий Дубровина–Фробениуса, задаваемое выбором примитивной формы.

Действие Гивенталя. Пусть (V, η) — конечномерное $\mathbb{C}$–векторное пространство V со спариванием η. Пусть R–формальный ряд $R = \exp(\sum_{l=1}^\infty r_l z^l)$, где $r_l \in \mathrm{Hom}(V, V)$ и $r(z) = \sum_{l\geq 1} r_l z^l$ удовлетворяет условию $r(z) + r(-z)^* = 0$, где звездочка означает двойственность по отношению к η. А.Б.Гивенталь определил процедуру квантования, сопоставляющую оператору R как выше дифференциальный оператор $\widehat{R}$ и доказал (см. [**G01**]), что такие дифференциальные операторы задают действие группы на пространстве статсумм КогТП. Такое действие называется R–действием Гивенталя.

Как было замечено выше, потенциал рода нуль — коэффициент при $\hbar^{-2}$ в $\log \mathcal{Z}$ — является потенциалом некоторого многообразия Дубровина–Фробениуса.

Как следствие, действие Гивенталя определено и на многообразиях Дубровина–Фробениуса, если последние задаются потенциалами рода нуль некоторых КогТП.

Зеркальная симметрия. Следуя A.Chiodo и Y.Ruan (см. [**CR11**]) сформулируем гипотезу глобальной зеркальной симметрии

Гипотеза глобальной зеркальной симметрии. *Пусть* (f, G) – *орбифолд Ландау–Гинзбурга, где* $G \subseteq \mathrm{SL}(N)$ *и многочлен* f *удовлетворяет условию Калаби-Яу. Тогда 1*

(pre-i): *существует фробениусова алгебра* $\mathrm{Jac}(f, G)$, *совпадающая с* $\mathrm{Jac}(f)$ *если* $G = \{\mathrm{id}\}$.

(pre-ii): *существует многообразие Дубровина–Фробениуса* $M^{\zeta}_{(f,G)}$, *обобщающее фробениусову алгебру* $\mathrm{Jac}(f, G)$, *а также понятие о выборе примитивной формы, такое, что* $M^{\zeta}_{(f,\{\mathrm{id}\})} = M^{\zeta}_{f}$.

(i): *существуют многообразие Калаби-Яу* X *и примитивная форма* ζ_1 *орбифолда* (f, G), *такие, что*

$$M^{\zeta_1}_{(f,G)} \cong M_X.$$

Данный изоморфизм называется тогда зеркальным изоморфизмом Ландау–Гинзбург — Калаби–Яу.

(ii): *существуют орбифолд Ландау–Гинзбурга* $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$ *и примитивная форма* ζ_2 *орбифолда* (f, G), *такие, что*

$$M^{\zeta_2}_{(f,G)} \cong M^{FJRW}_{(\widetilde{f},\widetilde{G})}.$$

Данный изоморфизм называется тогда зеркальным изоморфизмом Ландау–Гинзбург — Ландау–Гинзбург.

(iii): *существует элемент* R *группы Гивенталя, действие которого связывает два многообразия Дубровина–Фробениуса* $M^{FJRW}_{(\widetilde{f},\widetilde{G})}$ *и* M_X.

Поскольку многообразие Дубровина–Фробениуса обобщает понятие фробениусовой алгебры, гипотезы зеркальной симметрии выше могут быть рассмотрены в *узком смысле*. В частности, в пункте (i) выше необходимым условием является наличие изоморфизма фробениусовых алгебр $\mathrm{Jac}(f, G) \cong H^*_{orb}(X)$, а в пункте (ii) — изоморфизм фробениусовых алгебр $\mathrm{Jac}(f, G) \cong \mathcal{A}^{FJRW}_{(\widetilde{f},\widetilde{G})}$, которые мы и будем называть зеркальными изоморфизмами в узком смысле.

Заметим, что для того, чтобы доказать части (i) и (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для данного орбифолда Ландау–Гинзбурга, необходимо сначала найти *зеркальные партнеры* — многообразие X и a priori отличный от

исходного орбифолд Ландау–Гинзбурга $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$, и уже потом установить изоморфизм многообразий Дубровина–Фробениуса или же фробениусовых алгебр.

Последний пункт гипотезы выше называется также гипотезой о *Ландау–Гинзбург / Калаби-Яу* соответствии. Эта гипотеза не делает никакого утверждения о зеркальном изоморфизме, и упомянутое в ней действие R связывает две разные А–модели, зеркальные одной Б–модели. Если оба зеркальных изоморфизма выше установлены, то гипотеза о Ландау–Гинзбург / Калаби–Яу соответствии эквивалентна тому, что существует элемент группы Гивенталя R', действие которого связывает два многообразия Дубровина–Фробениуса $M^{\zeta_1}_{(f,G)}$ и $M^{\zeta_2}_{(f,G)}$.

Гипотеза глобальной зеркальной симметрии может быть обобщена на класс орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G), не удовлетворяющих условию Калаби-Яу. Тогда в пункте (i) X является проективным многообразием — не обязательно Калаби-Яу, а формулировки остальных пунктов остаются неизменными.

Одной из трудностей зеркальной симметрии является то, что теория Громова–Виттена и теория FJRW, как правило, очень сложны для вычислений. В частности, даже фробениусова алгебра теории FJRW вычислена только для малого класса многочленов f.

Степень разработанности

На настоящий момент наибольшее число изоморфизмов зеркальной симметрии известно для орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G) с обратимыми многочленами f. P.Berglund, T.Hübsch, M.Henningson [**BHe95, BHu93**] предложили конструкцию, сопоставляющую орбифолду Ландау–Гинзбурга (f, G) новый орбифолд Ландау–Гинзбурга $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$, такой, что $\widetilde{f}$ — обратимый многочлен, $\widetilde{G} \subseteq G_{\widetilde{f}}$, $\left(\widetilde{f}\right)^{\sim} = f$ и $\left(\widetilde{G}\right)^{\sim} = G$. Мы будем называть такой орбифолд Ландау–Гинзбурга $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$ BHH–двойственным орбифолду (f, G) в честь упомянутых выше авторов.

Если f удовлетворяет условию Калаби–Яу, зеркальные партнеры были предложен A.Chiodo, Y.Ruan как $X = X_{\widetilde{f},\widetilde{G}}$ и $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$. В частности, в работах T.Milanov, Y.Ruan, Y.Shen [**MR11, MS16**] были доказаны пункты (i) и (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для обратимых многочленов f, задающих простые эллиптические особенности и $G = \{\mathrm{id}\}$. Важную роль в данных работах играет именно BHH–двойственность.

Пункт (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии изучался N.Priddis, M.Shoemaker и Y.Shen, Z.Zhou (см. [**PS16**] и [**SZ18**]), однако конкретный элемент группы Гивенталя был предложен лишь для одного конкретного орбифолда Ландау–Гинзбурга в первой работе.

Зеркальный изоморфизм многообразий Дубровина–Фробениуса касп–многочлена $f_A(\mathbf{x})$ и $\mathbb{P}^1_A$ был установлен в работе Y.Shiraishi, A.Takahashi [**ShiT15, Ta11**] (здесь $r = 3$ и f_A не является обратимым).

Пример алгебры $\mathrm{Jac}(f, G)$ части (pre-i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии был предложен в работах R.Kaufmann и M.Krawitz, однако либо без конкретного определения, как в [**Kau03, Kau06**], или же в очень специальном виде, как в [**Kra09**]. Если подход R.Kaufmann был чрезвычайно общим, допускающим разные неизоморфные структуры умножения, то подход M.Krawitz был слишком специальным. Во-первых, его определение было дано только для обратимых многочленов, и даже тогда данная алгебра не могла быть применена в полной общности в зеркальной симметрии потому, что им была определена коммутативная, а не $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–коммутативная алгебра.

Фробениуса алгебра теории FJRW была предметом подробного изучения (см. [**FJJW**]), однако для групп G отличных от максимальной данная алгебра не вычислена по настоящий момент даже для всех обратимых многочленов.

Другие подходы к зеркальной симметрии. Следует отметить, что существует и другой подход к зеркальной симметрии, который формулируется полностью в терминах гомологической алгебры — *гомологическая зеркальная симметрия*. В данном подходе многообразию Калаби-Яу и орбифолду Ландау–Гинзбурга сопоставляются производные категории, эквивалентность которых и интерпретируется как то, что данные многообразие Калаби–Яу и орбифолд Ландау–Гинзбурга образуют зеркальную пару (см. А.Б.Гивенталь [**G95**], L.Katzarkov, M.Kontsevich, T.Pantev [**KKP08**] и Д.О.Орлов [**Or04**]). Когомологии Хохшильда этих категорий являются естественными кандидатами для части (pre-i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии. Из эквивалентности категорий моментально следует, что эти когомологии Хохшильда изоморфны. Однако по настоящее время не существует общепринятой конструкции многообразия Дубровина–Фробениуса, сопоставленного производной категории, что делает невозможным сравнение гомологического подхода к зеркальной симметрии с предложенным выше в полной мере.

Также в литературе широко известна формулировка “два n–мерные многообразия Калаби–Яу X и $X^\vee$ зеркальны друг другу, если их числа Ходжа удовлетворяют равенствам $h^{a,b}(X) = h^{a,n-b}(X^\vee)$”. Такая формулировка является упрощением предложенного нами определения зеркальной симметрии. В частности, A.Chiodo и Y.Ruan доказано, что $h^{a,b}(X_{f,G}) = h^{a,N-2-b}(X_{\widetilde{f},\widetilde{G}})$ для BHH–двойственных пар (f, G) и $(\widetilde{f}, \widetilde{G})$.

Многообразия Дубровина-Фробениуса орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G) строились также J.Tu (см. [**Tu19**]) в контексте гомологической алгебры и теории категорий. Однако только для так называемых маргинальных деформаций, что означает заведомо меньшую размерность самого пространства, на котором строится структура многообразия Дубровина–Фробениуса.

Цели и задачи

Описанные в данной диссертации исследования имеют две основные цели: 1. изучение орбифолдов Ландау–Гинзбурга как объектов "эквивариантной" теории особенностей; 2. доказательство нового изоморфизма зеркальной симметрии. Как будет показано далее, эти две цели могут быть достигнуты одновременно, что может быть рассмотрено как практическое приложение зеркальной симметрии.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Все относящиеся к диссертации результаты в совместных публикациях принадлежат автору.

Теоретическая и практическая значимость работы

Данная диссертация имеет теоретический характер. Представленные результаты могут быть важны для дальнейших исследований в области алгебраической и комплексной геометрии, гомологической алгебры.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической и комплексной геометрии, в частности, связности в расслоениях, теория вычетов, когомологические теории поля и пространства модулей, теория особенностей и разрешения особенностей. Также в диссертации используются методы гомологической алгебры, а именно, когомологии Хохшильда искривленных dg–алгебр.

Основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие результаты, являющиеся основными в данной диссертации.

(1) Для многочленов, задающих изолированные особенности, доказана часть (pre-i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии.

Для многочленов f, задающих обратимые особенности, мы доказали, что фробениусова алгебра $\mathrm{Jac}(f, G)$ изоморфна кольцу когомологий Хохшильда категории их G-эквивариантных матричных факторизаций.

(2) Для многочленов f, задающих исключительные унимодальные особенности, мы доказали часть (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии в узком смысле.

(3) Явно доказаны части (pre-ii) и (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$, где $f_{A'}$ — многочлен типа касп и $G \subseteq G_f \cap \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$.

Из этого утверждения выведены новые соотношения между некоторыми квазимодулярными формами.

(4) Явно доказана часть (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G_f), где $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$.

Степень достоверности и апробации результатов

Все результаты, описанные в данной диссертации, были представлены в качестве докладов на многих международных конференциях, а также научных семинарах, неполный список которых включает

(1) Международная конференция *Symposium on singularities and their topology*, Ганновер, Германия 2014;

(2) Международная конференция *4th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion*, Москва, 2014;

(3) Международная конференция *Mirror Symmetry, Hodge Theory and Differential Equations*, Обервольфах, Германия 2015;

(4) Научный семинар группы алгебры, геометрии и интегрируемых систем университета г.Лидс, Великобритания 2019;

(5) Международная конференция *Mirror Symmetry and Related Topics*, Киото, Япония 2019;

(6) Международная конференция *Integrable Systems and Automorphic Forms*, Сочи 2020;

(7) Международная конференция *Классические и квантовые интегрируемые системы*, Сочи 2021;

(8) Международная конференция *Nonlinear Waves and Frobenius Structures in Geometry and Physics*, посвященная памяти Б.А.Дубровина, Москва, 2021.

(9) Международная конференция *Dynamics in Siberia*, Новосибирск 2022;

(10) Международная конференция *Categorical Invariants and Higher Theory*, Берлин, Германия 2022;

(11) Научный семинар Центра перспективных исследований им. И.М. Кричевера, Сколтех, Москва 2023;

(12) Международная конференция *Geometry days*, Новосибирск 2023;

(13) Международная конференция *Инвариантность и интегрируемость*, Репино, Санкт-Петербург 2023;

(14) Научный семинар "Характеристические классы и теория пересечений" НИУ ВШЭ, Москва, 2024.

(15) Международная конференция *Integrable systems and quantum theory*, Санкт-Петербург 2024;

(16) Международная конференция *Enumerative and Derived Geometry in Mirror Symmetry*, Ухань, Китай 2025;

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах автора в рецензируемых научных изданиях, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science: [**B14**], [**B18**], [**B23**], [**BI22**], [**BP18**], [**BTW17**], [**BTW23**], [**BT14**], [**BT20**], [**BT22**].

Для всех работ, написанных в соавторстве, в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разделена на параграфы, начинается со списка обозначений и содержит как краткий обзор известных ранее результатов, так и изложение результатов автора. Последние снабжены подробными доказательствами.

Глава 1 посвящена изучению орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G) с точки зрения "классической" теории особенностей. В частности, в этой главе фиксируются обозначения, касающиеся многочлена как объекта теории особенностей.

В данной главе рассматривается также вопрос *орбифолдной эквивалентности*. Поскольку многочлен f инвариантен относительно действия группы G, он задает отображение и на фактор–пространстве $\mathbb{C}^N/G$. Данное многообразие является особым, но его особенности можно разрешить. Тогда отображение f поднимается на разрешающее многообразие. В данной главе мы показываем, что если f задает особенность типа ADE, а разрешение крепантное, то поднятие многочлена

f задается в картах несколькими многочленами f_i, причем только один из них имеет особенности. Будем обозначать его $\overline{f}$.

Глава 2 посвящена орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$. В частности, в данной главе приводится аксиоматическая конструкция другой алгебры $\mathrm{Jac}'(f,G)$, такой, что $\mathrm{Jac}(f,G)$ является в ней G–инвариантным подпространством: $\mathrm{Jac}(f,G) = (\mathrm{Jac}'(f,G))^G$. Здесь же доказывается теорема о существовании и единственности с точностью до изоморфизма алгебр $\mathrm{Jac}(f,G)$ для обратимых многочленов f и групп $G \subseteq G_f \cap \mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ — Теорема 2.1. Также в данной главе мы доказываем, что $\mathrm{Jac}(f,G) \cong \mathrm{Jac}(\overline{f})$, если f задает особенности типа ADE.

В **Главе 3** мы изучаем алгебру $\mathrm{Jac}(f,G)$ для многочленов f, задающих исключительные унимодальные особенности. Арнольд обнаружил "странную двойственность" между исключительными унимодальными особенностями. Каждой такой особенности сопоставляются две тройки чисел - числа Долгачева и числа Габриелова, имеющие принципиально различное определение.

Исключительные унимодальные особенности называются странно двойственными, если числа Долгачева одной особенности совпадают с числами Габриелова другой и наоборот.

Для любых двух исключительных унимодальных особенностей, которые являются странно двойственными по Арнольду, существует специальный выбор представляющих их многочленов f_1, f_2, такой, что оба многочлена обратимы и $f_1 = \widetilde{f}_2$. Впервые это было отмечено в [**KY95**].

Однако выбор обратимого многочлена, представляющего исключительную унимодальную особенность, в общем случае не является единственным, и для более общего выбора равенство $f_1 = \widetilde{f}_2$ уже не имеет место.

Основным результатом данной главы является Теорема 3.1, в которой доказывается, что f_1 и f_2 странно двойственны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм алгебр $\mathrm{Jac}(f_1) \cong \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$. Вторым важным утверждением данной теоремы является решение части (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии в узком смысле. А именно, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{A}^{\mathrm{FJRW}}(f_2, \langle g_{f_2} \rangle) \cong \mathrm{Jac}(\tilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\tilde{f}_2}),$$

Глава 4 посвящена гомологическому подходу к построению алгебры $\mathrm{Jac}(f,G)$.

Важным инвариантом, связанным с орбифолдом Ландау–Гинзбурга (f,G), является dg–категория $\mathrm{MF}_G(f)$ G-эквивариантных матричных факторизаций многочлена f. С ней, в свою очередь, естественно связано кольцо когомологий

Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$, снабженное $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–градуированно коммутативным $\cup$–произведением.

Аксиоматизация алгебр $\mathrm{Jac}'(f,G)$ и $\mathrm{Jac}(f,G)$ Главы 2 во многом мотивирована алгебраической структурой пары $(\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f)), \mathsf{HH}_*(\mathrm{MF}_G(f)))$. Естественно предположить, что алгебра $\mathrm{Jac}(f,G)$ изоморфна $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$.

Основным результатом данной главы является Теорема 4.1, в которой доказывается изоморфизм $\mathbb{C}$–алгебр $\mathrm{Jac}(f,G) \cong \mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$.

Важно отметить, что когомологии Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$ могут быть естественно снабжены спариванием только когда $\mathrm{MF}_G(f)$ является так называемой Калаби–Яу категорией, что налагает условие Калаби-Яу на многочлен f. В то же время, спаривание является частью конструкции алгебры $\mathrm{Jac}'(f,G)$ для любого f.

Доказательство приведено в Разделе 4.2.

Также в данной главе в Разделе 4.4 вычисляются когомологии Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f_{A'}))$ касп–многочленов. Это подготовительные вычисления, которые будут играть важную роль в Главе 6.

Глава 5 полностью посвящена многообразиям Дубровина–Фробениуса. Первые ее разделы носят, в основном, реферативный характер.

Кроме определения общего многообразия Дубровина–Фробениуса в данной главе определяются многообразия Дубровина–Фробениуса теории Громова–Виттена (Раздел 5.2) и теории Саито (Раздел 5.3).

Мы останавливаемся подробнее в Разделе 5.2.2 на вопросе вычисления потенциала рода нуль теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов.

Также в Разделе 5.4 приведена Теорема 5.4, которая связывает между сообой потенциалы многообразий теории Саито эллиптических особенностей для разных выборов примитивной формы.

В Разделе 5.5 нами приводятся некоторые результаты Ishibashi–Shiraishi–Takahashi, доказывающие часть (i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга касп–многочленов $f_{A'}$ с тривиальной группой симметрий $G = \{\mathrm{id}\}$.

Глава 6 является ключевой в данной диссертации.

Именно в этой главе мы приводим решения части (pre-ii) и части (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга касп–многочленов $f_{A'}$ с нетривиальной группой симметрий G.

Будем также предполагать, что любой элемент группы G действует неподвижно на хотя бы одномерном подпространстве.

В качестве зеркального партнера орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$ W.Ebeling и A.Takahashi предложили в [**ET14**] орбифолд Гейгле–Ленцинга $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$, для некоторого набора $A = (a_1, \ldots, a_r)$ определенного ниже. Для $i = 1, 2, 3$ пусть K_i обозначает максимальную подгруппу группы G, состоящую из элементов, действующих тривиально на i–ю координату x_i. Определим

$$A := \left(\frac{a'_1}{|G/K_1|} * |K_1|, \frac{a'_2}{|G/K_2|} * |K_2|, \frac{a'_3}{|G/K_3|} * |K_3| \right),$$

где $b*|K_i|$ означает, что b повторяется $|K_i|$ раз в наборе. Мы также опускаем в наборе A все единицы, если длина набора больше 3.

Теория Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ корректно определена. Ее многообразие Дубровина-Фробениуса $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}$ описано нами в Главе 5, оно имеет размерность $\mu_A = 2 + \sum_{i=1}^r (a_i - 1)$. Однако не определена "эквивариантная" версия теории Саито, а определение многообразия Дубровина-Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$ было дано нами впервые.

В данной главе мы определяем аксиоматически многообразие Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$, доказывая часть (pre–ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии. В частности, оно зависит от примитивной формы особенности $f_{A'}$, и для тривиальной группы G имеем $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},\{\mathrm{id}\})} \cong M^{\zeta^\infty}_{f_{A'}}$.

Также мы доказываем в Теореме 6.1 часть (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии, устанавливая изоморфизм $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}} \cong M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$. По настоящее время данный результат является единственным изоморфизмом зеркальной симметрии как в пункте (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии.

Глава 7 посвящена доказательству части (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G_f) для $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$ и теории Громова–Виттена орбифолдной прямой $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$.

Среди всего множества когомологических теорий поля важную роль в зеркальной симметрии играют КогТП Саито–Гивенталя изолированной особенности (задающая Б–модель) и КогТП Громова–Виттена многообразия Калаби–Яу (задающая А–модель). Другой тип КогТП А–модели, предположенный в физике и позже построенный математиками (см. [**FJR13**]), теперь известен под названием теории FJRW. Данная КогТП также связана с орбифолдом Ландау–Гинзбурга (f, G). Заметим, что в данной теории требуется, чтобы $J_f \subseteq G$, в частности, $G \neq \{\mathrm{id}\}$.

Определим

$$R^{\sigma}(z) := \exp(\begin{pmatrix} 0 & \dots & \sigma \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z), \qquad \sigma = -\frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}{2\pi^2}.$$

Основная теорема данной главы — Теорема 7.1. Она утверждает, что потенциал рода нуль $\mathcal{F}_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}$ теории FJRW (f, G_f) совпадает с точностью до линейной замены координат с потенциалом рода нуль $\hat{R}^{\sigma} \cdot \mathcal{Z}^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$.

Часть (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии моментально следует из данной теоремы, так как линейная замена координат является изоморфизмом многообразий Дубровина–Фробениуса.

Эта теорема является также полезной для изучения теории FJRW. В частности, вычисление даже потенциала рода нуль теории FJRW является сложной задачей, но приведенный метод доказательства теоремы выше дает явное выражение всего потенциала многообразия Дубровина–Фробениуса теории FJRW (f, G_f).

Благодарность

Работа была выполнена на Факультете математики Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”.

Автор выражает благодарность своему научному консультанту С.К. Ландо за постоянное внимание и многочисленные полезные советы. Автор также выражает глубокую признательность И.В. Артамкину, М.Э. Казаряну и А.В. Маршакову за поддержку и многочисленные беседы.

ГЛАВА 1

Изолированные особенности и их симметрии

1.1. Предварительные сведения

Определение. Пусть N — неотрицательное целое число, а $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ — многочлен, для которого $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^N$ является изолированной критической точкой.

(1) *Алгебра Якоби* $\mathrm{Jac}(f)$ — это $\mathbb{C}$-алгебра

$$\mathrm{Jac}(f) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \Big/ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_N} \right)$$

являющаяся конечномерной $\mathbb{C}$-алгеброй. Обозначим через $\mu_f := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f)$ *число Милнора* многочлена f. Если $N = 0$, положим $\mathrm{Jac}(f) = \mathbb{C}$ и $\mu_f = 1$.

(2) *Гессиан* многочлена f определяется как

$$\mathrm{hess}(f) := \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\ldots,N}.$$

В частности, если $N = 0$, положим $\mathrm{hess}(f) = 1$.

Обозначим через $\Omega^p(\mathbb{C}^N)$ $\mathbb{C}$-модуль регулярных p-форм на $\mathbb{C}^N$. Рассмотрим $\mathbb{C}$-модуль

$$\Omega_f := \Omega^N(\mathbb{C}^N)/(df \wedge \Omega^{N-1}(\mathbb{C}^N)).$$

Заметим, что Ω_f имеет естественную структуру свободного $\mathrm{Jac}(f)$-модуля ранга один. А именно, выбрав нигде не зануляющуюся N-форму $\widetilde{\omega} \in \Omega^N(\mathbb{C}^N)$, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Jac}(f) \xrightarrow{\cong} \Omega_f, \quad [\phi(\mathbf{x})] \mapsto [\phi(\mathbf{x})]\omega := [\phi(\mathbf{x})\widetilde{\omega}], \tag{1.1}$$

где $\omega := [\widetilde{\omega}]$ — класс $\widetilde{\omega}$ в Ω_f.

Замечание 1.1. Класс $\omega \in \Omega_f$, задающий изоморфизм (1.1), является ненулевым постоянным множителем класса $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$.

Предложение 1.1 (см. Раздел I.5.11 [**AGV85**]). *Определим* $\mathbb{C}$*-билинейную форму* $J_f : \Omega_f \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ *как*

$$J_f(\omega_1, \omega_2) := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}^N} \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix},$$

где $\omega_1 = [\phi(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N]$ *и* $\omega_2 = [\psi(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N]$.

Билинейная форма J_f *невырождена на* Ω_f. *Более того, для* $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ *мы имеем*

$$J_f([\phi(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N], [\mathrm{hess}(f)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N]) \neq 0$$

тогда и только тогда, когда $\phi(\mathbf{0}) \neq 0$. *В частности,*

$$J_f([dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N], [\mathrm{hess}(f)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N]) = \mu_f.$$

Такая билинейная форма называется *вычетным спариванием* и будет играть важную роль в дальнейшем. С помощью изоморфизма (1.1) вычетное спаривание наделяет алгебру Якоби $\mathrm{Jac}(f)$ структурой фробениусовой алгебры.

Определение. Ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра $(A, \circ)$ называется *фробениусовой*, если существует невырожденная билинейная форма $\eta : A \otimes A \to \mathbb{C}$ такая, что $\eta(X \circ Y, Z) = \eta(X, Y \circ Z)$ для $X, Y, Z \in A$.

Определение. *Группа максимальных диагональных симметрий* f определяется как

$$G_f := \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \mid f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_N x_N) = f(x_1, \ldots, x_N) \right\}.$$

Мы всегда будем отождествлять G_f с подгруппой диагональных матриц $\mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$. Положим также

$$G_f^{\mathrm{SL}} := G_f \cap \mathrm{SL}(N; \mathbb{C}).$$

Для всякой подгруппы $G \subseteq G_f$, пару (f, G) называют *орбифолдом Ландау-Гинзбурга*.

Далее мы будем обозначать через G конечную подгруппу G_f, если не указано иное. Определим также $\mathbf{e}[\alpha] := \exp(2\pi \mathsf{i}\alpha)$ (здесь и далее $\mathsf{i} = \sqrt{-1}$). Каждый элемент $g \in G$ имеет уникальное представление вида

$$g = \mathrm{diag}\left(\mathbf{e}\left[\frac{a_1}{r}\right], \ldots, \mathbf{e}\left[\frac{a_N}{r}\right]\right) \quad \text{с } 0 \leq a_i < r, \tag{1.2}$$

где r — порядок g. Мы используем обозначение $(a_1/r, \ldots, a_N/r)$ или $\frac{1}{r}(a_1, \ldots, a_N)$ для элемента g. $\mathrm{age}(g)$, предложенный в [**IR94, V89**], определяется как рациональное

число

$$\operatorname{age}(g) := \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{N} a_i. \tag{1.3}$$

Заметим, что если $g \in G_f \cap \mathrm{SL}(N,\mathbb{R})$, то $\operatorname{age}(g) \in \mathbb{Z}$.

Для каждого $g \in G$ мы обозначаем через $\operatorname{Fix}(g) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid g \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ множество точек $\mathbb{C}^N$, неподвижных под действием g. Также положим $N_g := \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Fix}(g)$ и $f^g := f|_{\operatorname{Fix}(g)}$ — ограничение f на $\operatorname{Fix}(g)$. Заметим, что поскольку G действует диагонально на $\mathbb{C}^N$, $\operatorname{Fix}(g)$ является линейным подпространством $\mathbb{C}^N$.

Предложение 1.2 (см. Proposition 5 в [**ET13b**]). *Для каждого $g \in G$ существует естественный сюръективный гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр $\operatorname{Jac}(f) \longrightarrow \operatorname{Jac}(f^g)$. В частности, алгебра Якоби $\operatorname{Jac}(f^g)$ также конечномерна.*

Доказательство. Перенумеруя индексы можно считать, что $\operatorname{Fix}(g) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N \mid x_{N_g+1} = \cdots = x_N = 0\}$. Так как f инвариантен относительно G, $g \cdot x_i \neq x_i$ для $i = N_g + 1, \ldots, N$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{N_g+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}$ — регулярная последовательность, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{N_g+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right) \subset \left(x_{N_g+1}, \ldots, x_N\right).$$

Следовательно, мы имеем естественный сюръективный гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр

$$\begin{aligned}
\operatorname{Jac}(f) &= \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] \Big/ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_N}\right) \\
&\longrightarrow \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] \Big/ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_{N_g}}, x_{N_g+1}, \ldots, x_N\right) \\
&= \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_{N_g}] \Big/ \left(\tfrac{\partial f^g}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial f^g}{\partial x_{N_g}}\right) = \operatorname{Jac}(f^g).
\end{aligned}$$

□

Следствие 1.3. *Для каждого $g \in G$ пространство Ω_{f^g} естественным образом снабжено структурой $\operatorname{Jac}(f)$-модуля.*

Доказательство. Так как Ω_{f^g} является свободным $\operatorname{Jac}(f^g)$-модулем ранга один (ср. (1.1)), сюръективный $\mathbb{C}$-гомоморфизм алгебр $\operatorname{Jac}(f) \longrightarrow \operatorname{Jac}(f^g)$ даёт желаемое утверждению. □

1.2. Обратимые многочлены

Многочлен $f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]$ называется *квазиоднородным* многочленом если существуют положительные целые числа $w_1,\ldots,w_N$ и d такие, что

$$f(\lambda^{w_1}x_1,\ldots,\lambda^{w_N}x_N) = \lambda^d f(x_1,\ldots,x_N) \tag{1.4}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Мы называем $(w_1, \dots, w_N; d)$ системой весов f. Квазиоднородный многочлен f называется *невырожденным* если он имеет лишь изолированную критическую точку в начале координат в $\mathbb{C}^N$. Это условие эквивалентно тому, что алгебра $\mathrm{Jac}(f)$ является конечномерной.

Определение. Квазиоднородный многочлен $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ называется *обратимым*, если выполняются следующие условия.

(1) Число переменных ($= N$) совпадает с числом мономов f, а именно,

$$f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} c_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{E_{ij}} \tag{1.5}$$

для некоторых коэффициентов $c_i \in \mathbb{C}^*$ и неотрицательных целых чисел E_{ij} для $i, j = 1, \dots, N$.

(2) Матрица $E := (E_{ij})$ обратима над $\mathbb{Q}$.

(3) Многочлен f и его *Берглунд–Хубш двойственный* $\widetilde{f}$, определяемый как

$$\widetilde{f}(x_1, \dots, x_N) := \sum_{i=1}^{N} c_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{E_{ji}} \tag{1.6}$$

являются оба невырожденными.

Определение. Пусть $f(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} c_i \prod_{j=1}^{N} x_j^{E_{ij}}$ — обратимый многочлен. Определим рациональные числа $q_1, \dots, q_N$ как единственное решение уравнения

$$E \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

В частности, $q_i = w_i/d$, $i = 1, \dots, N$ для системы весов $(w_1, \dots, w_N; d)$.

Если $f(x_1, \dots, x_N)$ — обратимый многочлен, то мы имеем

$$G_f = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (\mathbb{C}^*)^N \;\middle|\; \prod_{j=1}^{N} \lambda_j^{E_{1j}} = \dots = \prod_{j=1}^{N} \lambda_j^{E_{Nj}} = 1 \right\}, \tag{1.8}$$

и, следовательно, G_f — конечная группа. Легко видеть, что группа G_f содержит элемент $\mathsf{j} := (q_1, \dots, q_N)$, и, следовательно, непуста.

Важно отметить следующее

Предложение 1.4. *Группа* $G_f^{\mathrm{SL}} = G_f \cap \mathrm{SL}(N; \mathbb{C})$ *является собственной подгруппой* G_f.

Доказательство. Пусть $\widetilde{f}$ будет Берглунд–Хубш двойственным к f многочленом. Из [**ET11**] и [**Kra09**] известно (см. также Предложение 2 в [**EG-ZT**]), что

$$G_f^{\mathrm{SL}} \cong \mathrm{Hom}(G_{\widetilde{f}}/\langle(\widetilde{q}_1,\dots,\widetilde{q}_N)\rangle, \mathbb{C}^*) \subsetneq \mathrm{Hom}(G_{\widetilde{f}}, \mathbb{C}^*) \cong G_f,$$

где $(\widetilde{q}_1,\dots,\widetilde{q}_N)$ — единственное решение уравнения $(\widetilde{q}_1,\dots,\widetilde{q}_N)E = (1,\dots,1)$. □

Пусть $f(x_1,\dots,x_N) = \sum_{i=1}^N c_i \prod_{j=1}^N x_j^{E_{ij}}$ — обратимый многочлен. Рескалированием переменных можно добиться, что $c_i = 1$ для $i = 1,\dots,N$. Согласно [**KS92**], обратимый многочлен f можно записать в виде суммы Тома–Себастьяни $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_p$ обратимых многочленов (зависящих от разных наборов переменных) f_ν, $\nu = 1,\dots,p$ следующих типов:

(1) $x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}}x_m + x_m^{a_m}$ (тип цепь; $m \geq 1$);
(2) $x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}}x_m + x_m^{a_m}x_1$ (тип петля; $m \geq 2$).

Замечание 1.2. В [**KS92**] авторы выделили также многочлены так называемого типа Ферма: $x_1^{a_1}$, который может быть рассмотрен как многочлен типа цепь с $m = 1$.

Мы будем использовать специальный мономиальный базис алгебры Якоби $\mathrm{Jac}(f_\nu)$.

Предложение 1.5 (ср. [**Kre94**]). *Для обратимого многочлена $f_\nu = x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}}x_m + x_m^{a_m}$ типа цепь с $m \geq 1$ Якобиева алгебра $\mathrm{Jac}(f_\nu)$ имеет мономиальный базис, состоящий из всех мономов $x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$, таких что*

1) $0 \leq k_i \leq a_i - 1$,
2) *если*

$$k_i = \begin{cases} a_i - 1 \text{ для всех нечетных } i,\ i \leq 2s-1, \\ 0 \text{ для всех четных } i,\ i \leq 2s-1, \end{cases}$$

тогда $k_{2s} = 0$.

Для обратимого многочлена $f_\nu = x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}}x_m + x_m^{a_m}x_1$ типа петля с $m \geq 2$, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_\nu)$ имеет мономиальный базис, состоящий из всех мономов $x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$ с $0 \leq k_i \leq a_i - 1$.

1.3. Орбифолдная эквивалентность для ADE-орбифолдов

Приведём классификацию обратимых многочленов от трех переменных, задающих особенности типа ADE и подгруппы их максимальных диагональных симметрий, сохраняющие голоморфную форму объема на $\mathbb{C}^3$ (см. также [**ET13b**] Раздел 8 Таблица 3).

Тип	$f(x_1,x_2,x_3)$	$G_f \cap \mathrm{SL}(3;\mathbb{C})$	Тип особенности
I	$z_1^{2k+1}+z_2^2+z_3^2, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1)\right\rangle$	A_{2k}
	$z_1^{2k}+z_2^2+z_3^2, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1), \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	A_{2k-1}
	$z_1^3+z_2^3+z_3^2$	$\left\langle \frac{1}{3}(1,2,0)\right\rangle$	D_4
	$z_1^4+z_2^3+z_3^2$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	E_6
	$z_1^5+z_2^3+z_3^2$	$\{1\}$	E_8
II	$z_1^2+z_2^2+z_2z_3^{2k}, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	A_{4k-1}
	$z_1^2+z_2^2+z_2z_3^{2k+1}, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1)\right\rangle$	A_{4k+1}
	$z_1^2+z_2^{k-1}+z_2z_3^2, \quad k\geq 4$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	D_k
	$z_1^3+z_2^2+z_2z_3^2$	$\{1\}$	E_6
	$z_1^2+z_2^3+z_2z_3^3$	$\{1\}$	E_7
III	$z_1^2+z_3z_2^2+z_2z_3^{k+1}, \quad k\geq 1$	$\{1\}$	D_{2k+2}
IV	$z_1^k+z_1z_2+z_2z_3^l, \quad k,l\geq 2$	$\{1\}$	A_{kl-1}
	$z_1^2+z_1z_2^k+z_2z_3^2, \quad k\geq 2$	$\{1\}$	D_{2k+1}
V	$z_1z_2+z_2^kz_3+z_3^lz_1, \quad k,l\geq 1$	$\{1\}$	A_{kl}

TABLE 1. Классификация обратимых многочленов, задающих особенности типа ADE и их группы диагональных симметрий, сохраняющие голоморфную форму объёма.

Пусть $\widehat{\mathbb{C}^3/G}$ — крепантное разрешение $\mathbb{C}^3/G$ и $\widehat{f}$ — поднятие $f:\mathbb{C}^3/G\longrightarrow\mathbb{C}$ в карты разрешения $\widehat{\mathbb{C}^3/G}\longrightarrow\mathbb{C}^3/G$. Заметим, что $\widehat{\mathbb{C}^3/G}$ покрывается несколькими картами, все из которых изоморфны $\mathbb{C}^3$. В работе [**ET13b**] объясняется, что геометрия исчезающих циклов голоморфного отображения $\widehat{f}:\widehat{\mathbb{C}^3/G}\longrightarrow\mathbb{C}$ может быть описана явно.

Задача явного построения крепантного разрешения является нетривиальной. Если G сохраняет неподвижной одну из координат, достаточно рассмотреть разрешения $\mathbb{C}^2$, приведенные в [**BK91**]. Для $G\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, действующей $(z_i,z_j)\mapsto(-z_i,-z_j)$, мы имеем $\mathbb{C}^3/G\cong\mathbb{C}\times\{z^2=xy\}\subset\mathbb{C}^4$, $x=z_i^2, y=z_j^2, z=z_iz_j$ и разрешение покрывается двумя картами $\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^4$;

$$(t,u,v)\mapsto(t,u,uv^2,uv) \text{ и } (t,u,v)\mapsto(t,u^2v,v,uv).$$

Для $G\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\left\langle\frac{1}{3}(1,2,0)\right\rangle$ имеем $\mathbb{C}^3/G\cong\mathbb{C}\times\{z^3=xy\}\subset\mathbb{C}^4$, $x=z_1^3, y=z_2^3, z=z_1z_2$ и разрешение покрывается тремя картами $\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^4$;

$$(t,u,v)\mapsto(t,u,u^2v^3,uv)\ ,\ (t,u,v)\mapsto(t,u^2v,uv^2,uv) \text{ и } (t,u,v)\mapsto(t,u^3v^2,v,uv).$$

Найдем явно поднятие $\widehat{f}$ для каждой карты на основе классификации, приведенной в Таблице 1.

1. Для пары

$$f := z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2 \ (k \geq 1), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(0,1,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^{k+1} + u + uv^2 \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^{k+1} + u^2 v + v.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся в пересечении двух карт.

2. Для пары

$$f := z_1^{2k} + z_2^2 + z_3^2 \ (k \geq 1), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(1,0,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u^k + uv^2 \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u^2 k v^k + v.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только в первой карте.

3. Для $k \geq 1$ положим

$$f := z_1^{2k} + z_2^2 + z_3^2 \ (k \geq 1), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(0,1,1), \frac{1}{2}(1,0,1) \right\rangle.$$

Здесь, поскольку разрешение не является единственным, мы берем A-Hilb $\mathbb{C}^3$ **[CrR02]**, где $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Тогда $\mathbb{C}^3/G \cong \mathbb{C} \times \{z^3 = wxy\} \subset \mathbb{C}^4$, $w = z_1^2, x = z_2^2, y = z_3^2, z = z_1 z_2 z_3$ и разрешение покрывается четырьмя картами $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$;

$$(t,u,v) \mapsto (t,u,tuv^2,tuv) \ , \ (t,u,v) \mapsto (t,tu^2v,v,tuv) \ ,$$

$$(t,u,v) \mapsto (t^2uv,u,v,tuv) \text{ и } (t,u,v) \mapsto (tu,uv,tv,tuv).$$

В этих четырех картах

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^k + u + tuv^2 \ , \ \widehat{f}(t,u,v) = t^k + tu^2v + v,$$

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^k + u + tuv^2 \ , \ \widehat{f}(t,u,v) = t^k + tu^2v + v,$$

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^{2k}u^kv^k + u + v \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^k u^k + uv + tv.$$

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^{2k}u^kv^k + u + v \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^k u^k + uv + tv.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только в четвертой карте.

4. Для пары

$$f := z_1^3 + z_2^3 + z_3^2, \quad G := \left\langle \frac{1}{3}(1,2,0) \right\rangle,$$

в трёх картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u + u^2v^3, \ \widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u^2v + uv^2 \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u^3v^2 + v.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только во второй карте.

5. Для пары

$$f := z_1^4 + z_2^3 + z_3^2, \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(1,0,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^3 + u^2 + uv^2 \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^3 + u^4v^2 + v.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только в первой карте.

6. Для пары

$$f := z_1^2 + z_2^2 + z_2 z_3^{2k} \ (k \geq 1), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(1,0,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^2 + tu^k v^{2k} + u \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^2 + tv^k + vu^2.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только во второй карте.

7. Для пары

$$f := z_1^2 + z_2^2 + z_2 z_3^{2k+1} \ (k \geq 1), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(0,1,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^2 + u + u^{k+1}v^{2k+1} \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^2 + vu^2 + uv^{k+1}.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только во второй карте.

8. Для пары

$$f := z_1^2 + z_2^{k-1} + z_2 z_3^2 \ (k \geq 4), \quad G := \left\langle \frac{1}{2}(1,0,1) \right\rangle,$$

в двух картах имеем

$$\widehat{f}(t,u,v) = t^{k-1} + tuv^2 + u \text{ и } \widehat{f}(t,u,v) = t^{k-1} + tv + vu^2.$$

Критические точки $\widehat{f}$ находятся все только во второй карте.

Подводя итог, заметим, что критические точки поднятия $\widehat{f}$ содержатся всегда только лишь в одной карте, изоморфной $\mathbb{C}^3$. Ограничение $\widehat{f}$ на эту карту задаётся многочленом $\overline{f}$ приведенным в Таблице 2.

Следовательно, с точки зрения геометрии исчезающих циклов, пара (f, G) эквивалентна паре $(\overline{f}, \{\mathrm{id}\})$.

	$f(x_1,x_2,x_3)$	G	$\overline{f}(y_1,y_2,y_3)$
1.	$z_1^{k+1}+z_2^2+z_3^2, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1)\right\rangle$	$y_1^{k+1}+y_2+y_2y_3^2$
2.	$z_1^{2k}+z_2^2+z_3^2, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	$y_1^2+y_2^k+y_2y_3^2$
3.	$z_1^{2k}+z_2^2+z_3^2, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1), \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	$y_1^ky_2^k+y_1y_3+y_2y_3$
4.	$z_1^3+z_2^3+z_3^2$	$\left\langle \frac{1}{3}(1,2,0)\right\rangle$	$y_1^2+y_3y_2^2+y_2y_3^2$
5.	$z_1^4+z_2^3+z_3^2$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	$y_1^3+y_2^2+y_2y_3^2$
6.	$z_1^2+z_2^2+z_2z_3^{2k}, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	$y_1^2+y_1y_2^k+y_2y_3^2$
7.	$z_1^2+z_2^2+z_2z_3^{2k+1}, \quad k\geq 1$	$\left\langle \frac{1}{2}(0,1,1)\right\rangle$	$y_1^2+y_3y_2^2+y_2y_3^{k+1}$
8.	$z_1^2+z_2^{k-1}+z_2z_3^2, \quad k\geq 4$	$\left\langle \frac{1}{2}(1,0,1)\right\rangle$	$y_1^{k-1}+y_1y_2+y_2y_3^2$

TABLE 2. $(f,G)\cong(\overline{f},\{1\})$

1.4. Группа симметрий касп-многочлена

Пусть $G\subseteq G_{f_{A'}}\cap \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$. Определим j_G как число элементов $g\in G$ таких, что $\mathrm{age}(g)=1$ и $N_g=0$. Если g удовлетворяет $\mathrm{age}(g)=1$, то g^{-1} удовлетворяет $\mathrm{age}(g)=2$. Следовательно, число j_G также является числом элементов $g\in G$ таких, что $\mathrm{age}(g)=2$.

Для $i=1,2,3$ пусть K_i будет максимальной подгруппой элементов $g\in G$, оставляющих i-ю координату x_i неподвижной. Порядок $|K_i|$ обозначим через n_i. Для любого $g\in K_i$, отличного от единицы группы имеем $f^g=x_i^{a_i'}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 ([**ET14**, Следствие 2]). *Имеет место равенство*

$$|G|=1+2j_G+\sum_{i=1}^{3}(n_i-1)\,, \tag{1.10}$$

где j_G — число элементов $g\in G$ таких, что $\mathrm{age}(g)=1$ и $N_g=0$.

Для $i=1,2,3$ положим

$$a_i:=\frac{a_i'}{|G/K_i|}, \tag{1.11}$$

и определим набор положительных целых чисел $A=(a_1,\ldots,a_r)$ с помощью

$$(a_1,\ldots,a_r)=\left(\frac{a_i'}{|G/K_i|}*|K_i|, i=1,2,3\right), \tag{1.12}$$

где $u*v$ обозначает набор из v копий целого числа u. Мы также будем опускать числа, равные единице в правой части. Определим

$$\mu_A:=2+\sum_{i=1}^{r}(a_i-1)\,,\quad \chi_A:=2+\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{a_i}-1\right). \tag{1.13}$$

ГЛАВА 2

Орбифолдная алгебра Якоби

В этой главе мы определим обобщение алгебры Якоби $\mathrm{Jac}(f)$ многочлена f. А именно, мы построим алгебру Якоби орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G). С точки зрения зеркальной симметрии, данная алгебра является фробениусовой алгеброй Б–модели.

Определённая работа по построению такой алгебры делалась Р.Кауфманом и М.Кравицем [**Kau03, Kau06, Kra09**]. Главное преимущество нашей работы по сравнению с работой Р.Кауфмана и М.Кравица состоит в том, что наша конструкция работает как отправная точка для зеркальной симметрии на уровне многообразий Дубровина–Фробениуса, где важную роль играет понятие примитивной формы (см. [**S82, S83, ST08**]) — см ζ в определении 2.1.1. Вторым важным отличием нашей работы является следующее. В обеих работах — как Кауфмана, так и Кравица — произведение алгебры явно фиксируется либо прямым определением, либо специальным дополнительным выбором. Мы даем аксиоматическое определение алгебры $\mathrm{Jac}(f, G)$, в котором мы не фиксируем явно структуру умножения.

Построенная нами алгебра наследует естественную $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку из теории Ходжа, связанной с (f, G). Эта $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка появляется только в абстрактном виде в определении Кауфмана и вообще не рассматривалась Кравицем.

Прокомментируем подробно первый пункт. Известно, что $\mathrm{Jac}(f)$ имеет структуру фробениусовой алгебры (см. [**AGV85**]). А именно, выбрав нигде не зануляющуюся голоморфную N-форму, имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Jac}(f) \cong \Omega_f := \Omega^N(\mathbb{C}^N)/(df \wedge \Omega^{N-1}(\mathbb{C}^N)).$$

Именно на Ω_f существует естественная невырожденная симметричная билинейная форма, называемая *вычетным спариванием*. В результате, указанный выше изоморфизм снабжает $\mathrm{Jac}(f)$ индуцированной билинейной формой. Поэтому, даже если группа G тривиальна, важно рассматривать пару $(\mathrm{Jac}(f), \Omega_f)$. Эту пару можно также рассматривать как пример пары $(HH^\bullet(\mathcal{C}), HH_\bullet(\mathcal{C}))$, состоящей из когомологий Хохшильда и гомологии Хохшильда подходящей dg- или $\mathcal{A}_\infty$-категории. Такая пара имеет богатую алгебраическую структуру.

Сначала мы введем G-скрученную версию векторного пространства Ω_f, которая обозначается как $\Omega'_{f,G}$. Это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированное векторное пространство, которое также имеет G-градуировку. Мы снабжаем его естественной невырожденной билинейной формой, называемой *орбифолдным вычетным спариванием* — естественное обобщение вычетного спаривания Ω_f. Тогда G-скрученная версия алгебры Якоби, обозначаемая как $\mathrm{Jac}'(f,G)$, будет введена нами аксиоматически как часть структуры пары $(\mathrm{Jac}'(f,G),\Omega'_{f,G})$. В результате, алгебра $\mathrm{Jac}'(f,G)$ наследует многие структуры, естественно определенные в $\Omega'_{f,G}$, такие как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка и G-градуировка, эквивариантность относительно автоморфизмов пары (f,G), орбифолдное вычетное спаривание и т. д. Наша аксиоматизация G-скрученной алгебры Якоби включает лишь минимальные условия, которые должны быть выполнены для такой алгебры. В частности, наши аксиомами не предписывается структура умножения.

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ пары (f,G), которую мы будем называть *орбифолдной алгеброй Якоби* (f,G), будет задана как G-инвариантная подалгебра G-скрученной версии $\mathrm{Jac}'(f,G)$. Однако, в общем случае неясно, существует ли такая алгебра, как $\mathrm{Jac}'(f,G)$, или нет. Даже если она существует, она может быть не единственной.

Основным результатом настоящей главы является следующая

Теорема 2.1. *Пусть f — обратимый многочлен, а G — подгруппа G_f.*

(1) *Существует единственная с точностью до изоморфизма G-скрученная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}'(f,G)$. А именно, она однозначно характеризуется предложенными нами аксиомами (см. определение 2.1.1).*

В частности, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ орбифолда Ландау–Гинзбурга (f,G) существует.

(2) *Если $G \subseteq \mathrm{SL}(N;\mathbb{C})$, то алгебра $\mathrm{Jac}(f,G)$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной коммутативной фробениусовой алгеброй.*

А именно, существует четное невырожденное спаривание $\eta_{f,G}$ такое, что

$$\eta_{f,G}(X\circ Y,Z)=\eta_{f,G}(X,Y\circ Z),\quad X,Y,Z\in\mathrm{Jac}'(f,G), \tag{2.1}$$

$$\eta_{f,G}(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[\mathrm{hess}(f)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})=|G|\cdot\mu_f. \tag{2.2}$$

Другой важный результат этой главы (Теорема 2.30) посвящен обратимым многочленам f, определяющим особенности типа ADE. Пусть G является подгруппой $G_f\cap\mathrm{SL}(N;\mathbb{C})$. Мы показываем, что в этом случае определенная нами орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ изоморфна “обычной” алгебре Якоби некоторого другого многочлена.

Построенная нами алгебра Якоби может быть биградуирована. Тогда естественным образом определяются "числа Ходжа" орбифолда Ландау–Гинзбурга. В работе [**BI24**] автором совместно с А.Ионовым было доказано, что эти числа Ходжа удовлетворяют набору симметрий, выполняемых для чисел Ходжа многообразия Калаби-Яу. Заметим, что в [**BI24**] рассматриваются произвольные квазиоднородные многочлены, удовлетворяющие условию Калаби–Яу с группами симметрий, не обязательно являющимися диагональными.

Данная глава основана на работе [**BTW23**].

2.1. Орбифолдные алгебры Якоби

Для того чтобы ввести орбифолдную алгебру Якоби пары (f, G), сначала мы аксиоматически определяем G-скрученную алгебру Якоби f.

Определение. Определим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный $\mathbb{C}$-модуль $\Omega'_{f,G} = \left(\Omega'_{f,G}\right)_{\overline{0}} \oplus \left(\Omega'_{f,G}\right)_{\overline{1}}$, $\overline{i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$\left(\Omega'_{f,G}\right)_{\overline{0}} := \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 0 \pmod 2}} \Omega'_{f,g}, \quad \left(\Omega'_{f,G}\right)_{\overline{1}} := \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 1 \pmod 2}} \Omega'_{f,g},$$

$$\Omega'_{f,g} := \Omega_{f^g}.$$

Здесь, для каждого $g \in G$ с $\mathrm{Fix}(g) = \{\mathbf{0}\}$,

$$\Omega_{f^g} = \Omega^0(\{\mathbf{0}\})/(df^g \wedge \Omega^{-1}(\{\mathbf{0}\})) = \Omega^0(\{\mathbf{0}\})$$

является $\mathbb{C}$-модулем ранга один, состоящим из постоянных функций на $\{\mathbf{0}\}$.

Каждый элемент группы G, рассмотренный как элемент $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, N)$, действует также и на $\mathrm{Fix}(g)$ для любого $g \in G$. Таким образом группа G действует и на Ω_{f^g} посредством гомоморфизма обратного образа.

Определение. Определим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный $\mathbb{C}$-модуль $\Omega_{f,G}$ как G-инвариантное подпространство $\Omega'_{f,G}$,

$$\Omega_{f,G} = \left(\Omega'_{f,G}\right)^G. \tag{2.3}$$

То есть, $\Omega_{f,G} = (\Omega_{f,G})_{\overline{0}} \oplus (\Omega_{f,G})_{\overline{1}}$, $\overline{i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, определяется как

$$(\Omega_{f,G})_{\overline{0}} := \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 0 \pmod 2}} \Omega_{f,g}, \quad (\Omega_{f,G})_{\overline{1}} := \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 1 \pmod 2}} \Omega_{f,g}, \tag{2.4}$$

$$\Omega_{f,g} := (\Omega_{f^g})^G. \tag{2.5}$$

Определение. Определим невырожденную $\mathbb{C}$-билинейную форму $J_{f,G} : \Omega'_{f,G} \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{f,G} \longrightarrow \mathbb{C}$, называемую *орбифолдным вычетным спариванием*,

$$J_{f,G} := \bigoplus_{g \in G} J_{f,g}, \tag{2.6}$$

где $J_{f,g}$ — невырожденная $\mathbb{C}$-билинейная форма $J_{f,g} : \Omega'_{f,g} \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{f,g^{-1}} \longrightarrow \mathbb{C}$ определяемая

$$J_{f,g}(\omega_1, \omega_2) := (-1)^{N-N_g} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot |G| \cdot J_{f^g}(\omega_1, \omega_2). \tag{2.7}$$

Определение формы J_{f^g} было дано нами в Главе 1.

Для каждого $g \in G$ с $\mathrm{Fix}(g) = \{\mathbf{0}\}$ определим

$$J_{f,g}(1_g, 1_{g^{-1}}) := (-1)^N \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot |G|, \tag{2.8}$$

где $1_g \in \Omega'_{f,g}$ и $1_{g^{-1}} \in \Omega'_{f,g^{-1}}$ обозначают постоянные функции на $\{\mathbf{0}\}$ значения которых равны 1.

Предложение 2.2. *$\mathbb{C}$-билинейная форма $J_{f,G}$ является G-скрученно $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно симметричной в том смысле, что*

$$J_{f,G}(\omega_1, \omega_2) = (-1)^{N-N_g} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g)\right] \cdot J_{f,G}(\omega_2, \omega_1) \tag{2.9}$$

для $\omega_1 \in \Omega'_{f,g}$ и $\omega_2 \in \Omega'_{f,g^{-1}}$.

Доказательство. Будем использовать обозначения Определения 2.1. Поскольку $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(g^{-1})$, $f^g = f^{g^{-1}}$ и $\mathrm{age}(g) + \mathrm{age}(g^{-1}) = N - N_g$, имеем

$$\begin{aligned} J_{f,G}(\omega_1, \omega_2) &= J_{f,g}(\omega_1, \omega_2) \\ &= \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g) + \frac{1}{2}\mathrm{age}(g^{-1})\right] \cdot J_{f,g^{-1}}(\omega_2, \omega_1) \\ &= (-1)^{N-N_g} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g)\right] \cdot J_{f,G}(\omega_2, \omega_1). \end{aligned}$$

□

Для $\mathbb{C}$-алгебры R обозначим через $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(R)$ группу всех автоморфизмов $\mathbb{C}$-алгебры R. Заметим, что G естественным образом отождествляется с подгруппой $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N])$.

Определение. Определим группу $\mathrm{Aut}(f, G)$ автоморфизмов (f, G) как

$$\mathrm{Aut}(f, G) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]) \mid \varphi(f) = f,\ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \in G \text{ для всех } g \in G\}.$$

Очевидно, что G естественным образом отождествляется с подгруппой $\mathrm{Aut}(f,G)$. Заметим, что автоморфизм $\mathbb{C}$-алгебры $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N])$ является G-эквивариантным тогда и только тогда, когда $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = g$ для всех $g \in G$.

Замечание 2.1. Пусть $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] * G$ — косое групповое кольцо, которое является $\mathbb{C}$-векторным пространством $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[G]$. с произведением, определенным как $(\phi_1 \otimes g_1)(\phi_2 \otimes g_2) = (\phi_1 g_1(\phi_2)) \otimes g_1 g_2$ для любых $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]$ и $g_1, g_2 \in G$. Тогда группу $\mathrm{Aut}(f,G)$ можно рассматривать как подгруппу всех $\varphi' \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] * G)$ таких, что $\varphi'(f \otimes \mathrm{id}) = f \otimes \mathrm{id}$. Для $\varphi \in \mathrm{Aut}(f,G)$, соответствующий элемент $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]*G)$ определяется по формуле $\phi \otimes g \mapsto \varphi(\phi) \otimes (\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})$.

Элемент $\varphi \in \mathrm{Aut}(f,G)$, рассматриваемый как бирегулярное отображение на $\mathbb{C}^N$, отображает $\mathrm{Fix}(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})$ в $\mathrm{Fix}(g)$ для каждого $g \in G$. Следовательно, группа $\mathrm{Aut}(f,G)$ естественно действует на $\Omega'_{f,G}$ следующим образом:

$$\Omega'_{f,g} \longrightarrow \Omega'_{f,\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}}, \quad \omega \mapsto \varphi^*|_{\mathrm{Fix}(g)}\omega, \tag{2.10}$$

где $\varphi^*|_{\mathrm{Fix}(g)}$ обозначает ограничение обратного образа φ^* дифференциальных форм на $\mathrm{Fix}(g)$. Для упрощения обозначений для каждого $\varphi \in \mathrm{Aut}(f,G)$ мы будем обозначать через φ^* действие φ на $\Omega'_{f,G}$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(f,G)$ естественно действует на $\Omega_{f,G}$.

2.1.1. Аксиомы.

Определение. *G-скрученная алгебра Якоби f* является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной $\mathbb{C}$-алгеброй $\mathrm{Jac}'(f,G) = \mathrm{Jac}'(f,G)_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Jac}'(f,G)_{\bar{1}}$, $\bar{i} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

(1) Для каждого $g \in G$ существует $\mathbb{C}$-модуль $\mathrm{Jac}'(f,g)$, изоморфный $\Omega'_{f,g}$ как $\mathbb{C}$-модуль, и удовлетворяющий следующим условиям:

(a) Для единицы группы $\mathrm{id} \in G$,

$$\mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id}) = \mathrm{Jac}(f). \tag{2.11}$$

(b) Выполнено

$$\mathrm{Jac}'(f,G)_{\bar{0}} = \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 0 \pmod 2}} \mathrm{Jac}'(f,g), \tag{2.12}$$

$$\mathrm{Jac}'(f,G)_{\bar{1}} = \bigoplus_{\substack{g\in G \\ N-N_g\equiv 1 \pmod 2}} \mathrm{Jac}'(f,g). \tag{2.13}$$

(2) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная структура $\mathbb{C}$-алгебры $\circ$ на $\mathrm{Jac}'(f,G)$ удовлетворяет

$$\mathrm{Jac}'(f,g)\circ\mathrm{Jac}'(f,h)\subset\mathrm{Jac}'(f,gh),\quad g,h\in G, \tag{2.14}$$

причем, $\mathbb{C}$-подалгебра $\mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id})$ в $\mathrm{Jac}'(f,G)$ совпадает с $\mathbb{C}$-алгеброй $\mathrm{Jac}(f)$.

(3) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная $\mathbb{C}$-алгебра $\mathrm{Jac}'(f,G)$ такова, что $\mathbb{C}$-модуль $\Omega'_{f,G}$ имеет структуру $\mathrm{Jac}'(f,G)$-модуля

$$\vdash\colon \mathrm{Jac}'(f,G)\otimes\Omega'_{f,G}\longrightarrow\Omega'_{f,G},\quad X\otimes\omega\mapsto X\vdash\omega, \tag{2.15}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(a) Для любого $g,h\in G$ имеем

$$\mathrm{Jac}'(f,g)\vdash\Omega'_{f,h}\subset\Omega'_{f,gh}, \tag{2.16}$$

и структура $\mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id})$–модуля на $\Omega'_{f,g}$ совпадает со структурой $\mathrm{Jac}(f)$-модуля на Ω_{fg}, заданной как в Следствии 1.3.

(b) Выбрав нигде не зануляющуюся N-форму, имеет место следующий изоморфизм

$$\mathrm{Jac}'(f,G)\xrightarrow{\cong}\Omega'_{f,G},\quad X\mapsto X\vdash\zeta, \tag{2.17}$$

где ζ — класс в $\Omega'_{f,\mathrm{id}}=\Omega_f$ некоторой N-формы. А именно, $\Omega'_{f,G}$ — свободный $\mathrm{Jac}'(f,G)$-модуль ранга один.

(4) Существует индуцированное действие $\mathrm{Aut}(f,G)$ на $\mathrm{Jac}'(f,G)$, заданное формулой

$$\varphi^*(X)\vdash\varphi^*(\zeta):=\varphi^*(X\vdash\zeta),\quad \varphi\in\mathrm{Aut}(f,G),\ X\in\mathrm{Jac}'(f,G), \tag{2.18}$$

где ζ — элемент $\Omega'_{f,\mathrm{id}}$, задающий изоморфизм аксиомы (3b).

Структура алгебры $\mathrm{Jac}'(f,G)$ удовлетворяет следующим условиям:

(a) $\mathrm{Aut}(f,G)$-инвариантность; а именно,

$$\varphi^*(X)\circ\varphi^*(Y)=\varphi^*(X\circ Y),\quad \varphi\in\mathrm{Aut}(f,G),\ X,Y\in\mathrm{Jac}'(f,G). \tag{2.19}$$

(b) G-скрученно и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно коммутативное умножение; а именно, для любых $g,h\in G$ и $X\in\mathrm{Jac}'(f,g)$, $Y\in\mathrm{Jac}'(f,h)$ мы имеем

$$X\circ Y=(-1)^{\overline{X}\cdot\overline{Y}}g^*(Y)\circ X, \tag{2.20}$$

где $\overline{X}=N-N_g$ и $\overline{Y}=N-N_h$ являются $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой X и Y, и g^* — индуцированное действие g, рассматриваемого как элемент $\mathrm{Aut}(f,G)$.

(5) Для любых $g, h \in G$ и $X \in \mathrm{Jac}'(f, g)$, $\omega \in \Omega'_{f,h}$, $\omega' \in \Omega'_{f,G}$ имеем

$$J_{f,G}(X \vdash \omega, \omega') = (-1)^{\overline{X}\cdot\overline{\omega}} J_{f,G}\left(\omega, ((h^{-1})^* X) \vdash \omega'\right), \tag{2.21}$$

где $\overline{X} = N - N_g$ и $\overline{\omega} = N - N_h$ являются $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировкой X и ω, и $(h^{-1})^*$ — индуцированное действие h^{-1}, рассматриваемое как элемент $\mathrm{Aut}(f, G)$.

(6) Пусть G' — конечная подгруппа G_f такая, что $G \subseteq G'$. Зафиксируем нигде не зануляющуюся N-форму и обозначим через ζ ее класс в $\Omega'_{f,\mathrm{id}}$. По аксиоме (3b) для G, G' фиксируем изоморфизмы, заданные ζ;

$$\mathrm{Jac}'(f, G) \xrightarrow{\cong} \Omega'_{f,G}, \quad X \mapsto X \vdash \zeta,$$
$$\mathrm{Jac}'(f, G') \xrightarrow{\cong} \Omega'_{f,G'}, \quad X' \mapsto X' \vdash \zeta.$$

Тогда инъективное отображение $\Omega'_{f,G} \longrightarrow \Omega'_{f,G'}$, индуцированное тождественными отображениями $\Omega'_{f,g} \longrightarrow \Omega'_{f,g}$, $g \in G$ задает инъективное отображение $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных $\mathbb{C}$-модулей $\mathrm{Jac}'(f, G) \to \mathrm{Jac}'(f, G')$, которое является гомоморфизмом алгебр.

2.1.2. Комментарии на аксиомы. Класс $\zeta \in \Omega'_{f,\mathrm{id}}$, задающий изоморфизм аксиомы (3b), является ненулевым константным множителем класса $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$. Отсюда следует, что $\mathrm{Aut}(f, G)$-действие на $\mathrm{Jac}'(f, G)$ не зависит от выбора ζ. В частности, $\mathrm{Aut}(f, G)$-действие на $\mathrm{Jac}'(f, \mathrm{id}) = \mathrm{Jac}(f)$ есть не что иное, как естественное действие, которое индуцируется $\mathrm{Aut}(f, G)$-действием на $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$. Таким образом, при различных выборах ζ мы получаем изоморфные алгебры.

Мы не использовали коммутативность G в аксиомах Определения 2.1.1, за исключением последней (6). Формулировка данной аксиомы может быть легко обобщена на некоммутативный случай заменой G_f на $G_{f,nc}$ — наибольшую подгруппу элементов $g \in \mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$, сохраняющих f и таких, что $\dim \mathrm{Jac}(f^g) < \infty$.

2.1.3. Гипотеза и определение. Обозначим через v_{id} класс $1 \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ в $\mathrm{Jac}'(f, \mathrm{id}) = \mathrm{Jac}(f)$, который является единицей по отношению к структуре умножения $\circ$, поскольку по аксиоме (5) мы имеем

$$J_{f,G}((X \circ v_{\mathrm{id}}) \vdash \zeta, \omega) = J_{f,G}(X \vdash (v_{\mathrm{id}} \vdash \zeta), \omega) = J_{f,G}(X \vdash \zeta, \omega) \tag{2.22}$$

для всех $X \in \mathrm{Jac}'(f, G)$, $\omega \in \Omega'_{f,G}$ и элемента $\zeta \in \Omega_{f,\mathrm{id}}$ задающего изоморфизм (2.17). Заметим также, что $\varphi^*(v_{\mathrm{id}}) = v_{\mathrm{id}}$ для всех $\varphi \in \mathrm{Aut}(f, G)$, поскольку $\varphi^*(v_{\mathrm{id}}) \vdash \varphi^*(\zeta) = \varphi^*(v_{\mathrm{id}} \vdash \zeta) = \varphi^*(\zeta) = v_{\mathrm{id}} \vdash \varphi^*(\zeta)$. В частности, v_{id} является G-инвариантным элементом.

Изоморфизм (2.17) из (2.10) влечёт

$$\varphi^*(\mathrm{Jac}'(f,g)) = \mathrm{Jac}'(f, \varphi\circ g\circ\varphi^{-1}), \quad \varphi\in\mathrm{Aut}(f,G). \tag{2.23}$$

В частности, $g^*(\mathrm{Jac}'(f,h)) = \mathrm{Jac}'(f,ghg^{-1})$ для $g,h\in G$. Если G коммутативна, то $g^*(\mathrm{Jac}'(f,h)) = \mathrm{Jac}'(f,h)$. Поскольку структура умножения $\circ$ также G-инвариантна по аксиоме (4a), мы получаем, что G-инвариантное подпространство $\mathrm{Jac}'(f,G)$ имеет структуру $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной коммутативной алгебры, которая является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно коммутативной в силу аксиомы (4b).

A priori, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная $\mathbb{C}$-алгебра, удовлетворяющая аксиомам Определения 2.1.1 может не быть единственной. Тем не менее мы ожидаем следующее

Гипотеза 2.1. *Для всякого орбифолда Ландау–Гинзбурга* (f,G)

(а) *Существует* G*-скрученная алгебра Якоби* $\mathrm{Jac}'(f,G)$.

(б) *Подалгебра* $(\mathrm{Jac}'(f,G))^G$ *определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Определение. Предположим, что гипотеза 2.1 верна для пары (f,G). Тогда $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно коммутативная алгебра

$$\mathrm{Jac}(f,G) := (\mathrm{Jac}'(f,G))^G \tag{2.24}$$

называется *орбифолдной алгеброй Якоби* (f,G).

В Теореме 2.1 мы доказываем Гипотезу 2.1 (на самом деле даже более сильное утверждение), для большого класса многочленов f — так называемых обратимых многочленов и любой их группы симметрии G.

При изоморфизме аксиомы (3b), из аксиомы (5) следует, что невырожденная G-скрученно $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно симметричная $\mathbb{C}$-билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega'_{f,G}$ снабжает $\mathrm{Jac}'(f,G)$ структурой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной фробениусовой алгебры. Если G является подгруппой G_f^{SL}, то $\mathrm{age}(g)\in\mathbb{Z}$ для всех $g\in G$, а класс ζ является G-инвариантным. Также, спаривание $J_{f,G}$ индуцирует $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно симметричное спаривание на $\Omega_{f,G}$ (Предложение 2.2). Отсюда немедленно следует, что для $G\subseteq G_f^{\mathrm{SL}}$ алгебра $\mathrm{Jac}(f,G)$ снабжена структурой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно коммутативной фробениусовой алгебры.

2.2. Орбифолдные алгебры Якоби обратимых многочленов

Пусть $I_g := \{i_1,\dots,i_{N_g}\}$ — подмножество $\{1,\dots,N\}$ такое, что $\mathrm{Fix}(g) = \{x\in\mathbb{C}^N \mid x_j = 0, j\notin I_g\}$. В частности, $I_{\mathrm{id}} = \{1,\dots,N\}$. Обозначим через I_g^c дополнение к I_g в I_{id}.

В дальнейшем нас будут интересовать, в основном, специальные пары элементов G_f.

Определение. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_N)$ — обратимый многочлен.

(1) Упорядоченная пара (g, h) элементов G_f называется *охватывающей*, если

$$I_g \cup I_h \cup I_{gh} = \{1, \dots, N\}. \tag{2.25}$$

(2) Для охватывающей пары (g, h) элементов G_f определим $I_{g,h} := I_g^c \cap I_h^c$.

(3) Для охватывающей пары (g, h) элементов G_f, существуют $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G_f$ такие, что $g = g_1 g_2$ и $h = h_1 h_2$ с $g_2 h_2 = \mathrm{id}$ и $I_{g_1,h_1} = \emptyset$. Набор (g_1, g_2, h_1, h_2) называется *факторизацией* (g, h).

Замечание 2.2. Для охватывающей пары (g, h) элементов G_f с точностью до переупорядочения переменных имеем

$$\begin{aligned} g =& (0, \dots, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \\ h =& (\gamma_1, \dots, \gamma_r, 0, \dots, 0, 1-\beta_1, \dots, 1-\beta_q), \end{aligned} \tag{2.26}$$

для некоторых рациональных чисел $0 < \alpha_i, \beta_i, \gamma_i < 1$; и целых чисел p, q, r таких, что $0 \le r \le N_g$ и $N_g + p + q = r + N_h + q = N$. Тогда $I_g \cap I_h = \{i_{r+1}, \dots, i_{N-q-p}\}$, $I_{g,h} = \{i_{N-q+1}, \dots, i_N\}$ и

$$\begin{aligned} g_1 =& (0, \dots, 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, 0, \dots, 0), \\ g_2 =& (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \dots, \beta_q), \\ h_1 =& (\gamma_1, \dots, \gamma_r, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\ h_2 =& (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1-\beta_1, \dots, 1-\beta_q). \end{aligned}$$

Предложение 2.3. *Для $f = x_1^{a_1} x_2 + \dots + x_{N-1}^{a_{N-1}} x_N + x_N^{a_N}$ типа цепь и любого $g \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$ существует $1 \le k \le N$, такое что $I_g^c = \{1, \dots, k\}$.*

Для $f = x_1^{a_1} x_2 + \dots + x_N^{a_N} x_1$ типа петля и любого $g \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$ имеет место $I_g^c = \{1, \dots, N\}$.

Доказательство. Это следует моментально из явного вида многочлена. □

Мы представляем один из самых важных объектов данного раздела.

Определение. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_N)$ — обратимый многочлен. Для каждой охватывающей пары (g, h) элементов G_f определим многочлен $H_{g,h} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ следующим равенством

$$H_{g,h} := \begin{cases} \widetilde{m}_{g,h} \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in I_{g,h}} & \text{если} \quad I_{g,h} \neq \emptyset \\ 1 & \text{если} \quad I_{g,h} = \emptyset \end{cases}, \tag{2.27}$$

где $\widetilde{m}_{g,h} \in \mathbb{C}^*$ — константа, однозначно определяемая следующим равенством в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$. Пусть $f^{g\cap h}$ — обратимый многочлен, заданный ограничением $f|_{\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h)}$ многочлена f на множество $\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h)$. Тогда $\widetilde{m}_{g,h}$ задается равенством

$$\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}[\mathrm{hess}(f^{g\cap h})H_{g,h}] = \frac{1}{\mu_{f^{gh}}}[\mathrm{hess}(f^{gh})], \tag{2.28}$$

Замечание 2.3. Многочлен $H_{g,h}$ является ненулевым константным множителем минора матрицы Гессе многочлена $f(x_1,\dots,x_N)$. Поскольку $I_g\cap I_h \subseteq I_{gh}$ и $I_{g,h}\subseteq I_{gh}$, многочлены $\mathrm{hess}(f^{g\cap h})$ и $H_{g,h}$ определяют элементы $\mathrm{Jac}(f^{gh})$.

Замечание 2.4. Пусть (g,h) является охватывающей парой элементов G_f. Предположим, что $\mathrm{Fix}(g)=\{\mathbf{0}\}$. Тогда $h=g^{-1}$. Легко проверить, что $H_{g,h} = \frac{1}{\mu_f}[\mathrm{hess}(f)]$. Напомним также, что согласно Определению 1.1, если $\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h) = \{\mathbf{0}\}$, то $\mu_{f^{g\cap h}}=1$ и $\mathrm{hess}(f^{g\cap h})=1$.

Поясним существование и единственность чисел $\widetilde{m}_{g,h}$ из Определения 2.2. Предположим, что $f = f_1\oplus\cdots\oplus f_p$ — сумма Тома–Себастьяни. Таким образом, каждый $f_\nu = f_\nu(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$, $\nu=1,\dots,p$ имеет тип либо цепь, либо цикл. Положим $I_\nu := \{i_1,\dots,i_m\}\subseteq\{1,\dots,N\}$ для всякого ν. Тогда $\mathrm{Jac}(f)=\mathrm{Jac}(f_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Jac}(f_p)$ и

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j\in I_{\mathrm{id}}} = \prod_{\nu=1}^{p}\det\left(\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j\in I_\nu}. \tag{2.29}$$

Для каждого $g\in G_f$ и f_ν как выше справедливо следующее:

- Если f_ν имеет тип цепь $f_\nu = x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}+\cdots+x_{i_{m-1}}^{a_{m-1}}x_{i_m}+x_{i_m}^{a_m}$, тогда существуют l, $0\le l\le m$ такие, что $\{i_1,\dots,i_l\}\subseteq I_g^c$ и $\{i_{l+1},\dots,i_m\}\subseteq I_g$.
- Если f_ν имеет тип цикл, то $I_\nu\subseteq I_g$ или $I_\nu\subseteq I_g^c$.

Классифицируем возможные случаи $I_{g,h}$.

Лемма 2.4. *Пусть (g,h) — охватывающая пара элементов G_f. Предположим, что $f=f_1\oplus\cdots\oplus f_p$ — сумма Тома–Себастьяни. Таким образом, каждый f_ν, $\nu=1,\dots,p$ имеет тип либо цепь, либо петля. Тогда для каждого $f_\nu = f_\nu(x_{i_1},\dots,x_{i_m})$ выполняется одно из следующих условий:*

(i) *f_ν имеет тип цепь и для некоторых $0\le l\le m$*
  (а) *$\{i_1,\dots,i_m\}\subseteq I_g$, $\{i_1,\dots,i_l\}\subseteq I_h^c$ и $\{i_{l+1},\dots,i_m\}\subseteq I_h$,*
  (а') *$\{i_1,\dots,i_m\}\subseteq I_h$, $\{i_1,\dots,i_l\}\subseteq I_g^c$ и $\{i_{l+1},\dots,i_m\}\subseteq I_g$,*
  (б) *$\{i_1,\dots,i_l\}\subseteq I_{g,h}$ и $\{i_{l+1},\dots,i_m\}\subseteq I_g\cap I_h$.*

(ii) *f_ν имеет тип петля и*
  (а) *$\{i_1,\dots,i_m\}\subseteq I_g\cap I_h$,*
  (б) *$\{i_1,\dots,i_m\}\subseteq I_g\cap I_h^c$,*

(б') $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq I_g^c \cap I_h$,
(с) $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq I_{g,h}$.

Доказательство. Утверждение легко вытекает из явного вида обратимого многочлена каждого типа и группового действия на нем. □

Очевидно, что только многочлены f_ν, удовлетворяющие $I_\nu \cap I_{g,h} \neq \emptyset$, вносят нетривиальный вклад в $H_{g,h}$. Такой f_ν удовлетворяет одному из следующих двух условий по Лемме 2.4:

(а) $I_\nu = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq I_{g,h}$,
(б) f_ν имеет тип цепь и для некоторых $0 \leq l \leq m-1$ $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq I_{g,h}$ и $\{i_{l+1}, \ldots, i_m\} \subseteq I_g \cap I_h$.

Положим $\Gamma_a := \{\nu \mid f_\nu$ удовлетворяет (а)$\}$ и $\Gamma_b := \{\nu \mid f_\nu$ удовлетворяет (б)$\}$. Так как $I_{gh} = I_{g,h} \cup (I_g \cap I_h)$, то имеем

$$f^{gh} = \bigoplus_{\nu_a \in \Gamma_a} f_{\nu_a} \oplus \bigoplus_{\nu_b \in \Gamma_b} f_{\nu_b} \oplus \bigoplus_{\substack{\nu \text{ s.t.} \\ I_\nu \subseteq I_g \cap I_h}} f_\nu, \tag{2.30}$$

где $\oplus$ обозначает сумму Тома-Себастьяни и, следовательно,

$$\mathrm{Jac}(f^{gh}) = \bigotimes_{\nu_a \in \Gamma_a} \mathrm{Jac}(f_{\nu_a}) \otimes \bigotimes_{\nu_b \in \Gamma_b} \mathrm{Jac}(f_{\nu_b}) \otimes \bigotimes_{\substack{\nu \text{ s.t.} \\ I_\nu \subseteq I_g \cap I_h}} \mathrm{Jac}(f_\nu). \tag{2.31}$$

Рассмотрим факторизацию

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j \in I_{g,h}} = \prod_{\nu_a \in \Gamma_a} \widetilde{H}_a^{(\nu_a)} \cdot \prod_{\nu_b \in \Gamma_b} \widetilde{H}_b^{(\nu_b)}, \tag{2.32}$$

где

$$\widetilde{H}_a^{(\nu_a)} := \det\left(\frac{\partial^2 f_{\nu_a}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j \in I_{\nu_a}}, \quad \widetilde{H}_b^{(\nu_b)} := \det\left(\frac{\partial^2 f_{\nu_b}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j \in I_{\nu_b} \cap I_{g,h}}. \tag{2.33}$$

Предположим для простоты, что $f_{\nu_b} = x_1^{a_1} x_2 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m + x_m^{a_m}$ с $I_{\nu_b} \cap I_{g,h} = \{1, \ldots, l\}$. Непосредственным вычислением в $\mathrm{Jac}(f_{\nu_b})$ имеем следующие равенства:

$$\left[\widetilde{H}_b^{(\nu_b)}\right] = \left(\prod_{i=1}^{l} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{l} (-1)^{l-j} \prod_{i=1}^{j} a_i\right) \left[x_1^{a_1-2} x_2^{a_2-1} \cdots x_l^{a_l-1} x_{l+1}\right], \tag{2.34a}$$

(2.34b)

$$\left[\mathrm{hess}(f_{\nu_b}|_{\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h)})\right] = \left(\prod_{i=l+1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=l}^{m} (-1)^{m-j} \prod_{i=l+1}^{j} a_i\right) \left[x_{l+1}^{a_{l+1}-2} x_{l+2}^{a_{l+2}-1} \cdots x_m^{a_m-1}\right],$$

$$[\mathrm{hess}(f_{\nu_b})] = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \prod_{i=1}^{j} a_i\right) \left[x_1^{a_1-2} x_2^{a_2-1} \cdots x_m^{a_m-1}\right]. \tag{2.34c}$$

Заметим, что

$$\mu_{f_{\nu_b}} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\prod_{i=1}^{j} a_i, \quad \mu_{f_{\nu_b}|_{\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h)}} = \sum_{j=l}^{m}(-1)^{m-j}\prod_{i=l+1}^{j} a_i. \tag{2.35}$$

Следовательно, легко увидеть существование и единственность $\widetilde{m}_{g,h}$.

Предложение 2.5. *Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_N)$ — обратимый многочлен. Для каждой охватывающей пары (g, h) элементов G_f справедливо следующее:*

(i) *Класс $H_{g,h}$ не равен нулю в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$.*

(ii) *Если $I_{g,h} = \emptyset$, то $[H_{g,g^{-1}}H_{h,h^{-1}}] = [H_{gh,(gh)^{-1}}]$ в $\mathrm{Jac}(f)$.*

(iii) *Для любого $j \in I_{g,h}$ класс $x_j H_{g,h}$ равен нулю в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$.*

Доказательство.

Поскольку для $I_{g,h} = \emptyset$ утверждения тривиально истинны, мы можем предположить, что $I_{g,h} \neq \emptyset$, Пункт (i) следует из уравнения (2.77), поскольку $[\mathrm{hess}(f^{gh})]$ не равен нулю. Пункт (ii) следует из нормировки $H_{g,h}$, заданной уравнением (2.77) с учетом уравнений (2.34).

Чтобы доказать часть (iii), сначала отметим, что существуют такое ν, $1 \leq \nu \leq p$, что $j \in I_\nu$ для некоторого f_ν. Причем, данный многочлен f_ν удовлетворяет одному из пунктов (а) или (б) выше. Благодаря факторизации $\mathrm{Jac}(f^{gh})$ достаточно показать, что $[x_j\widetilde{H}_a^{(\nu)}] = 0$, если $\nu \in \Gamma_a$, и $[x_j\widetilde{H}_b^{(\nu)}] = 0$, если $\nu \in \Gamma_b$. Поскольку первый случай очевиден, предположим, что $f_\nu \in \Gamma_b$, $I_\nu = \{1, \ldots, m\}$ и $I_\nu \cap I_{g,h} = \{1, \ldots, l\}$. Заметим, что $[\widetilde{H}_b^{(\nu)}]$ — это ненулевой константный множитель $[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\ldots x_l^{a_l-1}x_{l+1}]$. Легко вычислить по индукции, что $[x_1^{a_1-1}x_2] = 0$ и $[x_j^{a_j}x_{j+1}] = 0$ в $\mathrm{Jac}(f_\nu)$ для $j = 2, \ldots, l$. Следовательно, мы имеем $[x_j\widetilde{H}_b^{(\nu)}] = 0$ в $\mathrm{Jac}(f_\nu)$ для $j = 1, \ldots, l$ (см. также описание мономиального базиса в Предложении 1.5). Это завершает доказательство части (iii) предложения. □

Предложение 2.6. *Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_N)$ — обратимый многочлен. Для каждой охватывающей пары (g, h) элементов G_f имеем*

$$(N - N_g) + (N - N_h) \equiv (N - N_{gh}) \pmod 2. \tag{2.36}$$

Более того, если $I_{g,h} = \emptyset$, то $(N - N_g) + (N - N_h) = (N - N_{gh})$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $N - N_g = |I_g^c|$ — количество элементов в множестве I_g^c. Поэтому следующие равенства дают необходимое утверждение:

$$N - N_g = |I_g^c \backslash I_{g,h}| + |I_{g,h}|, \quad N - N_h = |I_h^c \backslash I_{g,h}| + |I_{g,h}|,$$

$$N - N_{gh} = |I^c_{gh}| = |I^c_g \backslash I_{g,h}| + |I^c_h \backslash I_{g,h}|.$$

□

Для каждого $g \in G_f$ множество $I_g \subseteq \{1, \dots, N\}$ и его дополнение I^c_g часто будут рассматриваться как подпоследовательность $(1, \dots, N)$:

$$I_g = (i_1, \dots, i_{N_g}),\ i_1 < \dots < i_{N_g}, \quad I^c_g = (j_1, \dots, j_{N-N_g}),\ j_1 < \dots < j_{N-N_g}. \tag{2.37}$$

Определение. Пусть $g_1, \dots, g_k$ — элементы G_f, такие что $I_{g_i,g_j} = \emptyset$, если $i \neq j$.

(1) Обозначим через $I^c_{g_1} \sqcup I^c_{g_2}$ последовательность, полученную добавлением последовательности $I^c_{g_2}$ в конец последовательности $I^c_{g_1}$. Определим индуктивно $I^c_{g_1} \sqcup \dots \sqcup I^c_{g_k}$ по $\left(I^c_{g_1} \sqcup \dots \sqcup I^c_{g_{k-1}}\right) \sqcup I^c_{g_k}$. Очевидно, что как множество $I^c_{g_1 \dots g_k} = I^c_{g_1} \sqcup \dots \sqcup I^c_{g_k}$.

(2) Пусть $\sigma_{g_1,\dots,g_k}$ — перестановка, которая переводит последовательность $I^c_{g_1} \sqcup \dots \sqcup I^c_{g_k}$ в последовательность $I^c_{g_1 \dots g_k}$. Определим $\widetilde{\varepsilon}_{g_1,\dots,g_k}$ как знак $\operatorname{sgn}(\sigma_{g_1,\dots,g_k})$ перестановки $\sigma_{g_1,\dots,g_k}$.

Из определения немедленно следуют свойства

$$\widetilde{\varepsilon}_{g,\mathrm{id}} = 1 = \widetilde{\varepsilon}_{\mathrm{id},g}, \qquad g \in G_f,$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{g,h} = (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \widetilde{\varepsilon}_{h,g}, \qquad g, h \in G_f,\ I_{g,h} = \emptyset,$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{g,g'} \widetilde{\varepsilon}_{gg',g''} = \widetilde{\varepsilon}_{g,g',g''} = \widetilde{\varepsilon}_{g,g'g''} \widetilde{\varepsilon}_{g',g''}, \qquad g, g', g'' \in G_f,\ I_{g,g'} = I_{g',g''} = I_{g,g''} = \emptyset.$$

2.2.1. Единственность. В этом разделе $f = f(x_1, \dots, x_N)$ обозначает обратимый многочлен.

Основной целью данного раздела является доказательство того, что для любого $G \subseteq G_f$ аксиомы Определения 2.1.1 определяют однозначно $\mathrm{Jac}'(f, G)$ с точностью до изоморфизма. Для этого нужно только показать, что для $g, h \in G$ произведение $\circ : \mathrm{Jac}'(f, g) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}'(f, h) \longrightarrow \mathrm{Jac}'(f, gh)$ определяется однозначно с точностью до перескалирования генераторов $\mathrm{Jac}(f^g)$-модулей $\mathrm{Jac}'(f, g)$.

Рассмотрим нигде не зануляющуюся N-форму $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$ и положим $\zeta := [dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N] \in \Omega_f$. Для каждой подгруппы $G \subseteq G_f$ зафиксируем изоморфизм аксиомы (3)

$$\vdash : \mathrm{Jac}'(f, G) \xrightarrow{\cong} \Omega'_{f,G}, \quad X \mapsto X \vdash \zeta, \tag{2.38}$$

где ζ рассматривается как элемент $\Omega'_{f,\mathrm{id}} = \Omega_f$ (см. Определение 2.1).

Зафиксируем также отображение

$$\alpha : G_f \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad g \mapsto \alpha_g, \tag{2.39}$$

так, что $\alpha_{\mathrm{id}} = 1$ и

$$\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g+1)}, \quad g \in G_f. \tag{2.40}$$

Такое отображение α всегда существует, поскольку для каждого g мы можем выбрать в качестве α_g

$$\alpha_g = \mathbf{e}\left[\frac{1}{8}(N-N_g)(N-N_g+1)\right]. \tag{2.41}$$

Для каждого $g \in G$ обозначим через v_g элемент $\mathrm{Jac}'(f,g)$, такой, что

$$v_g \vdash \zeta = \alpha_g \omega_g, \tag{2.42}$$

где $\omega_g \in \Omega'_{f,g}$ — это класс $\widetilde{\omega}_g \in \Omega^{N_g}(\mathrm{Fix}(g))$ и

$$\widetilde{\omega}_g := \begin{cases} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{N_g}} & \text{если } I_g = (i_1, \ldots, i_{N_g}),\ i_1 < \cdots < i_{N_g} \\ 1_g & \text{если } I_g = \emptyset \end{cases}. \tag{2.43}$$

Очевидно, что $\omega_{\mathrm{id}} = \zeta$.

Замечание 2.5. Для доказательства единственности алгебры $\mathrm{Jac}(f,G)$ нет необходимости различать ζ и ω_{id}, однако мы рассматриваем ζ как «примитивную форму». (ср. **[S82, S83, ST08]**) в начале координат «правильно определенного пространства деформации» пары (f,G). В то же время мы рассматриваем ω_{id} только лишь как $\mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id})$-базис $\Omega'_{f,\mathrm{id}}$.

По аксиоме (1) имеем $\mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id}) = \mathrm{Jac}(f)$. Следовательно, $v_{\mathrm{id}} = [1]$ и $v_{\mathrm{id}} \circ v_g = v_g \circ v_{\mathrm{id}} = v_g$ по аксиомам (2) и (3a). Аксиома (3a) подразумевает, что для всех $Y \in \mathrm{Jac}'(f,g)$ существует $X \in \mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id}) = \mathrm{Jac}(f)$ представленный многочленом от координат $\{x_i\}_{i\in I_g}$ таким, что $Y = X \circ v_g$. Для любого $X \in \mathrm{Jac}'(f,\mathrm{id})$ мы будем использовать вместо $X \circ v_g$ упрощенную запись $X|_{\mathrm{Fix}(g)} v_g$, где $X|_{\mathrm{Fix}(g)}$ — образ X при отображении $\mathrm{Jac}(f) \longrightarrow \mathrm{Jac}(f^g)$.

Предложение 2.7. *Для пары (g,h) элементов из G, которая не является охватывающей, имеем $v_g \circ v_h = 0 \in \mathrm{Jac}'(f,G)$.*

Доказательство. Обозначим через $[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$ элемент $\mathrm{Jac}(f^{gh})$, удовлетворяющий $v_g \circ v_h = [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})] v_{gh}$. Пусть $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_p$ — сумма Тома–Себастьяни, такая, что каждый f_ν, $\nu = 1, \ldots, p$ имеет тип либо цепь, либо цикл. Без потери общности можно предположить, что координаты x_k, $k \notin I_g \cup I_h \cup I_{gh}$ являются переменными многочлена f_1. Рассмотрим следующие два случая;

(a) $f_1 = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m + x_m^{a_m}$ имеет тип цепь.

(b) $f_1 = x_1^{a_1} x_2 + x_2^{a_2} x_3 + \cdots + x_{m-1}^{a_{m-1}} x_m + x_m^{a_m} x_1$ имеет тип цикл.

Случай (а): Заметим, что $1 \notin I_g \cup I_h \cup I_{gh}$. Рассмотрим $(\frac{1}{a_1}, 0 \dots, 0) \in \mathrm{Aut}(f_1, G)$ и естественным образом расширим его до элемента $\varphi \in \mathrm{Aut}(f, G)$. Поскольку $1 \notin I_g \cup I_h \cup I_{gh}$, мы имеем $\varphi^*(v_{g'}) = \mathbf{e}\left[-\frac{1}{a_1}\right] v_{g'}$ для $g' \in \{g, h, gh\}$. Аксиома (4а) дает $\varphi^*([\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]) = \mathbf{e}\left[-\frac{1}{a_1}\right] [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$. С другой стороны, мы имеем $\varphi^*([\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]) = [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$, поскольку $1 \notin I_{gh}$. Следовательно, $[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})] = 0$.

Случай (б): Заметим, что $1, \dots, m \notin I_g \cup I_h \cup I_{gh}$. Выберем некоторый элемент $G_{f_1} \backslash G_{f_1}^{\mathrm{SL}}$. Таковой существует согласно Предложению 1.4, и естественным образом продолжим его до элемента $\varphi \in \mathrm{Aut}(f, G)$.

Существует комплексное число $\lambda_\varphi \neq 1$ — определитель элемента φ, рассматриваемого как элемент $\mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$, такой, что $\varphi^*(v_{g'}) = \lambda_\varphi^{-1} v_{g'}$ для $g' \in \{g, h, gh\}$, поскольку $1, \dots, m \notin I_g \cup I_h \cup I_{gh}$. Аксиома 4а дает $\varphi^*([\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]) = \lambda_\varphi^{-1}[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$. С другой стороны, мы имеем $\varphi^*([\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]) = [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$, поскольку $1, \dots, m \notin I_{gh}$. Следовательно, $[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})] = 0$. □

Рассмотрим произведение $v_g \circ v_h$ для охватывающей пары (g, h).

Предложение 2.8. *Для каждой охватывающей пары (g, h) элементов G существует комплексное число $c_{g,h} \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$v_g \circ v_h = c_{g,h}[H_{g,h}] v_{gh}. \tag{2.44}$$

Более того, $c_{g,h}$ не зависит от выбора подгруппы G из G_f, содержащей g, h.

Доказательство. Нам нужно показать только первое утверждение, так как второе следует из него и аксиомы (6), определения v_g в (2.42) и независимости $H_{g,h}$ от конкретного выбора G.

С помощью Леммы 2.4 исследуем, как переменные многочлена f_ν могут входить в структурные константы произведения.

Лемма 2.9. *Пусть обозначения и разбиение на случаи будут как в Лемме 2.4 выше.*

Существует многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$, который не зависит от $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, такой, что выполняется одно из следующих условий:

(i) (а) $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})] v_{gh}$.

(б) $v_g \circ v_h = \begin{cases} \left[\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \cdot \left(x_{i_1}^{a_{i_1}-2} x_{i_2}^{a_{i_2}-1} \cdots x_{i_m}^{a_{i_m}-1}\right)\right] v_{gh} & \text{если } l = m \\ \left[\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \cdot \left(x_{i_1}^{a_{i_1}-2} x_{i_2}^{a_{i_2}-1} \cdots x_{i_l}^{a_{i_l}-1} x_{i_{l+1}}\right)\right] v_{gh} & \text{если } l < m \end{cases}$,

(ii) (а) $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})] v_{gh}$.

(б) $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})] v_{gh}$.

(с) $v_g \circ v_h = \left[\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \cdot \left(x_{i_1}^{a_{i_1}-1} x_{i_2}^{a_{i_2}-1} \cdots x_{i_m}^{a_{i_m}-1}\right)\right] v_{gh}$.

Здесь мы обозначаем через $[\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]$ *класс* $\gamma_{g,h}(\mathbf{x})$ *в* $\mathrm{Jac}(f^{gh})$.

Доказательство. (i): Мы можем предположить, что $f_\nu = x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_m^{a_m}$. Для каждого $r = 1, \ldots, m$ существует единственный элемент $\varphi_r \in \mathrm{Aut}(f_\nu, G)$ такой, что $\varphi_r(x_i) = x_i$ для всех $i = r+1, \ldots, m$. Такой элемент может быть задан явно формулой

$$\varphi_r(x_r) := \mathbf{e}\left[\frac{1}{a_r}\right] x_r,$$
$$\varphi_r(x_i) := \mathbf{e}\left[\frac{1}{a_i}\left(1 - \frac{1}{a_{i+1}}\left(1 - \cdots - \frac{1}{a_{r-1}}\left(1 - \frac{1}{a_r}\right)\right)\right)\right] x_i,\ 1 \le i < r.$$

Обозначим также за φ_p его естественное продолжение до элемента $\mathrm{Aut}(f, G)$ и за $\lambda_{\varphi_r} \in \mathbb{C}^*$ определитель φ_r рассматриваемого как элемент $\mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$.

(а) Для каждого $r = 1, \ldots, m$ имеем $\varphi_r^*(v_g) = v_g$, $\varphi_r^*(v_h) = \lambda_{\varphi_r}^{-1} v_h$ и $\varphi_r^*(v_{gh}) = \lambda_{\varphi_r}^{-1} v_{gh}$. Предположим, что многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ удовлетворяет $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}$. По аксиоме (4a) получаем

$$\begin{aligned}[\varphi_r^*(\gamma_{g,h}(\mathbf{x}))]v_{gh} &= \lambda_{\varphi_r}\varphi_r^*([\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}) = \lambda_{\varphi_r}\varphi_r^*(v_g \circ v_h) \\ &= \lambda_{\varphi_r}\varphi_r^*(v_g) \circ \varphi_r^*(v_h) = v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh},\end{aligned}$$

и, следовательно, $\varphi_r^*([\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]) = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]$ в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$. Ввиду вышеприведенного действия φ_r и Предложения 1.5, многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x})$ можно выбрать так, чтобы он не зависел от x_i, $i = 1, \ldots, m$.

(б) Для каждого $r = 1, \ldots, m$ мы имеем $\varphi_r^*(v_g) = \lambda_{\varphi_r}^{-1} v_g$, $\varphi_r^*(v_h) = \lambda_{\varphi_r}^{-1} v_h$ и $\varphi_r^*(v_{gh}) = v_{gh}$. Предположим, что многочлен $\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ удовлетворяет $v_g \circ v_h = [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}$. По аксиоме (4a) получаем

$$\begin{aligned}[\varphi_r^*(\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}))]v_{gh} &= \varphi_r^*([\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}) = \varphi_r^*(v_g \circ v_h) \\ &= \varphi_r^*(v_g) \circ \varphi_r^*(v_h) = \lambda_{\varphi_r}^{-2}(v_g \circ v_h) = \lambda_{\varphi_r}^{-2}[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh},\end{aligned}$$

и, следовательно, $[\varphi_r^*(\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}))] = \lambda_{\varphi_r}^{-2}[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$ в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$. Ввиду вышеприведенного действия φ_r и Предложения 1.5, многочлен $\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})$ можно выбрать так, что он делится на $x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_m^{a_m-1}$ если $l = m$ и на $x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_l^{a_l-1}x_{l+1}$, если $l < m$.

(ii): Мы можем считать, что $f_\nu = x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \cdots + x_m^{a_m}x_1$. Для каждого элемента $\varphi \in G_{f_\nu}$, рассматриваемого как элемент $\mathrm{Aut}(f_\nu, G)$, обозначим через φ его естественное продолжение до элемента $\mathrm{Aut}(f, G)$. Пусть $\lambda_\varphi \in \mathbb{C}^*$ — определитель элемента φ, рассматриваемого как элемент $\mathrm{GL}(N; \mathbb{C})$. Заметим, что если $\varphi \neq \mathrm{id}$, то $\varphi(x_i) \neq x_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

(а) Для всех $\varphi \in G_{f_\nu}$ имеем $\varphi^*(v_g) = v_g$, $\varphi^*(v_h) = v_h$ и $\varphi^*(v_{gh}) = v_{gh}$. Предположим, что многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ удовлетворяет $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}$. По аксиоме (4а) получаем

$$\begin{aligned}[\varphi^*(\gamma_{g,h}(\mathbf{x}))]v_{gh} &= \varphi^*(\gamma_{g,h}(\mathbf{x})v_{gh}) = \varphi^*(v_g \circ v_h) \\ &= \varphi^*(v_g) \circ \varphi^*(v_h) = v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh},\end{aligned}$$

и, следовательно, $[\varphi^*(\gamma_{g,h}(\mathbf{x}))] = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]$ в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$. Ввиду Предложения 1.5, многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x})$ можно выбрать так, чтобы он не зависел от x_i, $i = 1, \ldots, m$.

(б) Предположим, что многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ удовлетворяет $v_g \circ v_h = [\gamma_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}$. Поскольку $1, \ldots, m$ не принадлежат ни $I_g \cap I_h$, ни $I_{g,h}$, очевидно, что многочлен $\gamma_{g,h}(\mathbf{x})$ можно выбрать так, чтобы он не зависел от x_i, $i = 1, \ldots, m$.

(с) Для всех $\varphi \in G_{f_\nu}$ имеем $\varphi^*(v_g) = \lambda_\varphi^{-1} v_g$, $\varphi^*(v_h) = \lambda_\varphi^{-1} v_h$ и $\varphi^*(v_{gh}) = v_{gh}$. Предположим, что многочлен $\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ удовлетворяет $v_g \circ v_h = [\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh}$. По аксиоме (4а) получаем

$$\begin{aligned}[\varphi^*(\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}))]v_{gh} &= \varphi^*(\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})v_{gh}) = \varphi^*(v_g \circ v_h) \\ &= \varphi^*(v_g) \circ \varphi^*(v_h) = \lambda_\varphi^{-2}(v_g \circ v_h) = \lambda_\varphi^{-2}[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]v_{gh},\end{aligned}$$

и, следовательно, $[\varphi^*(\gamma'_{g,h}(\mathbf{x}))] = \lambda_\varphi^{-2}[\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})]$ в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$. Ввиду Предложения 1.5, многочлен $\gamma'_{g,h}(\mathbf{x})$ можно выбрать так, что он делится на $x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} \cdots x_m^{a_m-1}$.

□

Теперь первое утверждение предложения является прямым следствием Леммы 2.9, поскольку $H_{g,h}$ является константным множителем произведения одночленов в круглых скобках. Мы завершили доказательство предложения. □

Согласно Предложению 2.8, мы можем считать, что $G = G_f$. Приведем некоторые свойства $c_{g,h}$.

Лемма 2.10. *Для каждого $g \in G_f$ выполняется*

$$c_{g,g^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right]. \tag{2.45}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{f^g}} J_{f,g}([\mathrm{hess}(f^g)]v_g \vdash \zeta, v_{g^{-1}} \vdash \zeta) &= \frac{\alpha_g \alpha_{g^{-1}}}{\mu_{f^g}} J_{f,g}([\mathrm{hess}(f^g)]\omega_g, \omega_{g^{-1}}) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot |G|.\end{aligned}$$

С другой стороны, по аксиоме (5) и нормировке (2.77) $H_{g,h}$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{f^g}} J_{f,g}([\mathrm{hess}(f^g)]v_g \vdash \zeta, v_{g^{-1}} \vdash \zeta) &= \frac{1}{\mu_{f^g}} J_{f,id}(\omega_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f^g)]v_g \circ v_{g^{-1}} \vdash \zeta) \\ &= \frac{1}{\mu_{f^g}} J_{f,id}(\omega_{\mathrm{id}}, c_{g,g^{-1}}[\mathrm{hess}(f^g)H_{g,g^{-1}}]\omega_{\mathrm{id}}) \\ &= \frac{c_{g,g^{-1}}}{\mu_f} J_{f,id}(\omega_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f)]\omega_{\mathrm{id}}) \\ &= c_{g,g^{-1}}|G|.\end{aligned}$$

□

Лемма 2.11. *Для каждой пары (g,h) элементов G_f такой, что $I_{g,h} = \emptyset$, мы имеем*

$$c_{g,h}c_{h^{-1},g^{-1}} = (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)}. \tag{2.46}$$

В частности, отсюда следует, что $c_{g,h} \neq 0$.

Замечание 2.6. Если $I_{g,h} = \emptyset$ для пары (g,h) элементов из G_f, то она является охватывающей.

Доказательство. Имеет место

$$\begin{aligned}&v_g \circ (v_h \circ v_{h^{-1}}) \circ v_{g^{-1}} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)+\frac{1}{2}(N-N_h)(N-N_h-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(h)\right][g^*(H_{h,h^{-1}})H_{g,g^{-1}}]v_{\mathrm{id}}, \\ &(v_g \circ v_h) \circ (v_{h^{-1}} \circ v_{g^{-1}}) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{gh})(N-N_{gh}-1)}\mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(gh)\right] c_{g,h}c_{h^{-1},g^{-1}}[H_{gh,(gh)^{-1}}]v_{\mathrm{id}}.\end{aligned}$$

Теперь предложение следует из того факта, что произведение $\circ$ ассоциативно, $g^*(H_{h,h^{-1}}) = H_{h,h^{-1}}$ поскольку $I_{g,h} = \emptyset$, $[H_{g,g^{-1}}H_{h,h^{-1}}] = [H_{gh,(gh)^{-1}}]$ в $\mathrm{Jac}(f)$, $\mathrm{age}(g)+\mathrm{age}(h) = \mathrm{age}(gh)$, так как $I_{g,h} = \emptyset$, и $(N-N_g)+(N-N_h) \equiv (N-N_{gh}) \pmod 2$ по Предложению 2.6. □

Следствие 2.12. *Пусть (g,h) — охватывающая пара элементов G_f с факторизацией (g_1,g_2,h_1,h_2). Тогда комплексные числа c_{g_1,h_2}, c_{g_2,h_1} и c_{g_1,h_1} не равны нулю.*

Доказательство. Это следует из того, что $I_{g_1,h_2} = \emptyset$, $I_{g_2,h_1} = \emptyset$ и $I_{g_1,h_1} = \emptyset$. □

Предложение 2.13. *Пусть* (g,h) — *охватывающая пара элементов* G_f *с факторизацией* (g_1,g_2,h_1,h_2). *Тогда*

$$c_{g,h} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{c_{g_1,h_1}}{c_{g_1,g_2}c_{h_2,h_1}}. \tag{2.47}$$

В частности, $c_{g,h} \neq 0$.

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned} v_{g_1} \circ (v_{g_2} \circ v_{h_2}) \circ v_{h_1} &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot v_{g_1} \circ [H_{g_2,g_2^{-1}}] v_{\mathrm{id}} \circ v_{h_1} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot c_{g_1,h_1}[H_{g_2,g_2^{-1}}] v_{gh}. \end{aligned}$$

С другой стороны, мы получаем:

$$\begin{aligned} (v_{g_1} \circ v_{g_2}) \circ (v_{h_2} \circ v_{h_1}) &= c_{g_1,g_2} e_{g_1 g_2} \circ c_{h_2,h_1} v_{h_1 h_2} \\ &= c_{g_1,g_2} c_{h_2,h_1} c_{g,h} [H_{g,h}] v_{gh}. \end{aligned}$$

Заметим, что $H_{g,h} = H_{g_2,g_2^{-1}} = H_{h_2,h_2^{-1}}$ по определению факторизации (g_1,g_2,h_1,h_2). Из Следствию 2.12 мы знаем, что c_{g_1,g_2} и c_{h_2,h_1} не равны нулю, что дает утверждение. □

Согласно этому предложению, достаточно определить $c_{g,h}$ для всех пар (g,h) элементов G_f таких, что $I_{g,h} = \emptyset$.

Предположим, что $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_p$ — сумма Тома–Себастьяни, такая, что каждый f_ν, $\nu = 1,\ldots,p$ имеет тип либо цепь, либо петля. Тогда мы имеем естественный изоморфизм $G_f \cong G_{f_1} \times \cdots \times G_{f_p}$. Следовательно, каждый элемент $g \in G_f$ имеет уникальное представление $g = g_1 \cdots g_p$ такое, что $g_i \in G_{f_i}$ для всех $i = 1,\ldots,p$. Следовательно, $I_{g_i,g_j} = \emptyset$, для всяких $i \neq j$ и $I_g^c = I_{g_1}^c \cup \cdots \cup I_{g_p}^c$. В приведенных обозначениях определим $\widetilde{v}_g$ как

$$\widetilde{v}_g := \widetilde{\varepsilon}_{g_1,\ldots,g_p} v_{g_1} \circ \cdots \circ v_{g_p}. \tag{2.48}$$

Очевидно, $\widetilde{v}_g$ является ненулевым константным множителем v_g для всех $g \in G_f$. Также легко видеть, что $\widetilde{v}_g$ не зависит от выбора порядка в сумме Тома–Себастьяни, и что для пары (g,h) элементов из G_f с $I_{g,h} = \emptyset$ мы имеем

$$\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_h = \frac{1}{\widetilde{\varepsilon}_{g,h}} \widetilde{v}_{gh}. \tag{2.49}$$

Предложение 2.14. *Для каждого* $g \in G$ *верно*

$$\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_{g^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot [H_{g,g^{-1}}] \widetilde{v}_{\mathrm{id}}. \tag{2.50}$$

Доказательство. Существует индуктивное представление $\widetilde{v}_g$, заданное формулой

$$\widetilde{v}_g = \begin{cases} v_{g_1} & \text{если} \quad g = g_1, \\ \widetilde{\varepsilon}_{g_1 \dots g_i, g_{i+1}} \widetilde{v}_{g_1 \dots g_i} \circ v_{g_{i+1}} & \text{если} \quad g = g_1 \dots g_i g_{i+1},\ i = 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Утверждение следует по индукции из следующего вычисления:

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_{g^{-1}} &= (\widetilde{\varepsilon}_{g_1 \dots g_i, g_{i+1}} \widetilde{v}_{g_1 \dots g_i} \circ v_{g_{i+1}}) \circ (\widetilde{\varepsilon}_{g_1^{-1} \dots g_i^{-1}, g_{i+1}^{-1}} \widetilde{v}_{g_1^{-1} \dots g_i^{-1}} \circ v_{g_{i+1}^{-1}}) \\ &= (-1)^{(N - N_{g_1^{-1} \dots g_i^{-1}})(N - N_{g_{i+1}})} \cdot (\widetilde{v}_{g_1 \dots g_i} \circ \widetilde{v}_{g_1^{-1} \dots g_i^{-1}}) \circ (v_{g_{i+1}} \circ v_{g_{i+1}^{-1}}) \\ &= (-1)^{(N - N_{g_1 \dots g_i})(N - N_{g_{i+1}}) + \frac{1}{2}(N - N_{g_1 \dots g_i})(N - N_{g_1 \dots g_i} - 1) + \frac{1}{2}(N - N_{g_{i+1}})(N - N_{g_{i+1}} - 1)} \\ &\quad \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1 \dots g_i) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(g_{i+1}) \right] \cdot [H_{g_1 \dots g_i, g_1^{-1} \dots g_i^{-1}} H_{g_{i+1}, g_{i+1}^{-1}}] \widetilde{v}_{\mathrm{id}} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(N - N_g)(N - N_g - 1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g) \right] \cdot [H_{g, g^{-1}}] \widetilde{v}_{\mathrm{id}}. \end{aligned}$$

□

Из этого Предложения следует, что, заменив отображение $\alpha : G_f \longrightarrow \mathbb{C}^*$ на некоторое подходящее, мы имеем в качестве нового базиса $\{\widetilde{v}_g\}_{g \in G_f}$ вместо $\{v_g\}_{g \in G_f}$. Подводя итог, мы получаем следующее

Следствие 2.15. *Пусть (g, h) — охватывающая пара элементов G_f с факторизацией (g_1, g_2, h_1, h_2). Тогда*

$$\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_h = (-1)^{\frac{1}{2}(N - N_{g_2})(N - N_{g_2} - 1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2) \right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1, g_2} \widetilde{\varepsilon}_{h_2, h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1, h_1}} [H_{g,h}] \widetilde{v}_{gh}. \tag{2.51}$$

В частности, для любой подгруппы G из G_f, если G-скрученная алгебра Якоби f существует, то она однозначно определяется аксиомами Определения 2.1.1 с точностью до изоморфизма.

2.2.2. Существование. В этом разделе мы докажем существование G-скрученной алгебры Якоби f. Сначала рассмотрим случай $G = G_f$.

Определение. Определим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный $\mathbb{C}$-модуль $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_{\overline{0}} \oplus \mathcal{A}'_{\overline{1}}$ следующим образом: для каждого $g \in G_f$ рассмотрим свободный $\mathrm{Jac}(f^g)$-модуль $\mathcal{A}'_g$ ранга один, порожденный $\overline{v}_g$ (рассмотренным как формальный символ),

$$\mathcal{A}'_g = \mathrm{Jac}(f^g) \overline{v}_g. \tag{2.52}$$

Положим

$$\mathcal{A}'_{\overline{0}} := \bigoplus_{\substack{g \in G_f \\ N - N_g \equiv 0 \pmod 2}} \mathcal{A}'_g, \quad \mathcal{A}'_{\overline{1}} := \bigoplus_{\substack{g \in G_f \\ N - N_g \equiv 1 \pmod 2}} \mathcal{A}'_g. \tag{2.53}$$

По определению, аксиома (1) тривиально выполняется для $\mathcal{A}'$.

Определение. Для охватывающей пары (g,h) элементов G_f с факторизацией (g_1,g_2,h_1,h_2) положим

$$\overline{c}_{g,h} := (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}}. \tag{2.54}$$

Также легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\overline{c}_{g,\mathrm{id}} = 1 = \overline{c}_{\mathrm{id},g}, && g \in G_f,\\
&\overline{c}_{g,g^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right], && g \in G_f,\\
&\overline{c}_{g,h} = \widetilde{\varepsilon}^{-1}_{g,h}, && g,h \in G_f,\ I_{g,h} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Определение. Для каждого $g,h \in G_f$ определим элемент $\mathcal{A}'_{gh}$ посредством

$$\overline{v}_g \circ \overline{v}_h := \begin{cases} \overline{c}_{g,h}\,[H_{g,h}]\,\overline{v}_{gh} & \text{если пара } (g,h) \text{ охватывающая} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \tag{2.55}$$

Очевидно, что $\overline{v}_{\mathrm{id}} \circ \overline{v}_g = \overline{v}_g = \overline{v}_g \circ \overline{v}_{\mathrm{id}}$ поскольку $I_{\mathrm{id},g} = I_{g,\mathrm{id}} = \emptyset$ и, следовательно, $[H_{\mathrm{id},g}] = [H_{g,\mathrm{id}}] = 1$.

Предложение 2.16. *Для охватывающей пары (g,h) элементов G_f с факторизацией (g_1,g_2,h_1,h_2) верно*

$$\overline{c}_{g,h} = (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \overline{c}_{h,g}. \tag{2.56}$$

Следовательно, выполнено

$$\overline{v}_g \circ \overline{v}_h = (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot \left(\mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g_2)\right]\overline{v}_h \circ \overline{v}_g\right). \tag{2.57}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{g,h} =& (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}}\\
=& (-1)^{(N-N_{g_1})(N-N_{g_2})+(N-N_{h_1})(N-N_{h_2})-(N-N_{g_1})(N-N_{h_1})+(N-N_{g_2})} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g_2)\right]\\
&\cdot (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{h_2})(N-N_{h_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(h_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,g_1}}\\
=& (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \overline{c}_{h,g},
\end{aligned}$$

где мы использовали равенство $h_2 = g_2^{-1}$, $N - N_{g_2} = \mathrm{age}(g_2) + \mathrm{age}(h_2)$ и Предложение 2.6. □

Предложение 2.17. *Для каждого $g, g', g'' \in G_f$ выполнено равенство*

$$(\overline{v}_g \circ \overline{v}_{g'}) \circ \overline{v}_{g''} = \overline{v}_g \circ (\overline{v}_{g'} \circ \overline{v}_{g''}). \tag{2.58}$$

Доказательство. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 2.18. *Для $g, g', g'' \in G_f$ предположим, что (g, g') и (gg', g'') являются охватывающими парами с $I_{g,g'} \subseteq I_{g''}$. Тогда*

(1) *Существуют $g_1, g_2, g_3, g'_1, g'_2, g'_3, g''_1, g''_2, g''_3 \in G_f$ такие, что*

$$g = g_1 g_2 g_3,\ g' = g'_1 g'_2 g'_3,\ g'' = g''_1 g''_2 g''_3,\quad g'_1 g''_1 = \mathrm{id}, g_2 g''_2 = \mathrm{id},\ g_3 g'_3 = \mathrm{id}, \tag{2.59}$$

и $(g_1 g_2, g_3, g'_1 g'_2, g'_3)$ является факторизацией (g, g') и $(g_1 g'_2, g_2 g'_1, g''_3, g''_1 g''_2)$ — факторизация (gg', g'').

(2) *Пары (g', g'') и $(g, g'g'')$ являются охватывающими, так что $I_{g',g''} \subseteq I_g$.*

Доказательство. (i) Аналогично представлению (2.26), элементы g, g', g'', удовлетворяющие приведённым условиям, могут быть выражены в мультипликативной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} g &= g_1 \cdot g_2 \cdot \mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \cdot g_3 \cdot \mathrm{id}, \\ g' &= \mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \cdot g'_1 \cdot g'_2 \cdot g'_3 \cdot \mathrm{id}, \\ g'' &= \mathrm{id} \cdot g''_2 \cdot g''_1 \cdot \mathrm{id} \cdot \mathrm{id} \cdot g''_3. \end{aligned}$$

(ii) Из вышеизложенного легко видеть, что (g, g') и (gg', g'') являются охватывающими парами. Из $g'_1 g''_1 = \mathrm{id}$ следует, что $I_{g',g''} \subseteq I_g$. □

Лемма 2.19. *Левая часть* (2.58) *не равна нулю тогда и только тогда, когда правая часть* (2.58) *не равна нулю.*

Доказательство. По Предложению 2.5 (iii) левая часть (2.58) не равна нулю тогда и только тогда, когда обе пары (g, g') и (gg', g'') являются охватывающими и $I_{g,g'} \subseteq I_{g''}$. Правая часть (2.58) не равна нулю тогда и только тогда, когда обе пары $(g, g'g'')$ и (g', g'') являются охватывающими и $I_{g',g''} \subseteq I_g$. Тогда Лемма 2.18 и Предложение 2.16 дают утверждение. □

Лемма 2.20. *Имеет место равенство*

$$H_{g,g'} = H_{g_3,g'_3},\ H_{gg',g''} = H_{g_2 g'_1, g''_2 g''_1},\ H_{g,g'g''} = H_{g_2 g_3, g''_2 g'_3},\ H_{g',g''} = H_{g'_1,g''_1}. \tag{2.60}$$

Следовательно, $[H_{g,g'} H_{gg',g''}] = [H_{g,g'g''} H_{g',g''}]$ в $\mathrm{Jac}(f^{gg'g''})$.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения $H_{g,h}$, а второе — из Предложения 2.5 (ii). □

Для завершения доказательства нам остается только доказать утверждение следующей леммы.

Лемма 2.21. *Имеет место равенство*

$$\overline{c}_{g,g'}\overline{c}_{gg',g''} = \overline{c}_{g,g'g''}\overline{c}_{g',g''}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Из определения (2.54) следует, что

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{g,g'} &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_3})(N-N_{g_3}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3',g_1'g_2'}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2,g_1'g_2'}},\\
\overline{c}_{gg',g''} &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2g_1'})(N-N_{g_2g_1'}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2g_1')\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2',g_2g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2''g_1'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2',g_3''}},\\
\overline{c}_{g,g'g''} &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2g_3})(N-N_{g_2g_3}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2g_3)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'g_3',g_2''g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'g_3''}},\\
\overline{c}_{g',g''} &= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_1'})(N-N_{g_1'}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_2'g_3',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2''g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_2'g_3',g_2''g_3''}}.
\end{aligned}$$

Поскольку все $I^c_{g_i}$, $I^c_{g_i'}$ и $I^c_{g_i''}$ взаимно не пересекаются, получаем

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{g,g'}\overline{c}_{gg',g''} =&(-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_3})(N-N_{g_3}-1)+\frac{1}{2}(N-N_{g_2g_1'})(N-N_{g_2g_1'}-1)}\\
&\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2g_1')\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3',g_1'g_2'}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2,g_1'g_2'}} \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2',g_2g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2''g_1'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1g_2',g_3''}}\\
=&(-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_3})(N-N_{g_3}-1)+\frac{1}{2}(N-N_{g_2}+N-N_{g_1'})(N-N_{g_2}+N-N_{g_1'}-1)}\\
&\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right]\\
&\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3',g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}\\
=&(-1)^{\frac{1}{2}\left((N-N_{g_3})^2-(N-N_{g_3})+(N-N_{g_2})^2-(N-N_{g_2})+(N-N_{g_1'})^2-(N-N_{g_1'})+2(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})\right)}\\
&\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right]\\
&\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3',g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\overline{c}_{g,g'g''}\overline{c}_{g',g''} =&(-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2g_3})(N-N_{g_2g_3}-1)+\frac{1}{2}(N-N_{g_1'})(N-N_{g_1'}-1)}\\
&\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2''g_3',g_2g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2'g_3''}} \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_2'g_3',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2''g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_2'g_3',g_2''g_3''}}\\
=&(-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2}+N-N_{g_3})(N-N_{g_2}+N-N_{g_3}-1)+\frac{1}{2}(N-N_{g_1'})(N-N_{g_1'}-1)}\\
&\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right]
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3',g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3''}}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}\left((N-N_{g_3})^2-(N-N_{g_3})+(N-N_{g_2})^2-(N-N_{g_2})+(N-N_{g_1'})^2-(N-N_{g_1'})+2(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})\right)}$$

$$\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_3)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1')\right]$$

$$\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3',g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_3''}}.$$

Поэтому нам нужно лишь показать, что

$$(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3',g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}$$

$$=(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3'}\widetilde{\varepsilon}_{g_2'',g_3',g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1'',g_2'',g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3',g_2''}\widetilde{\varepsilon}_{g_3''}}.$$

Поскольку $g_1'g_1''=\mathrm{id}$, $g_2g_2''=\mathrm{id}$ и $g_3g_3'=\mathrm{id}$, то имеем $I^c_{g_1'}=I^c_{g_1''}, I^c_{g_2}=I^c_{g_2''}$ и $I^c_{g_3}=I^c_{g_3'}$. Также верно $\widetilde{\varepsilon}^2_\bullet=1$ для любого выражения $\bullet$. Таким образом, достаточно доказать следующее равенство:

$$(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}$$

$$=(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_3,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_2,g_3''}}.$$

Напомним также, что $\widetilde{\varepsilon}_\bullet$ — это сигнатура перестановки $\sigma_\bullet$ (см. Определение 2.2), и, следовательно, мы получаем требуемый знак, меняя местами два индекса, например, $\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_1',g_2'}=(-1)^{(N-N_{g_1'})(N-N_{g_2'})}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_2',g_1'}$. Левая часть приведенного выше уравнения определяется как

$$(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_1',g_2}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1',g_2'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}$$

$$=(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}(-1)^{(N-N_{g_1'})(N-N_{g_2'})}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}$$

$$\cdot \frac{(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_1'})+(N-N_{g_2})(N-N_{g_2'})+(N-N_{g_2'})(N-N_{g_1'})}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1',g_2'}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_1',g_2'}}$$

$$=(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_2'})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}},$$

в то время как правая часть задается выражением

$$(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})}\cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_3,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_2,g_3''}}$$

$$= (-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}(-1)^{(N-N_{g_2'})(N-N_{g_3})}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}}$$
$$\cdot \frac{(-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_3})+(N-N_{g_2})(N-N_{g_2'})+(N-N_{g_2'})(N-N_{g_3})}\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_2',g_3,g_2,g_3''}}$$
$$= (-1)^{(N-N_{g_2})(N-N_{g_2'})} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2,g_3}\widetilde{\varepsilon}_{g_3,g_2',g_1'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2,g_3''}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2',g_3''}},$$

что совпадает с левой частью. □

Мы завершили доказательство предложения. □

Теперь мы можем оснастить $\mathcal{A}'$ структурой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной $\mathbb{C}$-алгебры.

Определение. Определим $\mathbb{C}$-билинейное отображение $\circ : \mathcal{A}' \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}'$ полагая для каждых $g, h \in G_f$ и $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$,

$$([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) \circ ([\psi(\mathbf{x})]\overline{v}_h) := \overline{c}_{g,h}\,[\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})H_{g,h}]\,\overline{v}_{gh}. \tag{2.62}$$

Легко видеть, что отображение $\circ$ однозначно определено по Предложению 2.5 (iii).

Предложение 2.22. *Отображение $\circ$ снабжает $\mathcal{A}'$ структурой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированной $\mathbb{C}$-алгебры с единицей $\overline{v}_{\mathrm{id}}$, удовлетворяющей аксиоме* (2).

Доказательство. Ассоциативность произведения следует из Предложения 2.17. Из Предложению 2.6 очевидно следует, что $\mathcal{A}'_{\overline{i}} \circ \mathcal{A}'_{\overline{j}} \subset \mathcal{A}'_{\overline{i+j}}$ для всех $\overline{i}, \overline{j} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Также из определения $\circ$ выше очевидно, что естественные сюръективные отображения $\mathrm{Jac}(f) \longrightarrow \mathrm{Jac}(f^g)$, $g \in G_f$ оснащают $\mathcal{A}'$ структурой $\mathrm{Jac}(f)$-модуля, которая совпадает с образом произведения $\circ : \mathcal{A}'_{\mathrm{id}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}'_g \longrightarrow \mathcal{A}'_g$. □

Возьмем нигде не зануляющуюся N-форму $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ и положим $\zeta := [dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N] \in \Omega_f$. Для каждого $g \in G_f$ пусть $\omega_g \in \Omega'_{f,g}$ будет классом $\widetilde{\omega}_g \in \Omega^{N_g}(\mathrm{Fix}(g))$ где

$$\widetilde{\omega}_g := \begin{cases} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{N_g}} & \text{если } I_g = (i_1, \ldots, i_{N_g}),\ i_1 < \cdots < i_{N_g} \\ 1_g & \text{если } I_g = \emptyset \end{cases}. \tag{2.63}$$

Очевидно, что $\omega_{\mathrm{id}} = \zeta$.

Определение. Определим $\mathbb{C}$-билинейное отображение $\vdash : \mathcal{A}' \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{f,G_f} \longrightarrow \Omega'_{f,G_f}$ следующим образом: положим для каждого $g, h \in G_f$ и $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$,

$$([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) \vdash ([\psi(\mathbf{x})]\omega_h) := \frac{\overline{\alpha}_{gh}\overline{c}_{g,h}}{\overline{\alpha}_h}\,[\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})H_{g,h}]\,\omega_{gh}, \tag{2.64}$$

где $\overline{\alpha} : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $g \mapsto \overline{\alpha}_g$ — это отображение, заданное

$$\overline{\alpha}_g := \mathbf{e}\left[\frac{1}{8}(N-N_g)(N-N_g+1)\right]. \tag{2.65}$$

Замечание 2.7. Отображение $\overline{\alpha} : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ удовлетворяет $\overline{\alpha}_{\mathrm{id}} = 1$ и

$$\overline{\alpha}_g\overline{\alpha}_{g^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g+1)}, \quad g \in G_f. \tag{2.66}$$

Отображение $\vdash$ индуцирует изоморфизм $\vdash \zeta : \mathcal{A}' \longrightarrow \Omega'_{f,G_f}$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных $\mathbb{C}$-модулей:

$$\vdash \zeta : \mathcal{A}'_g \longrightarrow \Omega'_{f,g}, \quad [\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g \mapsto [\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g \vdash \zeta = \overline{\alpha}_g[\phi(\mathbf{x})]\omega_g, \tag{2.67}$$

Заметим, что для каждого $g, h \in G_f$ и $\phi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ мы имеем равенство

$$([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) \vdash ([\psi(\mathbf{x})]\omega_h) = (([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) \circ ([\psi(\mathbf{x})]\overline{v}_h)) \vdash \zeta, \tag{2.68}$$

с помощью которого мы получаем следующее

Предложение 2.23. *Отображение* $\vdash$: $\mathcal{A}' \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{f,G_f} \longrightarrow \Omega'_{f,G_f}$ *удовлетворяет аксиоме* (3) *из Определения 2.1.1.*

На $\mathcal{A}'$ имеет место действие $\varphi \in \mathrm{Aut}(f, G)$, индуцированное изоморфизмом $\vdash \zeta : \mathcal{A}' \longrightarrow \Omega'_{f,G_f}$, который обозначается как φ^*. Будем использовать обозначение (2.10).

Предложение 2.24. *Аксиома* (iv) *удовлетворяется* $\mathcal{A}'$*, а именно, аксиомы* (4a) *и* (4b) *выполняются.*

Доказательство. Пусть (g, h) — охватывающая пара элементов G_f с факторизацией (g_1, g_2, h_1, h_2) и φ элемент $\mathrm{Aut}(f, G)$. Для простоты положим $g' := \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$, $h' := \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$, $g'_i := \varphi \circ g_i \circ \varphi^{-1}$ и $h'_i := \varphi \circ h_i \circ \varphi^{-1}$ для $i = 1, 2$.

Заметим, что пара (g', h') является охватывающей парой с факторизацией (g'_1, g'_2, h'_1, h'_2) поскольку φ является автоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$, которое индуцирует бирегулярное отображение $\varphi : (\mathrm{Fix}(g'_i)) \longrightarrow \mathrm{Fix}(g_i)$. Из этого также следует, что существуют $\lambda_\varphi, \lambda_{\varphi_{g_i}}, \lambda_{\varphi_{h_i}} \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, 2$ такие, что

$$\varphi^*(\widetilde{\omega}_{\mathrm{id}}) = \lambda_\varphi\widetilde{\omega}_{\mathrm{id}}, \quad \varphi^*(\widetilde{\omega}_{g_i}) = \lambda_{\varphi_{g_i}}\widetilde{\omega}_{g'_i}, \ \varphi^*(\widetilde{\omega}_{h_i}) = \lambda_{\varphi_{h_i}}\widetilde{\omega}_{h'_i}, \ i = 1, 2,$$

(см. (2.63) для определения $\widetilde{\omega}_g$) и что, по (2.65), $\overline{\alpha}_{g'} = \overline{\alpha}_g$, $\overline{\alpha}_{h'} = \overline{\alpha}_h$, $\overline{\alpha}_{g'_i} = \overline{\alpha}_{g_i}$ и $\overline{\alpha}_{h'_i} = \overline{\alpha}_{h_i}$ для $i = 1, 2$.

Для каждого $\phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ имеем

$$\varphi^*([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) = [\varphi^*\phi(\mathbf{x})]\varphi^*(\overline{v}_g),$$

с

$$\varphi^*([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g) \vdash \varphi^*(\zeta) = \varphi^*([\phi(\mathbf{x})]\overline{v}_g \vdash \zeta) = \varphi^*(\overline{\alpha}_g[\phi(\mathbf{x})]\omega_g)$$
$$= \overline{\alpha}_g[\varphi^*\phi(\mathbf{x})]\varphi^*(\omega_g) = \frac{\overline{\alpha}_g}{\overline{\alpha}_{g'}}\left([\varphi^*\phi(\mathbf{x})]\varphi^*(\overline{v}_g)\right) \vdash \varphi^*(\zeta) = \left([\varphi^*\phi(\mathbf{x})]\varphi^*(\overline{v}_g)\right) \vdash \varphi^*(\zeta).$$

Поэтому достаточно доказать, что $\varphi^*(\overline{v}_g) \circ \varphi^*(\overline{v}_h) = \varphi^*(\overline{v}_g \circ \overline{v}_h)$.

Из этого легко следует, что

$$\varphi^*(\overline{v}_{\mathrm{id}}) = \overline{v}_{\mathrm{id}}, \quad \varphi^*(\overline{v}_{g_i}) = \frac{\lambda_{\varphi_{g_i}}}{\lambda_\varphi}\overline{v}_{g_i'}, \quad \varphi^*(\overline{v}_{h_i}) = \frac{\lambda_{\varphi_{h_i}}}{\lambda_\varphi}\overline{v}_{h_i'},\ i = 1, 2,$$

с $\varphi^*(\overline{v}_{\mathrm{id}}) \vdash \varphi^*(\zeta) = \varphi^*(\overline{v}_{\mathrm{id}} \vdash \zeta) = \varphi^*(\zeta)$ и

$$(\lambda_{\varphi_{g_i}}\overline{v}_{g_i'}) \vdash \zeta = \lambda_{\varphi_{g_i}}\overline{\alpha}_{g_i'}\omega_{g_i'} = \varphi^*(\overline{\alpha}_{g_i}\omega_{g_i}) = \varphi^*(\overline{v}_{g_i}) \vdash \varphi^*(\zeta) = (\lambda_\varphi\varphi^*(\overline{v}_{g_i})) \vdash \zeta,$$
$$(\lambda_{\varphi_{h_i}}\overline{v}_{h_i'}) \vdash \zeta = \lambda_{\varphi_{h_i}}\overline{\alpha}_{h_i'}\omega_{h_i'} = \varphi^*(\overline{\alpha}_{h_i}\omega_{h_i}) = \varphi^*(\overline{v}_{h_i}) \vdash \varphi^*(\zeta) = (\lambda_\varphi\varphi^*(\overline{v}_{h_i})) \vdash \zeta.$$

Лемма 2.25. *Мы имеем*

$$\varphi^*(\omega_g) = \frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{g_2}}}{\lambda_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2'}} \cdot \omega_{g'}, \quad \varphi^*(\omega_h) = \frac{\lambda_{\varphi_{h_1}}\lambda_{\varphi_{h_2}}}{\lambda_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{h_1',h_2'}} \cdot \omega_{h'}, \tag{2.69}$$

что влечёт

$$\varphi^*(\overline{v}_g) = \frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{g_2}}}{\lambda_\varphi^2} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1',g_2'}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}} \cdot \overline{v}_{g'}, \quad \varphi^*(\overline{v}_h) = \frac{\lambda_{\varphi_{h_1}}\lambda_{\varphi_{h_2}}}{\lambda_\varphi^2} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{h_1',h_2'}}{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2}} \cdot \overline{v}_{h'}. \tag{2.70}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_{\mathbb{C}^N}$ — касательный пучок на $\mathbb{C}^N$. Для каждого $g'' \in G_f$ определим поливекторное поле $\widetilde{\theta}_{g''} \in \Gamma\left(\mathbb{C}^N, \wedge^{N-N_{g''}}\mathcal{T}_{\mathbb{C}^N}\right)$ следующим образом:

$$\widetilde{\theta}_{g''} := \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_{N-N_{g''}}}} & \text{если } I^c_{g''} = (j_1, \ldots, j_{N-N_{g''}}),\ j_1 < \cdots < j_{N-N_{g''}} \\ 1 & \text{если } I^c_{g''} = \emptyset \end{cases}.$$

Так как $\varphi^*(\widetilde{\omega}_{\mathrm{id}}) = \lambda_\varphi\widetilde{\omega}_{\mathrm{id}}$ и $\varphi^*(\widetilde{\omega}_{g_i}) = \lambda_{\varphi_{g_i}}\widetilde{\omega}_{g_i'}$ для $i = 1, 2$, поливекторное поле $\widetilde{\theta}_{g_i}$ преобразуется под действием φ как

$$\widetilde{\theta}_{g_i} \mapsto \frac{\lambda_{\varphi_{g_i}}}{\lambda_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_i}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_i'}} \cdot \widetilde{\theta}_{g_i'}, \quad i = 1, 2,$$

где $\widetilde{\varepsilon}_{g_i}$ — знак перестановки $I_{\mathrm{id}} \longrightarrow I^c_{g_i} \sqcup I_{g_i}$ и $\widetilde{\varepsilon}_{g_i'}$ — знак перестановки $I_{\mathrm{id}} \longrightarrow I^c_{g_i'} \sqcup I_{g_i'}$. Предположим, что $\varphi^*(\omega_g) = \lambda_{\varphi_g}\omega_{g'}$ для некоторого $\lambda_{\varphi_g} \in \mathbb{C}^*$ и пусть $\widetilde{\varepsilon}_g$ будет знак перестановки $I_{\mathrm{id}} \longrightarrow I^c_g \sqcup I_g$ и $\widetilde{\varepsilon}_{g'}$ — знак перестановки $I_{\mathrm{id}} \longrightarrow I^c_{g'} \sqcup I_{g'}$. Тогда $\widetilde{\theta}_g$ преобразуется под действием φ как

$$\widetilde{\theta}_g \mapsto \frac{\lambda_{\varphi_g}}{\lambda_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_g}{\widetilde{\varepsilon}_{g'}} \cdot \widetilde{\theta}_{g'},$$

Заметим, что $\widetilde{\theta}_g = \widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\theta}_{g_1} \wedge \widetilde{\theta}_{g_2}$ и $\widetilde{\theta}_{g'} = \widetilde{\varepsilon}_{g'_1,g'_2}\widetilde{\theta}_{g'_1} \wedge \widetilde{\theta}_{g'_2}$. Следовательно

$$\frac{\lambda_{\varphi_g}}{\lambda_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_g \widetilde{\varepsilon}_{g'_1,g'_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'}\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}} = \frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{g_2}}}{\lambda_\varphi^2} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1}\widetilde{\varepsilon}_{g_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1}\widetilde{\varepsilon}_{g'_2}}.$$

Таким образом, утверждение леммы сводится к равенству

$$\frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1}\widetilde{\varepsilon}_{g_2}}{\widetilde{\varepsilon}_g} = \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1}\widetilde{\varepsilon}_{g'_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'}}.$$

Однако, вычислив количество элементов, меньших j в последовательностях $I^c_{g_1}$, $I^c_{g_2}$ и I^c_g для каждого элемента j в $I^c_{g_1}$ или $I^c_{g_2}$, мы убеждаемся, что левая часть приведенного выше равенства равна $(-1)^{(N-N_{g_1})(N-N_{g_2})}$. Аналогично, правая часть равна $(-1)^{(N-N_{g'_1})(N-N_{g'_2})}$. Доказательство завершается наблюдением $N_{g_1} = N_{g'_1}$ и $N_{g_2} = N_{g'_2}$. □

Лемма 2.26. *Имеет место равенство*

$$[\varphi^* H_{g,h}] = \frac{\lambda^2_{\varphi_{g_2}}}{\lambda^2_\varphi}[H_{g',h'}]. \tag{2.71}$$

Доказательство. Согласно Определению 2.2, $H_{g,h}$ является ненулевым константным множителем $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in I_{g,h}}$. Теперь, $I_{g,h} = I^c_{g_2} = I^c_{h_2}$, $I_{g',h'} = I^c_{g'_2} = I^c_{h'_2}$. Приведенное равенство в точности является правилом преобразования определителя при автоморфизме φ. □

Так как $g_2 h_2 = \mathrm{id}$ и $g'_2 h'_2 = \mathrm{id}$ по определению факторизации,

$$N_{g_2} = N_{h_2} = N_{h'_2} = N_{g'_2}, \quad \lambda_{\varphi_{g_2}} = \lambda_{\varphi_{h_2}},$$

где мы отождествляем ω_{h_2} с ω_{g_2} при равенстве $\Omega_{f,h_2} = \Omega_{f,g_2}$ и $\omega_{h'_2}$ с $\omega_{g'_2}$ при равенстве $\Omega_{f,h'_2} = \Omega_{f,g'_2}$. Из приведенной выше леммы следует, что

$$\begin{aligned}
&\varphi^*(\overline{v}_g) \circ \varphi^*(\overline{v}_h) \\
&= \frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{g_2}}\lambda_{\varphi_{h_1}}\lambda_{\varphi_{h_2}}}{\lambda^4_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1,g'_2}} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{h'_1,h'_2}} \cdot \overline{v}_{g'} \circ \overline{v}_{h'} \\
&= \frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{g_2}}\lambda_{\varphi_{h_1}}\lambda_{\varphi_{h_2}}}{\lambda^4_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1,g'_2}} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2}}{\widetilde{\varepsilon}_{h'_1,h'_2}} \\
&\qquad \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g'_2})(N-N_{g'_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g'_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1,g'_2}\widetilde{\varepsilon}_{h'_2,h'_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1,h'_1}} \cdot [H_{g',h'}]\,\overline{v}_{g'h'} \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}} \\
&\qquad \cdot \left(\frac{\lambda^2_{\varphi_{g_2}}}{\lambda^2_\varphi}\,[H_{g',h'}]\right)\left(\frac{\lambda_{\varphi_{g_1}}\lambda_{\varphi_{h_1}}}{\lambda^2_\varphi} \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g'_1,h'_1}}\overline{v}_{g'h'}\right)
\end{aligned}$$

$$= c_{g,h}\,[\varphi^* H_{g,h}]\,\varphi^*(\overline{v}_{gh}) = \varphi^*(\overline{v}_g \circ \overline{v}_h),$$

где мы также использовали, что

$$\widetilde{\varepsilon}_{h_1,h_2} = (-1)^{(N-N_{h_1})(N-N_{h_2})}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}, \quad \widetilde{\varepsilon}_{h'_1,h'_2} = (-1)^{(N-N_{h'_1})(N-N_{h'_2})}\widetilde{\varepsilon}_{h'_2,h'_1}.$$

Таким образом, мы доказали, что структура алгебры $\circ$ из $\mathcal{A}'$ является $\mathrm{Aut}(f,G)$-инвариантной.

G-скрученная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная коммутативность и аксиома (4b) являются прямым следствием Предложения 2.16. так как $H_{g,h} = H_{h,g}$ и $g^*(\overline{v}_h) = \mathbf{e}[-\mathrm{age}(g_2)]\cdot\overline{v}_h$, что следует из вычисления

$$\begin{aligned} g^*(\overline{v}_h) \vdash \zeta = g^*(\overline{v}_h) \vdash (\mathbf{e}\,[-\mathrm{age}(g)]\,g^*(\zeta)) = \mathbf{e}\,[-\mathrm{age}(g)]\cdot g^*(\overline{\alpha}_h\omega_h) \\ = \mathbf{e}\,[-\mathrm{age}(g_2)]\cdot(\overline{\alpha}_h\omega_h) = (\mathbf{e}[-\mathrm{age}(g_2)]\cdot\overline{v}_h)\vdash\zeta. \end{aligned}$$

Мы завершили доказательство предложения. □

Нами доказана инвариантность билинейной формы $J_{f,G}$ относительно структуры произведения $\mathcal{A}'$.

Будем использовать обозначения Определения 2.2.

Предложение 2.27. *Для любой охватывающей пары (g,h) элементов G_f верно равенство*

$$\begin{aligned} (2.72)\quad & J_{f,gh}\left(\overline{v}_g \vdash \omega_h, \left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right) \\ & = (-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} J_{f,h}\left(\omega_h, \left((h^{-1})^*\overline{v}_g\right) \vdash \left(\left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right)\right). \end{aligned}$$

Следовательно, алгебра $\mathcal{A}'$ удовлетворяет аксиоме (v).

Доказательство. Пусть (g_1,g_2,h_1,h_2) — факторизация охватывающей пары (g,h). Левая часть уравнения (2.72) может быть преобразована следующим образом

$$\begin{aligned} & J_{f,gh}\left(\overline{v}_g \vdash \omega_h, \left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right) \\ & = \frac{1}{\overline{\alpha}_h}\cdot J_{f,gh}\left((\overline{v}_g\circ\overline{v}_h)\vdash\zeta, \left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right) \\ & = \frac{\overline{\alpha}_{gh}\overline{c}_{g,h}}{\overline{\alpha}_h}\cdot J_{f,gh}\left(\omega_{gh}, \left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})H_{g,h}\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right) \\ & = \frac{\overline{\alpha}_{gh}}{\overline{\alpha}_h}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)}\cdot\mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right]\cdot\frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}} \\ & \quad\cdot(-1)^{N-N_{gh}}\cdot\mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(gh)\right]\cdot|G| \end{aligned}$$

$$= \frac{\overline{\alpha}_{gh}}{\overline{\alpha}_h} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{g_2})(N-N_{g_2}-1)+(N-N_{gh})}$$
$$\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(h_1) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}} \cdot |G|.$$

С другой стороны, правая часть уравнения (2.72) может быть преобразована следующим образом

$$(-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot J_{f,h}\left(\omega_h, \left((h^{-1})^* \overline{v}_g\right) \vdash \left(\left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\omega_{(gh)^{-1}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\overline{\alpha}_{(gh)^{-1}}}(-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(h_2^{-1})\right]$$
$$\cdot J_{f,h}\left(\omega_h, \left(\left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right]\overline{v}_g \circ \overline{v}_{(gh)^{-1}}\right) \vdash \zeta\right)$$
$$= \frac{\overline{\alpha}_{h^{-1}} c_{g,(gh)^{-1}}}{\overline{\alpha}_{(gh)^{-1}}}(-1)^{(N-N_g)(N-N_h)} \cdot \mathbf{e}\left[-\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot J_{f,h}\left(\omega_h, \left[\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}\mathrm{hess}(f^{g\cap h})\right] \vdash \omega_{h^{-1}}\right)$$
$$= \frac{\overline{\alpha}_{h^{-1}}}{\overline{\alpha}_{(gh)^{-1}}}(-1)^{(N-N_g)(N-N_h)+\frac{1}{2}(N-N_{g_1})(N-N_{g_1}-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1) - \mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_2,g_1}\widetilde{\varepsilon}_{g_1^{-1},h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_2,h_1}}$$
$$\cdot (-1)^{N-N_h} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(h)\right] \cdot |G|$$
$$= \frac{\overline{\alpha}_{h^{-1}}}{\overline{\alpha}_{(gh)^{-1}}}(-1)^{(N-N_g+1)(N-N_h)+\frac{1}{2}(N-N_{g_1})(N-N_{g_1}-1)-(N-N_{g_2})+(N-N_{g_1})(N-N_{g_2})}$$
$$\cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g_1) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(h_1) - \frac{1}{2}\mathrm{age}(g_2)\right] \cdot \frac{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,g_2}\widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}}{\widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1}} \cdot |G|,$$

где мы использовали, что $\widetilde{\varepsilon}^{-1}_{g_2^{-1},h_1} = \widetilde{\varepsilon}_{g_2^{-1},h_1} = \widetilde{\varepsilon}_{h_2,h_1}$ и $\widetilde{\varepsilon}_{g_1^{-1},h_1} = \widetilde{\varepsilon}_{g_1,h_1} = \widetilde{\varepsilon}^{-1}_{g_1,h_1}$. Мы имеем $\overline{\alpha}_{gh}\overline{\alpha}_{(gh)^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_{gh})(N-N_{gh}+1)}$ и $\overline{\alpha}_h\overline{\alpha}_{h^{-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_h)(N-N_h+1)}$ по (2.66). Посредством равенства

$$N - N_g = (N - N_{g_1}) + (N - N_{g_2}), \quad N - N_h = (N - N_{h_1}) + (N - N_{h_2}),$$
$$N - N_{gh} = N - N_{g_1g_2} = (N - N_{g_1}) + (N - N_{h_1}), \quad N_{g_2} = N_{h_2},$$

(см. Предложение 2.6), мы получаем

$$\frac{1}{2}(N - N_{gh})(N - N_{gh} + 1) + \frac{1}{2}(N - N_{g_2})(N - N_{g_2} - 1) + (N - N_{gh})$$
$$- \frac{1}{2}(N - N_h)(N - N_h + 1) + (N - N_g + 1)(N - N_h)$$
$$+ \frac{1}{2}(N - N_{g_1})(N - N_{g_1} - 1) - (N - N_{g_2}) + (N - N_{g_1})(N - N_{g_2})$$
$$\equiv 0 \pmod 2,$$

что дает (2.72)

Для $X \in \mathcal{A}'_g$, $\omega \in \Omega'_{f,h}$, $\omega' \in \Omega'_{f,G}$, значение $J_{f,G}(X \vdash \omega, \omega')$ не равно нулю тогда и только тогда, когда $\omega' \in \Omega'_{f,(gh)^{-1}}$ и пара (g,h) является охватывающей парой. Заметим, что $I_g \cup I_h \cup I_{gh} = I_{\mathrm{id}}$ тогда и только тогда, когда $I_h \cup I_{(gh)^{-1}} \cup I_{g^{-1}} = I_{\mathrm{id}}$. Что означает, что пара (g,h) является охватывающей тогда и только тогда, когда таковой является пара $(h,(gh)^{-1})$. Следовательно, $J_{f,G}(X \vdash \omega, \omega')$ не равно нулю тогда и только тогда, когда не равно нулю $J_{f,G}(\omega, (h^{-1})^* X \vdash \omega')$. Отсюда следует, что аксиома (v) сводится к уравнению (2.72). □

Последняя аксиома (vi) тривиально выполняется для $\mathcal{A}'$. Таким образом, мы показали существование G_f-скрученной алгебры Якоби f.

Более того, легко увидеть следующее

Предложение 2.28. *Для каждой подгруппы $G \subseteq G_f$, существует G-скрученная алгебра Якоби f.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}'_G$ из $\mathcal{A}'$, определяемое формулой

$$\mathcal{A}'_G := \bigoplus_{g \in G} \mathcal{A}'_g,$$

ограничение произведения $\circ : \mathcal{A}' \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}'$ до $\mathcal{A}'_G \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}'_G$ и ограничение структуры модуля $\mathcal{A}' \vdash: \mathcal{A}' \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{f,G_f} \longrightarrow \mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}'_G \otimes_{\mathbb{C}} \Omega'_{F,G}$. Очевидно, что эти структуры удовлетворяют всем аксиомам Определения 2.1.1. □

Мы завершили доказательство теоремы 2.1.

2.3. Краткое описание орбифолдной алгебры Якоби обратимых многочленов

Чтобы объяснить явную формулу произведения для $\mathrm{Jac}'(f,G)$ проще, приведем следующее свойство Кюннета алгебры $\mathrm{Jac}'(f,G)$.

Предложение 2.29. *Пусть f_1, f_2 — обратимые многочлены и $G_1 \subseteq G_{f_1}$, $G_2 \subseteq G_{f_2}$ — некоторые подгруппы. Имеет место изоморфизм алгебр, согласованный с $(G_1 \times G_2)$-действием с обеих сторон:*

$$\mathrm{Jac}'(f_1 \oplus f_2, G_1 \times G_2) \cong \mathrm{Jac}'(f_1, G_1) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}'(f_2, G_2). \tag{2.73}$$

Доказательство. Это является прямым следствием набора аксиом или формулы произведения Следствия 2.15. Ключевым фактом является то, что для любых $g_1 \in G_1$ и $g_2 \in G_2$ мы имеем $\tilde{v}_{g_1} \circ \tilde{v}_{g_2} := \widetilde{\epsilon}_{g_1,g_2} \tilde{v}_{g_1 g_2}$. □

Используя приведенное выше свойство Кюннета, предположим, что f имеет тип цепь или цикл. Для каждой пары (g,h) элементов из G и $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ формула произведения имеет следующий вид.

- Если $gh \neq \mathrm{id}$, $g \neq \mathrm{id}$ и $h \neq \mathrm{id}$, то $[\phi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_g \circ [\psi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_h = 0$.
- Если $gh = \mathrm{id}$, то

$$[\phi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_g \circ [\psi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_{g^{-1}} = (-1)^{\frac{d_g(d_g-1)}{2}} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot [\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})H_{g,g^{-1}}]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, \tag{2.74}$$

где

$$H_{g,g^{-1}} := \widetilde{m}_{g,g^{-1}} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in I_g^c}$$

и $\widetilde{m}_{g,g^{-1}}$ — константа, однозначно определяемая следующим уравнением в $\mathrm{Jac}(f)$

$$\frac{1}{\mu_{f^g}}[\mathrm{hess}(f^g)H_{g,g^{-1}}] = \frac{1}{\mu_f}[\mathrm{hess}(f)]. \tag{2.75}$$

Произведение $\circ$ инвариантно относительно G-действия и, следовательно, G-инвариантное подпространство $\left(\mathrm{Jac}'(f,G)\right)^G$ является $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно коммутативной алгеброй.

Более общо, для обратимого многочлена f (не обязательно конкретного типа цепь или цикл) умножение $\circ$ может быть задано так.

Пусть пара (g,h)–охватывающая, тогда

$$[\phi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_g \circ [\psi(\mathbf{x})]\widetilde{v}_h := (-1)^{\frac{1}{2}(N-N_g)(N-N_g-1)} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot [\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})H_{g,h}]\widetilde{v}_{gh}, \tag{2.76}$$

где $H_{g,h} \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N]$ задается следующим уравнением в $\mathrm{Jac}(f^{gh})$

$$\frac{1}{\mu_{f^{g\cap h}}}[\mathrm{hess}(f^{g\cap h})H_{g,h}] = \frac{1}{\mu_{f^{gh}}}[\mathrm{hess}(f^{gh})], \tag{2.77}$$

и $f^{g\cap h}$ — обратимый многочлен, определяем ограничением f на подпространство $\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h)$, $f|_{\mathrm{Fix}(g)\cap\mathrm{Fix}(h)}$.

2.4. Орбифолдные алгебры Якоби ADE–орбифолдов

Пусть f — обратимый многочлен, задающий особенность типа ADE и $G = G_f^{\mathrm{SL}}$. В Разделе 1.3 была установлена орбифолдная эквивалентность пары (f, G_f^{SL}) некоторому новому многочлену $\overline{f}$. Эта эквивалентность была мотивирована топологическими рассуждениями Ebeling–Takahashi.

Естественно ожидать, что орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ пары (f,G) изоморфна алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})$ пары $(\overline{f},\{1\})$.

Теорема 2.30. *Пусть f и $\overline{f}$ будут такими, как в Разделе 1.3. Существует изоморфизм фробениусовых алгебр.*

$$\mathrm{Jac}(f,G) \cong \mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) \tag{2.78}$$

для всех f и $\overline{f}$ в Таблице 2.

Доказательство. Приведем доказательство этой теоремы, основанное на классификации, приведённой в Таблице 2.

Для каждого $g \in G$ обозначим через K_g максимальную подгруппу G, оставляющей на месте $\mathrm{Fix}(g)$. Определим $e_g \in \mathrm{Jac}(f, G)$ через $e_g := \frac{1}{|K_g|} v_g$.

1. Для $k \geq 1$ положим

$$f := z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2, \quad G := \langle g \rangle\,,\ g := \frac{1}{2}(0,1,1),$$

$$\overline{f} := y_1^{k+1} + y_2 + y_2 y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, \{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f, \{1\}) = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] \,/ \big((k+1)z_1^k, 2z_2, 2z_3\big) \cong \big\langle [1], [z_1], \ldots, [z_1]^{k-1} \big\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_1^{k-1} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right) = \frac{1}{4(k+1)}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ имеет следующий вид :

$$\mathrm{Jac}(f, G) \cong \big\langle e_{\mathrm{id}}, [z_1], \ldots, [z_1]^{k-1} \big\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \big\langle e_g, [z_1]e_g, \ldots, [z_1]^{k-1} e_g \big\rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f, G) = 2k$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ может быть вычислена явно

$$\begin{aligned} J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}} \vdash \zeta, [z_1]^{k-1} \vdash \zeta\right) &= J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_1^{k-1} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4(k+1)} = \frac{1}{2(k+1)}, \\ J_{f,g}\left(e_g \vdash \zeta, [z_1]^{k-1} e_g \vdash \zeta\right) &= \frac{1}{4} J_{f,g}\left([dz_1], [z_1^{k-1} dz_1]\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{2(k+1)}, \end{aligned}$$

что влечет следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$:

$$[z_1]^k = 0, \quad e_g^2 = -e_{\mathrm{id}}.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\})$ задается выражением

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) &= \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \,/ \big((k+1)y_1^k, 1 + y_3^2, 2y_2 y_3\big) \\ &\cong \mathbb{C}[y_1, y_3] \,/ \big(y_1^k, y_3^2 + 1\big)\,. \end{aligned}$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = 2k$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f, G), \quad [y_1] \mapsto [z_1],\ [y_3] \mapsto e_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3],[y_1^{k-1}dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3]\right)=\frac{1}{2(k+1)}.$$

2. Для $k\geq 1$ положим

$$f:=z_1^{2k}+z_2^2+z_3^2,\quad G:=\langle g\rangle\,,\ g:=\frac{1}{2}(1,0,1),$$

$$\overline{f}:=y_1^2+y_2^k+y_2y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,\{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f,\{1\})=\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]\,/\left(2kz_1^{2k-1},2z_2,2z_3\right)\cong\left\langle[1],[z_1],\ldots,[z_1]^{2k-2}\right\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1^{2k-2}dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)=\frac{1}{8k}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f,G)\cong\left\langle e_{\mathrm{id}},[z_1^2],\ldots,[z_1^2]^{k-1}\right\rangle_{\mathbb{C}}\oplus\left\langle e_g\right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(f,G)=k+1$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned}J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}}\vdash\zeta,[z_1^2]^{k-1}\vdash\zeta\right)&=J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1^{2k-2}dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)\\&=2\cdot\frac{1}{8k}=\frac{1}{4k},\\J_{f,g}\left(e_g\vdash\zeta,e_g\vdash\zeta\right)&=\frac{1}{4}J_{f,g}\left([dz_2],[dz_2]\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4},\end{aligned}$$

что влечет следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$:

$$[z_1^2]\circ e_g=0,\quad e_g^2=-k[z_1^2]^{k-1}.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})$ задается выражением

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})&=\mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\,/\left(2y_1,ky_2^{k-1}+y_3^2,2y_2y_3\right)\\&\cong\mathbb{C}[y_2,y_3]\,/\left(ky_2^{k-1}+y_3^2,y_2y_3\right).\end{aligned}$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})=k+1$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Jac}(f,G),\quad [y_2]\mapsto[z_1^2],\ [y_3]\mapsto e_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3],[y_2^{k-1}dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3]\right)=\frac{1}{4k}.$$

3. Для $k \geq 1$ положим

$$f := z_1^{2k} + z_2^2 + z_3^2, \quad G := \langle g, h \rangle\,,\ g := \frac{1}{2}(0,1,1),\ h := \frac{1}{2}(1,0,1),$$

$$\overline{f} := y_1^k y_2^k + y_1 y_3 + y_2 y_3.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, \{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f, \{1\}) = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] \,/ \big(2kz_1^{2k-1}, 2z_2, 2z_3\big) \cong \big\langle [1], [z_1], \ldots, [z_1]^{2k-2} \big\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_1^{2k-2} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right) = \frac{1}{8k}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ имеет следующий вид :

$$\mathrm{Jac}(f, G) \cong \big\langle e_{\mathrm{id}}, [z_1^2], \ldots, [z_1^2]^{k-1} \big\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \big\langle e'_g, [z_1^2] e'_g, \ldots, [z_1^2]^{k-2} e'_g \big\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

где $e'_g := [z_1] e_g$, так как $\mathrm{Jac}(f, h) = \{0\}$ и $\mathrm{Jac}(f, gh) = \{0\}$. Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f, G) = 2k - 1$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned} J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}} \vdash \zeta, [z_1^2]^{k-1} \vdash \zeta\right) &= J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_1^{2k-2} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{8k} = \frac{1}{2k}, \\ J_{f,g}\left(e'_g \vdash \zeta, [z_1^2]^{k-2} e'_g \vdash \zeta\right) &= \frac{1}{4} J_{f,g}\left([z_1 dz_1], [z_1^{2k-3} dz_1]\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2k} = -\frac{1}{2k}, \end{aligned}$$

что подразумевает следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$:

$$[z_1^2]^{k-1} \circ e'_g = 0, \quad (e'_g)^2 = -[z_1^2].$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\})$ задается

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \,/ \big(k y_1^{k-1} y_2^k + y_3, k y_1^k y_2^{k-1} + y_3, y_1 + y_2\big)\,.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = 2k-1$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f, G), \quad [y_1 y_2] \mapsto [z_1^2],\ [y_1] \mapsto e'_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3], [y_1^{k-1} y_2^{k-1} dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3]\right) = \frac{1}{2k}.$$

4. Положим

$$f := z_1^3 + z_2^3 + z_3^2, \quad G := \langle g \rangle\,,\ g := \frac{1}{3}(1,2,0),$$

$$\overline{f} := y_1^2 + y_3 y_2^2 + y_2 y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,\{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f,\{1\}) \cong \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]\,/\big(3z_1^2,3z_2^2,2z_3\big) \cong \langle [1],[z_1],[z_2],[z_1z_2]\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$
$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1z_2dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)=\frac{1}{18}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f,G) \cong \langle e_{\mathrm{id}},[z_1z_2]\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle e_g,e_{g^{-1}}\rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(f,G)=4$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned} J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}}\vdash\zeta,[z_1z_2]\vdash\zeta\right) &= J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1z_2dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)\\ &= 3\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{6},\\ J_{f,g}\left(e_g\vdash\zeta,e_{g^{-1}}\vdash\zeta\right) &= \frac{1}{9}J_{f,g}\left([dz_3],[dz_3]\right)\\ &= \frac{1}{9}\cdot(-1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

что подразумевает следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$:

$$e_g^2=0,\quad e_{g^{-1}}^2=0,\quad e_g\circ e_{g^{-1}}=-[z_1z_2].$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})$ задается

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) &= \mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\,/\big(2y_1,2y_3y_2+y_3^2,y_2^2+2y_2y_3\big)\\ &\cong \mathbb{C}[y_2,y_3]\,/\big(2y_3y_2+y_3^2,y_2^2+2y_2y_3\big)\,. \end{aligned}$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})=4$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\begin{aligned} &\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f,G),\\ &\qquad [y_2]\mapsto e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}e_g+e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}e_{g^{-1}},\ [y_3]\mapsto e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}}e_g+e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}e_{g^{-1}}, \end{aligned}$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3],[y_2y_3dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3]\right)=\frac{1}{6}.$$

5. Положим

$$f:=z_1^4+z_2^3+z_3^2,\quad G:=\langle g\rangle\,,\ g:=\frac{1}{2}(1,0,1),$$
$$\overline{f}:=y_1^3+y_2^2+y_2y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,\{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f,\{1\}) = \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]\,/\big(4z_1^3,3z_2^2,2z_3\big) \cong \big\langle [1],[z_1],[z_2],[z_1^2],[z_1z_2],[z_1^2z_2]\big\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1^2z_2dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)=\frac{1}{24}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f,G)\cong\left\langle e_{\mathrm{id}},[z_2],[z_1^2],[z_1^2z_2]\right\rangle_{\mathbb{C}}\oplus\left\langle e_g,[z_2]e_g\right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(f,G)=6$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned}J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}}\vdash\zeta,[z_1^2z_2]\vdash\zeta\right)&=J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_1^2z_2dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)\\&=2\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{12},\\J_{f,g}\left(e_g\vdash\zeta,[z_2]e_g\vdash\zeta\right)&=\frac{1}{4}J_{f,g}\left([dz_2],[z_2dz_2]\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6},\end{aligned}$$

что подразумевает следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$:

$$[z_2]^2=0,\quad [z_1^2]\circ e_g=0,\quad e_g^2=-2[z_1^2].$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})$ задается

$$\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})=\mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\,/\left(3y_1^2,2y_2+y_3^2,2y_2y_3\right).$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})=6$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})\xrightarrow{\cong}\mathrm{Jac}(f,G),\quad [y_1]\mapsto[z_2],\ [y_2]\mapsto[z_1^2],\ [y_3]\mapsto e_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3],[y_1y_2dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3]\right)=\frac{1}{12}.$$

6. Для $k\geq1$ положим

$$f:=z_1^2+z_2^2+z_2z_3^{2k},\quad G:=\langle g\rangle,\ g:=\frac{1}{2}(1,0,1),$$
$$\overline{f}:=y_1^2+y_1y_2^k+y_2y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,\{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}(f,\{1\})&=\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]\,/\left(2z_1,2z_2+z_3^{2k},2kz_2z_3^{2k-1}\right)\\&\cong\left\langle[1],[z_3],\dots,[z_3]^{2k-1},[z_2],[z_2z_3],\dots,[z_2z_3^{2k-2}]\right\rangle_{\mathbb{C}},\end{aligned}$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3],[z_2z_3^{2k-2}dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right)=\frac{1}{8k}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f,G)\cong\left\langle e_{\mathrm{id}},[z_3^2],\dots,[z_3^2]^{k-1},[z_2],[z_2]\cdot[z_3^2],\dots,[z_2]\cdot[z_3^2]^{k-1}\right\rangle_{\mathbb{C}}\oplus\left\langle e_g\right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f,G) = 2k+1$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned} J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}} \vdash \zeta, [z_2]\cdot[z_3^2]^{k-1} \vdash \zeta\right) &= J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3], [z_2 z_3^{2k-2} dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{8k} = \frac{1}{4k}, \\ J_{f,g}\left(e_g \vdash \zeta, e_g \vdash \zeta\right) &= \frac{1}{4} J_{f,g}\left([dz_2],[dz_2]\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

что подразумевает следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$:

$$2[z_2] + [z_3^2]^k = 0, \quad [z_3^2]\circ e_g = 0, \quad e_g^2 = -k[z_2]\cdot[z_3^2]^{k-1}.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\})$ за дается

$$\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) = \mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\,/\left(2y_1 + y_2^k, k y_1 y_2^{k-1} + y_3^2, 2y_2 y_3\right).$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) = 2k+1$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f},\{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f,G), \quad [y_1]\mapsto[z_2],\ [y_2]\mapsto[z_3^2],\ [y_3]\mapsto e_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3], [y_1 y_2^{k-1} dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3]\right) = \frac{1}{4k}.$$

7. Для $k\geq 1$ положим

$$f := z_1^2 + z_2^2 + z_2 z_3^{2k+1}, \quad G := \langle g\rangle, \ g := \frac{1}{2}(0,1,1),$$
$$\overline{f} := y_1^2 + y_3 y_2^2 + y_2 y_3^{k+1}.$$

алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,\{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}(f,\{1\}) &= \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]\,/\left(2z_1, 2z_2 + z_3^{2k+1}, (2k+1)z_2 z_3^{2k}\right) \\ &\cong \left\langle [1],[z_3],\ldots,[z_3]^{2k},[z_2],[z_2 z_3],\ldots,[z_2 z_3^{2k-1}]\right\rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3], [z_2 z_3^{2k-1} dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right) = \frac{1}{4(2k+1)}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f,G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f,G) \cong \left\langle e_{\mathrm{id}}, [z_3^2],\ldots,[z_3^2]^k, [z_2 z_3], [z_2 z_3]\cdot[z_3^2],\ldots,[z_2 z_3]\cdot[z_3^2]^{k-1}\right\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \langle e_g\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f,G) = 2(k+1)$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$\begin{aligned} J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}} \vdash \zeta, [z_2 z_3]\cdot[z_3^2]^{k-1} \vdash \zeta\right) &= J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3], [z_2 z_3^{2k-1} dz_1\wedge dz_2\wedge dz_3]\right) \\ &= 2\cdot\frac{1}{4(2k+1)} = \frac{1}{2(2k+1)}, \end{aligned}$$

$$J_{f,g}\left(e_g \vdash \zeta, e_g \vdash \zeta\right) = \frac{1}{4} J_{f,g}\left([dz_1], [dz_1]\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

которые подразумевают следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$:

$$2[z_2 z_3] + [z_3^2]^{k+1} = 0, \quad [z_3^2] \circ e_g = 0, \quad e_g^2 = -\frac{2k+1}{2}[z_2 z_3][z_3^2]^{k-1}.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\})$ дается

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \,/ \left(2y_1, 2y_3 y_2 + y_3^{k+1}, y_2^2 + (k+1) y_2 y_3^k\right)$$
$$\cong \mathbb{C}[y_2, y_3] \,/ \left(2y_3 y_2 + y_3^{k+1}, y_2^2 + (k+1) y_2 y_3^k\right).$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = 2(k+1)$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f, G), \quad [y_2] \mapsto e_g - \frac{1}{2}[z_3^2]^k, \ [y_3] \mapsto [z_3^2],$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3], [y_2 y_3^k dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3]\right) = \frac{1}{2(2k+1)}.$$

8. Для $k \geq 4$ положим

$$f := z_1^2 + z_2^{k-1} + z_2 z_3^2, \quad G := \langle g \rangle, \ g := \frac{1}{2}(1, 0, 1),$$
$$\overline{f} := y_1^{k-1} + y_1 y_2 + y_2 y_3^2.$$

Алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, \{1\})$ и билинейная форма $J_{f,\{1\}}$ на $\Omega_{f,\{1\}}$ могут быть вычислены как

$$\mathrm{Jac}(f, \{1\}) = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3] \,/ \left(2z_1, (k-1)z_2^{k-2} + z_3^2, 2z_2 z_3\right)$$
$$\cong \left\langle [1], [z_2], \ldots, [z_2]^{k-2}, [z_3] \right\rangle_{\mathbb{C}},$$

$$J_{f,\{1\}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_2^{k-2} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right) = \frac{1}{4(k-1)}.$$

Как $\mathbb{C}$-модуль, орбифолдная алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{Jac}(f, G) \cong \left\langle e_{\mathrm{id}}, [z_2], \ldots, [z_2]^{k-2} \right\rangle_{\mathbb{C}} \oplus \left\langle e_g, [z_2] e_g, \ldots, [z_2]^{k-3} e_g \right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f, G) = 2k - 3$. Билинейная форма $J_{f,G}$ на $\Omega_{f,G}$ вычисляется

$$J_{f,\mathrm{id}}\left(e_{\mathrm{id}} \vdash \zeta, [z_2]^{k-2} \vdash \zeta\right) = J_{f,\mathrm{id}}\left([dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3], [z_2^{k-2} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3]\right)$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{4(k-1)} = \frac{1}{2(k-1)},$$

$$J_{f,g}\left(e_g \vdash \zeta, [z_2]^{k-3} e_g \vdash \zeta\right) = \frac{1}{4} J_{f,g}\left([dz_2], [z_2^{k-3} dz_2]\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{k-1} = -\frac{1}{2(k-1)},$$

что подразумевает следующие соотношения в орбифолдной алгебре Якоби $\mathrm{Jac}(f, G)$:

$$[z_2]^{k-2} \circ e_g = 0, \quad e_g^2 = -[z_2].$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\})$ задается

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \,/ \left((k-1) y_1^{k-2} + y_2, y_1 + y_3^2, 2 y_2 y_3\right) .$$

Заметим, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) = 2k-3$. Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}, \{1\}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(f, G), \quad [y_1] \mapsto [z_2], \ [y_2] \mapsto -(k-1)[z_2]^{k-2}, \ [y_3] \mapsto e_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку мы имеем

$$J_{\overline{f},\{1\}}\left([dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3], [y_1^{k-2} dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3]\right) = \frac{1}{2(k-1)}.$$

Мы завершили доказательство Теоремы 2.30. □

ГЛАВА 3

Орбифолдная алгебра Якоби исключительных унимодальных особенностей

Унимодальные особенности были классифицированы В.И.Арнольдом. В частности, им были найдены три семейства унимодальных особенностей, а также 14 особенностей, не принадлежащих ни одному из этих семейств (см. [**AGV85**]). Эти 14 особенностей получили имя *исключительных унимодальных* и были обозначены В.И.Арнольдом буквами Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, S_{11}, S_{12}, U_{12}, Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, W_{12}, W_{13}, E_{12}, E_{13} и E_{14}.

Арнольд обнаружил "странную двойственность" между исключительными унимодальными особенностями. А именно, числа Долгачева (тройка алгебраически определенных положительных целых чисел) одной особенности совпадает с числам Габриелова (тройка положительных целых чисел, связанная с диаграммой Коксетера–Дынкина) другой и наоборот.

Для любых двух исключительных унимодальных особенностей, которые являются странно двойственными по Арнольду, существует особый выбор представляющих их многочленов f_1, f_2, такой, что оба многочлена обратимы и $f_1 = \widetilde{f_2}$. Впервые это было отмечено в [**KY95**]. Однако, выбор обратимого многочлена, представляющего исключительную унимодальную особенность, в общем случае не является единственным (мы перечисляем все возможные варианты выбора обратимого многочлена, представляющего исключительную унимодальную особенность, в Таблице 1 на странице 72), и для более общего выбора равенство $f_1 = \widetilde{f_2}$ уже не имеет место.

Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 3.1. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[x, y, z]$ — обратимые многочлены, задающие исключительные унимодальные особенности, и $\widetilde{f_2}$ — это Берглунд–Хубш двойственный к f_2. Тогда*

(i): *Изоморфизм фробениусовых алгебр*

$$\mathrm{Jac}(f_1) = \mathrm{Jac}(f_1, \{\mathrm{id}\}) \cong \mathrm{Jac}(\widetilde{f_2}, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f_2}})$$

Тип	$f(v1)$	$f(v2)$	$f(v3)$	Странно двойственный
Q_{10}	$x^4+y^3+xz^2$	–	–	E_{14}
Q_{11}	$x^3y+y^3+xz^2$	–	–	Z_{13}
Q_{12}	$x^3z+y^3+xz^2$	$x^5+y^3+xz^2$	–	Q_{12}
S_{11}	$x^4+y^2z+xz^2$	–	–	W_{13}
S_{12}	$x^3y+y^2z+xz^2$	–	–	S_{12}
U_{12}	$x^4+y^3+z^3$	$x^4+y^3+z^2y$	$x^4+y^2z+z^2y$	U_{12}
Z_{11}	$x^5+xy^3+z^2$	–	–	E_{13}
Z_{12}	$yx^4+xy^3+z^2$	–	–	Z_{12}
Z_{13}	$x^3z+xy^3+z^2$	$x^6+y^3x+z^2$	–	Q_{11}
W_{12}	$x^5+y^2z+z^2$	$x^5+y^4+z^2$	–	W_{12}
W_{13}	$yx^4+y^2z+z^2$	$x^4y+y^4+z^2$	–	S_{11}
E_{12}	$x^7+y^3+z^2$	–	–	E_{12}
E_{13}	$y^3+yx^5+z^2$	–	–	Z_{11}
E_{14}	$x^4z+y^3+z^2$	$x^8+y^3+z^2$	–	Q_{10}

TABLE 1. Обратимые многочлены, задающие исключительные унимодальные особенности

имеет место тогда и только тогда, когда соответствующие особенности f_1 и f_2 являются странно двойственными друг другу.

(ii): *Имеет место изоморфизм фробениусовых алгебр*

$$\mathcal{A}^{\mathrm{FJRW}}(f_2,\langle g_{f_2}\rangle)\cong \mathrm{Jac}(\tilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\tilde{f}_2}),$$

Для фиксированной особенности и различных выборов представляющего её обратимого многочлена f_2, многочлен $\tilde{f}_2$ может иметь различные группы симметрии $G^{\mathrm{SL}}_{\tilde{f}_2}$ и даже различные числа Милнора. В частности, для U_{12} мы получим группы симметрии $\{\mathrm{id}\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и числа Милнора 12, 12, 15 по многочлену $\tilde{f}_2$. Алгебра $\mathrm{Jac}(f_1)$ в Теореме 3.1 определена особенностью однозначно с точностью до изоморфизма. Следовательно, Теорема 3.1 показывает множество нетривиальных изоморфизмов.

Пункт (ii) теоремы выше прямо следует из пункта (i) и результата [**KP+**], где был доказан следующий изоморфизм фробениусовых алгебр $\mathrm{Jac}(f_1,\{\mathrm{id}\})\cong\mathcal{A}^{\mathrm{FJRW}}(f_2,\langle \mathsf{j}_{f_2}\rangle)$ для f_1,f_2 — странно двойственных.

Данная глава основана на работе [**BTW17**].

Тип f_1	f_1	$\widetilde{f}_2$	$G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}$	Тип f_2
E_{14}	$x_1^8+x_2^3+x_3^2$	$x_1^4x_2+x_2^2+x_3^3$	$\{\mathrm{id}\}$	Q_{10}
Q_{10}	$x_1^4+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^8+x_2^3+x_3^2$	$\langle(1/2,0,1/2)\rangle$	E_{14}
Q_{11}	$x_1^3x_2+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^6x_2+x_2^3+x_3^2$	$\langle(1/2,0,1/2)\rangle$	Z_{13}
Q_{12}	$x_2^3+x_1^3x_3+x_1x_3^2$	$x_1^5x_2+x_2^2+x_3^3$	$\langle(1/2,1/2,0)\rangle$	Q_{12}
Q_{12}	$x_1^5+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^3+x_2^3x_3+x_2x_3^2$	$\{\mathrm{id}\}$	Q_{12}
Q_{12}	$x_1^5+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^5x_2+x_2^2+x_3^3$	$\langle(1/2,1/2,0)\rangle$	Q_{12}
S_{11}	$x_1^4+x_2^2x_3+x_1x_3^2$	$x_1^4+x_1x_2^4+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	W_{13}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$\langle(0,2/3,1/3)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$x_1^4+x_2^3x_3+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$x_1^4+x_2^2x_3+x_2x_3^2$	$\{\mathrm{id}\}$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$\langle(0,2/3,1/3)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^3x_3+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^2x_3+x_2x_3^2$	$\{\mathrm{id}\}$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^2x_3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$\langle(0,2/3,1/3)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^2x_3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^3x_3+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	U_{12}
W_{12}	$x_1^5+x_2^2x_3+x_3^2$	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	W_{12}
W_{12}	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$x_1^5+x_2^2+x_2x_3^2$	$\{\mathrm{id}\}$	W_{12}
W_{12}	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	W_{12}
W_{13},	$x_1^4x_2+x_2^4+x_3^2$	$x_1^4x_2+x_2^2x_3+x_3^2$	$\{\mathrm{id}\}$	S_{11}
Z_{13},	$x_1^6+x_1x_2^3+x_3^2$	$x_1^3x_2+x_2^2+x_1x_3^3$	$\{\mathrm{id}\}$	Q_{11}

TABLE 2. Для доказательства Теоремы 3.1, необходимо установить изоморфизм $\mathrm{Jac}(f_1)\cong\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ для каждой строки данной таблицы.

3.1. Доказательство Теоремы 3.1

Доказательство Теоремы 3.1 осуществляется прямым вычислением. Будем использовать обозначения как в Теореме 3.1.

Пропуская тривиальные случаи, когда $f_1=\widetilde{f}_2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}=\{\mathrm{id}\}$, для доказательства теоремы нам нужно только установить изоморфизм $\mathrm{Jac}(f_1)\cong\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ для каждой строки Таблицы 2 на странице 73.

Заметим также, что если $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}=\{1\}$ и $f_1,\widetilde{f}_2$ не совпадают, но принадлежат одному классу правой эквивалентности, то доказывать нечего, поскольку алгебра Якоби является инвариантом класса правой эквивалентности. Таким образом, достаточно показать утверждение для каждой строки Таблицы 3 на странице 74.

Тип f_1	f_1	$\widetilde{f}_2$	Группа $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}$	Тип f_2
Q_{10}	$x_1^4+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^8+x_2^3+x_3^2$	$\langle(1/2,0,1/2)\rangle$	E_{14}
Q_{11}	$x_1^3x_2+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^6x_2+x_2^3+x_3^2$	$\langle(1/2,0,1/2)\rangle$	Z_{13}
Q_{12}	$x_1^5+x_2^3+x_1x_3^2$	$x_1^5x_2+x_2^2+x_3^3$	$\langle(1/2,1/2,0)\rangle$	Q_{12}
S_{11}	$x_1^4+x_2^2x_3+x_1x_3^2$	$x_1^4+x_1x_2^4+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	W_{13}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$x_1^4+x_2^3+x_3^3$	$\langle(0,2/3,1/3)\rangle$	U_{12}
U_{12}	$x_1^4+x_2^3+x_2x_3^2$	$x_1^4+x_2^3x_3+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	U_{12}
W_{12}	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$x_1^5+x_2^4+x_3^2$	$\langle(0,1/2,1/2)\rangle$	W_{12}

TABLE 3. Для доказательства Теоремы 3.1 достаточно установить изоморфизм $\mathrm{Jac}(f_1)\cong\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ для каждой строки данной таблицы.

3.1.1. Вычисления. Будем использовать обозначения Таблицы 2 на странице 73. Чтобы проверить, что две алгебры изоморфны, представим $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ как фактор–алгебру кольца многочленов от трех переменных. А именно, мы вычислим соотношения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и определим на $\mathrm{Jac}(f_1)$ сюръективный гомоморфизм, который оказывается изоморфизмом по причине размерности. Для вычислительных целей мы будем использовать описание $\mathrm{Jac}(f,G)$, полученное в Разделе 2.3.

3.1.1.1. *Q_{10} и E_{14}.* Для $\widetilde{f}_2=x_1^8+x_2^3+x_3^2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}=\langle g\rangle=\langle(\frac12,0,\frac12)\rangle$ $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 10-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^6]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\quad \widetilde{v}_g,[x_2]\widetilde{v}_g.$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$\begin{aligned}
&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^6]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^6]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ\widetilde{v}_g=[x_2]\widetilde{v}_g,\\
&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g^2=16[x_1^6]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g\circ[x_2]\widetilde{v}_g=16[x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},
\end{aligned}$$

которые показывают, что $[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$16([x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ3}-\widetilde{v}_g^{\circ2}=0,\quad([x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ2}=0,\quad[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ\widetilde{v}_g=0.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1)=\mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\Big/(4y_1^3+y_3^2,y_2^2,y_1y_3)\,.$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}), \quad y_1 \mapsto [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_3 \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{i}\widetilde{v}_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) имеем

$$\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^6x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{672}\cdot \eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(\widetilde{f}_2)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{2\cdot 14}{672} = \frac{1}{24},$$
$$\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [y_1^3y_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{240}\cdot \eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1\cdot 10}{240} = \frac{1}{24}.$$

3.1.1.2. *Q_{11} и Z_{13}.* Для $\widetilde{f}_2 = x_1^6x_2 + x_2^3 + x_3^2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2} = \langle g\rangle = \langle(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\rangle$, $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 11-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, \quad \widetilde{v}_g, [x_2]\widetilde{v}_g.$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -3[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -3[x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_2]\widetilde{v}_g,\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$$
$$[x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_g = 12[x_1^4x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$\widetilde{v}_g \circ [x_2]\widetilde{v}_g = 12[x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.$$

которые показывают, что $[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$12([x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 2}[x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} - (\widetilde{v}_g)^{\circ 2} = 0,\ ([x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 3} + 3([x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 2} = 0,\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = 0.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]\Big/(3y_1^2y_2 + y_3^2, y_1^3 + 3y_2^2, 2y_1y_3)$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}), \quad y_1 \mapsto [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto [x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_3 \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{i}\widetilde{v}_g,$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) мы имеем

$$\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^4x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{18},$$

$$\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[y_1^2y_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right)=\frac{1}{198}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right)=\frac{1\cdot 11}{198}=\frac{1}{18}.$$

3.1.1.3. *Q_{12} и Q_{12}.* Для $\widetilde{f}_2=x_1^5x_2+x_2^2+x_3^3$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}=\langle g\rangle=\langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\rangle$ $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 12-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\begin{aligned}&\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^3x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&[x_1^4x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g,[x_3]\widetilde{v}_g.\end{aligned}$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$\begin{aligned}&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=-2[x_1x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=-2[x_1^3x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^3x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&[x_1x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^3x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ\widetilde{v}_g=[x_3]\widetilde{v}_g,\\&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^4x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=-2[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&[x_1x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=-2[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&[x_1^4]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1^4x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=-2[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}=[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\&\widetilde{v}_g\circ\widetilde{v}_g=10[x_1^3x_2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g\circ[x_3]\widetilde{v}_g=10[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.\end{aligned}$$

которые показывают, что $[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\circ\widetilde{v}_g=0,\ (\widetilde{v}_g)^{\circ 2}+5([x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 4}=0,\ ([x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 2}=0$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1)=\mathbb{C}[y_1,y_2,y_3]\Big/(5y_1^4+y_3^2,3y_2^2,2y_1y_3)\cdot$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}),\quad y_1\mapsto[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2\mapsto-\frac{1}{4}[x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_3\mapsto\widetilde{v}_g.$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) мы имеем

$$\begin{aligned}\eta_{\widetilde{f}_2,G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[x_1^3x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right)&=\frac{1}{15},\\-\frac{4}{10}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[y_2y_3^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right)=\frac{4}{720}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}},[\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right)&=\frac{4\cdot 12}{720}=\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

3.1.1.4. *S_{11} и W_{13}.* Для $\widetilde{f}_2 = x_1^4 + x_1x_2^4 + x_3^2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2} = \langle g\rangle = \langle (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\rangle$, $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 11-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, \quad \widetilde{v}_g, [x_1]\widetilde{v}_g, [x_1^2]\widetilde{v}_g.$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$\begin{aligned}
&[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,\\
&[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -4[x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_g = 8[x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 8[x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&[x_1]\widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 8[x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1^2]\widetilde{v}_g = 8[x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.
\end{aligned}$$

которые показывают, что $[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$([x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 2} + 4([x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 3} = 0,\ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = 0,\ (\widetilde{v}_g)^{\circ 2} - 8[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = 0.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]\Big/(4y_1^3 + y_3^2, 2y_2y_3, y_2^2 + 2y_1y_3)\ .$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}), \quad y_1 \mapsto [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{i}\widetilde{v}_g,\ y_3 \mapsto [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) мы имеем

$$\begin{aligned}
&\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{16},\\
&\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [y_1^3y_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{176}\cdot \eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1\cdot 11}{176} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

3.1.1.5. *U_{12} и U_{12}, часть 1.* Для $\widetilde{f}_2 = x_1^4 + x_2^3 + x_3^3$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2} = \langle g\rangle = \langle (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\rangle$, $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 12-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\begin{aligned}
&\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\\
&\widetilde{v}_{g^2}, [x_1]\widetilde{v}_{g^2}, [x_1^2]\widetilde{v}_{g^2},\ \widetilde{v}_g, [x_1]\widetilde{v}_g, [x_1^2]\widetilde{v}_g.
\end{aligned}$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_{g^2} = [x_1]\widetilde{v}_{g^2},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_{g^2} = [x_1^2]\widetilde{v}_{g^2},$$
$$[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_{g^2} = [x_1^2]\widetilde{v}_{g^2},$$
$$[x_1^2\widetilde{v}_{\mathrm{id}}] \circ \widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}) = [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_{g^2} = 9[x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_{g^2} = 9[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$\widetilde{v}_g \circ [x_1^2]\widetilde{v}_{g^2} = 9[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_{g^2} = 9[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_{g^2} = 9[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_{g^2} = 9[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.$$

которые показывают, что $[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$, $\widetilde{v}_{g^2}$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$([x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 3} = 0,\ (\widetilde{v}_g)^{\circ 2} = 0,\ (\widetilde{v}_{g^2})^{\circ 2} = 0.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]\Big/(4y_1^3, 3y_2^2, 3y_3^2)\ .$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}),\quad y_1 \mapsto \frac{1}{3}[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{v}_g,\ y_3 \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{v}_{g^2}.$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) мы имеем

$$\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{12},$$
$$3{\cdot}\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [y_1^2y_2y_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{3}{432}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{3\cdot 12}{432} = \frac{1}{12}.$$

3.1.1.6. *U_{12} и U_{12}, часть 2.* Для $\widetilde{f}_2 = x_1^4 + x_2^3x_3 + x_3^2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2} = \langle g\rangle = \langle (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\rangle$, $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 12-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$\widetilde{v}_g, [x_1]\widetilde{v}_g, [x_1^2]\widetilde{v}_g.$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$

$$[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -2[x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -2[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -2[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = -2[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2x_3]\widetilde{v}_{id} = [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$\widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_g = 6[x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 6[x_1x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1]\widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 6[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1^2]\widetilde{v}_g = 6[x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.$$

которые показывают, что $[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$, $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$([x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 3} = 0,\ (\widetilde{v}_g)^{\circ 2} + 3([x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 2},\ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = 0.$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \Big/ (4y_1^3, 3y_2^2 + y_3^2, 2y_2y_3)\ .$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}), \quad y_1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{-6}}[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_3 \mapsto \widetilde{v}_g.$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку, по (2.2) мы имеем

$$\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2x_3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{12},$$
$$\frac{6}{9}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [y_1^2y_3^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{6}{9\cdot 96}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{6\cdot 12}{9\cdot 96} = \frac{1}{12}.$$

3.1.1.7. *W_{12} и W_{12}.* Для $\widetilde{f}_2 = x_1^5 + x_2^4 + x_3^2$ и $G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2} = \langle g\rangle = \langle (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\rangle$, $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ — это 12-мерное $\mathbb{C}$-векторное пространство, базис которого можно выбрать как

$$\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, \quad \widetilde{v}_g, [x_1]\widetilde{v}_g, [x_1^2]\widetilde{v}_g, [x_1^3]\widetilde{v}_g.$$

Единственные нетривиальные ненулевые произведения в $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$, вычисленные по (2.76), задаются формулой

$$[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,$$
$$[x_1]v_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2]\widetilde{v}_g = [x_1^3]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1^2]\widetilde{v}_g,$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1]\widetilde{v}_g = [x_1^3]\widetilde{v}_g,\ [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ \widetilde{v}_g = [x_1^3]\widetilde{v}_g,\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1^3]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$[x_1^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} \circ [x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}} = [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ \widetilde{v}_g = 8[x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$
$$\widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 8[x_1x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ [x_1]\widetilde{v}_g \circ [x_1]\widetilde{v}_g = 8[x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1^2]\widetilde{v}_g = 8[x_1^2x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},$$

$$[x_1]\widetilde{v}_g \circ [x_1^2]\widetilde{v}_g = 8[x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ \widetilde{v}_g \circ [x_1^3]\widetilde{v}_g = 8[x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}.$$

которые показывают, что $[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}$ и $\widetilde{v}_g$ порождают $\mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2})$ и удовлетворяют следующим соотношениям

$$([x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}})^{\circ 4} = 0,\ (\widetilde{v}_g)^{\circ 3} = 0$$

С другой стороны, алгебра Якоби $\mathrm{Jac}(f_1)$ задается выражением

$$\mathrm{Jac}(f_1) = \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3]\Big/(5y_1^4, 4y_2^3, y_3)\ .$$

Следовательно, мы имеем изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Jac}(\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}), \quad y_1 \mapsto \frac{1}{2}[x_1]\widetilde{v}_{\mathrm{id}},\ y_2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}v_g.$$

который, кроме того, является изоморфизмом фробениусовых алгебр, поскольку по (2.2) мы имеем

$$\eta_{\widetilde{f}_2, G^{\mathrm{SL}}_{\widetilde{f}_2}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [x_1^3x_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{1}{20},$$
$$\frac{16}{8}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [y_1^3y_2^2]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{16}{8\cdot 480}\cdot\eta_{f_1,\{\mathrm{id}\}}\left(\widetilde{v}_{\mathrm{id}}, [\mathrm{hess}(f_1)]\widetilde{v}_{\mathrm{id}}\right) = \frac{16\cdot 12}{480} = \frac{1}{20}.$$

3.1.2. Замечание. Чтобы наглядно представить утверждение Теоремы 3.1, рассмотрим Рисунок 1 на странице 81. В приведённом графе вершинами являются пары (f, G), где f — обратимый многочлен, и $G \subseteq G^{\mathrm{SL}}_f$. Ребро между двумя вершинами, помеченными как (f_1, G_1) и (f_2, G_2) соответственно, существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{Jac}(f_1, G_1) \cong \mathrm{Jac}(f_2, G_2)$. Все рассмотренные пары (f, G) взяты из Таблицы 2.

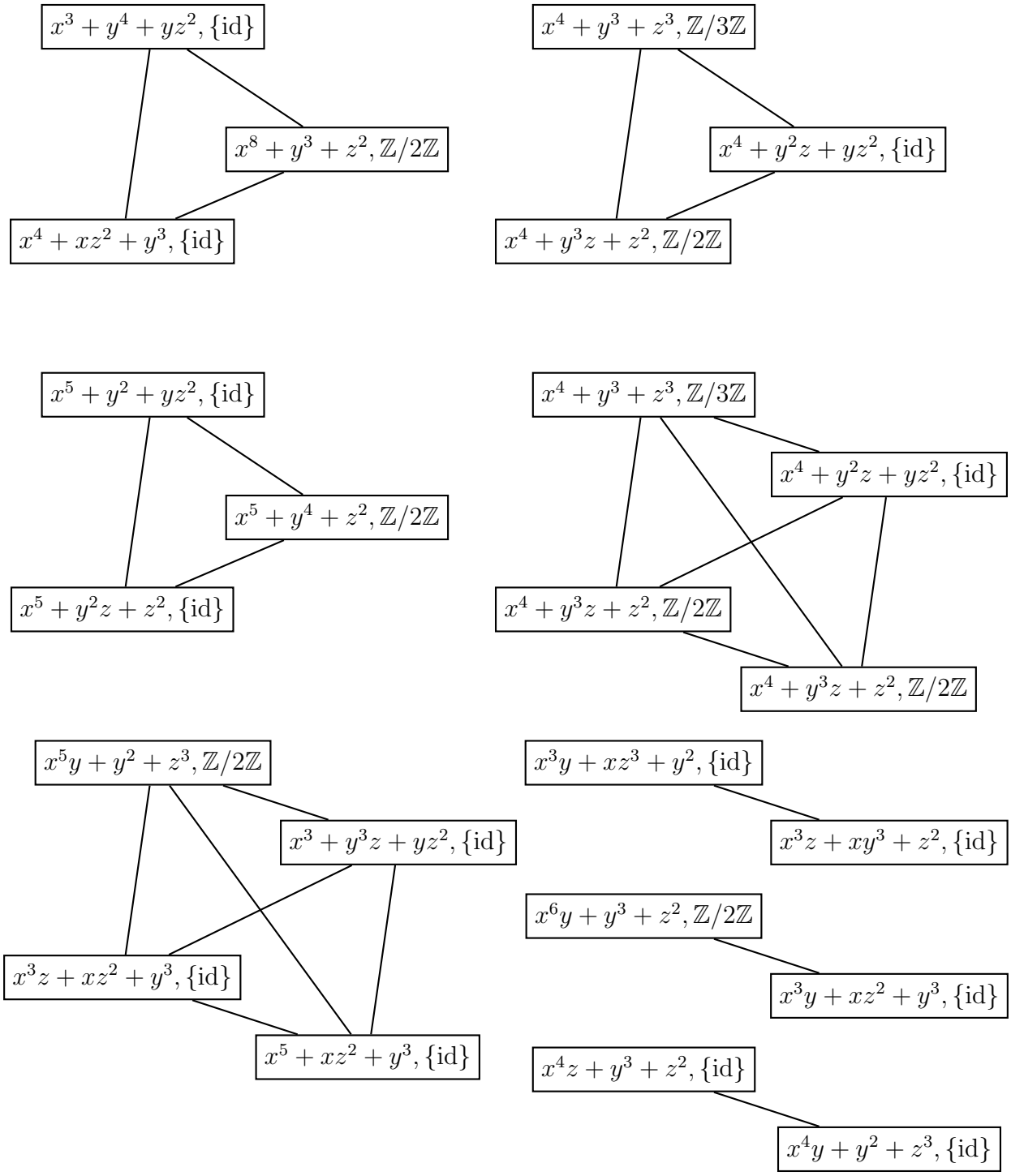


FIGURE 1. Данный рисунок визуализирует все существующие изоморфизмы между алгебрами Якоби орбифолдов Ландау–Гинзбурга исключительных унимодальных особенностей.

ГЛАВА 4

Когомологии Хохшильда орбифолда Ландау–Гинзбурга

Важным инвариантом, связанным с орбифолдом Ландау–Гинзбурга (f, G), является dg–категория $\mathrm{MF}_G(f)$ G-эквивариантных матричных факторизаций f. С этой категорией можно связать кольцо когомологий Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$, которые снабжены $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–градуированно коммутативным $\cup$–произведением. Аксиоматизация $\mathrm{Jac}'(f, G)$ и $\mathrm{Jac}(f, G)$ Главы 2 мотивирована алгебраической структурой пары $(\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f)), \mathsf{HH}_*(\mathrm{MF}_G(f)))$. Естественно предположить, что алгебра $\mathrm{Jac}(f, G)$ изоморфна $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$.

Д.Шкляров разработал в [**Sh20**] метод вычисления $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$. Им была предложена $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно G-скрученно коммутативная алгебра $\mathcal{A}^*(f, G)$ такая, что ее G-инвариантная часть $\mathcal{A}^*(f, G)^G$ изоморфна как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная алгебра когомологиям Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$ [**Sh20**, Теорема 3.1 и Теорема 3.4].

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть f — обратимый многочлен, а G — подгруппа группы G_f. максимальных диагональных симметрий. Тогда имеет место изоморфизм $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированных алгебр*

$$\mathrm{Jac}'(f, G) \cong \mathcal{A}^*(f, G), \tag{4.1}$$

согласующийся с G-действиям с обеих сторон. В частности, данное отображение ограничивается на G-инварианты, где задает $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированный изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(f, G) \cong \mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f)). \tag{4.2}$$

Важно заметить, что алгебра $\mathrm{Jac}'(f, G)$ была вычислена на несколько лет раньше работы Шклярова. Также важно отметить, что когомологии Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$ могут быть естественно снабжены спариванием только когда $\mathrm{MF}_G(f)$ является так называемой Калаби–Яу категорией, что налагает условие $w_1+\cdots+w_N = d$ на веса квазиоднородности f. В то же время, спаривание является частью конструкции $\mathrm{Jac}'(f, G)$ для любого f. В частности, мы доказали в предыдущих главах, что $\mathrm{Jac}(f, G)$ является фробениусовой алгеброй для всех обратимых f и $G \subseteq G_f^{\mathrm{SL}}$.

Если первая часть данной главы посвящена обратимым многочленам, то вторая часть данной главы посвящена многочленам типа касп. Для многочлена типа касп $f_{A'}$ мы вычисляем в Разделе 4.4 структуру $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f_{A'}))$ и показываем, что данное кольцо имеет структуру свободного $\mathbb{C}[c]$–модуля полного ранга. Это будет позже использовано в Главе 6.

Теория (ко)гомологий Хохшильда категории G–эквивариантных матричных факторизаций определена не только лишь для групп симметрий, действующих диагонально, как в настоящей работе. Однако, вопрос вычисления соответствующих комплексов и групп становится гораздо более сложным для более общих групп. Некоторые результаты для неабелевых групп симметрий были получены автором совместно с А.А.Ионовым с [**BI22, BI21**].

Данная глава основана на работах [**BT20, BI22**].

4.1. Описание когомологий Хохшильда по Шклярову

Пусть $\widetilde{\xi}_g$ — формальная буква, сопоставленная каждому элементу $g \in G$. Определим $\mathbb{C}$-векторное пространство

$$\mathcal{A}^*(f,G) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{Jac}(f^g)\widetilde{\xi}_g, \tag{4.3}$$

где $\widetilde{\xi}_g$ будет играть роль генератора прямого слагаемого.

Шкляров [**Sh20**] вводит на $\mathcal{A}^*(f,G)$ структуру $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированно G-скрученно коммутативной алгебры. Определим действие группы G на $\mathcal{A}^*(f,G)$. Пусть G действует покоординатно на $\mathrm{Jac}(f^g)$ для каждого $g \in G$ и $\widetilde{\xi}_g$ преобразуется как

$$G \ni h = (h_1,\dots,h_n): \quad \widetilde{\xi}_g \mapsto \prod_{i\in I_g^c} h_i^{-1} \cdot \widetilde{\xi}_g. \tag{4.4}$$

Структура произведения $\mathcal{A}^*(f,G)$, которая будет введена ниже, инвариантна относительно действия G. В частности, ее G-инвариантная часть $\mathcal{A}^*(f,G)^G$ изоморфна как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная алгебра когомологиям Хохшильда $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f))$ категории $\mathrm{MF}_G(f)$, снабженной $\cup$–произведением [**Sh20**, Теорема 3.1 и Теорема 3.4]. Напомним структуру произведения $\mathcal{A}^*(f,G)$ [**Sh20**, Раздел 3].

Определим $\mathbb{Z}$-градуированную *алгебру Клиффорда* Cl_n как фактор-алгебру

$$\mathbb{C}\langle\theta_1,\dots,\theta_n,\partial_{\theta_1},\dots,\partial_{\theta_n}\rangle$$

по модулю идеала, порождённого

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i, \quad \partial_{\theta_i}\partial_{\theta_j} = -\partial_{\theta_j}\partial_{\theta_i}, \quad \partial_{\theta_i}\theta_j = -\theta_j\partial_{\theta_i} + \delta_{ij},$$

где θ_i имеет степень -1, а ∂_{θ_i} имеет степень 1.

Для $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ положим

$$\partial_{\theta_I} := \prod_{i \in I} \partial_{\theta_i}, \quad \theta_I := \prod_{i \in I} \theta_i, \tag{4.5}$$

где в обоих произведениях множители берутся в порядке возрастания индексов.

Cl_n–подпространства $\mathbb{C}[\theta] = \mathbb{C}[\theta_1, \dots, \theta_n]$ и $\mathbb{C}[\partial_\theta] = \mathbb{C}[\partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_n}]$ имеют левые $\mathbb{Z}$-градуированные Cl_n-модульные структуры посредством изоморфизмов

$$\mathbb{C}[\theta] \cong \mathrm{Cl}_n / \mathrm{Cl}_n \langle \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_n} \rangle, \quad \mathbb{C}[\partial_\theta] \cong \mathrm{Cl}_n / \mathrm{Cl}_n \langle \theta_1, \dots, \theta_n \rangle.$$

Будем обозначать кольцо $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ через $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ и $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n]$ через $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$. Для каждого $1 \leq i \leq n$ имеется отображение

$$\nabla_i^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})} : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \qquad \nabla_i(p) := \frac{l_i(p) - l_{i+1}(p)}{x_i - y_i}. \tag{4.6}$$

где $l_i(p) := p(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, \dots, x_n)$, $l_1(p) = p(\mathbf{x})$ и $l_{n+1}(p) = p(\mathbf{y})$. Эти отображения называются *разностными производными*, ключевым свойством которых является следующее:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \nabla_i(p) = p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y}). \tag{4.7}$$

Разностные производные можно применять последовательно. В частности, мы будем использовать $\nabla_i^{\mathbf{y} \to (\mathbf{y}, \mathbf{z})} \nabla_j^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})}(p)$, который является элементом $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$. Для гомоморфизма $\psi : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ положим $\nabla_i^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))}(p) := \nabla_i^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})}(p)\Big|_{\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})} \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.

Теперь мы готовы описать структуру произведения $\mathcal{A}^*(f, G)$. Для каждой пары элементов (g, h) из G определим класс $\sigma_{g,h} \in \mathrm{Jac}(f^{gh})$ следующим образом.

- Если $d_{g,h} := \frac{1}{2}(d_g + d_h - d_{gh})$ не является неотрицательным целым числом, положим $\sigma_{g,h} = 0$.
- Если $d_{g,h}$ — неотрицательное целое число, определим $\sigma_{g,h}$ как класс коэффициента $\partial_{\theta_{I_{gh}^c}}$ в выражении

$$\frac{1}{d_{g,h}!} \Upsilon \left(\left(\lfloor \mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \rfloor_{gh} + \lfloor \mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x}) \rfloor_{gh} \otimes 1 + 1 \otimes \lfloor \mathrm{H}_{f,h}(g(\mathbf{x})) \rfloor_{gh} \right)^{d_{g,h}} \otimes \partial_{\theta_{I_g^c}} \otimes \partial_{\theta_h^c} \right) \tag{4.8}$$

  где

  (1) $\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ — элемент $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\theta]^{\otimes 2}$, определенный как ограничение на $\{\mathbf{y} = g(\mathbf{x}), \mathbf{z} = \mathbf{x}\}$ следующего элемента $\mathbb{C}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \otimes \mathbb{C}[\theta]^{\otimes 2}$

$$\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \nabla_j^{\mathbf{y} \to (\mathbf{y}, \mathbf{z})} \nabla_i^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{y})}(f)\, \theta_i \otimes \theta_j; \tag{4.9}$$

(2) $\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x})$ — элемент $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\theta]$, задающийся формулой

$$\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x}) := \sum_{i,j \in I_g^c,\, j<i} \frac{1}{1-g_j} \nabla_j^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{x}^g)} \nabla_i^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}(f)\, \theta_j\, \theta_i, \tag{4.10}$$

где $\mathbf{x}^g$ определяется как $(\mathbf{x}^g)_i = x_i$, если $i \in I_g$ и $(\mathbf{x}^g)_i = 0$, если $i \in I_g^c$;

(3) $\lfloor - \rfloor_{gh} : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes V \longrightarrow \mathrm{Jac}(f^{gh}) \otimes V$ для $V = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\theta]^{\otimes 2}$ или $V = \mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\theta]$ является $\mathbb{C}$-линейным отображением, определяемым как продолжение фактор-отображения $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \longrightarrow \mathrm{Jac}(f^{gh})$;

(4) $d_{g,h}$-я степень в уравнении (4.8) вычисляется относительно естественного произведения на $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \otimes \mathbb{C}[\theta] \otimes \mathbb{C}[\theta]$;

(5) Υ — это $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$-линейное продолжение отображения нулевой степени $\mathbb{C}[\theta]^{\otimes 2} \otimes \mathbb{C}[\partial_\theta]^{\otimes 2} \to \mathbb{C}[\partial_\theta]$, определяемое формулой

$$p_1(\theta) \otimes p_2(\theta) \otimes q_1(\partial_\theta) \otimes q_2(\partial_\theta) \mapsto (-1)^{|q_1||p_2|} p_1(q_1) \cdot p_2(q_2) \tag{4.11}$$

где $p_i(q_i)$ обозначает действие $p_i(\theta)$ на $q_i(\partial_\theta)$ посредством структуры Cl_n-модуля на $\mathbb{C}[\partial_\theta]$, определенной выше, а $\cdot$ — естественное произведение в $\mathbb{C}[\partial_\theta]$.

Тогда произведение $\mathcal{A}^*(f, G)$ определяется как

$$[\phi(\mathbf{x})]\xi_g \cup [\psi(\mathbf{x})]\xi_h = [\phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\sigma_{g,h}]\xi_{gh}, \quad \phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \tag{4.12}$$

см. [**Sh20**, Теорема 3.1 и Теорема 3.4].

4.2. Доказательство теоремы 4.1

Из определения моментально следует, что алгебры $\mathrm{Jac}'(f, G)$ и $\mathcal{A}^*(f, G)$ изоморфны как $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированные векторные пространства. Также ясно, что G-действия на обоих пространствах согласованны. Осталось проверить соответствие произведений. Это достаточно проверить только для f типа цепь или цикл, поскольку $\mathrm{Jac}'(f, G)$ и $\mathcal{A}^*(f, G)$ имеют одинаковое свойство Кюннета см. Предложение 2.29 и [**Sh20**, Предложение 2.6].

Во-первых заметим, что аналогично случаю $\mathrm{Jac}'(f, G)$, имеет место

Предложение 4.2. *Если* $gh \neq \mathrm{id}$, $g \neq \mathrm{id}$ *и* $h \neq \mathrm{id}$, *то* $\sigma_{g,h} = 0$.

Доказательство. Поскольку алгебра $\mathcal{A}^*(f, G)$ также $\mathrm{Aut}(f, G)$-инвариантна в силу [**Sh20**, Теорема 3.1], мы можем применить Предложение 2.7, которое завершает доказательство. □

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно вычислить $\sigma_{g,g^{-1}}$ для каждого $g \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$.

Предложение 4.3. *Для каждого* $g = (\mathbf{e}[\alpha_1], \dots, \mathbf{e}[\alpha_n]) \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$ *с* $0 \le \alpha_i < 1$ *имеем*

$$\sigma_{g,g^{-1}} = (-1)^{\frac{d_g(d_g-1)}{2}} \cdot \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{age}(g)\right] \cdot \left(\prod_{i=1}^{d_g} \frac{\mathbf{e}\left[-\frac{1}{4}\right]}{2\sin(\alpha_i \pi)}\right) [H_{g,g^{-1}}]. \tag{4.13}$$

Доказательство. Для f типа цепь применим Лемму 4.4 и Лемму 4.5 (см. Раздел 4.2.1 ниже), а для f типа цикл применим Лемма 4.6 и Лемма 4.7 (см. Раздел 4.2.2 ниже). □

Заметим, что для $i = 1, \dots, d_g$ мы имеем $0 < \alpha_i < 1$ и $\prod_{i=1}^{d_g} 2\sin(\alpha_i \pi)$ инвариантно относительно замены g на его обратный g^{-1}, поскольку это эквивалентно замене α_i на $1 - \alpha_i$.

Зададим изоморфизм алгебр $\mathcal{A}^*(f, G) \to \mathrm{Jac}'(f, G)$ отображением:

$$\tilde{v}_g \to \mathbf{e}\left[-\frac{d_g}{8}\right] \left(\prod_{i=1}^{d_g} 2\sin(\alpha_i \pi)\right)^{-1/2} \xi_g. \tag{4.14}$$

4.2.1. Тип цепь $f = x_1^{a_1} x_2 + \dots + x_{n-1}^{a_{n-1}} x_n + x_n^{a_n}$. Сначала вычислим все ингредиенты формулы произведения (4.12):

$$\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{y_i - z_i} \left(\frac{x_i^{a_i} - y_i^{a_i}}{x_i - y_i} - \frac{x_i^{a_i} - z_i^{a_i}}{x_i - z_i}\right) \theta_i \otimes \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^{a_i} - z_i^{a_i}}{y_i - z_i} \theta_{i+1} \otimes \theta_i, \quad x_{n+1} := 1,$$

$$\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d_g - 1} x_i^{a_i - 1} \frac{g_i^{a_i}}{1 - g_i} \theta_i \theta_{i+1}, \quad g = (g_1, \dots, g_n) \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{a_i - 2} x_{i+1}}{g_i - 1} \left(\frac{1 - g_i^{a_i}}{1 - g_i} - a_i\right) \theta_i \otimes \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_i^{a_i} - 1}{g_i - 1} x_i^{a_i - 1} \theta_{i+1} \otimes \theta_i,$$

$$\mathrm{H}_{f,g^{-1}}(g(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{d_g - 1} x_i^{a_i - 1} \frac{1}{g_i - 1} \theta_i \theta_{i+1}, \quad g = (g_1, \dots, g_n) \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу M_g размера d_g, (i, j)-й элемент которой задается формулой

$$(M_g)_{ij} := -\frac{x_i^{a_i - 2} x_{i+1}}{g_i - 1} \left(\frac{1 - g_i^{a_i}}{1 - g_i} - a_i\right) \delta_{i,j} + x_i^{a_i - 1} \frac{g_i^{a_i}}{1 - g_i} \delta_{i+1,j} + x_{i-1}^{a_{i-1} - 1} \frac{1}{g_{i-1} - 1} \delta_{i-1,j}. \tag{4.15}$$

Лемма 4.4. *Для каждого* $g \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$ *имеем следующее равенство в* $\mathrm{Jac}(f)$*:*

$$\sigma_{g,g^{-1}} = (-1)^{\frac{d_g(d_g-1)}{2}} \left[\det(M_g)\right]. \tag{4.16}$$

Доказательство. Так как $I_{\mathrm{id}}^c = \emptyset$ и ввиду (4.11), нас интересует только коэффициент $\theta_{I_g^c} \otimes \theta_{I_g^c}$ в выражении

$$\frac{1}{d_g!}\left(\lfloor \mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x})\rfloor_{\mathrm{id}} + \lfloor \mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x})\rfloor_{\mathrm{id}} \otimes 1 + 1 \otimes \lfloor \mathrm{H}_{f,h}(g(\mathbf{x}))\rfloor_{\mathrm{id}}\right)^{d_g}.$$

Из конкретной формы $\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, $\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x})$ и $\mathrm{H}_{f,g^{-1}}(g(\mathbf{x}))$ ясно, что коэффициенты $\theta_{i+1} \otimes \theta_i$ в $\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ не вносят вклад в $\sigma_{g,g^{-1}}$. По той же причине видно, что $\mathrm{H}_{f,g}$ и $\mathrm{H}_{f,g^{-1}}$ вносят вклад в $\sigma_{g,g^{-1}}$ парами. Принимая во внимание знаки, получающиеся при перемножении элементов алгебры Клиффорда, получаем рекуррентную формулу для $\sigma_{g,g^{-1}}$, совпадающую с выражением $\det(M_g)$ через миноры матрицы M_g. □

Лемма 4.5. *Для каждого $g \in G_f \backslash \{\mathrm{id}\}$ мы имеем*

$$[\det(M_g)] = \left(\prod_{i=1}^{d_g} \frac{-a_i}{1-g_i}\right)[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}] = \left(\prod_{i=1}^{d_g}\frac{1}{g_i-1}\right)[H_{g,g^{-1}}]. \tag{4.17}$$

Доказательство. Доказательство проводится индуктивно следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\det(M_g)] &= \left[-\frac{x_1^{a_1-2}x_2}{g_1-1}\left(\frac{1-g_1^{a_1}}{1-g_1} - a_1\right)\left(\prod_{i=2}^{d_g}\frac{-a_i}{1-g_i}\right)x_2^{a_2-2}x_3^{a_3-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}\right] \\
&\quad + \left[x_1^{2a_1-2}\frac{g_1^{a_1}}{(1-g_1)^2}\left(\prod_{i=3}^{d_g}\frac{-a_i}{1-g_i}\right)x_3^{a_3-2}x_4^{a_4-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}\right] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d_g}\frac{-a_i}{1-g_i}\right)[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}] \\
&\quad + \left(-\frac{1-g_1^{a_1}}{1-g_2} - g_1^{a_1}\right)\frac{a_2}{(1-g_1)^2}\left(\prod_{i=3}^{d_g}\frac{-a_i}{1-g_i}\right)[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}] \\
&= \left(\prod_{i=1}^{d_g}\frac{-a_i}{1-g_i}\right)[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}],
\end{aligned}$$

где мы использовали соотношения $[x_1^{a_1}] = -a_2[x_2^{a_2-1}x_3]$ и $g_1^{a_1}g_2 = 1$. Так как элемент $[H_{g,g^{-1}}]$ легко вычисляется и он задается формулой $(\prod_{i=1}^{d_g} a_i)[x_1^{a_1-2}x_2^{a_2-1}\cdots x_{d_g}^{a_{d_g}-1}x_{d_g+1}]$ (ср. Доказательство Леммы 2.4), доказательство завершено. □

Мы завершили доказательство Предложения 4.3 для f типа цепь.

4.2.2. Тип цикл $f = x_1^{a_1}x_2 + \cdots + x_n^{a_n}x_1$. Сначала вычислим ингредиенты формулы произведения (4.12):

$$\mathrm{H}_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i+1}}{y_i - z_i}\left(\frac{x_i^{a_i} - y_i^{a_i}}{x_i - y_i} - \frac{x_i^{a_i} - z_i^{a_i}}{x_i - z_i}\right)\theta_i \otimes \theta_i + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{y_i^{a_i} - z_i^{a_i}}{y_i - z_i}\theta_{i+1} \otimes \theta_i$$

$$+\frac{z_1}{y_n-z_n}\left(\frac{x_n^{a_n}-y_n^{a_n}}{x_n-y_n}-\frac{x_n^{a_n}-z_n^{a_n}}{x_n-z_n}\right)\theta_n\otimes\theta_n+\frac{x_n^{a_n}-y_n^{a_n}}{x_n-y_n}\theta_n\otimes\theta_1.$$

$$\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^{a_i-1}\frac{g_i^{a_i}}{1-g_i}\theta_i\theta_{i+1}+x_n^{a_n-1}\frac{1}{g_n-1}\theta_1\theta_n,\quad g=(g_1,\dots,g_n)\in G_f\backslash\{\mathrm{id}\}.$$

Отсюда имеем

$$\mathrm{H}_f(\mathbf{x},g(\mathbf{x}),\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^{a_i-2}x_{i+1}}{g_i-1}\left(\frac{1-g_i^{a_i}}{1-g_i}-a_i\right)\theta_i\otimes\theta_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{g_i^{a_i}-1}{g_i-1}x_i^{a_i-1}\theta_{i+1}\otimes\theta_i$$
$$+\frac{x_n^{a_n-2}x_1}{g_n-1}\left(\frac{1-g_n^{a_n}}{1-g_n}-a_n\right)\theta_n\otimes\theta_n+\frac{g_n^{a_n}-1}{g_n-1}x_n^{a_n-1}\theta_n\otimes\theta_1.$$

$$\mathrm{H}_{f,g^{-1}}(g(\mathbf{x}))=\sum_{i=1}^{n-1}x_i^{a_i-1}\frac{1}{g_i-1}\theta_i\theta_{i+1}+x_n^{a_n-1}\frac{g_n^{a_n}}{1-g_n}\theta_1\theta_n,\quad g=(g_1,\dots,g_n)\in G_f\backslash\{\mathrm{id}\}.$$

Рассмотрим квадратную матрицу M_g размера n, (i,j)-й элемент которой задается выражением

(4.18)
$$(M_g)_{ij}:=-\frac{x_i^{a_i-2}x_{i+1}}{g_i-1}\left(\frac{1-g_i^{a_i}}{1-g_i}-a_i\right)\delta_{i,j}+x_i^{a_i-1}\frac{g_i^{a_i}}{1-g_i}\delta_{i+1,j}+x_{i-1}^{a_{i-1}-1}\frac{1}{g_{i-1}-1}\delta_{i-1,j}$$
$$+x_n^{a_n-1}\frac{g_n^{a_n}}{1-g_n}\delta_{i,n}\delta_{j,1}+x_n^{a_n-1}\frac{1}{g_n-1}\delta_{i,1}\delta_{j,n}.$$

Лемма 4.6. *Для каждого $g\in G_f\backslash\{\mathrm{id}\}$ имеем следующее равенство в $\mathrm{Jac}(f)$:*

(4.19)
$$\sigma_{g,g^{-1}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[\det(M_g)\right].$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству Леммы 4.4. Единственными отличиями являются слагаемые $\theta_n\otimes\theta_1$ в $\mathrm{H}_f(\mathbf{x},g(\mathbf{x}),\mathbf{x})$ и $\theta_1\theta_n$ в $\mathrm{H}_{f,g}(\mathbf{x})$ (а также в $\mathrm{H}_{f,g^{-1}}(g(\mathbf{x}))$), которые дают некоторые дополнительные вклады в $\sigma_{g,g^{-1}}$ (в частности, третье и четвертое слагаемые в доказательстве леммы 4.7 ниже). □

Лемма 4.7. *Для каждого $g\in G_f\backslash\{\mathrm{id}\}$ мы имеем*

(4.20)
$$[\det(M_g)]=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{g_i-1}\right)\left(\left(\prod_{l=1}^{n}a_l\right)-(-1)^n\right)[x_1^{a_1-1}\cdots x_n^{a_n-1}]=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{g_i-1}\right)[H_{g,g^{-1}}].$$

Доказательство. Во-первых, у нас есть следующее

Лемма 4.8. *Пусть M'_g — квадратная матрица размера n, (i,j)-й элемент которой задается формулой*

$$(M'_g)_{ij}:=-\frac{x_i^{a_i-2}x_{i+1}}{g_i-1}\left(\frac{1-g_i^{a_i}}{1-g_i}-a_i\right)\delta_{i,j}+x_i^{a_i-1}\frac{g_i^{a_i}}{1-g_i}\delta_{i+1,j}+x_{i-1}^{a_{i-1}-1}\frac{1}{g_{i-1}-1}\delta_{i-1,j}.$$

У нас есть

$$\left[\det(M'_g)\right] = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i - 1}\right) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\prod_{l=1}^{n-k} a_l\right) \left(\prod_{l=n-k+1}^{n} \frac{1-g_l^{a_l}}{1-g_l}\right)\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}].$$

Доказательство. Можно легко показать утверждение по индукции, где мы используем соотношения

$$[x_1^{a_1}] = -a_2[x_2^{a_2-1}x_3],\ \ldots\ [x_{n-1}^{a_{n-1}}] = -a_n[x_n^{a_n-1}x_1]$$

и

$$g_1^{a_1} g_2 = \ \ldots\ = g_{n-1}^{a_{n-1}} g_n = 1.$$

□

Утверждение следует из прямого вычисления определителя:

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{n} (g_i - 1)\right) [\det(M_g)] \\
= \ &\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\prod_{l=1}^{n-k} a_l\right) \left(\prod_{l=n-k+1}^{n} \frac{1-g_l^{a_l}}{1-g_l}\right)\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
&+a_1 \frac{1-g_n^{a_n}}{1-g_n} \left(\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \left(\prod_{l=2}^{n-k-1} a_l\right) \left(\prod_{l=n-k}^{n-1} \frac{1-g_l^{a_l}}{1-g_l}\right)\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
&+(-1)^{n-1}[x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] - \left(\prod_{i=1}^{n} g_i^{a_i}\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
= \ &\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\prod_{l=1}^{n-k} a_l\right) \left(\prod_{l=n-k+1}^{n} \frac{1-g_l^{a_l}}{1-g_l}\right)\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
&-\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(\prod_{l=1}^{n-k} a_l\right) \left(\prod_{l=n-k+1}^{n} \frac{1-g_l^{a_l}}{1-g_l}\right)\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
&-(-1)^n[x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] - \left(\prod_{i=1}^{n} g_i^{a_i}\right) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}] \\
= \ &(a_1 \cdots a_n - (-1)^n) [x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}],
\end{aligned}$$

где мы использовали соотношения $[x_n^{a_n}] = -a_1[x_1^{a_1-1}x_2]$, $1 - g_1^{a_1} = -g_2^{-1}(1-g_2)$, $\ldots$, $1-g_{n-1}^{a_{n-1}} = -g_n^{-1}(1-g_n)$, $1-g_n^{a_n} = g_1^{-1}(1-g_1)$ и $g_1^{a_1} \cdots g_n^{a_n} = g_1^{-1} \cdots g_n^{-1}$. Так как элемент $[H_{g,g^{-1}}]$ есть не что иное, как $[\mathrm{hess}(f)] = (a_1 \cdots a_n - (-1)^n)[x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}]$. □

Таким образом, мы завершили доказательство Предложения 4.3 также для f типа петля.

4.3. Категорная эквивалентность

В Главе 3 мы привели изоморфизм алгебр

$$\mathrm{Jac}(\overline{f}) = \mathrm{Jac}(\overline{f}, \{\mathrm{id}\}) \cong \mathrm{Jac}(f, G), \tag{4.21}$$

для некоторых обратимых многочленов f, $\overline{f}$ и подгрупп $G \subseteq G_f \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$.

Естественным является вопрос, имеет ли место (квази)эквивалентность категорий матричных факторизаций:

$$\mathrm{MF}(\overline{f}) = \mathrm{MF}_{\{\mathrm{id}\}}(\overline{f}) \cong \mathrm{MF}_G(f). \tag{4.22}$$

Такая эквивалентность действительно имеет место. Это следует из конструкции $\overline{f}$ и в силу локального свойства категории особенности $\{\widehat{f} = 0\} \subset \widehat{\mathbb{C}^3/G}$, которая эквивалентна $\mathrm{MF}_G(f)$ [**Or04**, Предложение 1.14].

Когомологии Хохшильда и $\cup$–произведение инвариантны относительно категорных эквивалентностей. Теорема 4.1 подтверждает согласованность изоморфизма (4.21) и эквивалентности (4.22), как и ожидалось.

4.4. Когомологии Хохшильда касп-многочленов

В этом разделе мы вычисляем $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f_{A'}))$. Напомним, что $f_{A'}$ имеет дополнительный комплексный параметр c. Поэтому мы рассматриваем соответствующие когомологии Хохшильда и прочие алгебраические структуры ниже как $\mathbb{C}(c)$–модули.

4.4.1. Вычисление $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f_{A'}))$. Будем использовать обозначения Раздела 6.2. Для $i = 1, 2, 3$ обозначим через g_i генератор $K_i \subseteq G$. Имеем $g_i^{n_i} = \mathrm{id} \in G$. Заметим, что элементы $[\phi(\mathbf{x})]\xi_{g_i^a}$ имеют четность $\overline{0}$ в $\mathcal{A}^*(f_{A'}, G)$ для всех i, a. По Предложению 1.6 имеется $2j_G$ элементов группы G, задающих сектора четности $\overline{1}$. Эти элементы группы имеют пустое фиксированное множество.

Нам необходимо вычислить следующие произведения

$$\xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_k^b}, \quad \xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_l^b}$$

в секторе четности $\overline{0}$ и также

$$\xi_{g_k^a} \cup \xi_h, \quad \xi_h \cup \xi_{h'} \quad \text{для } h, h' \in G,\ \mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h') = 0$$

в секторе четности $\overline{1}$.

Ниже нам будет удобно использовать мультипликативное обозначение групповых элементов. Рассмотрим еще одно обозначение. Для любых $k \in 1, 2, 3$

и $g_k^a \neq \mathrm{id}$ существует $\lambda \in \mathbb{C}^* \backslash \{1\}$ такое, что

$$g_k^a = \begin{cases} (1, \lambda, \lambda^{-1}), & k = 1, \\ (\lambda, 1, \lambda^{-1}), & k = 2, \\ (\lambda, \lambda^{-1}, 1), & k = 3. \end{cases}$$

Определим $\mathcal{A}^*(f_{A'}, G)$–элементы:

$$\tilde{\xi}_{g_k^a} := (1 - \lambda^{-1}) \xi_{g_k^a}.$$

Напомним, что мы рассматриваем $\mathcal{A}^*(f_{A'}, G)$ как $\mathbb{C}(c)$–модуль. Структура умножения этой алгебры описывается следующим предложением.

Предложение 4.9. *Для любых k, l, m таких, что $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3\}$ и $h, h' \in G$, таких, что $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h') = 0$, мы имеем в $\mathcal{A}^*(f_{A'}, G)$*

$$\tilde{\xi}_{g_k^a} \cup \tilde{\xi}_{g_k^b} = \begin{cases} -\lfloor c^{-1} x_k \rfloor \cdot \tilde{\xi}_{g_k^{a+b}} & \text{если } g_k^{a+b} \neq \mathrm{id}, \\ \lfloor -a_l' a_m' x_l^{a_l' - 2} x_m^{a_m' - 2} + c^{-2} x_k^2 \rfloor \cdot \xi_{\mathrm{id}} & \text{если } g_k^{a+b} = \mathrm{id}. \end{cases}$$

$$\tilde{\xi}_{g_k^a} \cup \tilde{\xi}_{g_l^b} = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad \mathrm{Fix}(g_k^a g_l^b) = 0, \\ \lfloor a_m'(a_m' - 1) x_m^{a_m' - 2} \rfloor \cdot \tilde{\xi}_{g_k^a g_l^b} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для доказательства предложения приведем подготовительные вычисления. Мы имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{f_{A'}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{y_k - z_k} \left(\frac{x_k^{a_k'} - y_k^{a_k'}}{x_k - y_k} - \frac{x_k^{a_k'} - z_k^{a_k'}}{x_k - z_k} \right) \theta_k \otimes \theta_k \\ - c^{-1} x_3 \cdot \theta_2 \otimes \theta_1 - c^{-1} y_2 \cdot \theta_3 \otimes \theta_1 - c^{-1} z_1 \cdot \theta_3 \otimes \theta_2. \end{aligned}$$

Для упрощения формул в дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Для заданного элемента группы g определим многочлены $A_{kl} \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ равенством

$$\mathrm{H}_{f_{A'}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \sum_{i \leq j} A_{ji} \ \theta_j \otimes \theta_i.$$

Очевидно, что эти многочлены зависят от g, однако эта зависимость будет ясна из контекста и потому опущена в обозначениях.

Мы также должны вычислить $\mathrm{H}_{f_{A'}, g}(\mathbf{x})$ для различных элементов группы g. Для $g = (g_1, g_1^{-1}, 1)$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{f_{A'}, g}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{1 - g_1} \nabla_1^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{x}^g)} \nabla_2^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))} (f_{A'}) \theta_1 \theta_2 \\ &= \frac{1}{1 - g_1} \nabla_1^{\mathbf{x} \to (\mathbf{x}, \mathbf{x}^g)} \frac{1}{x_2 (1 - g_1^{-1})} \big((g_1 x_1)^{a_1'} + x_2^{a_2'} + x_3^{a_3'} - c^{-1} g_1 x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

$$- \big((g_1x_1)^{a'_1} + (g_1^{-1}x_2)^{a'_2} + x_3^{a'_3} - c^{-1}x_1x_2x_3\big)\big)\theta_1\theta_2$$
$$= \frac{1}{1-g_1}\nabla_1^{\mathbf{x}\to(\mathbf{x},\mathbf{x}^g)}c^{-1}x_1x_3\frac{1-g_1}{1-g_1^{-1}}\theta_1\theta_2 = \frac{c^{-1}}{1-g_1^{-1}}x_3\theta_1\theta_2.$$

Аналогично для $g = (g_1, 1, g_1^{-1})$

$$\mathrm{H}_{f_{A'},g}(\mathbf{x}) = c^{-1}\frac{1}{1-g_1^{-1}}x_2\theta_1\theta_3,$$

и $g = (1, g_1, g_1^{-1})$

$$\mathrm{H}_{f_{A'},g}(\mathbf{x}) = c^{-1}\frac{1}{1-g_1^{-1}}x_1\theta_2\theta_3.$$

Доказательство.

Случай 1: $\xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_k^b}$, $g_k^{a+b} \neq \mathrm{id}$. Предположим $g_k = g_3$, доказательство будет аналогичным для g_2 и g_1. Тогда для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ выполнено $g_k^a = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, 1)$ и $g_k^b = (\lambda_2, \lambda_2^{-1}, 1)$. Имеем $d_{g_k^a,g_k^b} = 1$ и нам нужно найти коэффициент при $\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}$ в выражении

$$\Big(\lfloor \mathrm{H}_{f_{A'}}(\mathbf{x}, g_k^a(\mathbf{x}), \mathbf{x})\rfloor_{g_k^{a+b}} + \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}(\mathbf{x})\rfloor_{g_k^{a+b}} \otimes 1$$
$$+ 1 \otimes \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^b}(g_k^a(\mathbf{x}))\rfloor_{g_k^{a+b}}\Big) \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}.$$

Мы имеем

$$\lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}(\mathbf{x})\rfloor_{g_k^{a+b}} = \frac{c^{-1}}{1-\lambda_1^{-1}}x_3\theta_1\theta_2, \quad \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^b}(g_k^b(\mathbf{x}))\rfloor_{g_k^{a+b}} = \frac{c^{-1}}{1-\lambda_2^{-1}}x_3\theta_1\theta_2,$$

и с помощью простой комбинаторики вычислим коэффициент $\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}$ в

$$\Big(A_{21}\cdot\theta_2\otimes\theta_1 + \frac{c^{-1}}{1-\lambda_1^{-1}}x_3\cdot\theta_1\theta_2\otimes 1 + \frac{c^{-1}}{1-\lambda_2^{-1}}x_3\cdot 1\otimes\theta_1\theta_2\Big)\cdot\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}\otimes\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}.$$

Откуда получаем

$$\sigma(g_k^a, g_k^b) = -c^{-1}x_3\left(-1 + \frac{1}{1-\lambda_1^{-1}} + \frac{1}{1-\lambda_2^{-1}}\right) = -c^{-1}x_3\frac{1-(\lambda_1\lambda_2)^{-1}}{(1-\lambda_1^{-1})(1-\lambda_2^{-1})}.$$

Случай 2: $\xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_k^{-a}}$. Предположим $g_k = g_3$, доказательство будет аналогичным для g_2 и g_1. Тогда для некоторого $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ выполнено $g_k^a = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, 1)$ и $g_k^{-a} = (\lambda_1^{-1}, \lambda_1, 1)$. Имеем $d_{g_k^a,g_k^{-a}} = 2$ и нам нужно найти коэффициент при $1 \in \mathrm{Cl}_3$ в выражении

$$\frac{1}{2}\Big(\lfloor \mathrm{H}_{f_{A'}}(\mathbf{x}, g_k^a(\mathbf{x}), \mathbf{x})\rfloor_{\mathrm{id}} + \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}(\mathbf{x})\rfloor_{\mathrm{id}} \otimes 1$$
$$+ 1 \otimes \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^b}(g_k^a(\mathbf{x}))\rfloor_{\mathrm{id}}\Big)^2 \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}.$$

Используя выражения $\mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}$, вычисленные выше, $\sigma(g_k^a, g_k^{-a})$ является коэффициентом при 1 в

$$\left(A_{11}\theta_1 \otimes \theta_1 \cdot A_{22}\theta_2 \otimes \theta_2 + \frac{c^{-1}}{1-\lambda_1^{-1}} x_3\theta_1\theta_2 \otimes \frac{c^{-1}}{1-\lambda_1} x_3\theta_1\theta_2\right) \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}$$
$$= \left(-\frac{a_1' x_1^{a_1'-2}}{\lambda_1 - 1}\frac{a_2' x_2^{a_2'-2}}{\lambda_1^{-1}-1} + \frac{c^{-2}}{1-\lambda_1^{-1}}\frac{x_3^2}{1-\lambda_1}\right)\theta_1\theta_2 \otimes \theta_1\theta_2 \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}$$

Откуда имеем

$$\sigma(g_k^a, g_k^{-a}) = \frac{1}{1-\lambda_1^{-1}}\frac{1}{1-\lambda_1}\left(-a_1'a_2' x_1^{a_1'-2} x_2^{a_2'-2} + c^{-2}x_3^2\right).$$

Случай 3: $\xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_l^b}$. Если $\mathrm{Fix}(g_k^a g_l^b) = 0$, то подсчетом четности имеем $\xi_{g_k^a} \cup \xi_{g_l^b} = 0$. В противном случае предположим $k = 3$ и $l = 2$, доказательство для всех остальных случаев будет аналогичным. Для некоторых $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ выполнено $g_k^a = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, 1)$ и $g_l^b = (\lambda_1^{-1}, 1, \lambda_1)$. Имеем $d_{g_k^a, g_l^b} = 1$ и нам нужно найти коэффициент при $\partial_{\theta_2}\partial_{\theta_3}$ в выражении

$$\Big(\lfloor \mathrm{H}_{f_{A'}}(\mathbf{x}, g_k^a(\mathbf{x}), \mathbf{x})\rfloor_{g_k^{a+b}} + \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}(\mathbf{x})\rfloor_{g_k^{a+b}} \otimes 1$$
$$+ 1 \otimes \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^b}(g_k^a(\mathbf{x}))\rfloor_{g_k^{a+b}}\Big) \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_3}.$$

Фиксированное множество элемента $g_k^a g_l^b$ совпадает с $\mathbb{C}_{x_1}$, и мы имеем

$$\lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^a}(\mathbf{x})\rfloor_{g_k^a g_l^b} = \lfloor \mathrm{H}_{f_{A'},g_k^b}(g_k^b(\mathbf{x}))\rfloor_{g_k^a g_l^b} = 0,$$

откуда $\sigma(\xi_{g_k^a}, \xi_{g_k^b})$ — коэффициент при $\partial_{\theta_2}\partial_{\theta_3}$ в выражении

$$\left(A_{11} \cdot \theta_1 \otimes \theta_1\right) \cdot \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2} \otimes \partial_{\theta_1}\partial_{\theta_3},$$

Мы получаем

$$\sigma(g_k^a, g_l^b) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} a_1'(a_1' - 1) x_1^{a_1'-2}.$$

□

Замечание 4.1. Общая техника Шклярова применяется для функций, определенных глобально и предполагает, что многочлен имеет единственную критическую точку в начале координат (см. Замечание 5.1). Таким образом, техника Шклярова может быть применена непосредственно только в случаях, когда $\chi_{A'} \geq 0$ и нуждается в уточнении в других случаях.

Именно эта проблема с $A' = (2g+1, 2g+1, 2g+1)$ была рассмотрена в Приложении А к [**Sh20**]. Приведённый Шкляровым аргумент может быть также применен для произвольного многочлена типа касп, что обосновывает верность сделанных вычислений.

4.4.2. Расширение $\mathsf{HH}^*(\mathrm{MF}_G(f_{A'}))$. Пусть G таково, что $j_G = 0$. Для всех $g \in G\backslash\{\mathrm{id}\}$ рассмотрим векторы $e_g := -c \cdot \tilde{\xi}_g$. Определим также $e_{g_k^0} := \frac{1}{n_k}\lfloor x_k \rfloor \cdot \xi_{\mathrm{id}}$ для $k = 1, 2, 3$. Пусть $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'}, G)$ будет свободным $\mathbb{C}[c] \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f_{A'})$–модулем ранга $\mu_{A'}$, порожденным e_g для всех $g \in G$ и $\lfloor c^{-1} x_1 x_2 x_3 \rfloor \cdot \xi_{\mathrm{id}}$. Обозначим через $\circ$ его произведение, полученное ограничением $\cup$–произведения. Нам нужно показать, что $\circ$ является $\mathbb{C}[c]$–произведением.

Для всех $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, \ldots, n_i$ определим $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'}, G)$–элемент

$$[x_{i,k}] := \sum_{l=0}^{n_i - 1} \omega_i^{(k-1)l} \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor e_{g_i^l},$$

где $\omega_i := \mathbf{e}\,[1/n_i]$.

Предложение 4.10. *В $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'}, G)$ имеют место следующие равенства.*

$$[x_{i,k}]^{\circ 2} = \lfloor x_i^{[G/K_i]} \rfloor x_{i,k}, \quad \forall i, k, \tag{4.23}$$

$$[x_{i,k_1}] \circ [x_{i,k_2}] = 0 \quad \forall k_1 \neq k_2, \tag{4.24}$$

$$[x_{i,k_i}] \circ [x_{j,k_j}] = \frac{1}{n_i n_j} \lfloor x_i x_j \rfloor \xi_{\mathrm{id}}, \quad \forall i \neq j. \tag{4.25}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\begin{aligned}
[x_{i,k}]^{\circ 2} &= \sum_{l'=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k-1)l'} \sum_{l''=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k-1)l''} \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor \lfloor x_i \rfloor e_{g_i^{l'+l''}} \\
&= \lfloor x_i^{[G/K_i]} \rfloor \sum_{l'=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k-1)l'} \sum_{l''=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k-1)l''} \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor e_{g_i^{l'+l''}} \\
&= \lfloor x_i^{[G/K_i]} \rfloor x_{i,k}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
[x_{i,k_1}] \circ [x_{i,k_2}] &= \sum_{l'=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k_1-1)l'} \sum_{l''=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k_2-1)l''} \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor \lfloor x_i^{[G/K_i]} \rfloor e_{g_i^{l'+l''}} \\
&= \sum_{l',l''=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k_1-1)l'+(k_2-1)l''} \lfloor x_i^{[G/K_i]-1} \rfloor \lfloor x_i^{[G/K_i]} \rfloor e_{g_i^{l'+l''}} = 0.
\end{aligned}$$

Вычислим также смешанные произведения $[x_{i,k_1}] \circ [x_{j,k_2}]$ с $i \neq j$

$$[x_{1,k_1}] \circ [x_{2,k_2}] = e_{g_1^0} \circ e_{g_2^0} = \frac{1}{n_1 n_2} \lfloor x_1 x_2 \rfloor \xi_{\mathrm{id}}.$$

Остальные произведения $[x_{1,k_1}] \circ [x_{3,k_2}]$ и $[x_{2,k_1}] \circ [x_{3,k_2}]$ вычисляются аналогично.

□

Предложение 4.11. *Существует свободный* $\mathbb{C}[c]$*–модуль* $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G) \hookrightarrow \mathcal{A}^*(f_{A'},G)$ *ранга* $\mu_{A'}$*, такой что*

(а): $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)$ *— фробениусова алгебра,*

(б): *фактор* $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)\mid_{c=0} := \overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)/(c)$ *является* $\mu_{A'}$*–мерной* $\mathbb{C}$*–алгеброй, содержащей* $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})$ *в качестве подалгебры*

(в): G*–инвариантный подмодуль* $\left(\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)\mid_{c=0}\right)^G$ *является* $\mu_{A'}$*–мерной* $\mathbb{C}$*–алгеброй, однозначно определенной* $(f_{A'},G)$ *с точностью до изоморфизма. Он изоморфен*

$$\mathbb{C}[z_{1,1},\dots,z_{3,n_3}]\,/\left(z_{i,k}z_{j,l}, a_i z_{i,k}^{a_i} - a_j z_{j,l}^{a_j}; i,j=1,2,3, k=1,\dots,n_i, l=1,\dots,n_j\right).$$

Доказательство. По определению мы имеем вложение

$$\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G) \hookrightarrow \mathcal{A}^*(f_{A'},G).$$

Произведения $e_g \circ e_h$ вычислятся с помощью Предложения 4.9. Откуда немедленно следует, что структурные константы $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)$ полиномиальны по c. Мы получаем структуру фробениусовой алгебры, поскольку $\mathcal{A}^*(f_{A'},G)$ является фробениусовой алгеброй. Обозначим её произведение через $\circ$. Это дает (а).

Часть (б) тривиальна. По определению, действие $h=(h_1,h_2,h_3)\in G$ на $\tilde{\xi}_{g_1}$ вычисляется посредством $h(\tilde{\xi}_{g_1}) = (h_2h_3)^{-1}\tilde{\xi}_{g_1} = h_1\tilde{\xi}_{g_1}$ и аналогично для e_{g_2}, e_{g_3}. Поэтому $[x_{i,k}]$ выше является G–инвариантным элементом. Ясно, что все такие элементы порождают $\left(\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)\mid_{c=0}\right)^G$ как $\mathbb{C}$–алгебру.

Смешанные произведения $\lfloor x_i x_j \rfloor$ зануляются в $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})\mid_{c=0}$. Из уравнения (4.25) выше имеем $[x_{i,k_i}]\circ[x_{j,k_j}]=0$ в $\left(\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)\mid_{c=0}\right)^G$. Из уравнения (4.23) получаем

$$[x_{i,k}]^{\circ a_i} = n_i[x_i^{a_i'}]\cdot\xi_{\mathrm{id}} = \frac{a_i'}{a_i|G|}[x_i^{a_i'}]\cdot\xi_{\mathrm{id}}. \tag{4.26}$$

Поскольку $a_i'\lfloor x_i^{a_i'}\rfloor = a_j'\lfloor x_j^{a_j'}\rfloor$ в $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})$, мы имеем $a_i[x_{i,k}]^{\circ a_i} = a_j[x_{j,k}]^{\circ a_j}$ в $\left(\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)\mid_{c=0}\right)^G$.

□

ГЛАВА 5

Многообразия Дубровина–Фробениуса теории Саито и теории Громова–Виттена

Данная глава полностью посвящена многообразиям Дубровина–Фробениуса. Первые ее разделы носят, в основном, реферативный характер.

Кроме определения самого многообразия Дубровина–Фробениуса в данной главе определяются многообразия Дубровина–Фробениуса теории Громова–Виттена (Раздел 5.2) и теории Саито (Раздел 5.3).

Утверждения Раздела 5.2.2 собраны из многих разных источников. В данном разделе потенциал рода нуль теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов выписывается через квазимодулярные формы.

Также в Разделе 5.4 приведена Теорема 5.4, которая является решением Б–аналога пунта (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f, \{\mathrm{id}\})$, где f задает простую эллиптическую особенность.

В Разделе 5.5 нами приводится теорема зеркальной симметрии Ishibashi–Shiraishi–Takahashi, доказывающая пункт (i) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии для орбифолдов Ландау–Гинзбурга касп–многочленов $f_{A'}$ с тривиальной группой симметрий $G = \{\mathrm{id}\}$. Данная теорема будет использована в дальнейшем.

5.1. Многообразия Дубровина–Фробениуса

Многообразия Дубровина–Фробениуса были введены Б.А.Дубровиным (см. [**D98**]). Существует много примеров таких многообразий, но в данной работе мы сфокусируемся на примерах возникающих в теории особенностей и теории Громова-Виттена.

Определение. Пусть $M = (M, \mathcal{O}_M)$ — связное комплексное многообразие размерности μ. Голоморфный касательный пучок и кокасательный пучок этого многообразия обозначим через $\mathcal{T}_M$ и Ω^1_M соответственно. Пусть d — некоторое комплексное число.

Структура многообразия Дубровина–Фробениуса ранга μ и конформной размерности d на M — это набор $(\eta, \circ, e, E)$, где η — невырожденная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная $\mathcal{O}_M$-симметричная билинейная форма на $\mathcal{T}_M$, $\circ$ — это $\mathcal{O}_M$-билинейное произведение на $\mathcal{T}_M$, определяющее ассоциативную и коммутативную структуру $\mathcal{O}_M$-алгебры с единицей e, а E — голоморфное векторное поле на M, называемое эйлеровым полем, которые удовлетворяют следующим аксиомам:

(1) Произведение $\circ$ является самосопряженным относительно η. То есть,

$$\eta(\delta \circ \delta', \delta'') = \eta(\delta, \delta' \circ \delta''), \quad \delta, \delta', \delta'' \in \mathcal{T}_M.$$

(2) Связность Леви–Чивиты $\nabla\!\!\!/ : \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_M$ формы η является плоской. То есть,

$$[\nabla\!\!\!/_\delta, \nabla\!\!\!/_{\delta'}] = \nabla\!\!\!/_{[\delta,\delta']}, \quad \delta, \delta' \in \mathcal{T}_M.$$

(3) Тензор $C : \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{T}_M \to \mathcal{T}_M$, определяемый как $C_\delta \delta' := \delta \circ \delta'$ — плоский. То есть,

$$\nabla\!\!\!/ C = 0.$$

(4) Единичный элемент e умножения $\circ$ — это $\nabla\!\!\!/$-плоское голоморфное векторное поле. То есть,

$$\nabla\!\!\!/ e = 0.$$

(5) Метрика η и произведение $\circ$ являются однородными степени $2-d$ и 1 соответственно относительно производной Ли Lie_E вдоль эйлерова поля E: то есть,

$$Lie_E(\eta) = (2-d)\eta, \quad Lie_E(\circ) = \circ.$$

Многообразие M, снабженное структурой $(\eta, \circ, e, E)$, называется *многообразием Дубровина–Фробениуса.*

Структура многообразия Дубровина–Фробениуса может быть локально описана аналитической функцией $\mathcal{F}$, называемой *потенциалом.* А именно, пусть $t_1, \dots, t_\mu$ — плоские координаты связности Леви-Чивиты, указанной выше. В точке $p \in M$ касательное пространство имеет базис $T_pM = \mathbb{C}\langle \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_\mu} \rangle$. Предположим дополнительно, что координата t_1 такова, что $e = \frac{\partial}{\partial t_1}$. Обозначим $\eta_{ij} := \eta(\frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial t_j})$ — компоненты η в фиксированном базисе, а η^{ij} — компоненты η^{-1}. Тогда существует функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t_1, \dots, t_\mu)$, такая, что

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{k,l=1}^{\mu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_l} \eta^{lk} \frac{\partial}{\partial t_k},$$

$$E \cdot \mathcal{F} = (3-d)\mathcal{F} + \text{члены, квадратичные по } t_\bullet.$$

Локально потенциал $\mathcal{F}$ содержит всю информацию о многообразии Дубровина–Фробениуса M. Специальный выбор координаты t_1 гарантирует существование аналитической функции $H = H(t_2, \dots, t_\mu)$, такой, что

$$\mathcal{F}(t_1, \dots, t_\mu) = \frac{1}{2} t_1 \sum_{1 \le \alpha, \beta \le \mu} \eta_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta + H(t_2, \dots, t_\mu). \tag{5.1}$$

Ассоциативность произведения $\circ$ эквивалентна так называемому *уравнению WDVV* на потенциал $\mathcal{F}$

$$\mathrm{WDVV}(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma, t_\delta) = 0, \quad 1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le \mu$$

где

$$\mathrm{WDVV}(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma, t_\delta) := \sum_{\sigma,\bar{\sigma}} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_\alpha \partial t_\beta \partial t_\sigma} \eta^{\sigma,\bar{\sigma}} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_{\bar{\sigma}} \partial t_\gamma \partial t_\delta} - \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_\alpha \partial t_\gamma \partial t_\sigma} \eta^{\sigma,\bar{\sigma}} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_{\bar{\sigma}} \partial t_\beta \partial t_\delta} \right).$$

Многообразия Дубровина–Фробениуса являются частными примерами многообразий с умножением на касательном пучке. Обобщением многообразий Дубровина–Фробениуса являются, так называемые, F–многообразия. Структура умножения F–многообразия не может быть записана с помощью одной только функции как выше. Вопрос классификации F–многообразий является, скорей, алгебраическим [**BH21**], в то время, как многообразия Дубровина–Фробениуса малой размерности могут быть классифицированы аналитически.

5.1.1. Вопросы классификации. Б.А.Дубровиным были предприняты шаги по классификации многообразий Дубровина–Фробениуса, а также решений уравнения WDVV. Заметим, что не всякому решению уравнения WDVV может быть сопоставлено некоторое многообразие Дубровина–Фробениуса. Одним из полезных инструментов для изучения многообразий Дубровина–Фробениуса является, например, следующая теорема, предложенная в [**D96**].

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathcal{F}(t_1, \dots, t_\mu) = \frac{1}{2} t_1 t_\mu^2 + \frac{1}{2} t_1 \sum_{1<\alpha,\beta<\mu} \eta_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta + H(t_2, \dots, t_\mu)$ *является потенциалом многообразия Дубровина–Фробениуса, тогда для всякого* $\mathcal{A} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, *функция*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\mathcal{A}} := {} & \frac{1}{2} t_1 t_\mu^2 + \frac{t_1^2 t_\mu}{2} + \frac{1}{2} t_1 \sum_{1<\alpha\le\beta<\mu} \eta_{\alpha,\beta} t_\alpha t_\beta + \frac{c \left(\sum_{1<\alpha\le\beta<\mu} \eta_{\alpha,\beta} \frac{t_\alpha t_\beta}{|\mathrm{Aut}(\alpha,\beta)|} \right)^2}{2(c t_\mu + d)} \\ & + (c t_\mu + d)^2 H \left(\frac{t_2}{c t_\mu + d}, \dots, \frac{t_{\mu-1}}{c t_\mu + d}, \frac{a t_\mu + b}{c t_\mu + d} \right), \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.2}$$

также является потенциалом некоторого многообразия Дубровина–Фробениуса.

Данная теорема устанавливает действие группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на пространстве многообразий Дубровина–Фробениуса, таких, что $\eta_{1\alpha} = \delta_{\alpha,\mu}$.

Другим подходом к вопросу классификации является рассмотрение многообразий Дубровина–Фробениуса, отвечающим некоторым специальным условиям. В работе [**BT14**] автором совместно с A.Takahashi был рассмотрен определенный класс многообразий Дубровина–Фробениуса ранга 3. Нами было доказано (см. Теорема 4.6 loc.cit), что в данном классе вопрос неподвижности многообразия Дубровина–Фробениуса относительно $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$–действия выше эквивалентен некоторой задаче алгебраической независимости значений (квази)модулярных форм $E_2(\tau)$, $E_4(\tau)$ и $E_6(\tau)$.

5.2. Орбифолдная теория Громова-Виттена

В работе [**ChR02**] авторы разработали теорию Громова–Виттена для орбифолда $\mathcal{X}$. Обозначим $I\mathcal{X} := \mathcal{X} \times_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \mathcal{X}$, так называемый, *орбифолд инерции* $\mathcal{X}$. Зафиксировав $\beta \in H_2(I\mathcal{X},\mathbb{Z})$, пусть $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X},\beta)$ будет пространством модулей стабильных отображений степени β из кривой рода g с n отмеченными точками в $I\mathcal{X}$. Данное пространство модулей снабжено специальным циклом гомологий $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X},\beta)]^{vir}$, называемым *виртуальным фундаментальным циклом* с помощью которого определяются *корреляторы* теории Громова–Виттена. Для $1 \leq i \leq n$ определим $ev_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X},\beta) \to I\mathcal{X}$ как отображение, отправляющее стабильное отображение в его значению в i-й отмеченной точке.

Пусть $\gamma_i \in H^*_{orb}(I\mathcal{X},\mathbb{Q})$ — элементы кольца орбифолдных когомологий Чена-Руана. Тогда корреляторы теории Громова-Виттена определяются как:

$$\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_n\rangle^{\mathcal{X}}_{g,n,\beta} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X},\beta)]^{vir}} ev_1^*\gamma_1 \wedge \cdots \wedge ev_n^*\gamma_n.$$

Полученные числа удобно собрать в производящую функцию, называемую потенциалом рода g теории Громова–Виттена. Пусть $\Delta_1,\ldots,\Delta_\mu$ будет базисом $H^*_{orb}(I\mathcal{X},\mathbb{Q})$. Положим

$$\mathbf{t} := \sum_{k=1}^{\mu} t_k\Delta_k$$

для некоторых формальных параметров $t_\bullet$. Это равенство фиксирует определенную связь между $t_\bullet$ и $\Delta_\bullet$. А именно, мы имеем $\dfrac{\partial \mathbf{t}}{\partial t_\bullet} = \Delta_\bullet$. Мы будем называть координату $t_\bullet$ *двойственной* к $\Delta_\bullet$.

Потенциал рода g — это формальный степенной ряд по $t_\bullet$ и q. Он записывается следующим образом

$$\mathcal{F}_g^{\mathcal{X}} := \sum_{n,\beta} \frac{1}{n!} \langle \mathbf{t}, \dots, \mathbf{t} \rangle_{g,n,d}^{\mathcal{X}} q^\beta,$$

где q^β следует понимать формально. В дальнейшем мы будем работать только с такими случаями, что $H_2(\mathcal{IX}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Тогда, фиксируя генератор, суммирование по β можно свести к суммированию по целым числам. Более того, из аксиомы дивизора теории Громова–Виттена следует, что если t_μ — переменная, двойственная зафиксированному генератору $H_2(\mathcal{IX}, \mathbb{Z})$, то можно идентифицировать $q = \exp(t_\mu)$.

Наиболее важным для нас будет потенциал рода ноль. В силу геометрических свойств пространства модулей кривых, он является решением уравнения WDVV в переменных $t_\bullet$ и определяет многообразие Дубровина–Фробениуса, которое мы обозначаем через $M_{\mathcal{X}}$.

5.2.1. Теория Громова–Виттена орбифолдных проективных прямых.

5.2.1.1. *Орбифолдная проективная прямая.* Будем обозначать через $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ орбифолдную проективную прямую Гейгле–Ленцинга (см. [**GL87**]).

Для натурального числа $r \geq 3$ и для набора r положительных целых чисел $A = (a_1, \dots, a_r)$ пусть $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ будет набором попарно различных точек $\mathbb{P}^1$, нормализованных таким образом, что $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 1$.

Определение.

(1) Определим кольцо $R_{A,\Lambda}$ следующим образом:

$$R_{A,\Lambda} := \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r] / I_\Lambda ,$$

где I_Λ — идеал, порожденный $r-2$ однородными многочленами

$$X_i^{a_i} - X_2^{a_2} + \lambda_i X_1^{a_1}, \quad i = 3, \dots, r.$$

(2) Обозначим через L_A абелеву группу, порожденную r буквами $\vec{X}_i$, $i = 1, \dots, r$ посредством

$$L_A := \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\vec{X}_i / M_A ,$$

где M_A – подгруппа, порожденная элементами

$$a_i \vec{X}_i - a_j \vec{X}_j, \quad 1 \leq i < j \leq r.$$

(3) *орбифолдная проективная прямая* типа (A, Λ) — стэк $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$

$$\mathbb{P}^1_{A,\Lambda} := \left[(\mathrm{Spec}(R_{A,\Lambda}) \backslash \{0\}) / \mathrm{Spec}(\mathbb{C}L_A) \right].$$

Орбифолдная проективная прямая типа (A,Λ) — это стек Делиня-Мамфорда размерности 1, грубое пространство модулей которого совпадает с гладкой проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Тогда числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ являются координатами проекции на $\mathbb{P}^1$ точек, имеющих нетривиальный стабилизатор. В дальнейшем мы пропускаем букву Λ в обозначении $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$, когда $r=3$.

В данной работе орбифолдные проективные прямые будут важны нам только с точки зрения теории Громова–Виттена, в которой будет важна лишь локальная структура в окрестностях точек λ_k, которая является структурой орбифолда с группой изотропии $\mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$.

5.2.1.2. *Потенциал рода* 0. Кольцо орбифолдных когомологий $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ как векторное пространство является кольцом когомологий орбифолда инерции $\mathcal{I}\mathbb{P}^1_{a,\Lambda}$ и имеет разложение

$$H^*_{orb}\left(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda},\mathbb{Q}\right)\cong\left(H^0_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\oplus H^2_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\right)\bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{a_i}H_{orb}^{2\frac{j}{a_i}}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}),$$

с $H^0_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\cong H^0(\mathbb{P}^1)$, $H^2_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\cong H^2(\mathbb{P}^1)$ и $H_{orb}^{2\frac{j}{a_i}}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\cong H^0(\{pt\})$. Зафиксируем базис Δ_1,Δ_μ, $\Delta_{i,j}$ с $1\le i\le r$, $1\le j\le a_i-1$ таким образом, что:

$$H^0_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\cong\mathbb{Q}\Delta_1,\ H^2_{orb}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda})\cong\mathbb{Q}\Delta_\mu,\ \Delta_{i,j}\in H_{orb}^{2\frac{j}{a_i}}(\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}). \tag{5.5}$$

Кольцо орбифолдных когомологий наделено спариванием η, имеющим только лишь следующие ненулевые значения на зафиксированных нами базисных элементах:

$$\eta\left(\Delta_1,\Delta_\mu\right)=1,\ \eta\left(\Delta_{k,j},\Delta_{k,a_k-j}\right)=\frac{1}{a_k}.$$

Приведем примеры потенциалов рода 0.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2}} &= \frac{q^4}{4}+\frac{q^2}{2}\left(t_{1,1}^2+t_{2,1}^2+t_{3,1}^2\right)+qt_{1,1}t_{2,1}t_{3,1}\\
&\quad-\frac{1}{96}\left(t_{1,1}^4+t_{2,1}^4+t_{3,1}^4\right)+\frac{1}{4}t_1\left(t_{1,1}^2+t_{2,1}^2+t_{3,1}^2\right)+\frac{1}{2}t_5t_1^2,\\
\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,3,3}} &= \frac{q^{12}}{12}+\frac{1}{2}q^8t_{2,2}t_{3,2}+q^6\left(\frac{t_{2,2}^3}{6}+\frac{t_{3,2}^3}{6}+\frac{t_{1,1}^2}{2}\right)+q^5t_{1,1}t_{2,2}t_{3,2}\\
&\quad+q^4\left(\frac{5}{18}t_{3,2}^2t_{2,2}^2+\frac{1}{6}t_{3,1}t_{2,2}^2+\frac{1}{6}t_{2,1}t_{3,2}^2+t_{2,1}t_{3,1}\right)\\
&\quad+q^3\left(\frac{t_{1,1}^3}{3}+\frac{1}{6}t_{2,2}^3t_{1,1}+\frac{1}{6}t_{3,2}^3t_{1,1}+t_{2,1}t_{2,2}t_{1,1}+t_{3,1}t_{3,2}t_{1,1}\right)\\
&\quad+q^2\left(\frac{1}{72}t_{3,2}t_{2,2}^4+\frac{1}{6}t_{2,1}t_{3,2}t_{2,2}^2+\frac{1}{72}t_{3,2}^4t_{2,2}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}t_{3,1}^2t_{2,2}+\frac{1}{6}t_{3,1}t_{3,2}^2t_{2,2}+\frac{1}{2}t_{1,1}^2t_{3,2}t_{2,2}+\frac{1}{2}t_{2,1}^2t_{3,2}\Big)$$
$$+q\left(\frac{1}{36}t_{1,1}t_{3,2}^2t_{2,2}^2+\frac{1}{6}t_{1,1}t_{3,1}t_{2,2}^2+\frac{1}{6}t_{1,1}t_{2,1}t_{3,2}^2+t_{1,1}t_{2,1}t_{3,1}\right)$$
$$-\frac{t_{2,2}^6+t_{3,2}^6}{19440}+\frac{1}{648}t_{2,1}t_{2,2}^4+\frac{1}{648}t_{3,1}t_{3,2}^4-\frac{t_{1,1}^4}{96}+\frac{t_{2,1}^3}{18}+\frac{t_{3,1}^3}{18}$$
$$-\frac{1}{36}t_{2,2}^2t_{2,1}^2-\frac{1}{36}t_{3,1}^2t_{3,2}^2+\frac{1}{4}t_1t_{1,1}^2+\frac{1}{3}t_1t_{2,1}t_{2,2}+\frac{1}{3}t_1t_{3,1}t_{3,2}+\frac{1}{2}t_6t_1^2,$$

где мы используем $q:=\exp(t_\mu)$. Эти потенциалы были найдены P.Rossi (ср. [**R10**, Пример 3.2]). Однако у него была опечатка в $\mathcal{X}=\mathbb{P}^1_{2,2,2}$, которую мы исправили выше.

Потенциалы многообразий Дубровина–Фробениуса орбифолдов Гейгле–Ленцинга выделяются среди всевозможных потенциалов многообразий Дубровина–Фробениуса следующими двумя теоремами Y.Shiraishi (см. также [**IST15**] для случая $r=3$).

Теорема 5.2 ([**Shi18**, Теорема 3.1]). *Пусть r, A, μ_A и χ_A будут такими, как в разделе 5.2.1.1. Существует единственное многообразие Дубровина–Фробениуса M ранга μ_A и конформной размерности один с плоскими координатами $(t_1,t_{1,1},\dots,t_{i,j},\dots,t_{r,a_r-1},t_{\mu_A})$ удовлетворяющий следующим условиям*:

(i) *Единичное векторное поле e и эйлерово поле E задаются формулами*

$$e=\frac{\partial}{\partial t_1},\ E=t_1\frac{\partial}{\partial t_1}+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a_i-1}\frac{a_i-j}{a_i}t_{i,j}\frac{\partial}{\partial t_{i,j}}+\chi_A\frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}.$$

(ii) *Невырожденная симметричная билинейная форма η на $\mathcal{T}_M$ удовлетворяет условию*

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}\right)=\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}},\frac{\partial}{\partial t_1}\right)=1,$$
$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{i_1,j_1}},\frac{\partial}{\partial t_{i_2,j_2}}\right)=\begin{cases}\frac{1}{a_{i_1}} & i_1=i_2\ u\ j_2=a_{i_1}-j_1,\\ 0 & \textit{иначе.}\end{cases}$$

(iii) *Потенциал $\mathcal{F}$ удовлетворяет $E\mathcal{F}|_{t_1=0}=2\mathcal{F}|_{t_1=0}$,*

$$\mathcal{F}|_{t_1=0}\in\mathbb{C}\left[\left[t_{1,1},\dots,t_{1,a_1-1},\dots,t_{i,j},\dots,t_{r,1},\dots,t_{r,a_r-1},e^{t_{\mu_A}}\right]\right].$$

(iv) *Предположим, что условие* (iii) *выполнено. Тогда имеем*

$$\mathcal{F}|_{t_1=e^{t_{\mu_A}}=0}=\sum_{i=1}^{r}\mathcal{G}^{(i)},\quad \textit{для некоторых}\quad \mathcal{G}^{(i)}\in\mathbb{C}[[t_{i,1},\dots,t_{i,a_i-1}]],\ i=1,\dots,r.$$

(v) *Предположим, что условие* (iii) *выполнено. Тогда в базисе* $\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{1,1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_{r,a_r-1}}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}$ *пучка* $\mathcal{T}_M$ *произведение* $\circ$ *можно продолжить в* $t_1 = t_{1,1} = \dots = t_{r,a_r-1} = e^{t_{\mu_A}} = 0$. *Полученная в этом пределе* $\mathbb{C}$*-алгебра изоморфна*

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_r] \Big/ \left(x_i x_j,\ a_i x_i^{a_i} - a_j x_j^{a_j}\right)_{1 \le i < j \le r},$$

где $\partial/\partial t_{i,j}$ *отображаются в* x_i^j *для* $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, a_i - 1$ *и* $\partial/\partial t_{\mu_A}$ *отображается в* $a_1 x_1^{a_1}$.

(vi) *Выражение*

$$\left(\prod_{i=1}^{r} t_{i,1}\right) e^{t_{\mu_A}}$$

является слагаемым потенциала $\mathcal{F}$ *с коэффициентом* 1.

Теорема 5.3 ([**Shi18**, Теорема 5.5]). *Потенциал рода нуль теории Громова–Виттена* $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$, *записанный в базисе* (5.5), *удовлетворяет условиям Теоремы 5.2.*

5.2.2. Теория Громова–Виттена рода нуль эллиптических орбифолдов. Пусть набор A таков, что $\chi_A = 0$. Соответствующие орбифолды $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ называются эллиптическими. A — это либо $(3,3,3)$, $(4,4,2)$, $(6,3,2)$ либо $(2,2,2,2)$.

Пусть E_2 обозначает 2-й ряд Эйзенштейна. Он имеет следующее разложение Фурье

$$E_2(q) = 1 - 24 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k q^k}{1 - q^k}.$$

Потенциалы соответствующего многообразия Дубровина–Фробениуса для $A = (2,2,2,2)$ и $A = (3,3,3)$ были явно выписаны в [**ST11**]. Рассмотрим функции

$$\mathbf{z}_0^{(2)}(t) := -\frac{1}{48}\left(E_2(q) - E_2(-q)\right),\ \mathbf{z}_1^{(2)}(t) := -\frac{1}{24} E_2(q^4) \tag{5.6}$$

$$\mathbf{z}_2^{(2)}(t) := -\frac{1}{24} E_2(q) - \mathbf{z}_0^{(2)}(t) - \mathbf{z}_1^{(2)}(t), \quad q = \exp(t), \tag{5.7}$$

а также многочлен от $t_1, t_6, t_{1,1}, \dots, t_{4,1}$ и z_0, z_1, z_2

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} &:= \frac{1}{2} t_6 t_1^2 + \frac{1}{4} t_1 \sum_{k=1}^{4} t_{k,1}^2 + t_{1,1} t_{2,1} t_{3,1} t_{4,1} z_0 \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(t_{1,1}^4 + t_{1,2}^4 + t_{2,1}^4 + t_{2,2}^4\right) z_1 + \frac{1}{12}\left(\sum_{i,j=1}^{4} t_{i,1}^2 t_{j,1}^2\right) z_2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Тогда по [**ST11**, Теорема 2.1] имеем:

$$\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} = \mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}} \big|_{z_k = \mathbf{z}_k^{(2)}(t_6)}. \tag{5.9}$$

Подобное равенство справедливо и для остальных эллиптических орбифолдов, однако с другими многочленами $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$, которые также зависят от разного числа переменных и имеют свой собственный набор вспомогательных функций $\mathbf{z}_k$. Мы приводим эти многочлены только до некоторого порядка по $t_\bullet$, отсылая заинтересованного читателя к [**ST08**] и [**B15a**].

Потенциал $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}}$ записывается через [1]

(5.10)
$$\mathbf{z}_0^{(3)} := \theta_2(q^6)\theta_2(q^{18}) + \theta_3(q^6)\theta_3(q^{18}), \quad \mathbf{z}_1^{(3)} := 3\frac{\eta(q^9)^3}{\eta(q^3)}, \quad \mathbf{z}_2^{(3)} := \frac{1}{4}(3E_2(q^9) + E_2(q^3)).$$

где мы используем хорошо известную функцию Дедекинда η и константы тета Якоби $\theta_2, \theta_3, \theta_4$. Их разложения в ряд Фурье имеют вид

$$\eta(q) = q^{1/24}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^k\right), \quad \theta_2(q) = 2\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{5.11}$$

$$\theta_3(q) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k^2}{2}}, \quad \theta_4(q) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k^2}{2}}. \tag{5.12}$$

Разложения функций $\mathbf{z}_\bullet^{(3)}$ в ряд Фурье выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_0^{(3)} &= 1 + 6q^3 + 6q^9 + 6q^{12} + O\left(q^{21}\right),\\
\mathbf{z}_1^{(3)} &= 3q + 3q^4 + 6q^7 + 6q^{13} + 3q^{16} + 6q^{19} + O\left(q^{21}\right),\\
\mathbf{z}_2^{(3)} &= 1 - 6q^3 - 18q^6 - 42q^9 - 42q^{12} - 36q^{15} - 126q^{18} + O\left(q^{21}\right).
\end{aligned}$$

Тогда мы имеем $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}} = \mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}}\,|_{z_k=\mathbf{z}_k^{(3)}(t_8)}$ с

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}} &= \frac{1}{2}t_8t_1^2 + \frac{1}{3}t_1\sum_{k=1}^{3}t_{k,1}t_{k,2} + \frac{z_0}{18}\left(t_{1,1}^3 + t_{2,1}^3 + t_{3,1}^3\right) + \frac{z_1}{3}t_{1,1}t_{2,1}t_{3,1}\\
&- \frac{z_2}{36}\left(t_{1,1}t_{1,2} + t_{2,1}t_{2,2} + t_{3,1}t_{3,2}\right)^2 + \frac{z_1^2}{18}\left(t_{2,2}t_{3,2}t_{1,1}^2 + t_{1,2}\left(t_{3,2}t_{2,1}^2 + t_{2,2}t_{3,1}^2\right)\right)\\
&+ \frac{z_0^2}{18}\left(t_{2,1}t_{2,2}t_{3,1}t_{3,2} + t_{1,1}t_{1,2}\left(t_{2,1}t_{2,2} + t_{3,1}t_{3,2}\right)\right) + \frac{z_0z_1}{18}\left(t_{2,1}t_{3,1}t_{1,2}^2 + t_{1,1}\left(t_{3,1}t_{2,2}^2 + t_{2,1}t_{3,2}^2\right)\right)\\
&+ \text{ слагаемые порядка выше 4 по } t_{i,j}.
\end{aligned}$$

[1] мы представляем его здесь в более компактном виде по сравнению с Сатаке-Такахаши, которые дают определенное η-произведение каждого $t_{i,j}$-монома потенциала

Случаи эллиптических орбифолдов $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$ и $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ были исследованы независимо автором и Shen–Zhou [**SZ17**]. Обозначим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}_0^{(4)}(t) := \left(\theta_3(q^8)\right)^2,\ \mathbf{z}_1^{(4)}(t) := \left(\theta_2(q^8)\right)^2,\\
&\mathbf{z}_2^{(4)}(t) := \left(\theta_2(q^4)\right)^2\\
&\mathbf{z}_3^{(4)}(t) := \frac{1}{3}\left(E_2(q^4) - 2E_2(q^8) + 4E_2(q^{16})\right).
\end{aligned}$$

Где мы используем $q = \exp(t)$. В дальнейшем функция $\mathbf{z}_2^{(4)}$ будет иногда пропускаться, поскольку выполняется следующее тождество:

$$\left(\mathbf{z}_2^{(4)}\right)^2 = 4\mathbf{z}_0^{(4)}\mathbf{z}_1^{(4)}.$$

Приведем разложения в ряд Фурье введенных вспомогательных функций.

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_0^{(4)} &= 1 + 4q^4 + 4q^8 + 4q^{16} + 8q^{20} + O\left(q^{27}\right),\\
\mathbf{z}_1^{(4)} &= 4q^2 + 8q^{10} + 4q^{18} + 8q^{26} + O\left(q^{27}\right),\\
\mathbf{z}_2^{(4)} &= 4q^2 + 8q^{10} + 4q^{18} + 8q^{26} + O\left(q^{27}\right),\\
\mathbf{z}_3^{(4)} &= 1 - 8q^4 - 8q^8 - 32q^{12} - 40q^{16} - 48q^{20} - 32q^{24} + O\left(q^{27}\right).
\end{aligned}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{4,4,2}} =& \frac{1}{2}t_0^2t_9 + t_0\left(\frac{1}{4}t_{1,1}t_{1,3} + \frac{1}{8}t_{1,2}^2 + \frac{1}{4}t_{2,1}t_{2,3} + \frac{1}{8}t_{2,2}^2 + \frac{1}{4}t_{3,1}^2\right)\\
&+ \frac{1}{8}z_0\left(t_{1,1}^2t_{1,2} + t_{2,1}^2t_{2,2}\right) + \frac{1}{8}z_1\left(t_{1,2}t_{2,1}^2 + t_{1,1}^2t_{2,2}\right)\\
&+ \frac{1}{4}z_2t_{1,1}t_{2,1}t_{3,1} + \text{ слагаемые порядка выше 3 по } t_{i,j}.
\end{aligned}$$

Для случая $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ рассмотрим функции

$$A_3(q) := \theta_2\left(q^2\right)\theta_2\left(q^6\right) + \theta_3\left(q^2\right)\theta_3\left(q^6\right), \quad C_3(q) = \frac{3\left(\eta(q^3)\right)^3}{\eta(q)}.$$

Функция $A_3(q^3)$ имеет следующее разложение в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
A_3(q^3) &= 1 + 6q^3 + 6q^9 + 6q^{12} + 12q^{21} + 6q^{27} + 6q^{36} + 12q^{39} + O\left(q^{41}\right),\\
C_3(q^3) &= 3q + 3q^4 + 6q^7 + 6q^{13} + 3q^{16} + 6q^{19} + 3q^{25} + 6q^{28} + 6q^{31} + 6q^{37} + O\left(q^{41}\right).
\end{aligned}$$

Представим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}_0^{(6)}(t) := A_3(q^6),\ \mathbf{z}_1^{(6)}(t) := A_3(q^{12}),\ \mathbf{z}_2^{(6)}(t) := C_3(q^6),\ \mathbf{z}_3^{(6)}(t) := C_3(q^{12})\\
&\mathbf{z}_4^{(6)}(t) := C_3(q^3) - C_3(q^{12}),\ \mathbf{z}_5^{(6)}(t) := A_3(q^3) - A_3(q^{12}),\ \mathbf{z}_6^{(6)}(t) := E_2(q^6).
\end{aligned}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathbb{P}^1_{6,3,2}} := &\frac{1}{2}t_1^2t_{10} + t_1\left(\frac{1}{6}t_{1,1}t_{1,5} + \frac{1}{6}t_{1,2}t_{1,4} + \frac{t_{1,3}^2}{12} + \frac{1}{3}t_{2,1}t_{2,2} + \frac{t_{3,1}^2}{4}\right)\\ &+ \frac{1}{3}z_4t_{1,1}t_{2,1}t_{3,1} + \frac{1}{3}z_3t_{1,1}t_{2,1}t_{1,3} + \frac{1}{6}z_1t_{1,1}t_{1,2}t_{1,3} + \frac{1}{6}z_5t_{1,1}t_{1,2}t_{3,1}\\ &+ \frac{1}{36}z_0\left(t_{1,2}^3 + 2t_{2,1}^3 + 3t_{1,1}^2t_{1,4}\right) + \frac{1}{6}z_2\left(t_{2,2}t_{1,1}^2 + t_{1,2}t_{2,1}^2\right)\\ &+ \text{ слагаемые порядка выше 3 по } t_{i,j}.\end{aligned}$$

Подход Satake–Takahashi отличался от подхода Shen–Zhou и автора. Из условия квазиоднородности на потенциал следует, что многочлен $\mathcal{R}_\mathcal{X}$, как указано выше существует, и $\mathcal{F}_\mathcal{X}$ получается определенной подстановкой $z_k = \mathbf{z}_k(t_\mu)$. Тогда важнейшим вопросом является то, как найти соответствующие функции $\mathbf{z}_k(t_\mu)$.

Подход Satake–Takahashi был основан на теории многообразий Дубровина–Фробениуса. В частности, они изучали уравнение WDVV. Из-за условия специального вида эйлерова поля оно снова эквивалентно системе уравнений в частных производных на $\mathbf{z}_k$. Выражения $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k(t_\mu)$, которые они нашли для $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$ и $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$, являются частными решениями этих уравнений в частных производных, удовлетворяющими начальным условиям, подобным описанным в Теореме 5.3. Такой подход чрезвычайно сложен уже для $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$.

Shen–Zhou и автор использовали результат T.Milanov и Y.Ruan [**MR11**], который ближе к точке зрения зеркальной симметрии. Именно с помощью аргументов зеркальной симметрии Milanov–Ruan приходят к выводу, что функции $\mathbf{z}_k$, записанные в $q = \exp(t_\mu)$, должны быть разложениями в ряды Фурье некоторых квазимодулярных форм. Однако, для доказательства совпадения двух квазимодулярных форм достаточно сравнить коэффициенты рядов Фурье обеих до некоторого порядка. Это является ключевой идеей подхода Shen–Zhou и автора.

5.2.3. Квазимодулярные формы. Для того чтобы ввести потенциалы рода 0 эллиптических орбифолдов, воспользуемся рядами Фурье некоторых квазимодулярных форм.

Определение. Пусть $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — подгруппа конечного индекса. Пусть $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ и $f(\tau)$ — голоморфная функция на $\mathbb{H}$.

- $f(\tau)$ называется *модулярной формой веса* k, если она удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau) \text{ для всякой } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

- $f(\tau)$ называется *квазимодулярной формой веса k и глубины m*, если существуют функции $f_1(\tau), \dots, f_m(\tau)$, голоморфные в $\mathbb{H}$, такие, что:

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sum_{l=0}^{m} f_k(\tau) \left(\frac{c}{c\tau+d}\right)^k \text{ для всякой } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

где $f_0 = f$.

Ряды Эйзенштейна и тета-константы Якоби являются примерами (квази)модулярных форм. Однако, чтобы рассматривать их как функции на $\mathbb{H}$, нужно рассмотреть

$$E_2(\tau) := E_2(q(\tau)), \quad \theta_k(\tau) = \theta_k(q(\tau)),\ k = 2, 3, 4.$$

с

$$q(\tau) := \exp(2\pi \mathsf{i}\tau).$$

Важно подчеркнуть, что именно разложение в ряд Фурье по переменной q возникает в теории Громова–Виттена эллиптических орбифолдов, но с другой заменой переменной $q = \exp(t_\mu)$.

Хорошо известно, что $E_2(\tau)$ является квазимодулярной веса 2 относительно $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

$$E_2(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^2} E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) - \frac{6c}{\pi \mathsf{i}(c\tau+d)},$$

Функции $\theta_2(\tau)^4$,$\theta_3(\tau)^4$ и $\theta_4(\tau)^4$ являются модулярными формами веса 2 относительно

$$\Gamma(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid a, d \equiv 1 \mod 2,\ b, c \equiv 0 \mod 2 \right\}.$$

Значения тэта–констант не являются независимыми, так как имеет место равенство

$$\theta_3^4(\tau) - \theta_2^4(\tau) = \theta_4^4(\tau).$$

Тэта–константы удовлетворяют следующим формулам удвоения аргумента

$$\theta_2^2(2\tau) = \frac{1}{2}\left(\theta_3^2(\tau) - \theta_4^2(\tau)\right),\ \theta_3^2(2\tau) = \frac{1}{2}\left(\theta_3^2(\tau) + \theta_4^2(\tau)\right),\ \theta_4^2(2\tau) = \theta_3^2(\tau)\theta_4(\tau). \tag{5.13}$$

С помощью этих формул несложно проверить, что функции, представленные в предыдущих разделах, действительно являются модулярными формами. Свойство модулярности для эта–функции Дедекинда записывается следующими равенствами.

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi \mathsf{i}}{12}} \eta(\tau), \quad \eta(-\frac{1}{\tau}) = (-\mathsf{i}\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau).$$

5.2.4. Открытое уравнение WDVV. Уравнение WDVV играет ключевую роль в теории многообразий Дубровина–Фробениуса. Однако, возникло данное уравнение именно в теории Громова–Виттена - из топологии пространства модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. В начале настоящего столетия развитие получила так называемая *открытая теория Громова–Виттена*. В ней рассматривается пространство модулей стабильных кривых с границей $\overline{\mathcal{M}}^o_{g,n,d}$. Здесь d–натуральное число, обозначающее количество отмеченных точек на границе. В открытой теории Громова–Виттена имеется два различных потенциала рода нуль - (F^c, F^o). Аналогично рассуждениям "классической" теории Громова–Виттена, из топологических свойств $\overline{\mathcal{M}}^o_{0,n,d}$ следует, что $F^c = F^c(t_1, \dots, t_\mu)$ является решением уравнения WDVV. Второй потенциал зависит от дополнительной переменной $t_{\mu+1}$ и удовлетворяет следующему уравнению, которое носит имя *открытого* WDVV

$$\sum_{\sigma,\nu=1}^{\mu+1} \frac{\partial^3 F^c}{\partial t^\alpha \partial t^\beta \partial t^\sigma} \eta^{\sigma\nu} \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^\nu \partial t^\gamma} + \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^{\mu+1} \partial t^\gamma} =$$
$$= \sum_{\sigma,\nu=1}^{\mu+1} \frac{\partial^3 F^c}{\partial t^\gamma \partial t^\beta \partial t^\sigma} \eta^{\sigma\nu} \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^\nu \partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^\gamma \partial t^\beta} \frac{\partial^2 F^o}{\partial t^{\mu+1} \partial t^\alpha},$$

для всяких зафиксированных α, β, γ (см. [**HS12, ST19, CZ21**]). P.Rossi было замечено, что данное дополнительное уравнение, вместе с уравнением WDVV на потенциал F^c, также являются условиями ассоциативности определенного умножения, заданного, однако, не одной функцией, как в случае многообразий Дубровина–Фробениуса, а двумя. Таким образом, решением открытого уравнения WDVV логично называть пару потенциалов (F^c, F^o). Соответствующие многообразия с умножением являются частными случаями, так называемых, *F–многообразий*, определённых C.Hertling и Ю.И.Маниным. F–многообразия открытых теорий Громова–Виттена обобщают многообразия Дубровина–Фробениуса "классических" теорий Громова–Виттена. Вопрос продолжения в старшие рода данной пары изучался в [**BB19**]. Также в [**BB21**] была дана конструкция открытых решений уравнения WDVV по многообразиям Дубровина–Фробениуса теории Саито особенностей типа A и D. В работах [**B22, B24**] были изучены интегрируемые системы, соответствующие этим решениям открытого уравнения WDVV.

5.3. Теория Саито касп–многочлена

Для тройки положительных целых чисел $A' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ рассмотрим *универсальную развертку* касп-многочлена

$$F_{A'}(\mathbf{x}; \mathbf{s}, s_{\mu_{A'}}) := x_1^{a'_1} + x_2^{a'_2} + x_3^{a'_3} - (s_{\mu_{A'}})^{-1} \cdot x_1 x_2 x_3 + s_1 \cdot 1 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{a'_i - 1} s_{i,j} \cdot x_i^j. \tag{5.14}$$

В дальнейшем будем также использовать $f_{A'}(\mathbf{x}; s_{\mu_{A'}}) := F_{A'}(\mathbf{x}; \mathbf{0}, s_{\mu_{A'}})$. А именно, мы можем отождествить параметр c в определении $f_{A'}$ с параметром развертки $s_{\mu_{A'}}$. Мы будем также рассматривать $f_{A'}(\mathbf{x}; s_{\mu_{A'}})$ как голоморфное отображение $\mathcal{X}^s \longrightarrow M^s$ из некоторой подходящей окрестности начала координат $\mathcal{X}^s \subset \mathbb{C}^4$ и

$$M^s := \{s_{\mu_{A'}} \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \mid \|s_{\mu_{A'}}\| < \epsilon\}.$$

В дальнейшем мы также будем использовать обозначения:

$$\mu_{A'} := 2 + \sum_{i=1}^{3} (a'_i - 1), \quad \chi_{A'} := 2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{a'_i} - 1 \right). \tag{5.15}$$

Для $\chi_{A'} \leq 0$ функция $F_{A'}$ является миниверсальной разверткой, где s_1,$s_{i,j}$ и $s_{\mu_{A'}}^{-1}$ являются параметрами развертки. Заметим, что в развёртке $F_{A'}$ имеется ровно $\mu_{A'}$ параметров . Это число позже станет рангом многообразия Дубровина–Фробениуса касп–многочлена. В дальнейшем пусть $\mathbf{s}$ варьируется в $\mathcal{S} := \mathbb{C}^{\mu_{A'}-1} \times M^s$.

Замечание 5.1. Если $\chi_{A'} < 0$, то точка $0 \in \mathbb{C}^3$ не является единственной изолированной критической точкой $f_{A'}$. Для дальнейших целей нам не нужны критические точки, отличные от 0. Поэтому для любого фиксированного c мы должны рассмотреть $f_{A'}$ в малой окрестности $0 \in \mathbb{C}^3$, не содержащей никаких других критических точек.

Для каждого фиксированного c сопоставим $f_{A'}$, следующий базис в алгебре $\mathrm{Jac}(f_{A'})$

$$e'_1 := [1], \quad e'_{\mu_{A'}} := [x_1 x_2 x_3], \quad e'_{i,j} := [x_i^j], \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq a'_i - 1. \tag{5.16}$$

Вектор e'_1 является единицей, а структура произведения $\mathrm{Jac}(f_{A'})$ задается выражением

$$e'_{i_1,j_1} \circ e'_{i_2,j_2} = \begin{cases} \delta_{i_1,i_2} e'_{i_1,j_1+j_2} & j_1 + j_2 < a'_{i_1}, \\ \dfrac{1}{c \cdot a'_{i_1}} e'_{\mu_{A'}} & j_1 + j_2 = a'_{i_1}; \end{cases}$$

$$e'_{i_1,j_1} \circ e'_{\mu_{A'}} = 0.$$

Координаты $s_\bullet$ являются *двойственными* к приведенному выше базису, в следующем смысле.

$$e'_1 = \left[\frac{\partial F_{A'}}{\partial s_1}\right],\ e'_{\mu_{A'}} = s^2_{\mu_{A'}} \cdot \left[\frac{\partial F_{A'}}{\partial s_{\mu_{A'}}}\right], \quad e'_{i,j} := \left[\frac{\partial F_{A'}}{\partial s_{i,j}}\right]$$

Рассматривая c в качестве параметра, мы можем рассматривать $\mathrm{Jac}(f_{A'})$ как $\mathbb{C}(c)$–модуль. Он имеет *расширение* $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})$, то есть $\mathbb{C}[c]$–модуль, порожденный [1], $[c^{-1}x_1x_2x_3]$ и $[x_i^j]$. Используя явную форму идеала Якоби, мы имеем

$$\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})\mid_{c=0} \cong \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \Big/ \left(x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3,\ a'_1x_1^{a'_1} - a'_2x_2^{a'_2}, a'_2x_2^{a'_2} - a'_3x_3^{a'_3}\right).$$

5.3.1. Элементы теории Саито. Для любого фиксированного $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}$, задающего изолированную особенность и развертки $F : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^\mu \to \mathbb{C}$ многочлена f, определим структуру многообразия Дубровина–Фробениуса на базовом пространстве развертки $\mathcal{S}$. Это μ-мерное открытое подпространство $\mathbb{C}^\mu$. Произведение $\circ$ индуцируется из критического пучка

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N\times\mathcal{S}}/(\partial_{x_1}F, \ldots, \partial_{x_n}F)$$

проекцией $p : \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{S} \to \mathbb{C}^N$. А именно, имеется изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$–модулей $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \to p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, заданный $\delta \mapsto [\delta \cdot F]$. Произведение $\circ$ на $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ определяется как обратный образ естественного произведения $p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ посредством этого изоморфизма.

Спаривание η определяется с помощью вычетного спаривания Пуанкаре. Однако это требует дополнительного выбора формы объема. Результат K.Saito гарантирует, что для специального выбора формы объема, называемой *примитивной формой*, существует плоская связность $\nabla\!\!\!/$, которая является согласованной со спаривание η (ср. [**S83**]). В дальнейшем будем обозначать через M_f^ζ структуру многообразия Дубровина–Фробениуса, определенную разверткой F с примитивной формой ζ. Подробности этой конструкции можно найти в [**S83, ST08**] и [**ShiT15**] для случая касп–многочлена.

Для любой примитивной формы ζ и ненулевой константы $c \in \mathbb{C}$, форма объема $\zeta' := c\zeta$ снова является примитивной формой. Два многообразия Дубровина–Фробениуса M_f^ζ и $M_f^{\zeta'}$ имеют одинаковую структуру произведения, но спаривания связаны соотношением $\eta' = c^2 \cdot \eta$. В общем случае не все примитивные формы данной особенности связаны простым рескалированием. Различные выборы примитивной формы могут дать многообразия Дубровина–Фробениуса, которые не являются изоморфными (ср. [**MS16**]).

Выбор примитивной формы серьезно влияет на потенциал многообразия Дубровина–Фробениуса M_f^ζ. Напомним, что потенциал записан в плоских

координатах η. Выбор примитивной формы фиксирует выражение плоских координат $\mathbf{t}$ через координаты базового пространства $\mathbf{s}$.

5.3.1.1. *Касп–многочлены.* Для касп–многочлена $f_{A'}$, рассмотрим развёртку $F_{A'}$, определённую выше. Примитивные формы для таких особенностей рассматривались K.Saito и Ishibiashi–Shiraishi–Takahashi (см. [**S83**] и [**IST15**] для различных значений $\chi_{A'}$). В частности, существует специальный выбор примитивной формы $\zeta = \zeta^\infty$, такой, что

$$\begin{aligned} \zeta^\infty &= d^3\mathbf{x}\ s_{\mu_{A'}}^{-1} && \text{для } \chi_{A'} > 0, \\ \zeta^\infty &= d^3\mathbf{x}(s_{\mu_{A'}}^{-1} + O(\mathbf{s})), && \text{для } \chi_{A'} \le 0. \end{aligned}$$

Эти примитивные формы называются *примитивными формами в бесконечности.* В дальнейшем через $M^\infty_{f_{A'}}$ обозначим многообразие Дубровина–Фробениуса касп–многочлена с примитивной формой ζ^∞. Пусть $\mathcal{F}^\infty_{f_{A'}}$ — его потенциал, записанный в плоских координатах $t_\bullet$, двойственных базису (5.16).

Связь между этими плоскими координатами $t_\bullet$ и координатами $s_\bullet$ развертки задается функциями $t_\bullet = t_\bullet(\mathbf{s})$, удовлетворяющими

$$s_{\mu_{A'}} = \exp(t_{\mu_{A'}}),\ \frac{\partial t_\alpha}{\partial s_\beta}\mid_{\mathbf{s}=0,\ s_{\mu_{A'}}=0} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad t_\alpha \mid_{\mathbf{s}=0,\ s_{\mu_{A'}}=0} = 0,$$

для всех индексов α, β. Имеем

t_1 плоская координата, двойственная [1] в пределе $\mathbf{s} = s_{\mu_{A'}} = 0$,

$t_{i,j}$ плоская координата, двойственная $[x_i]^j$ в пределе $\mathbf{s} = s_{\mu_{A'}} = 0$,

$t_{\mu_{A'}}$ плоская координата, двойственная $(s_{\mu_{A'}})^{-1}[x_1x_2x_3]$ в пределе $\mathbf{s} = s_{\mu_{A'}} = 0$.

Напомним, что классы в правой части — это в точности классы, порождающие $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})$.

В плоских координатах единственными ненулевыми значениями $\eta(\cdot,\cdot)$ являются

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_{A'}}}\right) = 1, \quad \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{i,j}}, \frac{\partial}{\partial t_{i,a_i'-j}}\right) = \frac{1}{a_i'},\ 1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le a_i - 1.$$

Эйлерово поле имеет вид

$$E = t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{a_i'-1}\frac{a_i'-j}{a_i'}t_{i,j}\frac{\partial}{\partial t_{i,j}} + \chi_{A'}\frac{\partial}{\partial t_{\mu_{A'}}}.$$

Подробности построения этих многообразий Дубровина–Фробениуса можно найти в [**IST19**].

5.4. Замена примитивной формы для простых эллиптических особенностей

Пусть A' является одним из $(3,3,3)$, $(4,4,2)$ или $(6,3,2)$. Тогда многочлен $f_{A'}$ является квазиоднородным и задает простую эллиптическую особенность. Соответствующее многообразие Дубровина–Фробениуса имеет размерность 8, 9 или 10. Всевозможные выборы примитивной формы для таких особенностей были изучены K.Saito [**S83**]. В работе [**B18**] автором была установлена связь между потенциалами многообразий Дубровина–Фробениуса одной и той же эллиптической особенности, построенными по разным примитивным формам.

Теорема 5.4 (Theorem 6,Theorem 3 [**B18**]). *Пусть $M^{\zeta_1}_{f_{A'}}$ и $M^{\zeta_2}_{f_{A'}}$ — два многообразия Дубровина–Фробениуса одной и той же простой эллиптической особенности, построенных по разным примитивным формам ζ_1, ζ_2. Тогда существует $\mathcal{A} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, такая, что, после некоторой линейной замены переменных потенциалы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ этих многообразий Дубровина–Фробениуса связаны равенством $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}_2)^{\mathcal{A}}$ (см. Теорему 5.1).*

Более того, можно предложить и конкретный выбор матрицы $\mathcal{A}$. В частности, в работе [**BT14**] автором совместно с A.Takahashi был предложен конкретный выбор матрицы $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(\tau_0,\omega_0)}$, где $\tau \in \mathbb{H}$, $\omega \in \mathbb{C}^*$

$$\mathcal{A}^{(\tau,\omega)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathsf{i}\bar{\tau}_0}{2\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0\tau_0 \\ \dfrac{\mathsf{i}}{2\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)} & \omega_0 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

В Разделе 2.5 работы [**BT14**] автором совместно с A.Takahashi доказывается, что пара (τ,ω) выше однозначно сопоставляется выбору примитивной формы простой эллиптической особенности, причем соответствующие плоские координаты связаны именно как формуле Теоремы 5.1. Предложенная выше теорема показывает, как $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действие на одной плоской координате отражается на всем потенциале многообразия Дубровина–Фробениуса.

Важно заметить, что замена примитивной формы для простых эллиптических особенностей может быть также сформулирована с помощью структуры многообразий Гурвиц–Фробениуса рода 1 (см. [**B14**]).

5.5. Зеркальная симметрия с тривиальной группой симметрии

Напомним результаты зеркальной симметрии с тривиальной группой симметрии. Следующую теорему зеркальной симметрии следует рассматривать как

совокупный результат нескольких различных статей: [**ShiT15**], [**ST11**], [**IST19**], [**R10**], [**MR11**], [**MS16**].

Теорема 5.5 ([**ShiT15**, Теорема 4.1], [**ST11**, Теорема 3.6], [**IST19**, Следствие 4.5]). *Многообразие Дубровина–Фробениуса $f_{A'}$ с развёрткой $F_{A'}$ и примитивной формой ζ^∞ изоморфно многообразию Дубровина–Фробениуса теории Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}_{A'}$.*

Записывая два многообразия Дубровина–Фробениуса в координатах $t_\bullet$, которые мы использовали в разделе 5.1, зеркальный изоморфизм $M^\infty_{f_{A'}} \to M_{\mathbb{P}^1_{A'}}$ задается выражением

$$t_1 \mapsto t_1,\ t_{\mu_{A'}} \mapsto t_{\mu_{A'}},\ t_{i,j} \mapsto t_{i,j}.$$

Доказательство этой теоремы требует тонкого анализа связности Гаусса-Манина на пространстве развертки $\mathcal{S}$ многочлена $f_{A'}$, а также определенной теоремы единственности. На уровне многообразий Дубровина–Фробениуса такая теорема единственности впервые была сформулирована в [**IST15**].

В [**IST15**] авторы показывают, что $\mathcal{F}^\infty_{f_{A'}}$ удовлетворяет всем условиям Теоремы 5.3 выше с $r = 3$. В частности, условие (v) выполняется алгеброй $\overline{\mathrm{Jac}}(f_{A'})$.

ГЛАВА 6

Зеркальная симметрия для касп многочлена

В [**ST11, MR11, MS16**] было доказано, что для $f_{A'}$, определяющего простую эллиптическую особенность, существует выбор примитивной формы $\zeta = \zeta^\infty$, такой что многообразие Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{f_{A'}}$ изоморфно многообразию Дубровина-Фробениуса $M_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. Оба многообразия Дубровина-Фробениуса имеют ранг $\mu_{A'} = 2 + \sum_{i=1}^3 (a'_i - 1)$. Для других выборов A' гипотеза о зеркальной симметрии была доказана в [**ShiT15, IST15**].

В данной главе мы рассматриваем задачу построения многообразия Дубровина-Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$ с примитивной формой $\zeta = \zeta^\infty$ и доказываем соответствующую гипотезу зеркальной симметрии.

Эквивариантный подход. В работе W.Ebeling и A.Takahashi [**ET14**] было предложено, что зеркалом $(f_{A'}, G)$ должен быть орбифолд Гейгле–Ленцинга $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$, но для *другого набора* $A = (a_1, \dots, a_r)$ определенного ниже. Для $i = 1, 2, 3$ пусть K_i обозначает максимальную подгруппу элементов G, действующих тривиально на i–ю координату x_i. Определим

$$A := \left(\frac{a'_1}{|G/K_1|} * |K_1|, \frac{a'_2}{|G/K_2|} * |K_2|, \frac{a'_3}{|G/K_3|} * |K_3| \right),$$

где $b * |K_i|$ означает, что b повторяется $|K_i|$ раз в наборе. Мы также опускаем в наборе A все появления 1 если длина набора больше 3.

Теория Громова–Виттена орбифолда $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ корректно определена. Её многообразие Дубровина-Фробениуса $M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}}$ описывалось нами в Главе 5, оно имеет ранг $\mu_A = 2 + \sum_{i=1}^r (a_i - 1)$. Однако, не определена "эквивариантная" версия теории Саито (см. Раздел 5.3), а определение многообразия Дубровина-Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$ было впервые дано автором и A.Takahashi в совместной работе [**BT22**].

Многообразие Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ орбифолда Ландау–Гинзбурга $(f_{A'}, G)$ определяется нами аксиоматически. Оно также зависит от примитивной формы ζ^∞ особенности $f_{A'}$. В частности, для тривиальной группы G имеем $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},\{\mathrm{id}\})} \cong M^{\zeta^\infty}_{f_{A'}}$. Используя эту систему аксиом, мы показываем, что справедлива теорема зеркальной симметрии.

Теорема 6.1. *Пусть $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ удовлетворяет всем аксиомам многообразия Дубровина-Фробениуса пары $(f_{A'},G)$. Тогда существует изоморфизм многообразий Дубровина-Фробениуса:*

$$M_{\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}} \cong M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}. \tag{6.1}$$

В частности, потенциал $\mathcal{F}^\infty_{(f_{A'},G)}$ многообразия $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ совпадает с потенциалом рода 0 орбифолдной теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}$ после определенного выбора координат.

Следствие. *Многообразие Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ однозначно определяется своими аксиомами.*

Простые эллиптические особенности и тождества в кольце квазимодулярных форм. Определение множества A выше гарантирует, что если A' таково, что $\frac{1}{a'_1}+\frac{1}{a'_2}+\frac{1}{a'_3}=1$, то для любой группы G, множество A либо совпадает с $(2,2,2,2)$, либо имеет длину 3, причем $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$. Соответствующие орбифолды Гейгле-Ленцинга называются *эллиптическими*, это $\mathbb{P}^1_{3,3,3}$, $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$, $\mathbb{P}^1_{6,3,2}$ и $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2,\Lambda}$, $\Lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Как мы уже упоминали выше, первые три орбифолда, являются зеркальными по отношению к $(f_{A'},\{\mathrm{id}\})$ с примитивной формой ζ^∞ (см. также **[B23, B14]** относительно четвертого орбифолда).

Обозначим через $\widetilde{E}_6$ и $\widetilde{E}_7$ особенности, задаваемые многочленами $f_{A'}$ с $A'=(3,3,3)$ и $A'=(4,4,2)$ соответственно. Пусть $M^\infty_{(\widetilde{E}_6,G)}$ и $M^\infty_{(\widetilde{E}_7,G)}$ обозначают соответствующие многообразия Дубровина-Фробениуса $M^{\zeta^\infty}_{(f_{A'},G)}$ орбифолдной теории Саито. Объединяя изоморфизм зеркальной симметрии с тривиальной группой $G=\{\mathrm{id}\}$ (справа) с изоморфизмом зеркальной симметрии нашей теоремы (слева), мы имеем изоморфизмы многообразий Дубровина–Фробениуса

$$\begin{aligned} M^\infty_{(\widetilde{E}_6,K_1)} &\cong M_{\mathbb{P}^1_{3,3,3}} \cong M^\infty_{(\widetilde{E}_6,\{\mathrm{id}\})},\\ M^\infty_{(\widetilde{E}_7,K_2)} &\cong M_{\mathbb{P}^1_{4,4,2}} \cong M^\infty_{(\widetilde{E}_7,\{\mathrm{id}\})}. \end{aligned}$$

В Разделе 6.5 будет показано, что эти изоморфизмы нетривиальны. А именно, совпадение соответствующих потенциалов многообразий Дубровина–Фробениуса эквивалентно некоторым нетривиальным тождествам в кольце квазимодулярных форм.

6.1. G–инварианты теории Саито

Для заданного касп–многочлена $f_{A'}(\mathbf{s})$ и $G\subset G_{f_{A'}}$ рассмотрим алгебру $\mathcal{A}^G_{f_{A'}}:=(\mathrm{Jac}(f_{A'}))^G$. А именно, G–инвариантное подпространство $\mathrm{Jac}(f_{A'})$. В

частности, оно имеет базис (см. (5.16))

$$e_1 := [1], \quad e_{\mu_A} := [x_1x_2x_3], \quad e_{i,j} := [x_i^{j\cdot n_i}], \quad 1 \le i \le 3, 1 \le j \le a_i - 1. \tag{6.2}$$

Рассмотрим координаты $\mathbf{s}$ развёртки $F(\mathbf{x}, \mathbf{s})$. Назовём координаты $s_\bullet$, двойственные этим векторам, *G–инвариантными*. А именно, это s_1, $s_{\mu_{A'}}$ и $s_{i,j\cdot n_i}$ для i, j, как указано выше. Зададим

$$\mathcal{S}^G := \mathcal{S} \mid_{s_{i,k}=0,\ k\notin n_i\mathbb{Z}}.$$

Очевидно, что G–инвариантные координаты $s_\bullet$ являются координатами $\mathcal{S}^G$.

Пусть $(\eta, \circ, e, E)$ — структура многообразия Дубровина-Фробениуса $M^\infty_{f_{A'}}$. Из определения немедленно следует, что произведение $\circ : \mathcal{T}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}_\mathcal{S} \to \mathcal{T}_\mathcal{S}$ индуцирует ассоциативное и коммутативное произведение $\widetilde{\circ} : \mathcal{T}_{\mathcal{S}^G} \otimes \mathcal{T}_{\mathcal{S}^G} \to \mathcal{T}_{\mathcal{S}^G}$.

Рассмотрим теперь плоские координаты $t_\bullet = t_\bullet(\mathbf{s})$. Мы имеем

$$t_1 \mid_{\mathcal{S}^G} = s_1 + \text{члены степени не менее два по } \mathbf{s}, \tag{6.3}$$

$$t_{i,j\cdot n_i} \mid_{\mathcal{S}^G} = s_{i,j\cdot n_i} + \text{члены степени не менее два по } \mathbf{s}, \tag{6.4}$$

$$t_{i,k} \mid_{\mathcal{S}^G} = \text{члены степени не менее два по } \mathbf{s}, \quad k \notin n_i\mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

Специальная координата $t_{\mu_{A'}}$ не изменяется при ограничении на $\mathcal{S}^G$. Из этого следует, что t_1, $t_{\mu_{A'}}$ и $t_{i,j\cdot n_i}$, будучи ограничены $\mathcal{S}^G$, также могут служить координатами. Заметим, что билинейная форма η, ограниченная на базис, порожденный G–инвариантными координатами, невырождена.

Таким образом, мы можем рассмотреть ограничение $(\eta, \circ, e, E)$ на G–инварианты. Обозначим

$$\left(M^\infty_{f_{A'}}\right)^G := M^\infty_{f_{A'}} \mid_{t_{i,k}=0,\ k\notin n_i\mathbb{Z}}.$$

Вектор e принадлежит касательному пучку $\left(M^\infty_{f_{A'}}\right)^G$. Вектор E естественно проецируется на этот касательный пучок.

Суммируя все вместе, получаем, что $(M^\infty_{f_{A'}})^G$ является подмногообразием Дубровина–Фробениуса в $M^\infty_{f_{A'}}$. Пусть $\mathcal{F}_{f_{A'}}$ — потенциал $M^\infty_{f_{A'}}$. Тогда потенциал $\mathcal{F}^G_{f_{A'}}$ структуры $(M^\infty_{f_{A'}})^G$ получается из $\mathcal{F}_{f_{A'}}$, если положить $t_{i,k} = 0$ для всех $1 \le i \le 3$ и $k \notin n_i\mathbb{Z}$.

6.2. Многообразие Дубровина–Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга

Зафиксируем пару $(f_{A'}, G)$. Пусть $M^\infty_{f_{A'}}$ будет многообразием Дубровина–Фробениуса $f_{A'}$ с примитивной формой на бесконечности, как в Разделе 5.1. Это дает структуру Дубровина–Фробениуса на $\mathcal{S} = \mathbb{C}^{\mu_{A'}} \times M^s$ для $M^s \cong \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid \|z\| < \epsilon\}$. Обозначим $\mathcal{S}_{f_{A'},G} := \mathbb{C}^{\mu_A - 1} \times M^s$.

Определение. Мы называем $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ *многообразием Дубровина–Фробениуса пары* $(f_{A'},G)$ *с примитивной формой на бесконечности*, если оно задает структуру Дубровина–Фробениуса на $\mathcal{S}_{(f_{A'},G)}$, удовлетворяющую следующим аксиомам.

6.2.1. Аксиомы.

(аксиома координат): $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ имеет плоские координаты

$$v_{\mathrm{id},k},\ 1\le k\le \mu_A,\quad \text{и}\quad v_{g_i^l,k},\ 1\le l\le n_i-1,\ 1\le k\le a_i-1, \tag{6.6}$$

где g_i — генератор $K_i\subseteq G$. Вектор $\partial/\partial v_{\mathrm{id},1}$ является единицей многообразия Дубровина-Фробениуса,

(аксиома квазиоднородности): $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ является квазиоднородным конформной размерности 1 относительно поля Эйлера

$$E=v_{\mathrm{id},1}\frac{\partial}{\partial v_{\mathrm{id},1}}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{n_i-1}\sum_{k=1}^{a_i-1}\frac{a_i-k}{a_i}v_{g_i^l,k}\frac{\partial}{\partial v_{g_i^l,k}}+\chi_A\frac{\partial}{\partial v_{\mathrm{id},\mu_A}}$$

(аксиома расширения потенциала): потенциал $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ имеет разложение в ряд по $v_{\mathrm{id},1},\dots,v_{\mathrm{id},\mu_A-1}$, $v_{g_i^l,k}$ и $\exp(|G|v_{\mu_A})$,

(аксиома расширения Jac**):** касательное пространство $T_0M^{\infty}_{f_{A'},G}$, ограниченное на $v_{\mathrm{id},1}=\dots=v_{\mathrm{id},\mu_A-1}=0$ и $v_{g_i^l,k}=0$, изоморфно $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)$ как фробениусова $\mathbb{C}[c]$–алгебра с $c=\exp(|G|v_{id,\mu_A})$

(аксиома G-градуировки): для каждого фиксированного $1\le i\le 3$ потенциал $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ инвариантен относительно замены переменных $v_{g_i^l,k}\to g_i^l v_{g_i^l,k}$, $1\le l\le n_i-1$.

Из этой аксиомы вместе с аксиомой расширения Jac следует, что произведение $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ является G-градуированным. В частности,

$$M^{\infty}_{f_{A'},\mathrm{id}}:=M^{\infty}_{f_{A'},G}\mid_{v_{g_i^l,k}=0}.$$

является подмногообразием Дубровина–Фробениуса.

(аксиома инвариантного сектора): существует изоморфизм многообразий Дубровина–Фробениуса $(M^{\infty}_{f_{A'}})^G\cong M^{\infty}_{f_{A'},\mathrm{id}}$.

(аксиома Aut**–инвариантности):** для каждого автоморфизма $\phi: G\to G$ потенциал $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ инвариантен относительно замены переменных $v_{g_i^l,k}\to v_{\phi(g_i^l),k}$.

Замечание 6.1. Все приведенные выше аксиомы естественны с точки зрения орбифолдов Ландау-Гинзбурга. Аксиома координат, аксиома инвариантного сектора и аксиома расширения потенциала ожидаемы для всех многообразий Дубровина–Фробениуса орбифолдов Ландау-Гинзбурга. Аксиома расширения Jac специфична

для касп–многочленов, имеющих одномерное пространство маргинальных деформаций. Аксиому квазиоднородности можно переформулировать, сказав, что квазиоднородность многообразия Дубровина-Фробениуса должна согласовываться с квазиоднородностью $\overline{A^*}(f_{A'}, G)$. Аксиома G–градуировки просто требует, чтобы произведение $M^\infty_{f_{A'},G}$ было согласовано с G–градуировкой. Аксиома Aut–инвариантности специфична для $(f_{A'}, G)$. Она отражает тот факт, что подгруппы $K_i \subseteq G$ не имеют канонического генератора, тогда как в наших обозначениях некоторый генератор фиксирован.

Легко заметить, что для $\chi_{A'} = 0$ (соответственно $\chi_{A'} > 0$) мы имеем $\chi_A = 0$ (соответственно $\chi_A > 0$) для любой разрешенной группы симметрии. Мы перечислим все возможные пары A' и G с $\chi_{A'} \geq 0$ в Таблице 1 и Таблице 2 ниже.

Замечание 6.2. Если оба A' и A имеют длину 3, то оказывается, что мы имеем изоморфизм $M^\infty_{(f_{A'},G)} \cong M^\infty_{f_A}$. Если это так, то мы записываем тип соответствующей особенности в последнем столбце. Заметим, что этот изоморфизм не следует путать с зеркальным изоморфизмом LG-LG, поскольку оба многообразия Дубровина-Фробениуса представляют Б–модели.

Table 1. Классификация $(f_{A'}, G)$ с $\chi_{A'} = 0$.

A'	тип $f_{A'}$	G	A	тип f_A
$(3,3,3)$	$\widetilde{E}_6$	$\langle(\mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{3}], \mathbf{e}[\frac{2}{3}])\rangle$	$(3,3,3)$	$\widetilde{E}_6$
$(4,4,2)$	$\widetilde{E}_7$	$\langle(\mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(4,4,2)$	$\widetilde{E}_7$
$(4,4,2)$	$\widetilde{E}_7$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{4}], \mathbf{e}[\frac{3}{4}], \mathbf{e}[0])\rangle$	$(2,2,2,2)$	-
$(4,4,2)$	$\widetilde{E}_7$	$\langle(\mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[\frac{1}{2}]), (\mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(2,2,2,2)$	-
$(6,3,2)$	$\widetilde{E}_8$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(3,3,3)$	$\widetilde{E}_6$
$(6,3,2)$	$\widetilde{E}_8$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{3}], \mathbf{e}[\frac{2}{3}], \mathbf{e}[0])\rangle$	$(2,2,2,2)$	-

6.3. Доказательство Теоремы 6.1

В дальнейшем пусть $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}_G(\mathbf{v})$ будет потенциалом $M^\infty_{(f_{A'},G)}$. В этом разделе мы покажем, что $\mathcal{F}_G$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.3.

TABLE 2. Классификация $(f_{A'}, G)$ с $\chi_{A'} > 0$.

A'	тип $f_{A'}$	G	A	тип f_A
$(2,3,5)$	$\hat{E}_8$	отсутствует	-	-
$(2,3,4)$	$\hat{E}_7$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(3,3,2)$	$\hat{E}_6$
$(2,3,3)$	$\hat{E}_6$	$\langle(\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{3}],\mathbf{e}[\frac{2}{3}])\rangle$	$(2,2,2)$	$\hat{D}_4$
$(2,2,2k)$	$\hat{D}_{2k+2}$	$\langle(\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[\frac{1}{2}]),(\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(1,k,k)$	$\hat{A}_{2k-1}$
$(2,2,2k)$	$\hat{D}_{2k+2}$	$\langle(\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[\frac{1}{2}])\rangle$	$(2,2,k)$	$\hat{D}_{k+2}$
$(2,2,2k)$	$\hat{D}_{2k+2}$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[0])\rangle$	$(1,2k,2k)$	$\hat{A}_{4k-1}$
$(2,2,2k+1)$	$\hat{D}_{2k+3}$	$\langle(\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[\frac{1}{2}],\mathbf{e}[0])\rangle$	$(1,2k+1,2k+1)$	$\hat{A}_{4k+1}$
$(1,k\cdot m,l\cdot m)$	$\hat{A}_{m(k+l)-1}$	$\langle(\mathbf{e}[0],\mathbf{e}[\frac{1}{m}],\mathbf{e}[\frac{m-1}{m}])\rangle$	$(1,k,l)$	$\hat{A}_{k+l-1}$

Благодаря аксиоме расширения Jac мы можем выбрать координаты на $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ таким образом, что в $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)$ координата $v_{\mathrm{id},1}$ двойственна e_{id}, v_{id,μ_A} двойственна $e_{\mu_{A'}}$ и $v_{g_i^j,l}$ двойственна $\left(e_{g_i^j}\right)^{\circ l}$.

6.3.1. Условия (i), (ii), (iii) и (v). Рассмотрим следующую замену переменных $\mathbf{t}=\mathbf{t}(\mathbf{v})$:

$$
\begin{aligned}
&t_1 = v_{\mathrm{id},1}, \quad t_{\mu_A} = v_{\mathrm{id},\mu_A}/|G|,\\
&t_{(i,k),j} = \sum_{l=0}^{n_i-1} \omega_i^{(k-1)l} v_{g_i^l,j}, \qquad 1\le i\le 3,\ 1\le k\le n_i,\ 1\le j\le a_i-1,
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

где $\omega_i := \mathbf{e}[1/n_i]$. Обозначим $\mathcal{F}(\mathbf{t}) := |G|\mathcal{F}_G(\mathbf{v}(\mathbf{t}))$.

Координаты $\mathbf{t}$, введенные выше, удовлетворяют следующим свойствам. Они двойственны следующим генераторам алгебры $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'},G)$ (см Раздел 4.4.2):

t_1: плоская координата, двойственная $[1]$ в пределе $\mathbf{s}=s_{\mu_{A'}}=0$.

$t_{(i,k),j}$: плоская координата, двойственная $[x_{i,k}]^j$ в пределе $\mathbf{s}=s_{\mu_{A'}}=0$.

t_{μ_A}: плоская координата, двойственная $\dfrac{(s_{\mu_{A'}})^{-1}[x_1x_2x_3]}{|G|} = \dfrac{a_i'[x_i]^{a_i'}}{|G|}$ в пределе $\mathbf{s}=s_{\mu_{A'}}=0$.

Во введенных координатах условие (i) следует из аксиом координат и квазиоднородности $M^{\infty}_{f_{A'},G}$. Также условие (v) следует из Предложения 4.11.

Чтобы продемонстрировать условие (ii), мы явно вычисляем спаривание, используя свойство фробениусовости алгебры.

Лемма 6.2. *Мы имеем*

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}\right) = 1. \tag{6.8}$$

Доказательство. Это следует из условия (a) $M^{\infty}_{f_{A'},G}$, Леммы 4.4 в [**IST19**] и Леммы 4.6 в [**ShiT15**]. □

Лемма 6.3. *Для всех $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, \dots, n_i$ мы имеем*

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{(i,k),j}}, \frac{\partial}{\partial t_{(i,k),a_i-j}}\right) = \frac{1}{a_i}. \tag{6.9}$$

Доказательство. Достаточно посчитать спаривание в пределе $\mathbf{t} = e^{t_{\mu_A}} = 0$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}
& \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_{(i,k),j}}, \frac{\partial}{\partial t_{(i,k),a_i-j}}\right)\Big|_{\mathbf{t}=e^{t_{\mu_A}}=0} \\
= \; & \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{(i,k),j}} \circ \frac{\partial}{\partial t_{(i,k),a_i-j}}\right)\Big|_{\mathbf{t}=e^{t_{\mu_A}}=0} \\
= \; & \frac{1}{a_i} \cdot \eta\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_{\mu_A}}\right)\Big|_{\mathbf{t}=e^{t_{\mu_A}}=0} \\
= \; & \frac{1}{a_i},
\end{aligned}$$

поскольку $x^{j}_{i,k} \cdot x^{a_i-j}_{i,k} = \frac{1}{a_i} \cdot \frac{a'_i x_i^{a'_i}}{|G|}$ в пределе $\mathbf{t} = e^{t_{\mu_A}} = 0$. □

6.3.2. Условия (iv) и (vi) для $\chi_{A'} \geq 0$. Мы имеем либо $|A| = 3$, либо $A = (2, 2, 2, 2)$. Последний случай вместе с $A = (2, 2, 2)$ очень специфичен из-за множества симметрий и слабой алгебраической структуры. Мы подробно исследуем их в Разделе 6.4. Остальная часть настоящего раздела посвящена случаю $|A| = 3$, $A \neq (2, 2, 2)$.

В дальнейшем мы будем изучать структуру степенных ряда $p(\mathbf{t}) \in \mathbb{C}[[t_{i,j}, q]]$ с $q = \exp(t_{\mu_A})$. Для любого монома ϕ от переменных q и $t_{i,j}$ обозначим через $[\phi]p(\mathbf{t})$ коэффициент монома ϕ в разложении ряда $p(\mathbf{t})$.

Мы собираемся использовать следующие два предложения.

Предложение 6.4 ([**IST15**, Предложение 3.15] (см. также Замечание 3.14 в loc.cit.)). *Пусть A таково, что $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ и $\mathcal{F}_A$ удовлетворяют условиям (i),(ii),(iii),(v). Имеем три случая.*

(a): *Пусть* $a_1 \geq 3$. *Тогда* $[t_{i,\alpha}t_{j,\beta}t_{k,\gamma}q]\mathcal{F}_A$ *не равен нулю, только если* $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *и* $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

(b): *Пусть* $A = (2,2,a_3)$ *для некоторых* $a_3 \geq 3$ *и* $\mathcal{F}_A$ *симметричен по переменным* $t_{1,1}, t_{2,1}$. *Тогда* $[t_{i,\alpha}t_{j,\beta}t_{k,\gamma}q]\mathcal{F}_A$ *не равен нулю, только если* $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *и* $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

(c): *Пусть* $A = (1,2,2)$ *и* $\mathcal{F}_A$ *симметричен по переменным* $t_{2,1}, t_{3,1}$. *Тогда* $[t_{i,\alpha}t_{j,\beta}q]\mathcal{F}_A$ *не равен нулю только если* $\alpha = \beta = 1$ *и* $\{i,j\} = \{2,3\}$.

Предложение 6.5 ([**IST15**, Предложение 3.24] (см. также замечание выше)). *Пусть* $A = (a_1,a_2,a_3) \neq (2,2,2)$ *и* $\mathcal{F}_A$ *удовлетворяют условиям (i),(ii),(iii),(v),(vi). Если* $a_i = a_j = 2$ *дополнительно предположим, что* $\mathcal{F}_A$ *симметричен по переменным* $t_{i,1}, t_{j,1}$.

Тогда $\mathcal{F}_A$ *удовлетворяет условию (iv).*

Пусть A **как в случае (a) выше.** Мы имеем

$$\prod_{i=1}^{3}\prod_{l=1}^{n_i} t_{(i,l),1}e^{t_{\mu_A}} = \prod_{i=1}^{3}\left(v_{g_i^0,1}\right)^{n_i} e^{|G|v_{\mu_A}} + \dots. \tag{6.10}$$

В связи с вышесказанным мы имеем

$$\left[\prod_{i=1}^{3}\prod_{l=1}^{n_i} t_{(i,l),1}e^{t_{\mu_A}}\right]\mathcal{F}(\mathbf{t}) = |G|\left[\prod_{i=1}^{3}\left(v_{g_i^0,1}\right)^{n_i} e^{|G|v_{\mu_A}}\right]\mathcal{F}_G. \tag{6.11}$$

По аксиоме инвариантного сектора $M^{\infty}_{f_{A'},G}$ в инвариантном секторе коэффициент при $v_{g_1^0,1}v_{g_2^0,1}v_{g_3^0,1}e^{|G|v_{\mu_A}}$ равен $1/|G|$ по следующей лемме ниже. Это дает условие (vi) для $\mathcal{F}(\mathbf{t})$.

Лемма 6.6. *Пусть пара* $(f_{A'},G)$ *будет, как указано выше. Слагаемое*

$$\left(\prod_{i=1}^{3}(t_{i,|G/K_i|})^{n_i}\right)e^{|G|t_{\mu_{A'}}} \tag{6.12}$$

входит с коэффициентом $1/|G|$ *в* $\mathcal{F}_{f_{A'},\zeta^{\infty}}$.

Доказательство. Рассмотрим потенциал рода нуль теории Громова–Виттена $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. В силу теоремы зеркальной симметрии 5.5 достаточно показать то же самое утверждение для потенциала $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$.

Рассмотрим набор весов A, связанный с A' и G, как указано выше. Слагаемое (6.12) вычисляет инвариант Громова–Виттена для отображения накрытия $\mathbb{P}^1_{A,\Lambda} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{A'} = [\mathbb{P}^1_{A,\Lambda}/G]$. Следовательно, данный коэффициент является обратной величиной порядка группы накрытия, что равно $1/|G|$. □

Теперь мы можем применить Предложение 6.5, дающее нам также условие (iv).

Мы собираемся использовать тот же аргумент инвариантного сектора для оставшихся случаев (b) и (c). Для этого нам также нужно показать, что выполняются дополнительные условия симметрии.

Предположим, что A таков же, как в случае (b) выше, $A = (2, 2, k)$ с $k \geq 3$. Такой набор может быть получен только из $A' = (2, 2, 2k)$, рассматриваемого с $G = K_1$. Следовательно, $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ является функцией t_1, t_5 и $t_{(1,1),1}$, $t_{(1,2),1}$, $t_{(3,1),1}$. Функция $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ симметрична относительно $t_{(1,1),1}, t_{(1,2),1}$ по аксиоме Aut — инвариантности. Условия Предложения 6.4 выполнены, и мы можем применить тот же аргумент инвариантного сектора, что и выше. Это дает условия (vi) и (iv) для $\mathcal{F}(\mathbf{t})$.

Предположим, что A как в случае (c) выше, $A = (1, 2, 2)$. Такой набор может быть получен только из $A' = (2, 2, 4)$, рассматриваемого с $G = G^D$, $A' = (2, 2, 2)$, рассматриваемого с $G = K_3$ или $A' = (1, 2m, 2m)$ с порядком m группы $G \subset K_1$. В первых двух случаях $\mathcal{F}(\mathbf{t})$, удовлетворяющий условию симметрии, должен быть точно таким же, как в случае (b) выше. В последнем случае $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ является функцией от $t_{(2,1),1}$ и $t_{(3,1),1}$. Он симметричен относительно этих переменных, поскольку $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ полностью определен аксиомой инвариантного сектора, где это условие симметрии выполняется. Мы заключаем, что условия (vi) и (iv) выполняются для $\mathcal{F}(\mathbf{t})$.

6.3.3. Условия (iv) и (vi) для $\chi_{A'} < 0$. Имеем $r := |A| \geq 4$ и $A \neq (2, 2, 2, 2)$. Имеем следующий аналог Предложения 6.4.

Предложение 6.7 ([**Shi18**, Предложение 3.4]). *Пусть A таково, что $r := |A| > 3$, $\chi_A < 0$ и $\mathcal{F}_A$ удовлетворяют условиям (i),(ii),(iii),(v). Тогда коэффициент $\left[\prod_{k=1}^{r} t_{i_k,\alpha_1} \dots t_{i_k,\alpha_{p_k}} \cdot e^{t_{\mu_A}}\right] \mathcal{F}_A$ при $\sum_{k=1}^{r} p_k \geq r$ не равен нулю только в том случае, если $\alpha_\bullet = 1$ и $\{i_1, \dots, i_r\} = \{1, \dots, r\}$.*

Из этого следует, что мы имеем, как в разделе выше

$$\left[\prod_{i=1}^{3}\prod_{l=1}^{n_i} t_{(i,l),1} e^{t_{\mu_A}}\right] \mathcal{F} = |G| \left[\prod_{i=1}^{r} \left(v_{g_i^0,1}\right)^{n_i} e^{|G| v_{\mu_A}}\right] \mathcal{F}_G. \tag{6.13}$$

Коэффициент правой части равен $1/|G|$ по аксиоме инвариантного сектора и лемме 6.6. Это дает условие (vi) для $\mathcal{F}(\mathbf{t})$.

Однако у нас нет аналога Предложения 6.5 в **[Shi18]**[1]. Чтобы показать условие (iv), мы рассмотрим уравнение WDVV на $\mathcal{F}(\mathbf{t})$. Доказательство разделено на следующие три случая:

Случай 1. G произвольна, существует индекс i_0 такой, что $a_{i_0} > 2$,

Случай 2. $A = (2, \dots, 2)$ и $G \subseteq K_{i_0}$,

Случай 3. $A = (2, \dots, 2)$ и $G = G^D = \langle (\mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[0]), (\mathbf{e}[\frac{1}{2}], \mathbf{e}[0], \mathbf{e}[\frac{1}{2}]) \rangle$.

Разница между этими случаями определяется структурой алгебры $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'}, G)$. Она оказывается очень богатой в первом случае, однако, когда A состоит только из $a_i = 2$, эта структура алгебры оказывается очень простой, кодирующей только спаривание.

В дальнейшем мы используем *корреляторы*:

$$\langle t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_k} \rangle := \frac{\partial^k \mathcal{F}(\mathbf{t})}{\partial t_{\alpha_1} \dots \partial t_{\alpha_k}} \mid_{\mathbf{t}=\exp(t_{\mu_A})=0} \quad \in \mathbb{C}.$$

Поскольку выражение в правой части полностью симметрично по t_{α_p}, мы будем иногда опускать запятые в левой части, умножая повторяющиеся индексы. Мы также используем следующие обозначения:

Следующее утверждение справедливо для всех трех случаев.

Предложение 6.8. *Зафиксируем некоторые числа p_1, p_2, p_3 такие, что $1 \le p_i \le n_i$. Тогда для любых положительных b_1,b_2,b_3 таких, что по крайней мере два из них не равны нулю, функция $\mathcal{F}(\mathbf{t}) \mid_{t_1=\exp(t_{\mu_A})=0}$ не содержит член $t^{b_1}_{(1,p_1),j_1} t^{b_2}_{(2,p_2),j_2} t^{b_3}_{(3,p_3),j_3}$ для любых индексов j_1, j_2, j_3.*

В терминах корреляторов это выглядит так:

$$\left\langle t^{b_1}_{(1,p_1),j_1} t^{b_2}_{(2,p_2),j_2} t^{b_3}_{(3,p_3),j_3} \right\rangle = 0$$

Доказательство. Если $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ этот коррелятор определяется структурными константами $\overline{\mathcal{A}^*}(f_{A'}, G)$. Из Предложения 4.10 и уравнения (4.24) следует, что в этом случае он обращается в ноль.

Предположим, что хотя бы одно из чисел b_1, b_2, b_3 больше, чем 1. В потенциале $\mathcal{F}_G(\mathbf{v})$ положим все переменные $v_{g_i^a, j}$ подкрученных секторов равными нулю. В координатах $\mathbf{t}$ равенство $v_{g_i, j} = \dots = v_{g_i^a, j} = \dots = v_{g_i^{n_i - 1}, j} = 0$ эквивалентно $t_{(i,1),j} = \dots = t_{(i,k),j} = \dots = t_{(i,n_i),j}$. По условию (d) из $M^{\infty}_{f_{A'}, G}$ и теореме зеркальной симметрии 5.5, полученная функция определяет подмногообразие в орбифолдной теории Громова–Виттена и, следовательно, удовлетворяет условию (iv). В силу аксиомы симметрии это завершает доказательство. □

[1] следует отметить, что оно присутствовало в какой-то форме в препринтной версии этой статьи

Для завершения доказательства условия (iv) осталось показать, что смешанные члены, включающие переменные $t_{(i,k),j}$ с одинаковым индексом i и разными индексами k, не появляются в $\mathcal{F}(\mathbf{t})\,|_{t_1=\exp(t_{\mu_A})=0}$.

6.3.3.1. *Случай 1: существует i_0 такое, что $a_{i_0}>2$, группа G произвольна.*

Предложение 6.9. *Зафиксируем некоторое $1\le i_0\le 3$ так, чтобы $a_{i_0}>2$. Разложение в ряд потенциала $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ не содержит членов $t_{(i_0,k_1),j_1}\dots t_{(i_0,k_p),j_p}$ таких, что не все k_j равны.*

Доказательство. В этом доказательстве будем использовать обозначение $t_{k,j}:=t_{(i_0,k),j}$. Докажем предложение, используя индукцию по длине p монома $T:=t_{(i_0,k_1),j_1}\dots t_{(i_0,k_p),j_p}$.

Шаг 0: Предположим $p=3$. Тогда утверждение следует из Следствия 4.11.

Шаг 1: Предположим, что $p=4$. Пусть $T=t_{k_1,j_1}t_{k_2,j_2}t_{k_3,j_3}t_{k_4,j_4}$. Из условия квазиоднородности по крайней мере один индекс $j_\bullet>1$. Пусть это будет j_3. Рассмотрим производную по $\partial/\partial t_\sigma$ от $\mathrm{WDVV}(t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_{k_3,\kappa},t_{k_3,j_3-\kappa})$ для некоторого $\kappa<j_3$

$$\sum_{\gamma,\bar\gamma}\left(\langle t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_\sigma,t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_{k_3,\kappa},t_{j_3-\kappa}\rangle+\langle t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_\sigma,t_{k_3,\kappa},t_{j_3-\kappa}\rangle\right)$$
$$=\sum_{\gamma,\bar\gamma}\left(\langle t_{k_1,j_1},t_{k_3,\kappa},t_\sigma,t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_{k_2,j_2},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle+\langle t_{k_1,j_1},t_{k_3,\kappa},t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_\sigma,t_{k_2,j_2},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle\right)$$
$$\Leftrightarrow\langle t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_\sigma,t_{k_3,j_3}\rangle+\sum_{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_\sigma,t_{k_3,\kappa},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle$$
$$=\sum_{\gamma,\bar\gamma}\left(\langle t_{k_1,j_1},t_{k_3,\kappa},t_\sigma,t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_{k_2,j_2},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle+\langle t_{k_1,j_1},t_{k_3,\kappa},t_\gamma\rangle\eta^{\gamma,\bar\gamma}\langle t_{\bar\gamma},t_\sigma,t_{k_2,j_2},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle\right).$$

Если k_1,k_2,k_3 попарно различны, то последнее вычисление показывает зануление рассматриваемого четырехточечного коррелятора при взятии $\sigma=(k_4,j_4)$.

Теперь нам следует рассмотреть еще два случая: случай 1 — когда $k_1=k_2\ne k_3=k_4$, а случай 2 — когда $k_1=k_2=k_3\ne k_4$. У нас есть $2a_{i_0}=j_1+j_2+j_3+j_4$, и оба j_1+j_2, j_3+j_4 не могут быть меньше, чем a_{i_0}. Предположим, что $j_1+j_2\ge a_{i_0}$. Выражение WDVV выше дает:

$$\langle t_{k_1,j_1},t_{k_2,j_2},t_\sigma,t_{k_3,j_3}\rangle=-\delta_{j_1+j_2<a_{i_0}}\langle t_{k_1,j_1},t_{k_1,j_2},t_{k_1,a_{i_0}-j_1-j_2}\rangle\frac{1}{a_{i_0}}\langle t_{k_1,j_1+j_2},t_\sigma,t_{k_3,\kappa},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle$$
$$=-\delta_{j_1+j_2<a_{i_0}}\cdot\langle t_{k_1,j_1+j_2},t_\sigma,t_{k_3,\kappa},t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle=0.$$

Это завершает доказательство для $p=4$, поскольку мы можем подставить любое необходимое σ.

Шаг 2: Предположим, что $p > 4$. Действуем по индукции по p. Пусть предложение доказано для всех $p \leq l$. Покажем это для $p = l+1$. В силу квазиоднородности мы можем снова предположить $j_3 > 1$. Зафиксируем некоторое $1 \leq \kappa < j_3$ и установим $I = \{(k_4, j_4), \dots, (k_{l+1}, j_{l+1})\}$ из $\mathrm{WDVV}(t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa})$.

Рассмотрим производную по $\partial^{l-2}/\partial t_{k_4,j_4} \dots \partial t_{k_{l+1},j_{l+1}}$ от $\mathrm{WDVV}(t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa})$

$$\sum_{\gamma,\bar\gamma} \Big(\langle t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, \mathbf{t}_I, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle + \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_I, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle$$
$$- \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_3,\kappa}, \mathbf{t}_I, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle - \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_3,\kappa}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_I, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle \Big)$$
$$= \sum_{\gamma,\bar\gamma} \sum_{\substack{I_A \sqcup I_A = I, \\ |I_A|\neq 0, |I_B|\neq 0}} \Big(\langle t_{k_1,j_1}, t_{k_3,\kappa}, \mathbf{t}_{I_A}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_{I_B}, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle$$
$$- \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, \mathbf{t}_{I_A}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_{I_B}, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle \Big).$$

Правая часть равна нулю по предположению индукции, и мы получаем

$$\langle t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, \mathbf{t}_I, t_{k_3,j_3}\rangle = \sum_{\gamma,\bar\gamma} \Big(- \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_2,j_2}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_I, t_{k_3,\kappa}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle$$
$$+ \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_3,\kappa}, \mathbf{t}_I, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle + \langle t_{k_1,j_1}, t_{k_3,\kappa}, t_\gamma\rangle \eta^{\gamma,\bar\gamma} \langle t_{\bar\gamma}, \mathbf{t}_I, t_{k_2,j_2}, t_{k_3,j_3-\kappa}\rangle \Big).$$

Если k_1, k_2, k_3 попарно различны, это приводит к равенству нулю коррелятора, необходимого для шага 0 выше. Если нет тройки попарно различных индексов k_α, k_β, k_γ, то правая часть в выражении выше обращается в нуль из-за квазиоднородности и шага 0. □

6.3.3.2. *Случай 2:* $A = (2, \dots, 2)$ *и* $G \subseteq K_l$. Для всех условий теоремы 5.2, за исключением условия (iv), доказательство этого случая не отличается от предыдущего. Мы пропускаем его здесь, поскольку оно полностью аналогично.

Без потери общности можно предположить $l = 3$. Пусть $n := n_l$. Тогда либо $A' = (2n, 2n, 2)$ с $G \subset K_3$ порядка n, либо $A' = (n, n, 2)$ с $G = K_3$. Мы приводим доказательство только для первого случая, поскольку доказательство второго полностью аналогично.

Предположим, что $A' = (2n, 2n, 2)$ с $G \subset K_3$ порядка n. Мы имеем

$$\mathcal{F}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 t_{\mu_A} + \frac{t_1}{4}\left(t_{1,1}^2 + t_{2,1}^2 + \sum_{k=1}^{n} t_{3,n}^2\right) + \sum t_{1,1}^{\alpha_1} t_{2,1}^{\alpha_2} t_{3,1}^{\beta_1} \dots t_{3,n}^{\beta_n} g_{\alpha,\beta}(t_{\mu_A}) \tag{6.14}$$

для некоторого $g_{\alpha,\beta}$. Из аксиомы симметрии имеем $g_{\alpha,\beta}(t_{\mu_A}) = g_{\alpha,\beta'}(t_{\mu_A})$, если β' получается из β перестановкой. Пусть

$$g_{\alpha,\beta} = \sum_{k\geq 0} c_{\alpha,\beta;k} q^k, \quad q = \exp(t_{\mu_A}).$$

Из условия квазиоднородности на $\mathcal{F}(\mathbf{t})$ имеем $c_{\alpha,\beta;0} = 0$ кроме случаев, когда $\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i = 4$. Используя тот же аргумент, что и выше, имеем $c_{\alpha,\beta;1} \neq 0$ при $\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i = n + 2$ только если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $\beta_1 = \dots = \beta_n = 1$. Когда это условие выполняется, рассматриваемый коэффициент равен 1. Чтобы получить Теорему 6.1 осталось показать, что условие (iv) выполняется. По аксиоме инвариантного сектора (см. также Следствие 3.8 в [**Shi18**]) и Предложению 6.9 для некоторых констант имеем c_4, $c_{2,2}$, $c_{1,3}$ и $c_{1,1,2}$

$$\mathcal{F}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 t_{\mu_A} + \frac{t_1}{4}\left(t_{1,1}^2 + t_{2,1}^2 + \sum_{k=1}^{n} t_{3,n}^2\right) - \frac{1}{96}\left(t_{1,1}^4 + t_{2,1}^4\right) + \frac{c_4}{4!}\sum_{k=1}^{n} t_{3,k}^4 \tag{6.15}$$

$$+ \frac{1}{4}c_{2,2}\sum_{i\neq j} t_{3,i}^2 t_{3,j}^2 + \frac{1}{6}c_{1,3}\sum_{i\neq j} t_{3,i} t_{3,j}^3 + \frac{1}{2}c_{1,1,2}\sum_{i\neq j\neq k} t_{3,i} t_{3,j} t_{3,k}^2 + O(q). \tag{6.16}$$

Рассмотрим WDVV$(t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, t_{3,k})$ с $k \neq 1$. Дифференцируя его по $t_{3,1} \dots t_{3,n}$ и рассматривая коэффициент при q, получаем

$$0 = \sum_{p=1}^{n} \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, \dots \widehat{p}, \dots, t_{3,n}, t_x\rangle \eta^{x,\overline{x}} \langle t_{\overline{x}}, t_{3,p}, t_{3,1}, t_{3,k}\rangle \tag{6.17}$$

$$= \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, \dots, t_{3,n}\rangle \cdot 2 \cdot \sum_{p=1}^{n} \langle t_{3,p}, t_{3,p}, t_{3,1}, t_{3,k}\rangle \tag{6.18}$$

что дает $(n-2)c_{1,1,2} + 2c_{1,3} = 0$. Дифференцируя то же WDVV по $t_{3,2}, t_{3,2}, t_{3,3} \dots t_{3,n}$ и рассматривая коэффициент при q, получаем

$$0 = \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,2}, \dots t_{3,n}, t_x\rangle \eta^{x,\overline{x}} \langle t_{\overline{x}}, t_{3,2}, t_{3,1}, t_{3,2}\rangle \tag{6.19}$$

$$= \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, \dots, t_{3,n}\rangle \cdot 2 \cdot \langle t_{3,1}, t_{3,1}, t_{3,2}, t_{3,2}\rangle \tag{6.20}$$

что дает нам $c_{2,2} = 0$.

Рассмотрим WDVV$(t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, t_{3,1})$. Дифференцируя его по $t_{3,2}, t_{3,2}, t_{3,3} \dots t_{3,n}$ и рассматривая коэффициент при q, получаем

$$0 = \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,2}, \dots, t_{3,n}, t_x\rangle \eta^{x,\overline{x}} \langle t_{\overline{x}}, t_{3,1}, t_{3,1}, t_{3,2}\rangle \tag{6.21}$$

$$= \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}t_{3,2}, \dots, t_{3,n}\rangle \cdot 2 \cdot \langle t_{3,1}, t_{3,1}, t_{3,1}, t_{3,2}\rangle \tag{6.22}$$

что дает $c_{1,3} = 0$. Дифференцируя то же самое выражение WDVV по $t_{3,1}\dots t_{3,n}$, получаем

$$0 = \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, \dots, t_{3,n}, t_x\rangle \eta^{x,\overline{x}} \langle t_{\overline{x}}, t_{3,1}, t_{3,1}\rangle \tag{6.23}$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} \langle t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}, \dots \widehat{p} \dots, t_{3,n}, t_x\rangle \eta^{x,\overline{x}} \langle t_{\overline{x}}, t_{3,p}, t_{3,1}, t_{3,1}\rangle \tag{6.24}$$

что дает $\frac{1}{2} + 2c_{0,4} + 2(n-1)c_{2,2} = 0$.

Принимая во внимание все выписанные уравнения, мы получаем $c_{0,4} = -1/4$ и $c_{1,1,2} = c_{2,2} = c_{1,3} = 0$, а полученный потенциал удовлетворяет условию (iv) Теоремы 5.3. Это завершает доказательство Теоремы 6.1 в этом случае.

6.3.3.3. *Случай 3:* $A = (2, \dots, 2)$ *и* $G = G^D$. Этот случай возможен только при $A = (2,2,2,2,2,2)$ и $f_{A'} = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - s_\mu^{-1} x_1 x_2 x_3$. Пусть g и h будут генераторами G^D. Тогда мы имеем $G^D = \{1, g, h, gh\}$. Записывая потенциал $\mathcal{F}_G(\mathbf{v})$ в координатах и используя введенные нами аксиомы, мы получаем довольно конкретное выражение.

Замена координат принимает простую форму

$$t_{(1,1),1} = v_{g^0,1} + v_{g,1},\ t_{(1,2),1} = v_{g^0,1} - v_{g,1}, \tag{6.25}$$

$$t_{(2,1),1} = v_{h^0,1} + v_{h,1},\ t_{(2,2),1} = v_{h^0,1} - v_{h,1}, \tag{6.26}$$

$$t_{(3,1),1} = v_{(gh)^0,1} + v_{gh,1},\ t_{(3,2),1} = v_{(gh)^0,1} - v_{gh,1}. \tag{6.27}$$

Из аксиомы (b), аксиомы симметрии и Предложения 6.8 следует, что потенциал $\mathcal{F}_G(\mathbf{t})$ имеет вид

$$\mathcal{F}_G(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_1^2 t_8 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(t_{(i,1),1}^2 + t_{(i,2),1}^2\right) + \sum_{i=1}^{3} c_{1,i}\left(t_{(i,1),1}^4 + t_{(i,2),1}^4\right) \tag{6.28}$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{c_{2,i}}{6}(t_{(i,1),1}t_{(i,2),1}^3 + t_{(i,1),1}^3 t_{(i,2),1}) + \frac{c_{3,i}}{4}t_{(i,1),1}^2 t_{(i,2),1}^2\right) + q\cdot\phi(\mathbf{t}) + O(q^2), \tag{6.29}$$

где $q = \exp(t_\mu)$. Из аксиомы инвариантного сектора следует, что $c_{1,i} = -1/96$. Из Предложения 6.7 имеем $\phi(\mathbf{t}) = \prod_{i=1}^{3}\prod_{l=1}^{2} t_{(i,l),1}$. Взяв коэффициент при q в WDVV$(t_{(1,1),1}, t_{(1,1),1}, t_{(2,1),1}, t_{(2,2),1})$, получаем

$$2c_{2,1}t_{(3,1),1}t_{(3,2),1}t_{(1,1),1}^2 + \frac{8}{3}c_{3,1}t_{(1,2),1}t_{(3,1),1}t_{(3,2),1}t_{(1,1),1} + 2c_{2,1}t_{(1,2),1}^2 t_{(3,1),1}t_{(3,2),1} = 0$$

что должно выполняться в кольце многочленов. Отсюда как $c_{2,1} = 0$, так и $c_{3,1} = 0$.

6.4. Примеры

В этом разделе мы докажем каждый пункт теоремы 6.1 для пар $(f_{A'}, G)$, таких, что $A = (2,2,2)$ или $A = (2,2,2,2)$. Условия (i), (ii), (iii) и (v) выполняются для этих пар согласно Разделу 6.3.1, и мы сосредоточимся на условиях (iv) и (vi).

Наша стратегия такова. Сначала запишем потенциал $\mathcal{F}_{(f_{A'},G)}(\mathbf{t})$ в плоских координатах, введенных в уравнении (6.7). Аксиомы квазиоднородности и разложения гарантируют, что потенциал может быть разложен в ряд в $\mathbf{t}$ и $\exp(t_{\mu_A})$. Некоторые из коэффициентов этого разложения в ряд могут быть дополнительно идентифицированы друг с другом с помощью аксиом Aut-инвариантности и G-градуировки.

Далее мы вычисляем функции $\mathcal{F}^G_{f_{A'}}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{(f_{A'},G)}$, первая из которых является ограничением $\mathcal{F}_{f_{A'}}$ на G-инвариантное подпространство, а вторая — ограничением $\mathcal{F}_{(f_{A'},G)}$ на сектор единицы. По аксиоме инвариантного сектора мы имеем $\mathcal{F}^G_{f_{A'}}(\mathbf{t}') = |G|\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{(f_{A'},G)}(\mathbf{t}')$ для некоторых переменных $\mathbf{t}'$.

Наконец, мы решаем уравнение WDVV.

6.4.1. Набор $A = (2,2,2)$. Мы должны рассмотреть $A' = (2,3,3)$ с $G = K_1$ и $A' = (2,2,4)$ с $G = K_1$. Для всех трех случаев справедливо следующее.

В силу аксиом квазиоднородности и расширения мы видим, что после некоторой перенумерации переменных $\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t})$ является многочленом по $t_1, t_{1,1}, t_{2,1}, t_{3,1}$ и $t_{\mu_A} = t_5$. Для некоторых комплексных чисел имеем $c_\alpha = c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$

$$\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_5t_1^2 + \frac{1}{4}t_1\left(t_{1,1}^2 + t_{2,1}^2 + t_{3,1}^2\right) + \sum c_\alpha t_{1,1}^{\alpha_1}t_{2,1}^{\alpha_2}t_{3,1}^{\alpha_3}e^{\alpha_4 t_5}, \tag{6.30}$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым числам $\alpha_\bullet$, таким, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 4$. Из структуры алгебры в начале координат мы знаем, что $c_\alpha = 0$, если $\alpha_4 = 0$ и по крайней мере два из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не равны нулю.

6.4.1.1. $A' = (2,3,3)$ *с* $G = K_1$. В силу аксиомы Aut–инвариантности имеем $c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} = c_{\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4} = c_{\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_4}$. Запишем $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ в координатах $t_{1,1} = t_{(1,1),1}$, $t_{2,1} = t_{(1,2),1}$, $t_{3,1} = t_{(1,3),1}$.

Используя Теорему 5.5, мы имеем $\mathcal{F}_{A'} = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. Последний потенциал можно найти в [**R10**]. Это функция от t_1, t_5 и $t_{1,1}$, $t_{2,1}$, $t_{2,2}$, $t_{3,1}$, $t_{3,2}$. Ограничивая $\mathcal{F}_{A'}$ на фиксированное подпространство группы, и $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ на id–сектор получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^G_{A'} &= -\frac{t_{1,1}^4}{96} + \frac{1}{3}e^{3t_5}t_{1,1}^3 + \frac{1}{2}e^{6t_5}t_{1,1}^2 + \frac{1}{4}t_{1,1}t_{1,1}^2 + \frac{1}{12}e^{12t_5} + \frac{1}{2}t_5t_{1,1}^2\\
\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G} &= 3t_{1,1}^4c_{0,0,4,0} + 3e^{t_5}t_{1,1}^3c_{0,0,3,1} + e^{t_5}t_{1,1}^3c_{1,1,1,1} + 6e^{t_5}t_{1,1}^3c_{2,0,1,1}\\
&\quad + 3e^{2t_5}t_{1,1}^2c_{0,0,2,2} + 3e^{2t_5}t_{1,1}^2c_{1,0,1,2} + 3e^{3t_5}t_{1,1}c_{0,0,1,3} + e^{4t_5}c_{0,0,0,4}
\end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4}t_1t_{1,1}^2+\frac{1}{2}t_5t_1^2.$$

Приравнивая $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}(t_1,t_{1,1},t_5)=3\cdot\mathcal{F}^G_{A'}(t_1,t_{1,1},t_5/3)$ имеем

$$c_{0,0,0,4}=\frac{1}{4},\ c_{0,0,1,3}=0,\ c_{0,0,4,0}=-\frac{1}{96},$$
$$c_{1,0,1,2}=\frac{1}{2}-c_{0,0,2,2},\ c_{2,0,1,1}=-\frac{1}{2}c_{0,0,3,1}-\frac{1}{6}c_{1,1,1,1}+\frac{1}{6}.$$

Наконец, единственными неизвестными коэффициентами в $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ остаются $c_{0,0,2,2},c_{0,0,3,1},c_{1,1,1,1}$. Они разрешаются уравнением WDVV следующим образом:

$$c_{0,0,2,2}=\frac{1}{2},\ c_{0,0,3,1}=0,c_{1,1,1,1}=1,$$

что дает нам точный потенциал $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2}}$.

В координатах $\mathbf{v}$ потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{f_{A'},K_1}(\mathbf{v})=&\frac{q^{12}}{12}+\left(v_{g^2,1}v_{g^3,1}+\frac{v_{g,1}^2}{2}\right)q^6+\frac{1}{3}\left(v_{g^3,1}^3+v_{g^2,1}^3-3v_{g^2,1}v_{g^3,1}v_{g,1}+v_{g,1}^3\right)q^3\\&-\frac{1}{96}\left(12v_{g^2,1}v_{g^3,1}v_{g,1}^2+4v_{g^3,1}^3v_{g,1}+4v_{g^2,1}^3v_{g,1}+6v_{g^2,1}^2v_{g^3,1}^2+v_{g,1}^4\right)\\&+\frac{1}{4}\left(2v_{g^2,1}v_{g^3,1}+v_{g,1}^2\right)v_{\mathrm{id},1}+\frac{1}{2}v_{\mathrm{id},1}^2v_{\mathrm{id},5}\end{aligned}$$

с $q=\exp(v_{\mathrm{id},5})$.

6.4.1.2. $A'=(2,2,4)$ *с* $G=K_1$. В силу аксиом симметрии и Aut-инвариантности имеем $c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}=c_{\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4}$. Запишем $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ в координатах $t_{1,1}=t_{(1,1),1}$, $t_{2,1}=t_{(1,2),1}$, $t_{3,1}=t_{(3,1),1}$.

Используя Теорему 5.5, мы имеем $\mathcal{F}_{A'}=\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. Последний потенциал можно найти в [**R10**]. Он является функцией $t_1,t_{1,1},t_{2,1},t_{3,1},t_{3,2},t_{3,3}$. Ограничивая $\mathcal{F}_{A'}$ на фиксированное подпространство действия группы, и $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ на id–сектор получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^G_{A'}=&\frac{e^{8t_5}}{8}+\frac{e^{4t_5}}{4}(2t_{1,1}^2+t_{3,2}^2)+\frac{e^{2t_5}}{2}t_{3,2}t_{1,1}^2-\frac{t_{1,1}^4}{96}-\frac{t_{3,2}^4}{192}+\frac{t_5t_1^2}{2}+\frac{t_1}{8}(2t_{1,1}^2+t_{3,2}^2)\\
\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}=&2t_{1,1}^4c_{0,4,0,0}+2e^{t_5}t_{1,1}^3c_{0,3,0,1}+2e^{t_5}t_{1,1}^3c_{1,2,0,1}+2e^{2t_5}t_{1,1}^2c_{0,2,0,2}\\&+e^{2t_5}t_{1,1}^2c_{1,1,0,2}+2e^{t_5}t_{3,2}t_{1,1}^2c_{0,2,1,1}+e^{t_5}t_{3,2}t_{1,1}^2c_{1,1,1,1}+2e^{t_5}t_{3,2}^2t_{1,1}c_{0,1,2,1}\\&+2e^{3t_5}t_{1,1}c_{0,1,0,3}+2e^{2t_5}t_{3,2}t_{1,1}c_{0,1,1,2}+t_{3,2}^4c_{0,0,4,0}+e^{t_5}t_{3,2}^3c_{0,0,3,1}\\&+e^{2t_5}t_{3,2}^2c_{0,0,2,2}+e^{4t_5}c_{0,0,0,4}+e^{3t_5}t_{3,2}c_{0,0,1,3}+\frac{1}{2}t_5t_1^2+\frac{1}{4}t_1\left(2t_{1,1}^2+t_{3,2}^2\right).\end{aligned}$$

Приравнивая $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}(t_1,t_{1,1},t_{3,2},t_5)=2\cdot\mathcal{F}^G_{A'}(t_1,t_{1,1},t_{3,2},t_5/2)$ получаем

$$c_{0,0,0,4}=\frac{1}{4},\ c_{0,0,1,3}=0,\ c_{0,0,2,2}=\frac{1}{2},\ c_{0,0,3,1}=0,\ c_{0,0,4,0}=-\frac{1}{96},$$
$$c_{0,1,0,3}=0,\ c_{0,1,1,2}=0,\ c_{0,1,2,1}=0,\ c_{0,4,0,0}=-\frac{1}{96},\ c_{1,1,0,2}=1-2c_{0,2,0,2},$$

$$c_{1,1,1,1} = 1 - 2c_{0,2,1,1},\ c_{1,2,0,1} = -c_{0,3,0,1}.$$

Оставшиеся неизвестные коэффициенты решаются из уравнения WDVV, что дает

$$c_{0,2,0,2} = \frac{1}{2},\ c_{0,2,1,1} = 0,\ c_{0,3,0,1} = 0,$$

так что $\mathcal{F}_{f_{A'},G} = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$.

В координатах $\mathbf{v}$ потенциал имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{f_{A'},K_1}(\mathbf{v}) = \frac{q^8}{8} &+ \left(\frac{1}{2}v_{g^2,1}^2 + \frac{v_{g,1}^2}{2} + \frac{v_{\mathrm{id},x}^2}{4}\right)q^4 + \left(\frac{1}{2}v_{g,1}^2 v_{\mathrm{id},x} - \frac{1}{2}v_{g^2,1}^2 v_{\mathrm{id},x}\right)q^2 \\ &- \frac{1}{96}v_{g^2,1}^4 - \frac{1}{16}v_{g,1}^2 v_{g^2,1}^2 - \frac{v_{g,1}^4}{96} - \frac{v_{\mathrm{id},x}^4}{192} \\ &+ v_{\mathrm{id},1}\left(\frac{1}{4}v_{g^2,1}^2 + \frac{v_{g,1}^2}{4} + \frac{v_{\mathrm{id},x}^2}{8}\right) + \frac{1}{2}v_{\mathrm{id},1}^2 v_{\mathrm{id},5}\end{aligned}$$

с $q = \exp(v_{\mathrm{id},5})$.

6.4.2. Набор $A = (2,2,2,2)$. Мы должны рассмотреть $A' = (4,4,2)$ с $G = G^D$, $A' = (4,4,2)$ с $G = K_3$ и $A' = (6,3,2)$ с $G = K_3$. Для всех трех случаев справедливо следующее.

Вследствие аксиом квазиоднородности и разложения после, соответствующей перенумерации переменных $\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t})$ является многочленом от t_1, $t_{1,1}$, $t_{2,1}$, $t_{3,1}$, $t_{4,1}$ и степенным рядом по e^{t_6}. Для некоторых функций имеем $g_\alpha = g_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}(t_6)$

$$\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t}) = \frac{1}{2}t_6 t_1^2 + \frac{1}{4}t_1\sum_{k=1}^{4}t_{k,1}^2 + \sum t_{1,1}^{\alpha_1}t_{2,1}^{\alpha_2}t_{3,1}^{\alpha_3}t_{4,1}^{\alpha_4}g_\alpha(t_6),$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым числам $\alpha_\bullet$, таким, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 4$. Структура алгебры в начале координат очень проста, в этом случае она не налагает никаких условий на $g_\alpha(t_6)$ для любого α.

6.4.2.1. *$A' = (4,4,2)$ с $G = G^D$.* Запишем $\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t})$ в координатах $t_{1,1} = t_{(1,1),1}$, $t_{2,1} = t_{(1,2),1}$, $t_{3,1} = t_{(2,1),1}$, $t_{4,1} = t_{(2,2),1}$.

В силу аксиомы Aut-инвариантности имеем $g_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} = g_{\alpha_3,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_2}$. Используя Теорему 5.5, мы имеем $\mathcal{F}_{A'} = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. Последний потенциал был задан в главе 5 через определенные функции $x = x(q), y = y(q), z = z(q), w = w(q)$.

Ограничение $\mathcal{F}_{A'}$ на фиксированное подпространство действия группы задается ограничением $t_{1,1} = t_{1,3} = 0$, $t_{2,1} = t_{2,3} = 0$ и $t_{3,1} = 0$. Обозначим также $t_{1,2} = t_2$ и $t_{2,2} = t_3$.

Ограничение на id–сектор $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ тогда задается ограничением $t_{1,1} = t_{2,1} = t_1$ и $t_{3,1} = t_{4,1} = t_2$. Мы имеем

$$\mathcal{F}_{A'}^G = \frac{1}{384}(t_2^4 + t_3^4)\left(-3w(t_6) + x(t_6)^2 - 2y(t_6)^2\right)$$

$$+\frac{1}{64}t_3^2t_2^2\left(x\left(t_6\right)^2-w\left(t_6\right)\right)+\frac{1}{2}t_6t_1^2+\left(\frac{t_2^2}{8}+\frac{t_3^2}{8}\right)t_1,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G} &= t_2^4g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)+2t_2^4g_{0,4,0,0}\left(t_6\right)+2t_2^4g_{1,3,0,0}\left(t_6\right)+4t_3t_2^3g_{0,3,1,0}\left(t_6\right)\\ &+4t_3t_2^3g_{1,2,1,0}\left(t_6\right)+4t_3^2t_2^2g_{0,2,1,1}\left(t_6\right)+4t_3^2t_2^2g_{0,2,2,0}\left(t_6\right)+t_3^2t_2^2g_{1,1,1,1}\left(t_6\right)\\ &+4t_3^3t_2g_{0,3,1,0}\left(t_6\right)+4t_3^3t_2g_{1,2,1,0}\left(t_6\right)+t_3^4g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)+2t_3^4g_{0,4,0,0}\left(t_6\right)\\ &+2t_3^4g_{1,3,0,0}\left(t_6\right)+\frac{1}{2}t_6t_1^2+\frac{1}{4}t_1\left(2t_2^2+2t_3^2\right)\end{aligned}$$

Приравнивая $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}(t_1,t_2,t_3,t_6)=4\cdot\mathcal{F}^{G}_{A'}(t_1,t_2,t_3,t_6/4)$ получаем

$$\begin{aligned}g_{1,1,1,1}\left(t_6\right) &= -4g_{0,2,1,1}\left(t_6\right)-4g_{0,2,2,0}\left(t_6\right)-\frac{1}{16}w\left(\frac{t_6}{4}\right)+\frac{1}{16}x\left(\frac{t_6}{4}\right),\\ g_{1,2,1,0}\left(t_6\right) &= -g_{0,3,1,0}\left(t_6\right),\\ g_{1,3,0,0}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{2}g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)-g_{0,4,0,0}\left(t_6\right)-\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{4}\right)+\frac{1}{192}x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-\frac{1}{96}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\end{aligned}$$

и у нас осталось 5 неизвестных функций $g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)$, $g_{0,2,1,1}\left(t_6\right)$, $g_{0,2,2,0}\left(t_6\right)$, $g_{0,3,1,0}\left(t_6\right)$ и $g_{0,4,0,0}\left(t_6\right)$.

Уравнение WDVV можно решить явно, получив два решения:

$$\begin{aligned}g_{0,0,2,2}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{4}\right)+\frac{1}{64}x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-\frac{1}{64}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2,\ g_{0,2,1,1}\left(t_6\right)=0,\\ g_{0,2,2,0}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{4}\right)+\frac{1}{64}x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-\frac{1}{64}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2,\ g_{0,3,1,0}\left(t_6\right)=0,\\ g_{0,4,0,0}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{128}w\left(\frac{t_6}{4}\right)-\frac{1}{384}x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-\frac{1}{384}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2,\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}g_{0,0,2,2}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{4}\right),\ g_{0,2,1,1}\left(t_6\right)=0,\\ g_{0,2,2,0}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{4}\right),\ g_{0,3,1,0}\left(t_6\right)=0,\\ g_{0,4,0,0}\left(t_6\right) &= -\frac{1}{128}w\left(\frac{t_6}{4}\right)+\frac{1}{192}x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-\frac{1}{96}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2.\end{aligned}$$

Важно отметить, что все приведенные выше функции имеют разложения в ряд Фурье по $\exp(t_6)$.

Первое решение дает

$$\mathcal{F}_{f_{A'},G^D}=\frac{1}{2}t_6t_1^2+\frac{1}{4}t_1\sum_{k=1}^{4}t_{k,1}^2$$

$$-\frac{1}{96}\left(t_{1,1}^4+t_{1,2}^4+t_{2,1}^4+t_{2,2}^4\right)+t_{1,1}t_{1,2}t_{2,1}t_{2,2}e^{t_6}+O(q^2).$$

Отсюда следует, что полученный потенциал удовлетворяет всем условиям теоремы 5.3 и, следовательно, совпадает с потенциалом $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$. Это доказывает теорему 6.1 для данной пары $(f_{A'},G)$.

Второе решение также приобретает вид, как указано выше, после линейной замены переменных $t_{1,1}\to(t_{4,1}+t_{3,1})/\sqrt{2}$, $t_{1,2}\to(t_{4,1}-t_{3,1})\sqrt{2}$, $t_{2,1}\to(t_{1,1}+t_{2,1})\sqrt{2}$ и $t_{2,2}\to(t_{1,1}-t_{2,1})\sqrt{2}$.

Замечание 6.3. Важно отметить, что если не налагать аксиому Aut–инвариантности, то все равно можно решить уравнение WDVV в терминах неизвестных функций $g_\alpha(t_6)$. Однако в этом случае существует ещё два решения в дополнение к перечисленным выше. Дополнительные два решения можно записать явно в терминах функций $x(t_6)$, $y(t_6)$ и $w(t_6)$, но они определяют многообразия Дубровина-Фробениуса, которые не изоморфны $M_{\mathbb{P}^1_A}$. В частности, соответствующие потенциалы не будут симметричны в $t_{1,1}$ и $t_{2,1}$.

Теперь мы можем выписать потенциалы явно

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\infty}_{\tilde{E}_7,G^D}(\mathbf{v})=&-\frac{1}{128}w\left(v_{g,1}^2+v_{h,1}^2+v_{g^0,1}^2+v_{h^0,1}^2\right)^2\\&+\frac{1}{384}x^2\Big(6v_{g^0,1}^2\left(-v_{g,1}^2+v_{h,1}^2+v_{h^0,1}^2\right)+6v_{h^0,1}^2\left(v_{g,1}^2-v_{h,1}^2\right)\\&\qquad+6v_{g,1}^2v_{h,1}^2+v_{g,1}^4+v_{h,1}^4+v_{g^0,1}^4+v_{h^0,1}^4\Big)\\&+\frac{1}{192}y^2\left(-6v_{g,1}^2v_{h^0,1}^2-v_{g,1}^4-6v_{h,1}^2v_{g^0,1}^2-v_{h,1}^4-v_{g^0,1}^4-v_{h^0,1}^4\right)\\&+v_{\mathrm{id},1}\left(\frac{v_{g,1}^2}{8}+\frac{v_{h,1}^2}{8}+\frac{v_{g^0,1}^2}{8}+\frac{v_{h^0,1}^2}{8}\right)+\frac{1}{2}v_{\mathrm{id},1}^2v_{\mathrm{id},6}\end{aligned}$$

6.4.2.2. $A'=(4,4,2)$ *с* $G=K_3$. Запишем $\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t})$ в координатах $t_{1,1}=t_{(3,1),1}$, $t_{2,1}=t_{(3,2),1}$, $t_{3,1}=t_{(3,3),1}$, $t_{4,1}=t_{(3,4),1}$.

В силу аксиомы Aut-инвариантности функции g_α совпадают для четверок α, отличающихся перестановкой. Используя Теорему 5.5, мы имеем $\mathcal{F}_{A'}=\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. В этом разделе пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $w=w(t)$ будут как в Разделе 6.4.2.1.

Ограничение $\mathcal{F}_{A'}$ на фиксированное подпространство действия группы задается ограничением $t_{1,k}=t_{2,k}=0$ для $1\le k\le 3$. Положим также $t_{3,1}=t_2$.

Ограничение на id–сектор $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ задается ограничением $t_{1,1}=\cdots=t_{4,1}=t_2$.

$$\mathcal{F}^G_{A'}=\frac{1}{96}t_2^4\left(2x\left(t_6\right)^2-y\left(t_6\right)^2-3w\left(t_6\right)\right)+\frac{1}{4}t_1t_2^2+\frac{1}{2}t_6t_1^2,$$

$$\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}=4t_2^4g_{0,0,0,4}\left(t_6\right)+12t_2^4g_{0,1,0,3}\left(t_6\right)+12t_2^4g_{0,1,1,2}\left(t_6\right)$$

$$+ 6t_2^4 g_{0,2,0,2}(t_6) + t_2^4 g_{1,1,1,1}(t_6) + t_1 t_2^2 + \frac{1}{2} t_6 t_1^2$$

Приравнивая $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}(t_1,t_2,t_6) = 4 \cdot \mathcal{F}^{G}_{A'}(t_1,t_2,t_6/4)$ получаем

$$g_{1,1,1,1}(t_6) = -4g_{0,0,0,4}(t_6) - 12g_{0,1,0,3}(t_6) - 12g_{0,1,1,2}(t_6) - 6g_{0,2,0,2}(t_6) - \frac{1}{8} w\left(\frac{t_6}{4}\right) + \frac{1}{12} x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2 - \frac{1}{24} y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2$$

и у нас осталось 4 неизвестные функции $g_{0,0,0,4}(t_6)$, $g_{0,1,0,3}(t_6)$, $g_{0,1,1,2}(t_6)$, $g_{0,2,0,2}(t_6)$.

Уравнение WDVV можно решить явно, получив два решения:

$$g_{0,0,0,4}(t_6) = \frac{1}{384}\left(-3w\left(\frac{t_6}{4}\right) + 2x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\right),$$

$$g_{0,1,0,3}(t_6) = 0,\ g_{0,1,1,2}(t_6) = 0,\ g_{0,2,0,2}(t_6) = -\frac{1}{64} w\left(\frac{t_6}{4}\right),$$

и

$$g_{0,0,0,4}(t_6) = \frac{1}{384}\left(-3w\left(\frac{t_6}{4}\right) - x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2 - y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\right),$$

$$g_{0,1,0,3}(t_6) = 0,\ g_{0,1,1,2}(t_6) = 0,$$

$$g_{0,2,0,2}(t_6) = \frac{1}{64}\left(-w\left(\frac{t_6}{4}\right) + x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2 - y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\right).$$

Важно отметить, что все приведенные выше функции имеют разложения в ряд Фурье по $q = \exp(t_6)$.

Первое решение дает

$$\mathcal{F}_{f_{A'},G} = \frac{1}{2} t_6 t_1^2 + \frac{1}{4} t_1 \sum_{k=1}^{4} t_{k,1}^2 - \frac{1}{96}\left(t_{1,1}^4 + t_{1,2}^4 + t_{2,1}^4 + t_{2,2}^4\right) + t_{1,1}t_{1,2}t_{2,1}t_{2,2}e^{t_6} + O(q^2).$$

Отсюда следует, что полученный потенциал удовлетворяет всем условиям теоремы 5.3 и, следовательно, совпадает с потенциалом $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$.

Второе решение также приобретает вид, как указано выше, после линейной замены переменных $t_{1,1} \to (t_{4,1} + t_{3,1})/\sqrt{2}$, $t_{1,2} \to (t_{4,1} - t_{3,1})\sqrt{2}$, $t_{2,1} \to (t_{1,1} + t_{2,1})\sqrt{2}$ и $t_{2,2} \to (t_{1,1} - t_{2,1})\sqrt{2}$.

Потенциал $\mathcal{F}^{\infty}_{(\widetilde{E}_7,K_3)}(\mathbf{v})$ теперь можно записать явно

$$\mathcal{F}^{\infty}_{(\widetilde{E}_7,K_3)}(\mathbf{v}) = -\frac{w}{96}\left(3v_{g,1}v_{g^2,1} + 2v_{g^0,1}^2\right)^2 + \frac{x^2}{288}\left(12\left(v_{g^2,1}^3 + v_{g,1}^3\right)v_{g^0,1} + 9v_{g,1}^2 v_{g^2,1}^2 + 8v_{g^0,1}^4\right)$$

$$+\frac{y^2}{144}\left(-18v_{g,1}v_{g^2,1}v_{g^0,1}^2-6\left(v_{g^2,1}^3+v_{g,1}^3\right)v_{g^0,1}-9v_{g,1}^2v_{g^2,1}^2-2v_{g^0,1}^4\right)$$
$$+v_{\mathrm{id},1}\left(\frac{1}{2}v_{g,1}v_{g^2,1}+\frac{v_{g^0,1}^2}{3}\right)+\frac{1}{2}v_{\mathrm{id},1}^2v_{\mathrm{id},6}.$$

6.4.2.3. $A'=(6,3,2)$ *с* $G=K_3$. Запишем $\mathcal{F}_{f_{A'},G}(\mathbf{t})$ в координатах $t_{1,1}=t_{(1,1),1}$, $t_{2,1}=t_{(1,2),1}$, $t_{3,1}=t_{(1,3),1}$, $t_{4,1}=t_{(3,1),1}$.

В силу аксиомы симметрии имеем $g_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}=g_{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_4}=g_{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2}$. Используя Теорему 5.5, мы имеем $\mathcal{F}_{A'}=\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$. Запишем последний потенциал, как в Главе 5.

Ограничение $\mathcal{F}_{A'}$ на инвариантное подпространство группового действия задается ограничением $t_{1,1}=t_{1,2}=t_{1,4}=t_{1,5}=0$, $t_{2,1}=t_{2,2}=0$. Положим также $t_{1,3}=t_2$ и $t_{3,1}=t_3$.

Ограничение на id–сектор $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ задается ограничением $t_{1,1}=t_{2,1}=t_{3,1}=t_2$ и $t_{4,1}=t_3$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{A'}^G&=t_3^2t_2^2\left(-\frac{w}{96}+\frac{x^2}{96}+\frac{xy}{48}-\frac{y^2}{48}\right)+t_2^4\left(-\frac{w}{576}-\frac{x^2}{576}-\frac{xy}{288}+\frac{y^2}{288}\right)\\
&+t_3^3t_2\left(\frac{rx}{36}+\frac{ry}{36}\right)+t_3^4\left(-\frac{w}{64}+\frac{x^2}{192}+\frac{xy}{96}-\frac{y^2}{96}\right)+\frac{1}{2}t_6t_2^2+\left(\frac{t_1^2}{12}+\frac{t_3^2}{4}\right)t_1,\\
\mathcal{F}_{f_{A'},G}^{\mathrm{id}}&=t_2^4g_{4,0,0,0}\left(t_6\right)+3t_3t_2^3g_{3,0,0,1}\left(t_6\right)+3t_2^2t_3^2\left(g_{2,0,0,2}\left(t_6\right)+g_{2,0,1,1}\left(t_6\right)\right)\\
&+t_3^3t_2\left(3g_{1,0,0,3}\left(t_6\right)+6g_{1,0,1,2}\left(t_6\right)+g_{1,1,1,1}\left(t_6\right)\right)\\
&+t_3^4\left(3g_{0,0,0,4}\left(t_6\right)+6g_{0,0,1,3}\left(t_6\right)+3g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)+3g_{0,1,1,2}\left(t_6\right)\right)\\
&+\frac{1}{2}t_6t_1^2+\frac{1}{4}t_1t_2^2+\frac{3}{4}t_1t_3^2.
\end{aligned}$$

Приравнивая $\mathcal{F}_{f_{A'},G}^{\mathrm{id}}(t_1,t_2,t_3,t_6)=3\cdot\mathcal{F}_{A'}^G(t_1,t_2,t_3,t_6/3)$ получаем

$$\begin{aligned}
g_{0,1,1,2}\left(t_6\right)&=-g_{0,0,0,4}\left(t_6\right)-2g_{0,0,1,3}\left(t_6\right)-g_{0,0,2,2}\left(t_6\right)\\
&-\frac{1}{64}w\left(\frac{t_6}{3}\right)+\frac{1}{96}x\left(\frac{t_6}{3}\right)y\left(\frac{t_6}{3}\right)+\frac{1}{192}x\left(\frac{t_6}{3}\right)^2-\frac{1}{96}y\left(\frac{t_6}{3}\right)^2,\\
g_{1,1,1,1}\left(t_6\right)&=-3g_{1,0,0,3}\left(t_6\right)-6g_{1,0,1,2}\left(t_6\right)\\
&+\frac{1}{12}r\left(\frac{t_6}{3}\right)x\left(\frac{t_6}{3}\right)+\frac{1}{12}r\left(\frac{t_6}{3}\right)y\left(\frac{t_6}{3}\right),\\
g_{2,0,1,1}\left(t_6\right)&=-g_{2,0,0,2}\left(t_6\right)-\frac{1}{96}w\left(\frac{t_6}{3}\right)+\frac{1}{48}x\left(\frac{t_6}{3}\right)y\left(\frac{t_6}{3}\right)\\
&+\frac{1}{96}x\left(\frac{t_6}{3}\right)^2-\frac{1}{48}y\left(\frac{t_6}{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

$$g_{4,0,0,0}(t_6) = -\frac{1}{192}w\left(\frac{t_6}{3}\right) - \frac{1}{96}x\left(\frac{t_6}{3}\right)y\left(\frac{t_6}{3}\right) - \frac{1}{192}x\left(\frac{t_6}{3}\right)^2 + \frac{1}{96}y\left(\frac{t_6}{3}\right)^2,$$
$$g_{3,0,0,1}(t_6) = 0.$$

и у нас осталось 5 неизвестных функций $g_{0,0,0,4}(t_6)$, $g_{0,0,1,3}(t_6)$, $g_{0,0,2,2}(t_6)$, $g_{1,0,0,3}(t_6)$, $g_{1,0,1,2}(t_6)$ и $g_{2,0,0,2}(t_6)$.

Уравнение WDVV можно решить явно, получив два решения:

$$g_{0,0,0,4}(t_6) = -\frac{11}{2592} + O\left(q^2\right),\ g_{0,0,1,3}(t_6) = -\frac{1}{324} + O\left(q^2\right),$$
$$g_{0,0,2,2}(t_6) = -\frac{1}{54} + O\left(q^2\right),\ g_{1,0,0,3}(t_6) = -\frac{4}{27}q + O\left(q^2\right),$$
$$g_{1,0,1,2}(t_6) = \frac{2}{9}q + O\left(q^2\right),\ g_{2,0,0,2}(t_6) = O\left(q^2\right),$$

и

$$g_{0,0,0,4}(t_6) = -\frac{1}{96} + O\left(q^2\right),\ g_{0,0,1,3}(t_6) = O\left(q^2\right),$$
$$g_{0,0,2,2}(t_6) = O\left(q^2\right),\ g_{1,0,0,3}(t_6) = O\left(q^2\right),$$
$$g_{1,0,1,2}(t_6) = O\left(q^2\right),\ g_{2,0,0,2}(t_6) = O\left(q^2\right).$$

где $q = \exp(t_6)$.

Первое решение дает

$$\mathcal{F}_{f_{A'},G} = \frac{1}{2}t_6t_1^2 + \frac{1}{4}t_1\sum_{k=1}^{4}t_{k,1}^2 - \frac{1}{96}\left(t_{1,1}^4 + t_{1,2}^4 + t_{2,1}^4 + t_{2,2}^4\right) + t_{1,1}t_{1,2}t_{2,1}t_{2,2}e^{t_6} + O(q^2).$$

Отсюда следует, что полученный потенциал удовлетворяет всем условиям теоремы 5.3 и, следовательно, совпадает с потенциалом $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$.

Второе решение также принимает вид, как указано выше, после линейной замены переменных. $t_{1,1} \mapsto t_{1,1}$, $t_{3,1} \mapsto t_{2,1}/3 + 2t_{4,1}/3 - 2t_{3,1}/3$, $t_{3,2} \mapsto -2t_{2,1}/3 + t_{3,1}/3 + 2t_{4,1}/3$, $t_{3,3} \mapsto -2t_{2,1}/3 - 2t_{3,1}/3 - t_{4,1}/3$. Это означает, что $M^{\infty}_{\widetilde{E}_8,K_3}$ определено однозначно с точностью до изоморфизма.

Решив уравнение WDVV мы можем записать потенциал $\mathcal{F}_{\widetilde{E}_8,K_3}(\mathbf{v})$ в явном виде. В данном случае он будет записан через набор квазимодулярных функций выше. Однако, мы полагаем, что проще использовать зеркальную теорему и соответствующую замену координат, чтобы получить $\mathcal{F}_{\widetilde{E}_8,K_3}(\mathbf{v})$ из потенциала $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}$.

6.5. Соотношения в кольце квазимодулярных форм

В Разделе 6.4 мы доказали, что Теорема 6.1 справедлива для пар $(\widetilde{E}_7, G^D)$ и $(\widetilde{E}_7, K_3)$. Мы также нашли потенциалы $\mathcal{F}^{\infty}_{\widetilde{E}_7,G^D}(\mathbf{v})$ и $\mathcal{F}^{\infty}_{\widetilde{E}_7,K_3}(\mathbf{v})$ явно. Однако, из Теоремы 5.3 следует, что в координатах $\mathbf{t}$ эти потенциалы совпадают с потенциалом многообразия Дубровина-Фробениуса $\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}$.

Записывая $\mathcal{F}^{\infty}_{\widetilde{E}_7,G^D}(\mathbf{t})$ в координатах $\mathbf{t}$, имеем

$$\begin{aligned}4\cdot\mathcal{F}^{\infty}_{\widetilde{E}_7,G^D}(\mathbf{t}) = &\frac{1}{2}t_6t_1^2+\frac{1}{4}t_1\sum_{k=1}^{4}t_{k,1}^2+\frac{1}{16}y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2 t_{1,1}t_{2,1}t_{3,1}t_{4,1}\\ &+\frac{1}{2\cdot 64}\left(-w\left(\frac{t_6}{4}\right)+x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\right)\sum_{i,j=1}^{4}t_{i,1}^2t_{j,1}^2\\ &+\frac{1}{384}\left(-3w\left(\frac{t_6}{4}\right)-x\left(\frac{t_6}{4}\right)^2-y\left(\frac{t_6}{4}\right)^2\right)\sum_{k=1}^{4}t_{k,1}^4.\end{aligned}$$

Теорема зеркальной симметрии 6.1 даёт, что $4\cdot\mathcal{F}^{\infty}_{\widetilde{E}_7,G^D}(\mathbf{t}) = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{2,2,2,2}}(\mathbf{t})$. Записывая последний потенциал, как в Главе 5, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}f_1^{\mathrm{ST}}(q^4)=\frac{1}{384}\left(-3w(q)-x(q)^2-y(q)^2\right),\\ &f_0^{\mathrm{ST}}(q^4)=\frac{1}{16}y(q)^2,\ f_2^{\mathrm{ST}}(q^4)=-\frac{1}{32}w(q).\end{aligned}$$

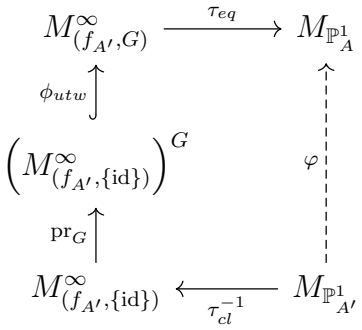
для x, y, w как в Разделе 6.4.2.1. Это дает нам нетривиальное соотношение между квазимодулярными формами $E_2(q)$ и $\theta_k(q)$:

$$\begin{aligned}&E_2(q)-E_2(-q)=\frac{1}{8}\theta_2(q^4)^4,\\ &E_2\left(q^2\right)=\frac{1}{2}E_2(q)+\frac{1}{2}\theta_2\left(q^2\right)^4+\frac{1}{2}\theta_3\left(q^2\right)^4.\end{aligned}$$

Ниже мы рассмотрим это явление более подробно.

6.5.1. Объединение зеркальных изоморфизмов. Пусть τ_{eq} и τ_{cl} обозначают зеркальные изоморфизмы Теоремы 6.1 и Теоремы 5.5 соответственно. Обозначим через ϕ_{utw} вложение аксиомы сектора единицы и pr_G проекцию на G–инварианты.

Рассмотрим следующую диаграмму.



Данная диаграмма не позволяет получить отображение $\varphi : M_{\mathbb{P}_{A'}} \to M_{\mathbb{P}^1_A}$, поскольку таким образом φ определяется лишь на подмногообразии $M_{\mathbb{P}_{A'}}$. На примерах $(\widetilde{E}_7, K_2)$ и $(\widetilde{E}_6, K_1)$ показано, что, будучи рассмотрено на этом подмногообразии, φ нетривиально.

В частности, φ дает нам *различные* описания одних и тех же разложений в ряд Фурье корреляционных функций $M_{\mathbb{P}^1_A}$. С точки зрения орбифолдов Ландау–Гинзбурга мы имеем две различные пары $(f_{A'}, G)$ и $(f_{A'}, \{\mathrm{id}\})$. Однако определенные подмногообразия в $M^{\infty}_{(f_{A'},G)}$ и $M^{\infty}_{(f_{A'},\{\mathrm{id}\})}$ оказываются изоморфными одному и тому же подмногообразию в $M_{\mathbb{P}^1_A}$. Записывая композицию этих изоморфизмов явно в координатах, мы получаем определенные тождества в кольце (квази)модулярных форм.

6.5.2. Пара $A' = (4,4,2)$, $G = K_2$. Для упрощения обозначений рассмотрим $f_{A'} = x^4 + y^4 + z^2 - c^{-1}xyz$ и $K_2 = \langle g \rangle$ вместе с $g(x,y,z) = (-x, y, -z)$.

6.5.2.1. *Часть 1: зеркальное отображение τ_{eq}.* Пусть $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ — потенциал многообразия Дубровина-Фробениуса пары $(\tilde{E}_7, G_y)$. Это функция

$$v_{\mathrm{id},0}, v_{\mathrm{id},-1}, v_{\mathrm{id},x^2}, v_{\mathrm{id},y}, v_{\mathrm{id},y^2}, v_{\mathrm{id},y^3} \quad \text{и } v_{g,1}, v_{g,2}, v_{g,3}.$$

Пусть $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$ — потенциал многообразия Дубровина-Фробениуса $\mathbb{P}^1_A = \mathbb{P}^1_{4,4,2}$. Это функции от

$$t_0, t_{-1},\ t_{1,1}, t_{1,2}, t_{1,3}\ t_{2,1}, t_{2,2}, t_{2,3},\ t_{3,1}.$$

Изоморфизм $\tau_{eq} : M^{\infty}_{f_{A'},G} \cong M_{\mathbb{P}^1_A}$ Теоремы 6.1 задается формулами:

$$t_{1,k} = v_{\mathrm{id},y^k} + v_{g,k},\ t_{2,k} = v_{\mathrm{id},y^k} - v_{g,k}, \quad 1 \le k \le 3$$

$$t_{3,1} = v_{\mathrm{id},x^2},$$

$$t_1 = v_{\mathrm{id},0} \quad t_{-1} = 2v_{\mathrm{id},-1},$$

так, что $2\mathcal{F}_{f_{A'},G}(v(\mathbf{t})) = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$.

Отображения ϕ_{utw} задаются ограничением $v_{g,1} = v_{g,2} = v_{g,3} = 0$, а $\left(M^{\infty}_{(f_{A'},\{\mathrm{id}\})}\right)^G$ является подмногообразием Дубровина–Фробениуса с потенциалом $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}$, который вплоть до пятого порядка по $v_\bullet$ имеет вид (здесь мы снова используем явные формулы потенциала многообразия Дубровина-Фробениуса $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$, как в Разделе 6.4.2.1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G} = {} & \frac{1}{2}v_{\mathrm{id},-1}v_0^2 + v_0\left(\frac{v_{x^2}^2}{8} + \frac{v_y v_{y^3}}{4} + \frac{v_{y^2}^2}{8}\right) + \frac{v_y^2 v_{y^2}}{8}\left(\theta_2(q^{16})^2 + \theta_3(q^{16})^2\right) + \frac{v_{x^2}v_y^2}{8}\theta_2(q^8)^2 \\
& - \left(\frac{E_2\left(q^{32}\right)}{12} - \frac{E_2\left(q^{16}\right)}{24} + \frac{E_2\left(q^8\right)}{48}\right)\left(v_{x^2}^2 v_y v_{y^3} + \frac{v_{x^2}^2 v_{y^2}^2}{2} + \frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{4} + v_y^2 v_{y^3}^2 + v_y v_{y^2}^2 v_{y^3}\right) \\
& - \theta_2(q^{16})^4\left(\frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{192} + \frac{v_y^2 v_{y^3}^2}{64} + \frac{v_y v_{y^3} v_{y^2}^2}{32}\right) + \theta_2(q^{16})^2\theta_3(q^{16})^2\left(\frac{v_{x^2}^2 v_{y^2}^2}{16} + \frac{v_y^2 v_{y^3}^2}{32} + \frac{v_y v_{y^3} v_{y^2}^2}{16}\right) \\
& + \theta_3(q^{16})^4\left(\frac{v_{x^2}^2 v_y v_{y^3}}{16} + \frac{v_{x^2}^2 v_{y^2}^2}{32} + \frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{96} + 3\frac{v_y^2 v_{y^3}^2}{64} + \frac{v_y v_{y^2}^2 v_{y^3}}{32}\right) \\
& + \theta_2(q^8)^2\left(\theta_2(q^{16})^2 + \theta_3(q^{16})^2\right)\frac{v_{x^2}v_y v_{y^2} v_{y^3}}{16} + \text{слагаемые старшего порядка.}
\end{aligned}$$

6.5.2.2. *Часть 2: зеркальное отображение* τ_{cl}. Имеем $A' = A$. Зеркальное отображение τ_{cl} Теоремы 5.5 задается формулой

$$\begin{aligned}
& t_{1,k} = v_{x^k},\ t_{2,k} = v_{y^k}, \quad 1 \le k \le 3, \\
& t_{3,1} = v_z, \\
& t_1 = v_0,\ t_{-1} = v_{-1},
\end{aligned}$$

так, что $\mathcal{F}_{f_{A'}}(v(\mathbf{t})) = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$.

Отображение pr_G задается ограничением $v_x = v_{x^3} = v_z = 0$, а $\left(M^{\infty}_{f_{A'}}\right)^G$ является подмногообразием Дубровина–Фробениуса с потенциалом $\mathcal{F}^G_{f_{A'}}$, который вплоть до пятого порядка по $v_\bullet$ записывается как

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^G_{f_{A'}} = {} & \frac{1}{2}v_{\mathrm{id},-1}v_0^2 + v_0\left(\frac{v_{x^2}^2}{8} + \frac{v_y v_{y^3}}{4} + \frac{v_{y^2}^2}{8}\right) + \frac{v_{x^2}v_y^2}{8}\theta_2(q^8)^2 + \frac{v_y^2 v_{y^2}}{8}\theta_3(q^8)^2 \\
& - \left(\frac{E_2(q^{16})}{24} - \frac{E_2(q^8)}{48} + \frac{E_2(q^4)}{96}\right)\left(v_{x^2}^2 v_y v_{y^3} + \frac{v_{x^2}^2 v_{y^2}^2}{2} + \frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{4} + v_y^2 v_{y^3}^2 + v_y v_{y^2}^2 v_{y^3}\right) \\
& - \theta_2(q^8)^4\left(\frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{192} + \frac{v_y^2 v_{y^3}^2}{64} + \frac{v_{x^2}^2 v_y v_{y^3}}{32}\right) + \theta_3(q^8)^2\theta_2(q^8)^2\frac{v_{x^2}v_y v_{y^2} v_{y^3}}{16} \\
& + \theta_3(q^8)^4\left(\frac{v_{x^2}^2 v_y v_{y^3}}{32} + \frac{v_{x^2}^2 v_{y^2}^2}{64} + \frac{v_{x^2}^4 + v_{y^2}^4}{384} + \frac{v_y^2 v_{y^3}^2}{64}\right) + \text{слагаемые старшего порядка.}
\end{aligned}$$

6.5.2.3. *Сравнение.* В силу аксиомы инвариантного сектора $M^{\infty}_{(f_{A'},G)}$, мы должны рассматривать $\mathcal{F}^{G}_{f_{A'}} \equiv \mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f_{A'},G}$ как равенство формальных степенных рядов. В силу имеющегося у нас свойства квазиоднородности, это эквивалентно сравнению коэффициентов при $v_\bullet$ данных потенциалов, рассматриваемых как ряды Фурье по q. Это сводится к следующим равенствам.

$$v_y^2 v_{y^2}: \quad \theta_2(q^{16})^2 + \theta_3(q^{16})^2 = \theta_3(q^8)^2, \tag{6.31}$$

$$v_{x^2}^3 v_{y^3}^2: \quad \theta_2(q^8)^5 = 4\theta_2(q^8)\theta_2(q^{16})^2\theta_3(q^{16})^2. \tag{6.32}$$

Эти два равенства известны как формулы двойного аргумента для тета–констант Якоби. Важно заметить, что эти равенства следуют из нашей зеркальной теоремы. Проверяя другие мономы (их всего 26), мы не получаем никаких других независимых равенств в этом случае.

6.5.3. Пара $\widetilde{E}_6$, $G = K_1$. Для упрощения обозначений рассмотрим $f = x^3 + y^3 + z^3 - c^{-1}xyz$ и $K_1 = \langle g \rangle$.

6.5.3.1. *Часть 1: зеркальное отображение τ_{eq}.* Пусть $\mathcal{F}_{f_{A'},G}$ — потенциал многообразия Дубровина-Фробениуса пары $(\tilde{E}_6, K_1)$. Это функция от

$$v_{\mathrm{id},0}, v_{\mathrm{id},-1}, v_{\mathrm{id},x}, v_{\mathrm{id},x^2} \quad \text{и } v_{g,1}, v_{g,2}, v_{g^2,1}, v_{g^2,2}.$$

Пусть $\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$ — потенциал многообразия Дубровина-Фробениуса $\mathbb{P}^1_A = \mathbb{P}^1_{3,3,3}$. Это функции от

$$t_0, t_{-1},\ t_{1,1}, t_{1,2}\ t_{2,1}, t_{2,2},\ t_{3,1}, t_{3,2}.$$

Изоморфизм $\tau_{eq} : M^{\infty}_{f_{A'},G} \cong M_{\mathbb{P}^1_A}$ Теоремы 6.1 задается формулами:

$$t_{p,k} = v_{\mathrm{id},x^k} + \mathbf{e}\left[\frac{p(k-1)}{3}\right] v_{g,k} + \mathbf{e}\left[\frac{p(1-k)}{3}\right] v_{g^2,k}, \quad 1 \le k \le 2,\ 1 \le p \le 3,$$
$$t_1 = v_{\mathrm{id},0} \quad t_{-1} = 3v_{\mathrm{id},-1},$$

так, что $3\mathcal{F}_{f_{A'},G}(v(\mathbf{t})) = \mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_A}$.

Отображения ϕ_{utw} задаются ограничением $v_{g,1} = v_{g,2} = v_{g^2,1} = v_{g^2,2} = 0$, а $\left(M^{\infty}_{(f_{A'},\{\mathrm{id}\})}\right)^G$ является подмногообразием Дубровина–Фробениуса с потенциалом $\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f,G}$, который вплоть до пятого порядка по $v_\bullet$ записывается какГе

$$\mathcal{F}^{\mathrm{id}}_{f,G} = \frac{1}{2}v_0^2 v_{-1} + \frac{1}{3}v_0 v_{\mathrm{id},z} v_{\mathrm{id},z^2} + \left(\frac{1}{18}\theta_2\left(q^{18}\right)\theta_2\left(q^{54}\right) + \frac{1}{18}\theta_3\left(q^{18}\right)\theta_3\left(q^{54}\right) + \frac{\eta\left(q^{27}\right)^3}{3\eta\left(q^9\right)}\right) v_{\mathrm{id},x^2}^3$$
$$+ \left(-\frac{1}{16}E_2\left(q^{27}\right) - \frac{1}{48}E_2\left(q^9\right) + \frac{1}{18}\theta_2\left(q^{18}\right)^2\theta_2\left(q^{54}\right)^2 + \frac{1}{18}\theta_3\left(q^{18}\right)^2\theta_3\left(q^{54}\right)^2 \right.$$

$$+\frac{1}{9}\theta_2\left(q^{18}\right)\theta_2\left(q^{54}\right)\theta_3\left(q^{18}\right)\theta_3\left(q^{54}\right)+\frac{\eta\left(q^{27}\right)^6}{2\eta\left(q^9\right)^2}$$
$$+\frac{\eta\left(q^{27}\right)^3\theta_2\left(q^{18}\right)\theta_2\left(q^{54}\right)}{6\eta\left(q^9\right)}+\frac{\eta\left(q^{27}\right)^3\theta_3\left(q^{18}\right)\theta_3\left(q^{54}\right)}{6\eta\left(q^9\right)}\Bigg)v_{\mathrm{id},x}^2v_{\mathrm{id},x^2}^2$$

$+$ слагаемые старшего порядка.

6.5.3.2. *Часть 2: зеркальное отображение τ_{cl}.* Здесь $A'=A$. Зеркальное отображение τ_{cl} Теоремы 5.5 задается формулой

$$t_{1,k}=v_{x^k},\ t_{2,k}=v_{y^k},\ t_{3,k}=v_{z^k}\quad 1\le k\le 3,$$
$$t_1=v_0,\ t_{-1}=v_{-1},$$

так, что $\mathcal{F}_{f_{A'}}(v(\mathbf{t}))=\mathcal{F}_{\mathbb{P}^1_{A'}}$.

Отображение pr_G задается ограничением $v_y=v_{y^2}=v_z=v_{z^2}=0$, а $\left(M^\infty_{f_{A'}}\right)^G$ является подмногообразием Дубровина–Фробениуса с потенциалом $\mathcal{F}^G_{f_{A'}}$, который вплоть до пятого порядка по $v_\bullet$ выписывается как

$$\mathcal{F}^G_{f_{A'}}=\frac{1}{2}v_0^2v_{-1}+\frac{1}{3}v_0v_xv_{x^2}+\left(-\frac{1}{48}E_2\left(q^9\right)-\frac{1}{144}E_2\left(q^3\right)\right)v_x^2v_{x^2}^2$$
$$\left(\frac{1}{18}\theta_2\left(q^6\right)\theta_2\left(q^{18}\right)+\frac{1}{18}\theta_3\left(q^6\right)\theta_3\left(q^{18}\right)\right)v_{x^2}^3$$
$$+\text{ слагаемые старшего порядка.}$$

6.5.3.3. *Сравнение.* Действуя, как в разделе выше, после некоторого упрощения получаем следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\left(E_2(q)-9E_2\left(q^9\right)\right)+3\left(\theta_2\left(q^6\right)\theta_2\left(q^{18}\right)+\theta_3\left(q^6\right)\theta_3\left(q^{18}\right)\right)^2$$
$$+\theta_2\left(q^2\right)^2\theta_2\left(q^6\right)^2+2\theta_2\left(q^2\right)\theta_3\left(q^2\right)\theta_3\left(q^6\right)\theta_2\left(q^6\right)+\theta_3\left(q^2\right)^2\theta_3\left(q^6\right)^2=0$$
$$-\frac{6\eta\left(q^9\right)^3}{\eta\left(q^3\right)}+\theta_2\left(q^6\right)\left(\theta_2\left(q^2\right)-\theta_2\left(q^{18}\right)\right)+\theta_3\left(q^6\right)\left(\theta_3\left(q^2\right)-\theta_3\left(q^{18}\right)\right)=0$$

Эти два равенства можно легко проверить с помощью компьютера вплоть до любого порядка переменной q. Они могут быть известны экспертам, но мы не нашли их ни в одном учебнике. Проверяя другие мономы, мы не получаем в этом случае никаких других независимых соотношений.

ГЛАВА 7

Теория FJRW и гипотеза о Калаби–Яу / Ландау–Гинзбург соответствии

Пусть $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ обозначает компактификацию Делиня–Мамфорда пространства модулей стабильных кривых. Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство со спариванием η. Когомологическая теория поля (КогТП для краткости) $\Lambda_{g,n}$ на (V,η) — это система линейных отображений

$$\Lambda_{g,n} : V^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}),$$

удовлетворяющая определенному набору аксиом для всех g, n, таких, что $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ существует и непусто.

Изучение КогТП было инициировано физиками, которые выделили некоторые особые классы КогТП, которые играют важную роль в зеркальной симметрии. Это КогТП Саито–Гивенталя изолированной особенности (задающая Б–модель) и КогТП Громова–Виттена многообразия Калаби–Яу (задающая А–модель). Другой тип КогТП А–модели, предположенный в физике и позже построенный математиками (см. [**FJR13**]), теперь известен под названием теории FJRW, связанной с орбифолдом Ландау–Гинзбурга (f, G). Заметим, что в данной теории требуется, чтобы $\mathrm{j}_f \in G$

Важным инструментом при работе с КогТП является действие группы Гивенталя, определенное на пространстве всех статсумм КогТП на фиксированном (V,η) . Рассмотрим $R = \exp(\sum_{l=1} r_l z^l)$, такие, что

$$r(z) = \sum_{l\geq 1} r_l z^l \in \mathrm{Hom}(V,V) \otimes \mathbb{C}[z],$$

и $r(z) + r(-z)^* = 0$, где звездочка означает двойственность по отношению η. А.Б. Гивенталь определил процедуру квантования, сопоставляющую оператору R как выше дифференциальный оператор $\widehat{R}$ и доказал (см. [**G01**]), что такие дифференциальные операторы задают действие группы на пространстве статсумм КогТП на (V,η). Такое действие называется R–действием Гивенталя.

Одной из гипотез зеркальной симметрией является гипотеза о соответствии Калаби–Яу/Ландау–Гинзбург (для краткости CY/LG): *пусть* $\mathcal{Z}^{GW}$ *и* $\mathcal{Z}^{FJRW}$

являются статсуммами A–моделей, являющихся зеркальными партнерами одной и той же Б–модели. Тогда существует элемент группы Гивенталя R и линейная замена переменных $\hat{S}$, такие, что

$$\mathcal{Z}^{FJRW} = \hat{S} \cdot \hat{R} \cdot \mathcal{Z}^{GW}.$$

Данная гипотеза была решена в [**PS16**] для *зеркальной квинтики*. Важные шаги для ее решения были сделаны в [**SZ18**], однако, без явно предложенного оператора R.

Основная теорема данной главы дает решение гипотезы о CY/LG соответствии для теории FJRW орбифолда Ландау–Гинзбурга $(x_1^4+x_2^4+x_3^2, G_f)$ и теории Громова–Виттена $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$. Определим

$$R^\sigma(z) := \exp(\begin{pmatrix} 0 & \dots & \sigma \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z), \qquad \sigma = -\frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}{2\pi^2}.$$

Теорема 7.1. *Потенциал рода нуль $\mathcal{F}_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}$ теории FJRW $(x_1^4 + x_2^4 + x_3^2, G_f)$ совпадает с точностью до линейной замен координат с потенциалом рода нуль $\hat{R}^\sigma \cdot \mathcal{Z}^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$.*

Заметим, что пункт (iii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии моментально следует из данной теоремы так как линейная замена координат является изоморфизмом многообразий Дубровина–Фробениуса.

Данная теорема является также полезной для изучения теории FJRW. В частности, вычисление даже потенциала рода нуль теории FJRW является сложной задачей. Наш метод доказательства приведенной выше теоремы дает явное выражение всего потенциала многообразия Дубровина–Фробениуса теории FJRW $(x_1^4 + x_2^4 + x_3^2, G_f)$.

Теория FJRW лучше всего изучена для максимальных групп $G = G_f$. Для групп отличных от максимальных, вычисления данных теорий является сложным. Насколько нам известно, работа автора [**B23**] является единственным примером такого вычисления. В данной работе само изучение теорий FJRW делается посредством решения гипотезы о CY/LG соответствии.

Результаты данной главы основаны на работе [**BP18**].

7.1. Определение теории FJRW

Сначала мы представим теорию FJRW, описывая фазовое пространство и пространство модулей W-структур вместе с их виртуальным классом см. [**FJR13**].

Будем рассматривать лишь теории FJRW орбифолдов Ландау–Гинзбурга (f, G_f) квазиоднородных особенностей с максимальной группой симметрий.

7.1.1. Фазовое пространство. Для квазиоднородной многочлена с приведенными весами квазиоднородности $q_1, \dots, q_N$ будем обозначать $\mathrm{j} := (q_1, \dots, q_N) \in G_f$.

Зафиксируем некоторые обозначения. Для всякого $h \in G_f$ пусть $f_h^{+\infty} := (\mathrm{Re} f^h)^{-1}(\rho, \infty)$, $\rho \gg 0$ будет так называемым слоем Милнора f^h.

Определим

$$\mathcal{H}_h := H^{N_h}(\mathrm{Fix}(h), f_h^{+\infty}; \mathbb{C})^G, \tag{7.1}$$

то есть G-инвариантные элементы относительных когомологий $\mathrm{Fix}(h)$ средней градуировки. Фазовое пространство является прямой суммой "секторов" $\mathcal{H}_h$, то есть

$$\mathcal{H}_{W,G} := \bigoplus_{h \in G} \mathcal{H}_h.$$

Пусть $G^{nar} = \{h \in G \mid N_h = 0\}$. Эти слагаемые $\mathcal{H}_h$ для $h \in G^{nar}$ являются так называемыми *узкими* секторами.

$\mathcal{H}_{W,G}$ имеет $\mathbb{Q}$-градуировку по W-степени. Чтобы определить эту градуировку, для всякого $h \in G_f$ обозначим через Θ_k^h рациональные числа, такие, что

$$h = (\Theta_1^h, \dots, \Theta_N^h)$$

и $0 \le \Theta_k^h < 1$.

Определим для всякого $h \in G_f$ число $\iota(h) \in \mathbb{Q}$

$$\iota(h) := \sum_{k=1}^{N} (\Theta_k^h - q_k).$$

W-степень элемента $\alpha_h \in \mathcal{H}_h$ определяется как

$$\deg_W(\alpha_h) := N_h + 2\iota(h). \tag{7.2}$$

Сектор, индексированный элементом j, является одномерным и имеет W-степень 0.

Поскольку $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h^{-1})$ существует невырожденное спаривание

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{H}_h \times \mathcal{H}_{h^{-1}} \to \mathbb{C},$$

спаривание вычетов f^h, которое индуцирует симметричное невырожденное спаривание

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{H}_{f,G_f} \times \mathcal{H}_{f,G_f} \to \mathbb{C}.$$

7.1.2. Модули W-кривых. Напомним, что *n-помеченная орбифолдная кривая* — это орбифолдная кривая с не более чем нодальными особенностями и нетривиальной орбифолдной структурой только в отмеченных или нодальных точках. Потребуем, также, чтобы нодальные точки были *сбалансированными*, в том смысле, что действие генератора группы стабилизатора $\mathbb{Z}_k$ задавалось как

$$(x, y) \mapsto (e^{2\pi \mathrm{i}/k} x, e^{-2\pi \mathrm{i}/k} y).$$

Для данной кривой $\mathcal{C}$ пусть ω будет ее дуализирующим пучком. Тогда *log-каноническое расслоение* — это

$$\omega_{\log} := \omega(p_1 + \cdots + p_n)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что для каждого $h \in G_f$, $h^d = \mathrm{id}$. В общем случае это не так, но это упрощает изложение и достаточно для рассматриваемых нами примеров.

Корреляторы FJRW были впервые определены в [**FJR13**], но мы будем следовать немного иной трактовке, данной в [**CR10**], где также показано, что два определения согласуются. Причина нашего выбора в том, что [**CR10**] позволяет нам использовать формализм Гивенталя для определения корреляторов FJRW.

d-устойчивая кривая — это связная орбифолдная кривая $\mathcal{C}$ рода g с n различными гладкими отмеченными точками $p_1, \ldots, p_n$, такими, что

(i) подлежащая n-точечная кривая $|\mathcal{C}|$ является стабильной, и

(ii) все стабилизаторы в нодальных и отмеченных точках имеют порядок d.

Параметризующее такие кривые пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,d}$ является гладким стэком Дэлиня–Мамфорда и имеет размерность $3g - 3 + n$. Данное пространство отличается от пространства модулей стабильных кривых только стабилизаторами над нормальными пересечениями (см. [**CR10**]).

Мы можем записать f как сумму мономов $f = f_1 + \cdots + f_s$, где $f_i = c_i \prod_{k=1}^{N} x_k^{a_{ik}}$ с $a_{ik} \in \mathbb{N}$ и $c_i \in \mathbb{C}$. Рассматривая линейные расслоения $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N$ на d-устойчивой кривой $\mathcal{C}$, мы определяем линейное расслоение

$$W_i(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N) := \bigotimes_{k=1}^{N} \mathcal{L}_k^{\otimes a_{ik}}.$$

Определение. *W-структура* состоит из данных

$$(\mathcal{C}, p_1, \ldots, p_n, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N, \varphi_1, \ldots \varphi_N),$$

где $\mathcal{C}$ - n-точечная d-устойчивая кривая, $\mathcal{L}_k$ - линейные расслоения на $\mathcal{C}$, удовлетворяющие

$$f_i(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N) \cong \omega_{\log},$$

и для каждого k, $\varphi_k : \mathcal{L}_k^{\otimes d} \to \omega_{\log}^{w_k}$ является изоморфизмом линейных расслоений.

Существует стек модулей W-структур, обозначаемый как $\mathcal{W}_{g,n}$ (см. [**FJR07**], [**CR10**] для построения). [1]

Предложение 7.2 ([**CR10**]). *Стек $\mathcal{W}_{g,n}$ непуст тогда и только тогда, когда $n > 0$ или $2g-2$ является положительным кратным d. Это правильный, гладкий стек Делиня-Мамфорда размерности $3g-3+n$. Он является этальным над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n,d}$ степени $|G_f|^{2g-1+n}/d^N$.*

Пусть $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ с $h_i = (\Theta_1^i, \ldots, \Theta_N^i)$. Определим $\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})$ как множество n-точечных, W-кривых рода g, для которых генератор группы изотропии в p_j действует на $\mathcal{L}_k$ умножением на $e^{2\pi \mathrm{i}\, \Theta_k^j}$. Мы можем записать $\Theta_k^j = m_k^j/d$ для некоторого целого числа $0 \leq m_k^j < d$, которое мы называем кратностью $\mathcal{L}_k$ в p_j и обозначаем через $\mathrm{mult}_{p_i} \mathcal{L}_k$. Следующее предложение описывает разложение $\mathcal{W}_{g,n}$ в терминах кратностей:

Предложение 7.3 ([**CR10, FJR13**]). *$\mathcal{W}_{g,n}$ можно выразить как непересекающееся объединение*

$$\mathcal{W}_{g,n} = \coprod \mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h}).$$

Более того, $\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$h_i \in G_f,\ i = 1, \ldots, n$$

$$q_k(2g-2+n) - \sum_{i=1}^{n} \Theta_k^i \in \mathbb{Z}, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Обозначим универсальную кривую как $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{W}_{g,n,G}(\mathbf{h})$, а универсальную W-структуру как $(\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_N)$.

7.1.3. Аксиомы теории FJRW. Для каждого $\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})$ определён *виртуальный цикл* (см. [**FJR13**], [**FJR07**])

$$[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir} \in H_*(\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h}), \mathbb{Q}) \otimes \prod_{i=1}^{n} H_{N_{h_i}}(\mathrm{Fix}(h_i), W_{h_i}^{+\infty}; \mathbb{C})^G$$

который удовлетворяет следующим аксиомам:

[1] Это определение немного отличается от [**FJR07**], поскольку только изоморфизмы ϕ_k являются частью данных. Но в [**CR10**] показано, что определения согласуются.

FJR 1 (Степень). Виртуальный цикл имеет степень

$$2\left((\hat{c}-3)(1-g)+n-\sum_{i=1}^{n}\iota(h_i)\right).$$

В частности, если это число не является целым, то $[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}=0$.

FJR 2 (Степень линейного расслоения). Степень расслоения $|\mathcal{L}_k|$

$$q_k(2g-2+n)-\sum_{i=1}^{n}\Theta_k^{h_i}$$

должна быть целым числом (как в Предложении 7.3), в противном случае $[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}=0$.

FJR 3 (S_n–инвариантность). Для любого $\sigma\in S_n$ имеем

$$[\mathcal{W}_{g,n}(h_1,\dots,h_n)]^{vir}=[\mathcal{W}_{g,n}(h_{\sigma(1)},\dots,h_{\sigma(n)})]^{vir}.$$

FJR 4 (Инвариантность деформации). Пусть $f_t\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_N]$ — семейство невырожденных квазиоднородных многочленов, гладко зависящих от вещественного параметра $t\in[a,b]$. Предположим, что G — общая группа симметрий f_t. Тогда соответствующие пространства W-структур естественно изоморфны, а виртуальный цикл $[\mathcal{W}_{g,n}(h_1,\dots,h_n)]^{vir}$, связанный с (f_t,G), не зависит от t.

FJR 5 (G_f-инвариантность). Существует естественное G_f действие на $H_*(\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h}),\mathbb{Q})$ и $H_{N_{h_i}}(\mathrm{Fix}(h_i),f_{h_i}^{+\infty};\mathbb{C})^G$. Виртуальный цикл $[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}$ инвариантен относительно индуцированного действия G_f на тензорное произведение.

FJR 6 (Выпуклость). Предположим, что $h_i\in G^{nar}$ для всех i. Если $\pi_*\left(\bigoplus_{k=1}^{N}\Upsilon_k\right)=0$, то виртуальный класс задается как

$$[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}=c_{top}\left(\left(R^1\pi_*\bigoplus_{k=1}^{N}\Upsilon_k\right)^{\vee}\right)\cap[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]$$

а $\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})$ называется *выпуклым*.

Есть несколько других аксиом, которые удовлетворяются $[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}$, которые сложнее сформулировать (ср. [**FJR13**]), поэтому мы не будем перечислять их здесь. Они показывают, например, что виртуальный класс хорошо ведет себя по отношению к разрезанию вдоль нодальных точек, гарантируя, что теория FJRW определяет когомологическую теорию поля.

7.2. Когомологические теории поля на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

Кратко напомним некоторые основные факты о когомологических теориях поля, определённых в [**KM94**].

7.2.1. Аксиомы когомологической теории поля. Пусть (V,η) — конечномерное векторное пространство с невырожденным спариванием. Рассмотрим систему линейных отображений

$$\Lambda_{g,n} : V^{\otimes n} \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}),$$

определённую для всех g,n таких, что $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ существует и непусто. Набор $\Lambda_{g,n}$ называется *когомологической теорией поля над* (V,η) или КогТП, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

CFT 1 (S_n инвариантность). $\Lambda_{g,n}$ является эквивариантной относительно S_n-действия, переставляющего множители в тензорном произведении и нумерацию отмеченных точек $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

CFT 2 (Склейка дерева). Для морфизма склеивания $\rho : \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$ имеем:

$$\rho^*\Lambda_{g_1+g_2,n_1+n_2} = (\Lambda_{g_1,n_1+1} \cdot \Lambda_{g_2,n_2+1}, \eta^{-1}),$$

где мы сворачиваем с η^{-1} множители V, которые соответствуют нодальной точке в прообразе ρ.

CFT 3 (Склейка петли). Для морфизма склеивания $\sigma : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g+1,n}$ имеем:

$$\sigma^*\Lambda_{g+1,n} = (\Lambda_{g,n+2}, \eta^{-1}),$$

где мы сворачиваем с η^{-1} множители V, которые соответствуют нодальной точке в прообразе σ.

Далее мы также предполагаем, что КогТП $\Lambda_{g,n}$ имеет *единицу* — т.е. существует фиксированный вектор $\mathbf{1} \in V$, называемый *единицей*, такой, что выполняются следующие аксиомы.

U 1. Для каждого $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ имеем: $\eta(\alpha_1, \alpha_2) = \Lambda_{0,3}(\mathbf{1} \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2)$.

U 2. Пусть $\pi : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ — отображение, забывающее последнюю отмеченную точку, тогда:

$$\pi^*\Lambda_{g,n}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \Lambda_{g,n+1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \otimes \mathbf{1}).$$

Другим важным свойством КогТП является понятие квазиоднородности. КогТП $\Lambda_{g,n}$ на (V,η) называется *квазиоднородной*, если векторное пространство V градуировано $\deg : V \to \mathbb{Q}$ и существует число $\hat{c}$, такое, что для любого $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(\alpha_i) = \hat{c} + n + g - 3$$

всякий раз, когда $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n} \neq 0$. Число $\hat{c}$ называется *центральным зарядом*.

В дальнейшем мы будем обозначать КогТП просто как Λ, а не как $\Lambda_{g,n}$, если это не приводит к двусмысленности.

Пусть $\psi_i \in H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, $1 \leq i \leq n$ будут так называемыми ψ-классами. n-точечными корреляторами КогТП рода g, являются следующие числа:

$$\langle \tau_{a_1}(e_{\alpha_1}) \dots \tau_{a_n}(e_{\alpha_n}) \rangle_{g,n}^{\Lambda} := \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \Lambda_{g,n}(e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}) \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}_g$ производящую функцию корреляторов рода g, называемую потенциалом рода g КогТП:

$$\mathcal{F}_g := \sum \frac{\langle \tau_{a_1}(e_{\alpha_1}) \dots \tau_{a_n}(e_{\alpha_n}) \rangle_{g,n}^{\Lambda}}{\mathrm{Aut}(\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a}\})} \, t^{a_1,\alpha_1} \dots t^{a_n,\alpha_n}.$$

Полезно собрать корреляторы в производящую функцию, называемую статсуммой КогТП

$$\mathcal{Z} := \exp\left(\sum\nolimits_{g \geq 0} \hbar^{g-1} \mathcal{F}_g \right).$$

Мы также будем использовать, так называемый, *примарный* потенциал рода g, который является функцией переменных $t^\alpha := t^{0,\alpha}$, определяемый следующим образом:

$$F_g := \mathcal{F}_g \mid_{t^\alpha := t^{0,\alpha},\ t^{l,\alpha}=0, \forall l \geq 1}.$$

Ограничение $t^{l,\alpha} = 0, \forall l \geq 1$ также называют *ограничением на малое фазовое пространство*.

7.2.2. КогТП теории FJRW и теории Громова–Виттена. В пространстве всех когомологических теорий поля существуют некоторые специальные теории, называемые также иногда “геометрическими”. К ним относятся теория FJRW и теория GW.

Рассмотрим теорию FJRW пары (f, G_f). Её пространство модулей W-структур снабжено виртуальным циклом $[\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir}$, как было объяснено в разделе 7.1.3.

Определено отображение $s : \mathcal{W}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, забывающее W–структуру кривой. Пусть $\alpha_i \in \mathcal{H}_{h_i}$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Определим

$$\Lambda^{FJRW}_{g,n}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{|G|^g}{\deg s} PDs_*\Big([\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})]^{vir} \cap \prod_{i=1}^{n} \alpha_i\Big). \tag{7.3}$$

Здесь PD обозначает двойственный по Пуанкаре класс.

Теорема 7.4 (Теорема 4.2.2 в [**FJR13**]). *Для любой пары (f, G_f) система отображений $\Lambda^{FJRW}_{g,n}$ определяет на $\mathcal{H}_{f,G}$ КогТП с единицей.*

В дальнейшем мы просто обозначаем через $\mathcal{Z}^{(f,G)}$ и $\mathcal{F}^{(f,G)}_g$ статсумму и потенциал рода g КогТП выше для фиксированной пары (f, G). Как следствие свойств виртуального цикла $[\mathcal{W}_{g,n}]^{vir}$, эти функции также удовлетворяют некоторым дополнительным свойствам в дополнение к тем, которые являются общими для всех КогТП.

Второй важный класс КогТП задается теориями Громова–Виттена. Пусть $\mathcal{X}$ будет орбифолдом и $\beta \in H_2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$. Фазовым пространством данной КогТП является $V = H^*_{orb}(\mathcal{X})$. Рассматривая $s : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X}, \beta) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, забывающее само стабильное отображение, мы получаем КогТП, связанную с $\mathcal{X}$ и фиксированным классом β.

$$\Lambda^{GW}_{g,n,\beta} := \frac{1}{\deg s} PDs_*\Big([\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathcal{X}, \beta)]^{vir} \cap \prod_{i=1}^{n} ev_i^*(\alpha_i)\Big).$$

Обозначим через $\mathcal{Z}^{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{F}^{\mathcal{X}}_g$ статсумму и потенциал рода g такой КогТП1.

7.2.3. Реконструкция в роде ноль. Часто бывает полезно иметь возможность выразить все корреляторы данной КогТП через корреляторы некоторого конечного списка. Обычно это называют процедурой *реконструкции*.

В силу топологии пространства $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$, потенциал малого фазового пространства КогТП на (V, η) удовлетворяет уравнению WDVV (см. Раздел 5.1). Таким образом, трёхточечные корреляторы рода нуль наделяют V структурой ассоциативной и коммутативной алгебры $e_i \circ e_j := \sum_{p,k} \langle e_i, e_j, e_p \rangle_{0,3} \cdot \eta^{p,k} \cdot e_k$.

Определение. Вектор $\gamma \in V$ называется *примитивным*, если не существует $\gamma_1, \gamma_2 \in V$, таких, что $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$ и $0 < \deg(\gamma_1) \leq \deg(\gamma_2) < \deg(\gamma)$. Мы называем коррелятор $\langle \dots \rangle_{0,n}$ *простым*, если он включает не более двух непримитивных вставок.

Следующая лемма будет использована в дальнейшем.

Лемма 7.5 (Лемма 6.2.8 в [**FJR13**]). *Зафиксируем квазиоднородную КогТП на* (V, η).

Если $\deg(\alpha) \leq \hat{c}$ *для всех векторов* $\alpha \in V$, *то все корреляторы нулевого рода однозначно определяются* η *и* n*–точечными корреляторами нулевого рода с:*

$$n \leq 2 + \frac{1+\hat{c}}{1-P}, \quad P := \max_{\substack{v \in V \\ v \text{ примитивен}}} \deg(v).$$

Доказательство этой леммы основано на анализе уравнения WDVV квазиоднородной КогТП.

7.2.4. Корреляторы FJRW для $\tilde{E}_7$. Рассмотрим многочлен $f = x^4 + y^4 + z^2$, задающий особенность $\tilde{E}_7$. Многочлен f является квазиоднородным с весами $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{1}{4}$ и $q_3 = \frac{1}{2}$. Группа G_f порождается элементами $\rho_1 := (q_1, 0, 0)$, $\rho_2 := (0, q_2, 0)$ и $\rho_3 := (0, 0, q_3)$. Тогда $\mathrm{j}_f = \rho_1\rho_2\rho_3$.

Несложно увидеть, что в этом случае только узкие элементы группы вносят вклад в фазовое пространство. Кроме того, по (7.1) мы видим, что $\mathcal{H}_h$ является одномерным, когда $h \in G^{nar}$. В этом случае мы обозначаем генератор $\mathcal{H}_h$ через ϕ_h. При ϕ_h, определенном выше, множество $\{\phi_h\}_{h \in G^{nar}}$ определяет базис $\mathcal{H}_{W,G}$, т.е. мы имеем

$$\mathcal{H}_{f,G} := \bigoplus_{\substack{1 \leq a \leq 3 \\ 1 \leq b \leq 3}} \mathbb{C} \cdot \phi_{\rho_1^a \rho_2^b \rho_3}.$$

Спаривание задаётся следующими значениями:

$$\langle \phi_{h_1}, \phi_{h_2} \rangle := \begin{cases} 1 & \text{если } h_1 = (h_2)^{-1} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующее предложение было доказано в [**CR10**], [**CIR14**], [**PS16**].

Предложение 7.6. *Теория FJRW рода нуль для* $(\tilde{E}_7, G_f)$ *является выпуклой.*

А именно, каждое $\mathcal{W}_{g,n}(\mathbf{h})$ удовлетворяет условию выпуклости. Таким образом, по аксиоме выпуклости мы можем заменить виртуальный класс фундаментальным классом, умноженным на старший класс Черна линейного расслоения.

Потенциал рода 0 теории FJRW записывается в переменных $\tilde{t}_{ab}$, для $1 \leq a \leq 3$ и $1 \leq b \leq 3$, соответствующих векторам $\phi_{\rho_1^a \rho_2^b \rho_3}$. Единицей соответствующей КогТП будет ϕ_{j}. Таким образом, переменная $\tilde{t}_{11}$ соответствует единице КогТП для $(\tilde{E}_7, G_f)$.

Используя аксиомы FJR 1–FJR 6 (см. также [**MS16**, Section 3.3]), получаем следующее выражение для потенциала малого фазового пространства рода нуль

$(\tilde{E}_7, G_f)$:

$$F_0^{\tilde{E}_7,G_f} = \frac{\tilde{t}_{11}^2\tilde{t}_{33}}{2} + \tilde{t}_{11}\left(\tilde{t}_{21}\tilde{t}_{23} + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{32} + \tilde{t}_{13}\tilde{t}_{31} + \frac{\tilde{t}_{22}^2}{2}\right) + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21}\tilde{t}_{22}$$
$$+ \frac{\tilde{t}_{12}^2\tilde{t}_{31}}{2} + \frac{\tilde{t}_{21}^2\tilde{t}_{13}}{2} - \tilde{t}_{33}\left(\frac{\tilde{t}_{21}^2\tilde{t}_{31}}{8} + \frac{\tilde{t}_{12}^2\tilde{t}_{13}}{8}\right) + O(\tilde{\mathbf{t}}_+^4, \tilde{t}_{33}),$$

где $\tilde{\mathbf{t}}_+$ — набор всех координат, кроме $\tilde{t}_{33}$.

Мы можем перефразировать Лемму 7.5 следующим образом.

Лемма 7.7 (Лемма 3.6 в [**MS16**] и Теорема 3.4 в [**KS92**]). *Используя уравнение WDVV, все примарные корреляторы рода* 0 *теории FJRW* $(\tilde{E}_7, G_f)$ *однозначно определяются структурой алгебры FJRW и простыми* 4*-точечными корреляторами, которые имеют ровно одну вставку* $\rho_1^3\rho_2^3\rho_3$.

Замечание 7.1. Из Леммы 7.7 и доказательства Леммы 7.5 немедленно следует, что потенциал рода 0 удовлетворяет $F_0^{\tilde{E}_7,G_f} \in \mathbb{Q}[[t]]$, поскольку все «первичные» данные рациональны, и уравнение WDVV не вносит никаких иррациональностей.

7.3. CY/LG соответствие через модулярность

Рассмотрим матрицу $A^{CY/LG}$:

$$A^{CY/LG} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Theta} & -\frac{\pi\Theta}{2} \\ \frac{1}{\pi\Theta} & \Theta \end{pmatrix}, \quad \Theta := \frac{\sqrt{2\pi}}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}.$$

Основным утверждением этого раздела является следующая теорема.

Теорема 7.8. *Пусть* $F_0^{(\tilde{E}_7,G_f)}$ *и* $F_0^{\mathbb{P}_{4,4,2}}$ *будут примарными потенциалами рода* 0 *теории FJRW* $(\tilde{E}_7, G_f)$ *и теории GW* $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$ *соответственно. Тогда имеем:*

$$F_0^{(\tilde{E}_7,G_f)}(\tilde{\mathbf{t}}) = A^{CY/LG} \cdot F_0^{\mathbb{P}_{4,4,2}}(\mathbf{t}),$$

где матрица $A^{CY/LG}$ *действует как в Теореме 5.1 и* $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t})$ *— следующая линейная замена переменных:*

$$t_{1,1} = \mathsf{i}\sqrt{2}\left(\tilde{t}_{12} - \tilde{t}_{21}\right),\ t_{1,2} = -\tilde{t}_{13} + \sqrt{2}\tilde{t}_{22} - \tilde{t}_{31},\ t_{1,3} = \mathsf{i}\sqrt{2}\left(\tilde{t}_{23} - \tilde{t}_{32}\right),$$
$$t_{2,1} = \sqrt{2}\left(\tilde{t}_{12} + \tilde{t}_{21}\right),\ t_{2,2} = \tilde{t}_{13} + \sqrt{2}\tilde{t}_{22} + \tilde{t}_{31},\ t_{2,3} = \sqrt{2}\left(\tilde{t}_{23} + \tilde{t}_{32}\right),$$
$$t_{3,1} = \mathsf{i}\left(\tilde{t}_{13} - \tilde{t}_{31}\right),$$
$$t_0 = \tilde{t}_{11},\ t_{-1} = \tilde{t}_{33}.$$

Более того, примарный потенциал $F_0^{(\tilde{E}_7,G_f)}(\tilde{\mathbf{t}})$ *голоморфен на*

$$\mathbb{C}^9 \times \left\{\tilde{t}_{33} \in \mathbb{C} \mid |\tilde{t}_{33}| < |\pi\Theta^2|\right\}$$

и имеет разложение в ряд с рациональными коэффициентами.

Вместе с явными формулами для потенциалов рода 0 малого фазового пространства теории GW эллиптических орбифолдов, анонсированных в [**B18**], эта теорема даёт явную замкнутую формулу для потенциала FJRW пары $(\tilde{E}_7, G_f)$. Например, справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}
F_0^{\tilde{E}_7,G_f} &= \frac{1}{2}\tilde{t}_{11}^2\tilde{t}_{33} + \tilde{t}_{11}\left(\frac{\tilde{t}_{22}^2}{2} + \tilde{t}_{21}\tilde{t}_{23} + \tilde{t}_{13}\tilde{t}_{31} + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{32}\right) - \tilde{t}_{12}^2\tilde{t}_{13}\left(\frac{\tilde{t}_{33}}{8} + \frac{\tilde{t}_{33}^5}{61440}\right)\\
&+\tilde{t}_{21}^2\tilde{t}_{31}\left(-\frac{\tilde{t}_{33}}{8} - \frac{\tilde{t}_{33}^5}{61440}\right) + \tilde{t}_{13}\tilde{t}_{21}^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{t}_{33}^4}{3072} + \frac{\tilde{t}_{33}^8}{330301440}\right)\\
&+\tilde{t}_{12}^2\tilde{t}_{31}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{t}_{33}^4}{3072} + \frac{\tilde{t}_{33}^8}{330301440}\right)\\
&+\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21}\tilde{t}_{22}\left(1 + \frac{\tilde{t}_{33}^2}{32} + \frac{\tilde{t}_{33}^4}{6144} + \frac{\tilde{t}_{33}^6}{327680} + \frac{289\tilde{t}_{33}^8}{2642411520}\right) + O(\tilde{t}_{33}^9, \tilde{\mathbf{t}}_+^4)
\end{aligned}$$

для $\tilde{\mathbf{t}}_+ = \mathbf{t}\backslash\tilde{t}_{33}$.

7.3.1. Групповое действие по формальной переменной. Прежде чем доказать Теорему 7.8, сделаем несколько приготовлений. В дальнейшем нам придётся детально работать с потенциалом рода 0 орбифолда $\mathbb{P}^1_{4,4,2}$. Обозначим для удобства

$$x(t) := \mathbf{z}_0^{(4)}(t),\ y(t) := \mathbf{z}_1^{(4)}(t),\ z(t) := \mathbf{z}_2^{(4)}(t),\ w(t) := \mathbf{z}_3^{(4)}(t).$$

и аналогично для $x(q), \ldots, w(q)$, где $\mathbf{z}_k^{(4)}$ были введены в Разделе 5.2.2.

Следующее предложение впервые появилось в [**SZ17**] в несколько иной форме.

Предложение 7.9 (Раздел 3.2.3 из [**SZ17**]). *Рассмотрим* $x(q)$, $y(q)$ *и* $w(q)$ *как функции* $t = t_{-1}$, *взяв* $q = \exp(t_{-1})$. *Уравнение WDVV на* $F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$ *эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}x(t) &= x(t)\left(2y(t)^2 - x(t)^2 + w(t)\right),\\
\frac{\partial}{\partial t}y(t) &= y(t)\left(2x(t)^2 - y(t)^2 + w(t)\right),\\
\frac{\partial}{\partial t}w(t) &= w(t)^2 - x(t)^4.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Следующее предложение объясняет рассматриваемое нами $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-действие.

Предложение 7.10. *Рассмотрим $x(q)$, $y(q)$ и $w(q)$ как функции $t = t_{-1}$, взяв $q = \exp(t_{-1})$. Имеем:*

(i) *для любого $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ функции $x^A(t)$, $y^A(t)$ и $w^A(t)$ определяемые*

$$x^A(t) := \frac{1}{(ct+d)} x\left(\frac{at+b}{ct+d}\right),$$
$$y^A(t) := \frac{1}{(ct+d)} y\left(\frac{at+b}{ct+d}\right),$$
$$w^A(t) := \frac{1}{(ct+d)^2} w\left(\frac{at+b}{ct+d}\right) - \frac{c}{ct+d},$$

задают решение (7.4).

(ii) *Потенциал $A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$ получается из $F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$ путем подстановки:*

$$\{x(t_{-1}), y(t_{-1}), z(t_{-1})\} \to \{x^A(t_{-1}), y^A(t_{-1}), z^A(t_{-1})\}.$$

Доказательство. Часть (i) легко доказывается с помощью Предложения 7.9, а часть (ii) немедленно следует из определения $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-действия на примарный потенциал (см. Теорему 5.1) и явной формы $F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$. □

Следующее предложение будет использовано позже.

Предложение 7.11. *Для любых $\alpha \in \mathbb{C}^*$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ имеем*

$$\big(\alpha x(\alpha^2 t)\big)^A = x^{A'}(t),\ \big(\alpha y(\alpha^2 t)\big)^A = y^{A'}(t),\ \big(\alpha^2 w(\alpha^2 t)\big)^A = w^{A'}(t),$$

где $A' = \begin{pmatrix} a\cdot\alpha & b\cdot\alpha \\ c/\alpha & d/\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $x(t)$, $y(t)$ и $w(t)$ дают решение (7.4), то $\hat{x}(t) := \alpha x(\alpha^2 t)$, $\hat{y}(t) := \alpha y(\alpha^2 t)$, $\hat{w}(t) := \alpha^2 w(\alpha^2 t)$ также являются решением (7.4), поэтому мы можем рассмотреть действие A из Предложения 7.10.

Действительно,

$$\begin{aligned}\big(\alpha x(\alpha^2 t)\big)^A &= \frac{\alpha}{(ct+d)} x\left(\alpha^2 \cdot \frac{at+b}{ct+d}\right) \\ &= \frac{1}{(\frac{c}{\alpha}t + \frac{d}{\alpha})} x\left(\frac{\alpha a t + \alpha b}{\frac{c}{\alpha}t + \frac{d}{\alpha}}\right) = x^{A'}(t).\end{aligned}$$

Те же вычисления легко выполнить для остальных функций. □

В дальнейшем мы рассмотрим явные значения функций ϑ_k и воспользуемся их голоморфностью. Для таких целей удобно записывать их не как q-разложения,

а как голоморфные функции на $\mathbb{H}$. Формальная переменная t_{-1} для этих целей не подходит. Поэтому рассмотрим замены переменных $q = \exp\left(\frac{2\pi \mathsf{i}\tau}{4}\right)$. Это эквивалентно применению замены переменных $t_{-1} = 2\pi\mathsf{i}\tau/4$, упомянутой ранее. Применение ее к потенциалу $F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$ изменит члены, определяющие спаривание. По этой причине мы уделяем особое внимание этой замене переменных.

7.3.2. Групповое действие через модулярные формы. Зафиксировав некоторую ветвь квадратного корня, обозначим $\kappa := \sqrt{2\pi\mathsf{i}/4}$. Теперь введем новые функции

$$x^\infty(\tau) := \kappa \cdot x(q(\tau)), \quad y^\infty(\tau) := \kappa \cdot y(q(\tau)),$$
$$z^\infty(\tau) := \kappa \cdot z(q(\tau)), \quad w^\infty(\tau) := \kappa^2 \cdot w(q(\tau)),$$

Для любых $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$ рассмотрим функции $x^{(\tau_0,\omega_0)}$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}$ и $z^{(\tau_0,\omega_0)}$:

$$x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) := \frac{2\mathsf{i}\omega_0 \mathrm{Im}(\tau_0)}{(2\mathsf{i}\omega_0^2 \mathrm{Im}(\tau_0) - \tau)} x^\infty\left(\frac{2\mathsf{i}\omega_0^2\tau_0\mathrm{Im}(\tau_0) - \bar{\tau}_0\tau}{2\mathsf{i}\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0) - \tau}\right),$$

с $y^{(\tau_0,\omega_0)}$, $z^{(\tau_0,\omega_0)}$, определенными аналогично, а также

$$w^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) := \frac{\left(2\mathsf{i}\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)\right)^2}{\left(2\mathsf{i}\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0) - \tau\right)^2} w^\infty\left(\frac{2\mathsf{i}\omega_0^2\tau_0\mathrm{Im}(\tau_0) - \bar{\tau}_0\tau}{2\mathsf{i}\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0) - \tau}\right) - \frac{1}{(2\mathsf{i}\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0) - \tau)}.$$

Замечание 7.2. Введенные функции имеют смысл с точки зрения модулярных форм; они являются разложениями (квази)модулярных форм $x(\tau)$, $y(\tau)$ и $w(\tau)$ в точке $\tau = \tau_0$ (см. Предложение 17 в [**Z08**]).

Предложение 7.12. *Зафиксируем некоторые $\tau_0 \in \mathbb{H}$ и $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Имеем:*

(i) *Функции $x^{(\tau_0,\omega_0)}$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}$, $w^{(\tau_0,\omega_0)}$ дают решения для* (7.4).

(ii) *Функции $x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $z^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $w^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$ голоморфны на:*

$$D^{(\tau_0,\omega_0)} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| < |2\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0)|\}.$$

(iii) *Рассмотрим* SL*-действие на $x(t_{-1})$ как в Предложении 7.10. Имеем:*

$$(x(\tau))^{(\tau_0,\omega_0)} = (x(t_{-1}))^A,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathsf{i}\kappa\bar{\tau}_0}{2\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \kappa\omega_0\tau_0 \\ \dfrac{\mathsf{i}}{2\kappa\omega_0\mathrm{Im}(\tau_0)} & \dfrac{\omega_0}{\kappa} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Часть (i) легко проверяется явным дифференцированием и определением функций $x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $w^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$. Часть (ii) следует из того факта, что тета-константы являются голоморфными функциями на $\mathbb{H}$.

Для части (iii) сначала отметим, что действие Предложения 7.10 более общее. Его можно применить к любому решению (7.4). Остальное следует из Предложения 7.11. □

Замечание 7.3. Действие $x^\infty \to x^{(\tau_0,\omega_0)}$ можно рассматривать как действие, изменяющее примитивную форму Б–модели. Применив это действие на стороне Б, мы получаем КогТП простой эллиптической особенности $\tilde{E}_7$ с примитивной формой "в τ_0" (см. [**BT14, MR11, B18**]).

7.3.3. Доказательство Теоремы 7.8. Прежде всего, отметим, что замена переменных Теоремы 7.8 идентифицирует два спаривания. Также ясно, что действие любого $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ не изменяет корреляторы, имеющие вставку единичного вектора КогТП.

Применяя линейную замену переменных $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t})$, данную в теореме, к $A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$, получаем:

$$\begin{aligned} A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}}) &= \frac{1}{2}\tilde{t}_{11}^2\tilde{t}_{33} + \tilde{t}_{11}\left(\tilde{t}_{21}\tilde{t}_{23} + \tilde{t}_{13}\tilde{t}_{31} + \tilde{t}_{12}\tilde{t}_{32} + \frac{\tilde{t}_{22}^2}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{t}_{21}^2\left(C_1(\tilde{t}_{33})\cdot\tilde{t}_{13} + C_2(\tilde{t}_{33})\cdot\tilde{t}_{31}\right) + \frac{1}{2}\tilde{t}_{12}^2\left(C_2(\tilde{t}_{33})\cdot\tilde{t}_{13} + C_1(\tilde{t}_{33})\cdot\tilde{t}_{31}\right) \\ &+ \sqrt{2}\left(x^A(\tilde{t}_{33}) + y^A(\tilde{t}_{33})\right)\tilde{t}_{12}\tilde{t}_{21}\tilde{t}_{22} + O(\tilde{t}_{i,k}^4, \tilde{t}_{11}) \end{aligned}$$

для $C_1(\tilde{t}_{33}) := x^A(\tilde{t}_{33}) - y^A(\tilde{t}_{33}) + z^A(\tilde{t}_{33})$ и $C_2(\tilde{t}_{33}) := x^A(\tilde{t}_{33}) - y^A(\tilde{t}_{33}) - z^A(\tilde{t}_{33})$.

Лемма 7.13. *Равенство формальных рядов* $A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}}) = F_0^{\tilde{E}_7,G_f}(\tilde{\mathbf{t}})$ *удовлетворяется, если и только если*

$$A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}}) - F_0^{\tilde{E}_7,G_f}(\tilde{\mathbf{t}}) \in O(\tilde{t}_{i,k}^4, \tilde{t}_{11}).$$

Доказательство. Прямая импликация очевидна, докажем обратную. Прежде всего отметим, что потенциал $A \cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}})$ удовлетворяет тому же свойству квазиоднородности, что и потенциал $F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}})$. Далее легко видеть, что замена переменных $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t})$ сохраняет свойство квазиоднородности.

Вспомним лемму о реконструкции рода нуль Раздела 7.2.3. Равенство выше гарантирует, что структура алгебры в начале координат совпадает с обеих сторон. Следовательно, понятие примитивных векторов совпадает с обеих сторон.

Следовательно, условия Леммы 7.5 совпадают для обоих потенциалов. Для теории FJRW эти условия были записаны в Лемме 7.7 ровно такими же, как описано в настоящей лемме. □

Однако для доказательства теоремы нам необходимо использовать явные значения функций и, следовательно, работать с «модулярной» переменной $\tau \in \mathbb{H}$.

Лемма 7.14. *Пусть* $\tau_0 = \mathsf{i}$ *и* $\omega_0 := \kappa\sqrt{2\pi}/\left(\Gamma(\frac{3}{4})\right)^2$. *Уравнение*

$$A^{CY/LG} \cdot \ F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}}) = F_0^{\tilde{E}_7,G_f}(\tilde{\mathbf{t}})$$

выполняется тогда и только тогда, когда:

$$\begin{aligned} x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) - y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) + z^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) &= 1 + O(\tau^2), \\ x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) - y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) - z^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) &= -\frac{\tau}{4} + O(\tau^2), \\ x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) + y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + O(\tau^2). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Доказательство. Используя лемму выше и лемму реконструкции 7.5, мы видим, что достаточно сравнить потенциалы $F_0^{\tilde{E}_7,G_f}$ и $A\cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}})$ вплоть до $O(\tilde{t}^4_{i,k}, \tilde{t}_{11})$.

Вспомним часть (iii) Предложения 7.12. Заметим, что для τ_0 и ω_0, как в формулировке леммы, матрица A' совпадает с матрицей $A^{CY/LG}$.

Равенства выше получены путем сравнения коэффициентов $F_0^{\tilde{E}_7,G_f}$ и $A\cdot F_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}(\tilde{\mathbf{t}})$. Их правые части берутся из явной формы $F_0^{\tilde{E}_7,G_f}$ (см. Раздел 7.2.4).

Из леммы 7.7 следует, что достаточно проверить эти равенства, чтобы получить совпадение потенциалов. □

В оставшейся части этого раздела мы покажем, что (7.5) удовлетворяется функциями $x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$, $z^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau)$ для τ_0 и ω_0, как в Лемме 7.14.

Обозначим через $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ разложение функций x, y, z с примененной заменой переменных $\tau \to A^{(\tau_0,\omega_0)}\tau$, т.е.

$$\tilde{x}(\tau) := x^\infty\left(\frac{2\mathsf{i}\omega_0^2\tau_0\mathrm{Im}(\tau_0) - \bar{\tau}_0\tau}{2\mathsf{i}\omega_0^2\mathrm{Im}(\tau_0) - \tau}\right),$$

и аналогично для $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. Определим числа x_0, x_1, y_0, y_1 и z_0, z_1 как коэффициенты разложений ряда в $\tau = 0$:

$$\tilde{x} = x_0 + x_1\tau + O(\tau^2), \quad \tilde{y} = y_0 + y_1\tau + O(\tau^2), \quad \tilde{z} = z_0 + z_1\tau + O(\tau^2).$$

Функции $x^{(\tau_0,\omega_0)}$, $y^{(\tau_0,\omega_0)}$, $z^{(\tau_0,\omega_0)}$ удовлетворяют

$$x^{(\tau_0,\omega_0)}(\tau) = \frac{x_0}{\omega_0} + \tau\left(\frac{x_1}{\omega_0} + \frac{x_0}{2\mathsf{i}\omega_0^3\mathrm{Im}(\tau_0)}\right) + O(\tau^2).$$

Для $p \in \{2,3,4\}$ наряду с тета-константами Якоби рассмотрим их логарифмические производные — функции, голоморфные на $\mathbb{H}$:

$$X_p^\infty(\tau) := 2\frac{\partial}{\partial\tau}\log\vartheta_p(\tau).$$

Для явного нахождения коэффициентов воспользуемся следующей формулой.

Лемма 7.15. *Производные функций x, y, z удовлетворяют:*

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{x}(\tau)\mid_{\tau=0}=\frac{\kappa}{2\omega_0^2}\left(\vartheta_3(\tau_0)^2X_3^\infty(\tau_0)+\vartheta_4(\tau_0)^2X_4^\infty(\tau_0)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{y}(\tau)\mid_{\tau=0}=\frac{\kappa}{2\omega_0^2}\left(\vartheta_3(\tau_0)^2X_3^\infty(\tau_0)-\vartheta_4(\tau_0)^2X_4^\infty(\tau_0)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{z}(\tau)\mid_{\tau=0}=\frac{\kappa}{\omega_0^2}\vartheta_2(\tau_0)^2X_2^\infty(\tau_0).$$

Доказательство. Используя формулы двойного аргумента тета-констант Якоби, мы видим:

$$2x\left(q\right)=\vartheta_3(q^4)^2+\vartheta_4(q^4)^2,$$
$$2y\left(q\right)=\vartheta_3(q^4)^2-\vartheta_4(q^4)^2,$$

и все функции $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$ записаны через q^4. Непосредственно из определения $X_k^\infty(\tau)$ и рескалирования переменной получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}x^\infty(\tau)=\frac{\kappa}{2}\left(\vartheta_3(\tau)^2X_3^\infty(\tau)+\vartheta_4(\tau)^2X_4^\infty(\tau)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}y^\infty(\tau)=\frac{\kappa}{2}\left(\vartheta_3(\tau)^2X_3^\infty(\tau)-\vartheta_4(\tau)^2X_4^\infty(\tau)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}z^\infty(\tau)=\kappa\vartheta_2(\tau)^2X_2^\infty(\tau).$$

Остальное следует из определения $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. □

Известно, что значения тета-констант и их логарифмических производных в точке $\tau=\mathsf{i}$ равны:

$$\vartheta_2\left(\mathsf{i}\right)=\frac{\pi^{1/4}}{2^{1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},\quad \vartheta_3\left(\mathsf{i}\right)=\frac{\pi^{1/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},\quad \vartheta_4\left(\mathsf{i}\right)=\frac{\pi^{1/4}}{2^{1/4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$
$$X_2^\infty(\mathsf{i})=\frac{\mathsf{i}\pi^2}{4\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^4}+\frac{\mathsf{i}}{2},\quad X_3^\infty(\mathsf{i})=\frac{\mathsf{i}}{2},\quad X_4^\infty(\mathsf{i})=-\frac{\mathsf{i}\pi^2}{4\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^4}+\frac{\mathsf{i}}{2}.$$

Для $K=\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}$ используя лемму выше, получаем:

$$\kappa^{-1}\tilde{x}(\tau)=\frac{K}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+\tau\frac{K\mathsf{i}}{2\omega_0^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{K^2\pi}{2}\right)\right)+O(\tau^2),$$
$$\kappa^{-1}\tilde{y}(\tau)=\frac{K}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)+\tau\frac{K\mathsf{i}}{2\omega_0^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{K^2\pi}{2}\right)\right)+O(\tau^2),$$
$$\kappa^{-1}\tilde{z}(\tau)=K+\tau\frac{K\mathsf{i}}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi K^2}{2}\right)+O(\tau^2).$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
&\kappa^{-1}\left(x^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)-y^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)+z^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)\right)\\
&\quad=\frac{x_0-y_0+z_0}{\omega_0}+\tau\left(\frac{x_1-y_1+z_1}{\omega_0}+\frac{x_0-y_0+z_0}{2\mathrm{i}\omega_0^3}\right)+O(\tau^2)\\
&\quad=2\frac{K}{\omega_0}+O(\tau^2),\\
&\kappa^{-1}\left(x^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)-y^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)-z^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)\right)\\
&\quad=\frac{x_0-y_0-z_0}{\omega_0}+\tau\left(\frac{x_1-y_1-z_1}{\omega_0}+\frac{x_0-y_0-z_0}{2\mathrm{i}\omega_0^3}\right)+O(\tau^2)\\
&\quad=-\frac{\tau\cdot\pi\mathrm{i}K^3}{\omega_0^3}+O(\tau^2),\\
&\kappa^{-1}\left(x^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)+y^{(\mathrm{i},\omega_0)}(\tau)\right)\\
&\quad=\frac{x_0+y_0}{\omega_0}+\tau\left(\frac{x_1+y_1}{\omega_0}+\frac{x_0+y_0}{2\mathrm{i}\omega_0^3}\right)+O(\tau^2)\\
&\quad=\sqrt{2}\frac{K}{\omega_0}+O(\tau^2).
\end{aligned}$$

Для $\omega_0 = 2K\kappa$, мы получаем точно такие же разложения, как в (7.5). Это завершает доказательство теоремы 7.8.

7.4. Действие Гивенталя и соответствие CY/LG

В этом разделе мы формулируем соответствие CY/LG через групповое действие на пространстве когомологических теорий поля и приводим частное действие, связывающее $\mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}$ и $\mathcal{F}_0^{(\tilde{E}_7,G_f)}$.

7.4.1. Инфинитезимальная версия действия Гивенталя. Определим действие Гивенталя на статсумме КогТП через инфинитезимальное действие, вычисленное в [**L05**]. Пусть $\Lambda_{g,n}$ — КогТП на (V,η) с единицей $e_0 \in V$.

Верхнетреугольная группа состоит из всех элементов $R = \exp(\sum_{l=1} r_l z^l)$, таких что

$$r(z) = \sum_{l\geq 1} r_l z^l \in \mathrm{Hom}(V,V)\otimes\mathbb{C}[z],$$

и $r(z) + r(-z)^* = 0$ (где звездочка означает двойственность по отношению к η). Следуя Гивенталю, мы определяем *квантование* R:

$$\hat{R} := \exp(\sum_{l=1} \widehat{r_l z^l}),$$

где для $(r_l)^{\alpha,\beta} = (r_l)^{\alpha}_{\sigma}\eta^{\sigma,\beta}$ имеем:

$$\widehat{r_l z^l} := -(r_l)^{\alpha}_{1}\frac{\partial}{\partial t^{l+1,\alpha}} + \sum_{d=0}^{\infty} t^{d,\beta}(r_l)^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial}{\partial t^{d+l,\alpha}} + \frac{\hbar}{2}\sum_{i+j=l-1}(-1)^{i+1}(r_l)^{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^{i,\alpha}t^{j,\beta}},$$

Теорема 7.16 ([**G01**]). *Дифференциальный оператор $\hat{R}$ действует на пространстве статсумм КогТП.*

Действие $\hat{R}$ можно также сформулировать на самой КогТП, а не только на ее статсумме (ср. [**PPZ15**]). Мы называем действие дифференциального оператора $\hat{R}$ на статсумме КогТП *R-действием Гивенталя* или верхнетреугольным групповым действием Гивенталя.

Нижнетреугольная группа состоит из всех элементов $S = \exp(\sum_{l=1} s_l z^{-l})$, таких что

$$s(z) = \sum_{l\geq 1} s_l z^{-l} \in \mathrm{Hom}(V,V)\otimes\mathbb{C}[z^{-1}]$$

и $s(z) + s(-z)^* = 0$. Следуя Гивенталю, мы определяем *квантование* S:

$$\hat{S} := \exp(\sum_{l=1}^{\infty}(s_l z^{-l})\hat{}),$$

где

$$\sum_{l=1}^{\infty}(s_l z^{-l})\hat{} = -(s_1)^{\alpha}_{1}\frac{\partial}{\partial t^{0,\alpha}} + \frac{1}{\hbar}\sum_{d=0}^{\infty}(s_{d+2})_{1,\alpha}\, t^{d,\alpha} + \sum_{\substack{d=0\\ l=1}}^{\infty}(s_l)^{\alpha}_{\beta}\, t^{d+l,\beta}\frac{\partial}{\partial t^{d,\alpha}} + \frac{1}{2\hbar}\sum_{\substack{d_1,d_2\\ \alpha_1,\alpha_2}}(-1)^{d_1}(s_{d_1+d_2+1})_{\alpha_1,\alpha_2}\, t^{d_1,\alpha_1}t^{d_2,\alpha_2}.$$

В отличие от $\hat{R}$, действие дифференциального оператора $\hat{S}$ в общем случае [2] не может быть распространено на действие в пространстве всех КогТП. Более того, может случиться, что $\hat{S}\cdot\mathcal{Z}^{\Lambda}$ больше не является статсуммой в нашем определении [3]. Однако для нужд данной работы $\hat{S}\cdot\mathcal{Z}^{\Lambda}$ все еще является статсуммой. В общем случае такие $\hat{S}$, в основном, используются для применения линейной замены переменных, однако, они также могут влиять на 1–точечные и 2–точечные коррелляторы.

[2] См., например, [**PPZ15**, Раздел 1]

[3] Можно рассматривать $\hat{S}$ как действующее в пространстве потенциалов рода ноль, если рассматривать последнее как пространство функций, подчиняющихся уравнению дилатона, струнны и TRR–0.

Мы называем $\hat{S} : \mathcal{Z}^\Lambda \to \hat{S} \cdot \mathcal{Z}^\Lambda$ *нижнетреугольным* групповым действием Гивенталя.

7.4.2. Зеркальная симметрия и соответствие CY/LG. Соответствие CY/LG лучше всего понять, на языке Б–моделей. Это можно сделать используя зеркальную симметрию .

Для изолированной особенности $\tilde{f} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ можно построить, так называемую, КогТП Саито–Гивенталя, которая нетривиально зависит от выбора примитивной формы ζ (см. Раздел 5.1). Пусть $\mathcal{Z}_{\tilde{f},\zeta}$ будет статсуммой этой КогТП.

На языке КогТП зеркальная симметрия CY–LG предполагает, что статсумма $\mathcal{Z}_{\tilde{f},\zeta_\infty}$ при специальном выборе примитивной формы $\zeta = \zeta_\infty$ совпадает со статсуммой теории Громова–Виттена некоторого многообразия Калаби–Яу $\mathcal{X}$ с точностью до линейной замены переменных.

Зеркальная симметрия LG–LG предполагает, что статсумма $\mathcal{Z}_{\tilde{f},\zeta_0}$ с другим специальным выбором примитивной формы $\zeta = \zeta_0$ совпадает со статсуммой теории FJRW некоторой пары (f, G_f) с точностью до, вероятно, линейной замены переменных, где $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ задает a priori другую изолированную особенность.

Тогда говорят, что теория GW орбифолда $\mathcal{X}$ и теория FRJW пары (f, G_f) представляют собой две зеркальные А–модели одной Б–модели $\tilde{f}$, взятой в разных фазах — ζ_∞ и ζ_0. Это привело к следующей гипотезе.

Гипотеза 7.1. *Пусть теория GW орбифолда $\mathcal{X}$ и теория FJRW пары (f, G_f) являются двумя зеркальными А–моделями одной и той же Б–модели. Тогда существует верхнетреугольное действие Гивенталя $R = R(z)$, такое, что*

$$\hat{R} \cdot \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}(\mathbf{t}) = \mathcal{Z}^{(f,G_f)}(\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t})),$$

где $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{t})$ — некоторая линейная замена переменных.

Если верны две гипотезы зеркальной симметрии типа CY–LG и типа LG–LG, гипотеза 7.1 является А–аналогом следующей гипотезы стороны Б:

Гипотеза 7.2. *Существует верхнетреугольный групповой элемент Гивенталя $R = R(z)$, такой, что с точностью до линейной замены переменных справедливо*

$$\hat{R} \cdot \mathcal{Z}_{\tilde{f},\zeta_\infty} = \mathcal{Z}_{\tilde{f},\zeta_0}.$$

В случае простых эллиптических особенностей этот вид действия был исследован в [**MR11, BT14, B18**]. В частности, в [**B18**] было показано, что $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-действие раздела 7.3 имеет, в то же время, смысл замены примитивной формы на

стороне Б. Также данное $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$–действие может быть записано через определенное R-действие Гивенталя. Другими словами, (5.2) может быть реализовано как ограничение определенного действия Гивенталя на малое фазовое пространство.

7.4.3. Доказательство Теоремы 7.1. Для любого $\tau, \sigma \in \mathbb{C}$ рассмотрим элемент нижнетреугольной группы

$$S^\tau(z) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \tau & \dots & 0 \end{pmatrix} z^{-1}\right),$$

и элемент верхнетреугольной группы R^σ:

$$R^\sigma(z) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & \sigma \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z\right).$$

Для любого $c \in \mathbb{C}$ также определим матрицу

$$S_0^c := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & c \cdot I_{n-2} & \vdots \\ 0 & \dots & c^2 \end{pmatrix}.$$

Её действие на $\mathcal{Z}(\mathbf{t})$ (которое мы обозначаем как $\hat{S}_0^c$), определим как

$$t^{l,\alpha} \to (S_0^c)^\alpha_\beta \, t^{l,\beta} \quad \text{и} \quad \hbar \to c^2\hbar.$$

Пусть $\Theta = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2}$, как в Теореме 7.8, определим:

$$\tau := -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma := -\frac{1}{\pi\Theta^2}, \quad c := \frac{1}{\Theta}.$$

Чтобы доказать Теорему 7.1 мы покажем, что

$$\mathcal{F}_0^{(\tilde{E}_7, G_f)} = \mathrm{res}_h \ln\left(\hat{R}^\sigma \cdot \hat{S}_0^c \cdot \hat{S}^\tau \cdot \mathcal{Z}^{\mathbb{P}^1_{4,4,2}}\right)$$

для S^τ, S_0^c и R^σ, определенных выше.

Доказательство. Можно проверить (ср. [**B18**]), что данное действие индуцирует действие из Теоремы 7.8 на примарные потенциалы рода 0. По Теореме 7.8 и Следствию 5.1 из [**B18**] мы видим, что теорема верна для примарных потенциалов. Нам осталось только рассмотреть вопрос расширения на все фазовое пространство — с пси–классами.

Однако, в роде ноль все корреляторы однозначно реконструируются из корреляторов малого фазового пространства посредством топологической рекурсии

в роде ноль (TRR-0). Следовательно, мы можем реконструировать эти коррелляторы на левой части из малого фазового пространства. □

ГЛАВА 8

Заключение

Проделанная в данной диссертации работа оставила довольно большой список открытых вопросов. Мы приведем ниже некоторые из них.

Эквивариантная теория Саито. Одним из основных результатов данной работы было построение многообразия Дубровина–Фробениуса орбифолда Ландау–Гинзбурга. Этот результат открывает широкое поле для деятельности, так как делает возможным рассмотрение гипотезы зеркальной симметрии для Б–моделей с нетривиальной группой симметрий. Мы уверены, что построенное нами многообразие Дубровина–Фробениуса найдет свое применение в данном контексте.

Важно заметить, что нами было построено именно многообразие Дубровина–Фробениуса, а не эквивариантная версия теории Саито, что было бы предпочтительнее. Такая попытка была нами предпринята. Однако, теория Саито строится с помощью развертки особенности, и такую развертку невозможно построить в эквивариантном случае — такая развертка должна задавать уже некоммутативную и G–эквивариантную деформацию особенности, что делает невозможным применение остальных классических объектов теории Саито как, скажем, критического пучка $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$.

Естественным способом построения эквивариантной теории Саито может быть гомологическая алгебра. В частности, Д. Шкляровым в работах [**Sh16, Sh14**] дано гомологическое описание всех элементов теории Саито на языке dg-алгебр. Данный язык позволяет естественно работать с орбифолдами Ландау–Гинзбурга. Мы надеемся применить данные идеи для построение эквивариантной теории Саито.

Вопросы классической теории особенностей. В первой же главе данной работы было предложено изучать орбифолд Ландау–Гинзбурга (f, G) с помощью разрешения особенности $\mathbb{C}^N/G$ и поднятия f в карты разрешения. Нами был предложен и конкретный выбор разрешения - крепантное разрешение. Однако, такой подход работает только для очень ограниченного списка многочленов f. Например, даже для $f = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$ и $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ поднятие в две карты разрешения задается двумя многочленами f_1, f_2, причем оба будут задавать особенности отличные от морсовских. Тогда аргументация Раздела 4.3 уже не может быть применена. Данные

наблюдения ставят естественный вопрос - как связаны эквивариантная теория Саито орбифолда (f, G) и "классическая" теория Саито многочленов $f_1, \ldots, f_k$ полученных поднятием f в разрешение $\mathbb{C}^N/G$.

Категорная эквивалентность, когда она установлена, дает изоморфизм $\mathrm{Jac}(f, G) \cong \mathrm{Jac}(\overline{f})$. Таким образом особенность, задаваемая многочленом $\overline{f}$ получает новую дополнительную структуру — G–градуировку. Заметим, что $\mathrm{Jac}(f, G)$ имеет G–градуировку по построению, следовательно, эта G–градуировка проносится на $\mathrm{Jac}(\overline{f})$. Естественно задать вопрос — какую дополнительную информацию об алгебре Якоби или же особенности $\overline{f}$ приносит эта G–градуировка.

Многообразия Дубровина–Фробениуса. В доказательстве ключевых теорем данной работы — Теоремы 6.1 (для эллиптических случаев) и Теоремы 7.1 важную роль играли квазимодулярные формы. Они были использованы в двух аспектах - для записи потенциалов рода нуль теории Громова–Виттена, а также для решения уравнения WDVV (см. Предложение 7.9). Мы полагаем, что оба эти аспекта являются примерами гораздо более общего явления. В частности, мы предполагаем, что если многообразие X является зеркальной парой орбифолда Ландау–Гинзбурга (f, G) в смысле пункта (ii) Гипотезы глобальной зеркальной симметрии, то потенциал рода нуль теории Громова–Виттена X записывается через функции, квазимодулярные по k парамерам, где k— размерность пространства маргинальных деформаций f.

Доказывая Теорему 7.1 мы рассматривали потенциалы $A \cdot F_0^{\mathbb{P}_{4,4,2}}$ для разных $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Специальный выбор матрицы A был сделан в теореме для того, чтобы получить $F_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}(\tilde{\mathbf{t}}) = A^{CY/LG} \cdot F_0^{\mathbb{P}_{4,4,2}}(\mathbf{t})$. Однако, зеркальная симметрия имеет место только для некоторых специальных точек в пространстве всех многообразий Дубровина–Фробениуса. Поэтому мы предполагаем, что существует $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, такая, что $B \cdot F_0^{(\tilde{E}_7, G_f)} = F_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}$ для всех $B \in \Gamma$.

Более того, мы предполагаем, что с точностью до замены координат $F_0^{(\tilde{E}_7, G_f)}$ — единственный потенциал в орбите $A \cdot F_0^{\mathbb{P}_{4,4,2}}$, $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, такой, что его разложение в ряд имеет только рациональные коэффициенты. Заметим, что это является задачей теории чисел — вопрос рациональности или алгебраической зависимости значений нескольких квазимодулярных форм в данной точке $\mathbb{H}$. Подобного рода вопросы ставились в [**BT14**].

По теме диссертации автором опубликованы следующие работы.

(1) Basalaev A. *Orbifold GW theory as the Hurwitz-Frobenius submanifold* // Journal of Geometry and Physics. 2014. Vol. 77. P. 30–42.

(2) Basalaev A. SL$(2,\mathbb{C})$ *group action on Cohomological field theories* // Letters in Mathematical Physics. 2018. Vol. 108. No. 1. P. 161–183.

(3) Basalaev A. *Integrable systems associated to open extensions of type A and D Dubrovin–Frobenius manifolds* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2022. Vol. 55. No. 29. Article 295202.

(4) Basalaev A. *6-dimensional FJRW theories of the simple-elliptic singularities* // Asian Journal of Mathematics. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 45–80.

(5) Basalaev, A. *On B-type family of Dubrovin–Frobenius manifolds and their integrable systems* Letters in Mathematical Physics Volume 114, article number 120, (2024).

(6) Basalaev A., Takahashi A. *On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries*, J. Geom. Phys. 84 (2014), 73–84.

(7) Basalaev A., Takahashi A., Werner E. *Orbifold Jacobian algebras for exceptional unimodal singularities* // Arnold Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. No. 4. P. 483–498.

(8) Basalaev A., Takahashi A. *Hochschild cohomology and orbifold Jacobian algebras associated to invertible polynomials* // Journal of Noncommutative Geometry, 14(3), 861–877.

(9) Basalaev A., Takahashi A. *Mirror Symmetry for a Cusp Polynomial Landau–Ginzburg Orbifold* // International Mathematical Research Notices. 2022. Vol. 2022. No. 19. P. 14865–14922

(10) Basalaev A., Takahashi A., Werner E. *Orbifold Jacobian algebras*, Journal of Singularities, 26 (2023), 92–127

(11) Basalaev A., Priddis N. *Givental–type reconstruction at a non–semisimple point* // Michigan Mathematical Journal. 2018. Vol. 67. No. 2. P. 333–369.

(12) Basalaev A., Buryak A. *Open WDVV equations and Virasoro constraints* // Arnold Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 2-3. P. 145–186.

(13) Basalaev A., Buryak A. *Open Saito theory for A and D singularities* // International Mathematics Research Notices. 2021. Vol. 2021. No. 7. P. 5460–5491.

(14) Basalaev A., Hertling C. *3-dimensional F-manifolds* // Letters in Mathematical Physics. 2021. Vol. 111. No. 4. Article 90.

(15) Basalaev A., Ionov A. *Mirror map for Fermat polynomials with a nonabelian group of symmetries* // Theoretical and Mathematical Physics. 2021. Vol. 209. No. 2. P. 1491–1506.

(16) Basalaev A., Ionov A. *Hochschild cohomology of Fermat type polynomials with non–abelian symmetries* // Journal of Geometry and Physics. 2022. Vol. 174. Article 104450.

(17) Basalaev, A., Ionov, A. *Hodge Diamonds of the Landau–Ginzburg Orbifolds.* // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 20(0) (2024), 24–25.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах (1), (2), (4), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (16) выше. Для всех работ, написанных в соавторстве, в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Библиография

[Ab08] D. Abramovich, *Lectures on Gromov–Witten invariants of orbifolds*, Lecture Notes in Math. **1947**, Springer, 2008.

[AGV08] D. Abramovich, T. Graber, A. Vistoli, *Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks*, Amer. J. Math. **130** (2008), no. 5, 1337–1398.

[A72] V.Arnold, *Normal Forms of Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups A_k, D_k, E_k*. Functional Anal. Appl 1 (1972).

[AGV85] V. Arnold, A. Gusein-Zade, A. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, vol I Monographs in Mathematics, 82. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985

[B14] A. Basalaev, *Orbifold GW theory as the Hurwitz–Frobenius submanifold*, J. Geom. Phys., 77, 30–42, (2014).

[B15a] A. Basalaev, *Elliptic orbifolds potentials*, Personal homepage, http://basalaev.wordpress.com (2015).

[B18] A. Basalaev, SL$(2,\mathbb{C})$ *group action on cohomological field theories.* Letters in Mathematical Physics 108 (2018): 161-183.

[B22] Basalaev A. *Integrable systems associated to open extensions of type A and D Dubrovin–Frobenius manifolds* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2022. Vol. 55. No. 29. Article 295202.

[B23] Basalaev A. *6-dimensional FJRW theories of the simple-elliptic singularities* // Asian Journal of Mathematics. 2023. Vol. 26. No. 1. P. 45–80.

[B24] Basalaev, A. *On B-type family of Dubrovin–Frobenius manifolds and their integrable systems* Letters in Mathematical Physics Volume 114, article number 120, (2024) doi: 10.1007/s11005-024-01867-z

[BB19] Basalaev A., Buryak A. *Open WDVV equations and Virasoro constraints* // Arnold Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 2-3. P. 145–186.

[BB21] Basalaev A., Buryak A. *Open Saito theory for A and D singularities* // International Mathematics Research Notices. 2021. Vol. 2021. No. 7. P. 5460–5491.

[BH21] Basalaev A., Hertling C. *3-dimensional F-manifolds* // Letters in Mathematical Physics. 2021. Vol. 111. No. 4. Article 90.

[BI21] Basalaev A., Ionov A. *Mirror map for Fermat polynomials with a nonabelian group of symmetries* // Theoretical and Mathematical Physics. 2021. Vol. 209. No. 2. P. 1491–1506.

[BI22] Basalaev A., Ionov A. *Hochschild cohomology of Fermat type polynomials with non–abelian symmetries* // Journal of Geometry and Physics. 2022. Vol. 174. Article 104450.

[BI24] Basalaev A., Ionov A. *Hodge Diamonds of the Landau–Ginzburg Orbifolds.* // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 20(0) (2024), 24–25.

[BP18] A. Basalaev, N. Priddis, *Givental–type reconstruction at a non–semisimple point*, Michigan Math. J., 2018. Vol. 67. No. 2. 333–369, (2018).

[BTW23] A. Basalaev, A. Takahashi, E. Werner, *Orbifold Jacobian algebras for invertible polynomials*, Journal of Singularities, Vol. 26 (2023), 92-127.

[BTW17] A. Basalaev, A. Takahashi, E. Werner, *Orbifold Jacobian algebras for exceptional unimodal singularities*, Arnold Math J. 3, pp. 483–498 (2017).

[BT14] A. Basalaev and A. Takahashi, *On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries*, J. Geom. Phys. **84** (2014), 73–84.

[BT20] A. Basalaev, A. Takahashi, *Hochschild cohomology and orbifold Jacobian algebras associated to invertible polynomials*, Journal of noncommutative geometry, Vol. 14. No. 3. pp. 861–877 (2020).

[BT22] A. Basalaev, A. Takahashi, *Mirror Symmetry for a Cusp Polynomial Landau–Ginzburg Orbifold*, International Mathematical Research Notices. 2022. Vol. 2022. No. 19. P. 14865–14922.

[BK91] D. Bättig, H. Knörrer, *Singularitäten*, LECT NOTES MATH, ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart (1991)

[BHe95] P. Berglund, M. Henningson, *Landau–Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus*. Nuclear Phys. B 433, pp. 311–32 (1995).

[BHu93] P. Berglund, T. Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*. Nuclear Phys. B 393, pp. 377–91 (1993).

[CDloGP91] P. Candelas, X. De La Ossa, P. Green, L. Parkes. *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*. Nucl. Phys. B, 359, 1991, pp. 21–74.

[CRCR16] N. Carqueville, A.R. Camacho, I. Runkel, *Orbifold equivalent potentials*, Journal of Pure and Applied Algebra, 220(2), (2016). 759–781. http://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.07.015

[CIR14] A. Chiodo, H. Iritani and Y. Ruan, *Landau–Ginzburg/Calabi–Yau correspondence, global mirror symmetry and Orlov equivalence*, Publications mathématiques de l'IHÉS **119.1** (2014), 127–216.

[CrR02] A. Craw, M. Reid, *How to calculate A-Hilb* $\mathbb{C}^3$, Séminaires et Congrès, 6 (2002), pp. 129–154

[ChR02] W. Chen, Y. Ruan, *Orbifold Gromov–Witten Theory*, Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), 25–85, Contemp. Math., 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2002).

[CR10] A. Chiodo and Y. Ruan, *Landau–Ginzburg/Calabi–Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations*, Invent. Math. **182** (2010), 117–165.

[CR11] A. Chiodo, Y. Ruan. *A global mirror symmetry framework for the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence*, Annales de l'Institut Fourier. Vol. 61. No. 7. (2011) 2803–2864 .

[ChZ09] A. Chiodo and D. Zvonkine, *Twisted Gromov–Witten r-spin potential and Givental's quantization*, Adv. Theor. Math. Phys. **13(5)** (2009), 1335–1369

[CZ21] X. Chen, A. Zinger. *WDVV-type relations for disk Gromov–Witten invariants in dimension* 6. Mathematische Annalen 379 (2021), no. 3–4, 1231–1313

[D96] B. Dubrovin, *Geometry of 2d topological field theories* (1996), Lecture Notes in Math (pp. 120–348).

[D98] B. Dubrovin, *Painleve' transcendents and two-dimensional topological field theory*, arXiv preprint: math/9803107, (1998).

[ET11] W. Ebeling, A. Takahashi, *Strange duality of weighted homogeneous polynomials*, COMPOS MATH 147, no. 5 (2011): 1413–33.

[ET13] W. Ebeling, A. Takahashi, *Variance of the exponents of orbifold Landau–Ginzburg models*, Math. Res. Lett. **20** (1) (2013), 51–65.

[ET13b] W. Ebeling, A. Takahashi, *Mirror Symmetry between Orbifold curves and Cusp Singularities with Group action*, INT MATH RES NOTICES **2013(10)** (2013), 2240–2270.

[ET14] W. Ebeling, A. Takahashi, *A geometric definition of Gabrielov numbers*, Rev Mat Complut, 27:447–460, (2014).

[EG-ZT] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, A. Takahashi, *Orbifold E-functions of dual invertible polynomials*, J GEOM PHYS (2016).

[FJJW] A. Francis, T. Jarvis, D. Johnson, R. Webb: *Landau–Ginzburg Mirror Symmetry for Orbifolded Frobenius Algebras*, preprint arXiv:1111.2508 (2011).

[FJR07] H. Fan, T. Jarvis and Y. Ruan, *The Witten equation and its virtual fundamental cycle*, preprint 2007, arxivId: 0712.4025.

[FJR13] H. Fan, T. Jarvis and Y. Ruan, *The Witten equation, mirror symmetry and quantum singularity theory*, Ann. of Math. **178**, (2013), 1–106.

[GL87] W. Geigle, H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, (1987).

[G95] A. Givental, *Homological Geometry and Mirror Symmetry.* In: Chatterji, S.D. (eds) Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Birkhäuser, Basel. (1995).

[G01] A. Givental, *Gromov - Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians*, Mosc. Math. J. **1** (2001), 551–568.

[HLL20] W. He, S. Li, Y. Li, *G-twisted braces and orbifold Landau-Ginzburg Models*, Communications in Mathematical Physics 373.1 (2020): 175-217.

[HS12] A. Horev, J. P. Solomon. *The open Gromov–Witten–Welschinger theory of blowups of the projective plane.* arXiv:1210.4034v1.

[IR94] Y. Ito, M. Reid: *The McKay correspondence for finite subgroups of* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$, In: Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 221–240.

[IV90] K. Intriligator, C. Vafa. *Landau-Ginzburg orbifolds.* Nucl. Phys. B, 339(1), 1990, pp. 95–120.

[IST15] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, *A Uniqueness Theorem for Frobenius Manifolds and Gromov–Witten Theory for Orbifold Projective Lines*, J. Reine Angew. Math., 702, 143–71, (2015).

[IST19] Y. Ishibashi, Y. Shiraishi, A. Takahashi, *Primitive Forms for Affine Cusp Polynomials*, Tohoku Math. J., 71(3), 437–64, (2019).

[IV90] K. A. Intriligator, C. Vafa, *Landau-Ginzburg Orbifolds*, Nucl. Phys., B., 339:95–120, (1990).

[Kau03] R. Kaufmann, *Orbifolding Frobenius Algebras*, INT J MATH, **14** (2003), 573–619.

[Kau06] R. Kaufmann, *Singularities with Symmetries, orbifold Frobenius algebras and Mirror Symmetry*, CONTEMP MATH, **403** (2006), 67–116.

[Kra09] M. Krawitz, *FJRW rings and Landau-Ginzburg Mirror Symmetry*, preprint arXiv:0906.0796 (2009).

[Kre94] M. Kreuzer, *The mirror map for invertible LG models*, PHYS LETT B **328** (1994), no.3-4, 312–318.

[KS92] M. Kreuzer, H. Skarke: *On the classification of quasihomogeneous functions*, Commun. Math. Phys. 150, 137–147 (1992).

[Ko95] M. Kontsevich, *Homological Algebra of Mirror Symmetry.* In: Chatterji, S.D. (eds) Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Birkhäuser, Basel. (1995).

[KM94] M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*, Comm. Math. Phys., 164(3), 525–562, (1994).

[K03] R. M. Kaufmann, *Orbifolding Frobenius Algebras*, Internat. J. Math., 14(06), 573–617, (2003).

[KKP08] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev. *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry.* Proc. Symp. Pure Math., 78, 2008, pp. 87–174.

[KP+] M. Krawitz, N. Priddis, P. Acosta, N. Bergin, H. Rathnakumara. *FJRW-rings and mirror symmetry.* Comm. Math. Phys., **296**(1) (2010), 145–174.

[KY95] T. Kawai, S.-K. Yang, *Duality of orbifoldized elliptic genera*, Progr. Theoret. Phys. Suppl. **118** (1995), 277–297.

[L05] Y.P. Lee, *Notes on axiomatic Gromov–Witten theory and applications*, in: Proc. Sympos. Pure Math., **80** (2005).

[LVW89] W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner. *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories.* Nucl. Phys. B, 324(2), 1989, pp. 427–474.

[MR11] T. Milanov, Y. Ruan, *Gromov-Witten theory of elliptic orbifold $\mathbb{P}^1$ and quasi-modular forms*, arXiv preprint: 1106.2321.

[MS16] T. Milanov, Y. Shen, *Global mirror symmetry for invertible simple elliptic singularities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 66, No. 1, 271–330, (2016).

[NR16] R. Newton, A. Ros Camacho, *Strangely dual orbifold equivalence I*, Journal of Singularities, **14** (2016), 34-51

[Or04] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3(246), 227–248.

[PPZ15] R. Pandharipande, A. Pixton and D. Zvonkine, *Relations on $\overline{\mathcal{M}}gn$ via 3-spin structures*, Amer. Math. Soc. **28** (2015), 279–309.

[PS16] N. Priddis and M. Shoemaker, *A Landau–Ginzburg/Calabi–Yau correspondence for the mirror quintic*, Ann. Institut Fouriers. **66(3)** (2016), 1045–1091.

[R10] P. Rossi, *Gromov-Witten theory of orbicurves, the space of tri-polynomials and symplectic field theory of Seifert fibrations*, Math. Ann. 348, 265–287, (2010).

[RCN16] A. Ros–Camacho, R. Newton, *Orbifold autoequivalent exceptional unimodal singularities*, arXiv preprint: 1607.07081

[S82] K. Saito, *Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point*, J MATH SCI-U TOKYO. IA Math. **28** (1982), no. 3, 775–792.

[S83] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, PUBL RIMS, **19** (1983) 1231–1264.

[ST08] K. Saito and A. Takahashi: *From Primitive Forms to Frobenius manifolds*, P SYMP PURE MATH, **78** (2008) 31–48.

[ST11] I. Satake, A. Takahashi, *Gromov–Witten invariants for mirror orbifolds of simple elliptic singularities*, Ann. Inst. Fourier, Vol. 61, No. 7, 2885–2907, (2011).

[ST19] J. P. Solomon, S. B. Tukachinsky. *Relative quantum cohomology.* arXiv:1906.04795v2.

[St96] A. Strominger. *Mirror symmetry is T-duality.* Nucl. Phys. B, 479(1-2), 1996, pp. 243–259.

[Shi18] Y. Shiraishi, *On Frobenius Manifolds from Gromov–Witten Theory of Orbifold Projective Lines with r orbifold points*, Tohoku Math. J., 70(1), 17–37, (2018).

[ShiT15] Y. Shiraishi, A. Takahashi, *On the Frobenius Manifolds for Cusp Singularities*, Adv. Math., 273, 485–522, (2015).

[Sh14] Shklyarov, D. (2014). Non-commutative Hodge structures: towards matching categorical and geometric examples. Transactions of the American Mathematical Society, 366(6), 2923-2974.

[Sh16] Shklyarov, D. (2016). Matrix factorizations and higher residue pairings. Advances in Mathematics, 292, 181-209.

[Sh20] D. Shklyarov, *On Hochschild invariants of Landau–Ginzburg orbifolds*, Adv. Theor. Math. Phys., 24(1), 189–258, (2020).

[SZ17] Y. Shen, J. Zhou *Ramanujan identities and quasi-modularity in Gromov–Witten theory*, Commun. Number Theory Phys., 11, 405–452, (2017).

[SZ18] Y. Shen and J. Zhou, *LG/CY Correspondence for elliptic orbifold curves via modularity*, Journal of Differential Geometry 109.2 (2018): 291-336.

[Te15] C. Teleman, *The Structure of 2D semi-simple field theories*, Invent. Math. **188** (2012), 525–588.

[Ta11] A. Takahashi *Mirror symmetry between orbifold projective lines*, Adv. Stud. Pure Math., 66, 257–282, (2015).

[Tu19] J. Tu, *Categorical Saito theory, II: Landau-Ginzburg orbifolds*, arXiv preprint:1910.00037, (2019).

[V89] C. Vafa: *String vacua and orbifoldized LG models.*, Modern Physics Letters A 4.12, (1989) 1169–1185.

[Z08] D. Zagier, *Elliptic modular forms and their applications*, in: 1–2–3 Modul. forms, Springer Universitext, (2008), 1–103.

[W91] E. Witten. *Mirror Manifolds And Topological Field Theory.* preprint arXiv:hep-th/9112056, 1991.

[W93] E. Witten. *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions.* Nucl. Phys. B, 403(1-2), 1993, pp. 159–222.