Отзыв

официального оппонента доктора физико-математических наук,
Рубцова Алексея Николаевича
о диссертационной работе А.А. Александрова
«Эффекты конденсации степеней свободы в сложных системах»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.3.3 – «Теоретическая физика».

Исследование многочастичных систем с взаимодействием составляет одну из центральных проблем в физике и математике. Сложность описания этих систем объясняется их нелинейностью, для анализа которой используется развитый постоянно развивающийся математический аппарат. Существенный интерес при изучении таких систем представляет феномен «конденсации». Эффект «конденсации» заключается в том, что поведение системы описывается малым числом макроскопических величин, демонстрирующих асимптотическое поведение. Этот эффект является универсальным, т.е. он присущ многочастичным системам различной природы. Изучение эффекта конденсации представляет фундаментальный и прикладной интерес.

В диссертации А.А. Александрова рассматривается один из видов «конденсации», а именно – явление синхронизации, которая возникает как в классических, так и в квантовых системах. В качестве модели для изучения этого явления, была выбрана широко известная модель Курамото и оцененная физическим сообществом (в 2025 году Й. Курамото был удостоен медали Больцмана совместно с М. Кардаром), а также её различные обобщения. Диссертация посвящена развитию подходов описания синхронизации в этой модели, а именно: изучении влияния структуры взаимодействий на возможность синхронизации, описании низкоразмерной динамики в специальных случаях, а также изучении термодинамических пределов данной модели. В диссертации активно используются сравнительно новые достижения теории графов – графоны, которые позволяют исследовать термодинамический предел модели Курамото на различных графах. Также применяются концепции из информационной геометрии, такие как метрика Фишера и расхождение Кульбака-Лейблера. Особый интерес представляет рассмотрение квантовых систем, в которых возникающая фазовая динамика описывается моделью Курамото. В качестве примеров таких квантовых систем рассматривается модель Сачдева-Йе-Китаева (SYK-модель) с дополнительным Хаббардовским притяжением, системы сверхпроводящих зёрен и массивы поляритонных конденсатов. В каждой из упомянутых систем динамика фаз играет решающую роль при описании физических свойств.

Диссертация содержит Введение, шесть глав, Заключение и три Приложения. Список литературы содержит 199 наименований. Введение посвящено актуальности тематики исследования, его научной новизне, а также содержит описание теоретической и практической значимости работы. Во Введении сформулированы цели и задачи исследования, описаны методы, сформулированы положения, выносимые на защиту.

В первой главе даются определение и понятия, которые используются далее. Дается определение понятию синхронизации, указываются её различные виды и связь синхронизации с захватом фазы. Вводится понятие предельного цикла и излагается процедура фазовой редукции. Далее приводятся детальные примеры систем, в которых имеет место фазовая редукция и, как следствие, может наблюдаться синхронизация. Рассматривается осциллятор Ландау-Стюарта, уравнения движения которого являются нормальной формой бифуркации Андронова-Хопфа. Затем описывается фазовая редукция ансамбля таких осцилляторов и показывается, что модель Курамото возникает за счёт данной редукции. Синхронизация иллюстрируется на примере двух связанных осцилляторов Ландау-Стюарта. В этой же главе кратко описаны квантовые системы, в которых возникают устойчивые предельные циклы: обобщенное уравнения Гросса-Питаевского и гармонический осциллятор, взаимодействующий со средой. Указывается связь фазовой переменной с уравнением Кардара-Паризи-Чжана и нарушением симметрии.

Вторая глава посвящена описанию основных свойств модели Курамото. Показывается, что в термодинамическом пределе модель может быть описана уравнением Власова, а синхронизация является фазовым переходом второго рода по константе связи. Описываются методы поиска критической точки: посредством решения уравнения самосогласованности и посредством анализа линейной стабильности несинхронизованного состояния. Глава завершается описанием рассматриваемых в диссертации обобщений модели Курамото: модели с шумом, с инерцией и модели на графах разных типов. Указывается, что в модели с инерцией возникает гистерезис, а также подчеркивается связь модели Курамото с классической XY-моделью.

В третьей главе обсуждается существование низкоразмерной динамики в модели Курамото. Описывается, что данная динамика возникает из-за существования интегралов движения. Эти интегралы движения в свою очередь отражают Мёбиусову динамику модели Курамото. Низкоразмерная динамика описывается как в случае конечного числа степеней свободы (анзац Ватанабе-Стогаца) и в термодинамическом пределе (анзац Отт-Антонсена). Демонстрируется, что полностью синхронизованное состояние возникает асимптотически с течением времени и большой константе связи. Объясняется связь между двумя анзацами. Далее обсуждаются графы, для которых также существует низкоразмерная динамика. Детально обсуждается граф-звезда и его обобщения, описывается динамика синхронизации на графе типа «длинная звезда». Описывается ступенчатый характер синхронизации на таком графе. Показывается, что для такого графа

даже при большой константе связи возможно существование состояний с нулевым параметром порядка, что объясняется высокой симметрией данных состояний. Затем низкоразмерная динамика описывается в терминах градиентного потока на статистическом многообразии. Показывается, что расхождение Кульбака-Лейблера и метрика Фишера могут быть использованы для описания синхронизации. Результаты, полученные автором в этой главе, углубляют знания о синхронизации на графах, в которых есть вершины с большой валентностью (хабы), а также позволяют описать синхронизацию в терминах информационной геометрии.

Четвертая глава посвящена обсуждению модели Курамото с шумом. Рассматриваются полный граф и граф-звезда. Демонстрируется, что наличие белого шума улучшает линейную стабильность несинхронизованного состояния, т.е. затрудняет синхронизацию. Приведенные во второй главе методы поиска критической константы связи обобщаются на случай наличия шума: уравнение Власова заменяется уравнением Фоккера-Планка, уравнение самосогласованности повторяет уравнение для параметра порядка в XY-модели в приближении среднего поля. Указывается, что из-за наличия шума анзац Отт-Антонсена не применим: уравнения на Фурье-моды функции распределения не расцепляются, поэтому низкоразмерная динамика не возникает. Однако демонстрируется, что в случае малого шума или же вблизи критической точки анзац Отт-Антонсена сохраняет применимость. Данный факт используется для получения аналитических результатов в случае графа-звезды. Показывается, что шум подавляет гистерезис на графе-звезде. Это подавление описывается аналитически и численно. Указываются альтернативы анзаца Отт-Антонсена в случае шума. Полученные авторов результаты интересны в контексте спиновых моделей, поскольку синхронизованные состояния есть ничто иное как нетривиальные стационарные решения уравнения Фоккера-Планка, а они, в свою очередь, суть Гиббсовские меры XY-модели.

В пятой главе излагается систематический и строго обоснованный подход к построению термодинамических пределов для обобщений модель Курамото. Центральную роль в этом подходе играет понятие слабой сходимости между эмпирической и непрерывной мерой. Такая сходимость позволяет строить т.н. предел Власова, т.е. описывать систему посредством уравнений в частных производных (уравнение Власова или Фоккера-Планка). Здесь же указывается, что для построения пределов в случае графов, отличных от полного, нужно использовать графоны. Дается определение понятию графона и формулируются базовые свойства графонов, в частности сходимость между спектром интегрального оператора, связанного с графоном и нормированной на число вершин матрицы смежности графа. Графоны позволяют корректно построить термодинамический предел, обобщая случай полного графа. Затем обобщается метод поиска критической константы связи, основанный на анализе линейной стабильности. Для этого используется метод Пенроуза. Данный метод позволяет связать спектр интегрального оператора-графона со спектром оператора линейной стабильности,

тем самым устанавливая связь между структурой графа, на котором задана модель и возникновением синхронизации в ней. Метод Пенроуза применяется для модели с шумом и инерцией, что позволяет автору получить аналитическое выражение для критической константы связи. Также метод Пенроуза позволяет изучать различные паттерны синхронизации, которые возникают при наличии более сложных распределений собственных частот осцилляторов (бимодальные и бимодальные ассиметричные). После этого описывается бездиссипативный предел модели Курамото с инерцией, т.н. гамильтонова модель среднего поля. Для этой модели демонстрируются равновесные свойства (фазовый переход в намагниченное, т.е. синхронизованное, состояние) и неравновесные свойства, а именно существование квазистационарных состояний, которые затрудняют термализацию. Указывается, что наличие слабых диссипативных эффектов не меняет качественную картину. Также подчеркивается, что существование квазистационарных состояний – общая черта гамильтоновых моделей с дальнодействием между степенями свободы. Полученные в этой главе результаты демонстрируют как связаны между собой теория динамических систем и статистическая механика:

В шестой главе обсуждаются квантовые системы, в которых имеется фазовая динамика и возникает синхронизация фаз. Больше всего внимания уделяется SYK-модели с обычными (не майроновскими) фермионами и Хаббардовским притяжением. Случайное отталкивание SYK-взаимодействия может быть скомпенсировано Хаббардовским притяжением, поэтому в этой модели могут возникать куперовские пары. Однако, сверхпроводимость возникает не сразу, т.к. уравнения на Гриновские функции системы фиксируют только модуль щели, в то время как фазы куперовских пар могут быть различны. Переход в сверхпроводящее состояние происходит, когда фазы пар становятся синхронизованными. Такой процесс перехода не является экзотикой и наблюдается в более простых системах как, например, сверхпроводники с беспорядком. Для SYK модели с Хаббардовским взаимодействием демонстрируется, что в такой системе также наблюдаются квазистационарные состояния из-за дальнодействия между фазами. Эти состояния характеризуются частичной синхронизацией фаз. Далее описываются системы сверхпроводящих зёрен и контактов Джозефсона, в которых переход в сверхпроводящее состояние также возникает посредством синхронизации фаз. Указывается, что диссипация играет важную в роль в таких системах и, как следствие, динамика фаз может быть описана моделью Курамото с шумом и инерцией. Глава завершается описанием поляритонных конденсатов, в которых также возникает фазовая динамика посредством фазовой редукции и специальным видом волновой функции системы как целого: конденсаты характеризуются хорошо локализованными в пространстве волновыми функциями, а вся динамика сосредоточена в весовых коэффициентах и сводится к динамике ансамбля осцилляторов Ландау-Стюарта. Также указывается, что существует два механизма связи конденсатов: туннельный и баллистический, причем второй механизм приводит к тому, что в итоговой эффективной теории (т.е. модели Курамото) возникает запаздывание во взаимодействии. Полученные в этой главе результаты

представляют интерес для физики конденсированого состояния: во-первых, типично в задачах сверхпроводимости обсуждается динамика щели, а не фаз, поэтому фазовая динамика может приводит к новым эффектам; во-вторых, массивы поляритонных конденсатов представляют собой удобные системы для изучения фазовых переходов в спиновых системах (в частности, XY-модели), а описание в рамках модели Курамото позволяет описывать динамические эффекты в таких системах.

В Заключении приводятся основные выводы диссертации, обсуждаются дальнейшие направления исследований. Среди этих направлений указаны эффекты метастабильности в модели Курамото с шумом, построение термодинамических пределов для модели на разреженных графах (когда графоны не применимы), а также некоторые аспекты резервуарных вычислений и нейроморфных архитектур, связанных с моделью Курамото.

В Приложениях А-С приводятся детали вычислений.

Оценивая представленную работу в целом, можно сказать, что диссертация А.А. Александрова является законченным и самостоятельным исследованием по актуальным задачам в области теоретической физики (в полном соответствии с паспортом специальности 1.3.3 ВАК). Диссертация выполнена на высоком научном уровне, изложение предмета исследований полное и структурированное. Материал изложен последовательно и детально, что облегчает понимание диссертации.

Результаты, представленные в диссертации, являются новыми и опубликованы автором в 5 статьях в рецензируемых журналах, в том числе первого квартиля (4 из 5). Результаты неоднократно докладывались автором на отечественных и международных конференциях и семинарах. Все работы выполнены при непосредственном участии диссертанта, а его вклад в эти работы является решающим. Автореферат диссертации соответствует содержанию диссертации и опубликованным статьям, и в полной мере отражает основные положения диссертации.

В качестве замечаний стоит отметить

1. Не вполне ясно, как из формулы (2.18) и предыдущих следует, что рассматриваемая неустойчивость сопровождается появлением бифуркации. На первый взгляд кажется, что речь идёт об аналоге фазового перехода с векторным параметром порядка в потенциале «мексиканская шляпа», то есть имеет место выбор не из двух, а из континуального множества возможных решений.
2. Вывод низкоэнергетического гамильтониана SYK+U модели дан излишне сжато и в представленном виде представляется каскадом не вполне обоснованных приближений (хотя результат этой работы физически ясен и сомнений не вызывает). В частности, автор вводит локальный параметр порядка (6.4), и затем приводит формулу для матрицы плотности, выраженной через эту величину. Эта

формула верна только в предположении отсутствия межузельных корреляций, которое не обоснованно.

3. В диссертации приводится несколько примеров физических систем, в которых может иметь место синхронизация мод. В это число включены достаточно экзотические, например поляритонный конденсат и SYK модель, однако ничего не говорится о, по-видимому, самом известном – синхронизации мод в лазерных резонаторах. Я также рассмотрел бы моды в резонаторах шепчущей галереи при учёте нелинейности. Даже если по каким-то причинам автор не хотел подробно останавливаться на этих системах, упомянуть их стоило бы.
4. В диссертации присутствуют многочисленные опечатки, местами автор использует жаргонизмы, например, «репличный трюк».

Сделанные замечания, однако, не снижают общей ценности работы.

Диссертационная работа А.А. Александрова «Эффекты конденсации степеней свободы в сложных системах» соответствует всем требованиям ВАК о присуждении учёных степеней, а диссертант А.А. Александров заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – «Теоретическая физика».

Официальный оппонент,

доктор физико-математических наук,
научный руководитель группы
«Коррелированные квантовые системы»
ООО «МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЦЕНТР
КВАНТОВОЙ ОПТИКИ И
КВАНТОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»
(специальность – 01.04.09) А.Н. Рубцов

Большой бул., 30, стр 1, Москва, 121205
ООО «МЦКТ»
тел. +7 495 280 1291
e-mail: ar@ct-qmc.org

Подпись А.Н. Рубцова заверяю:

HR-менеджер Е.С. Гуляева

09 сентября 2025 г.