На правах рукописи



Александров Артем Александрович

Эффекты конденсации степеней свободы в сложных системах

Специальность 1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель — **Горский Александр Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор МФТИ, ведущий научный сотрудник лаборатории квантовой физики и информации Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Официальные оппоненты:

Рубцов Алексей Николаевич — доктор физико-математических наук, научный руководитель группы «Коррелированные квантовые системы» общество с ограниченной ответственностью «Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий» (специальность 01.04.09)

Смирнов Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией «Искусственного интеллекта и обработки больших массивов данных» кафедры теории управления и динамики систем Институт информационных технологий, математики и механики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (специальность 01.04.03).

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Сколковский институт науки и технологий»

Защита диссертации состоится **02.10.2025** на заседании диссертационного совета 24.1.167.02 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте:

https://mi-ras.ru/dis/ref25/aleksandrov/dis.pdf

Автореферат разослан «__» июля 2025 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.167.02 кандидат физико-математических наук **Теретёнков А.Е.**

Общая характеристика работы

Сложными системами мы будем называть системы, состоящие из большого числа степеней свободы, которые взаимодействуют между собой. В силу наличия взаимодействия между степенями свободы для таких систем характерны нелинейность, эмерджентность, самоорганизация и возникновение спонтанной упорядоченности, адаптивность и возникновение механизмов обратной связи. По существу все упомянутые свойства проистекают из самого первого — нелинейности. Возникновение спонтанной упорядоченности, эмерджентность и самоорганизация тесно связаны с явлением *конденсации*.

Под *конденсацией* в сложной системе понимается возникновение состояния, в котором наблюдаемая стремится к одному значению (нетривиальному) асимптотически, когда время (или другой параметр модели) стремится к бесконечности. Феномен конденсации степеней свободы широко распространен в сложных системах, среди которых можно выделить хорошо известную конденсацию Бозе-Эйнштейна, возникновение коллективного поведения, синхронизацию, аккумулирование богатства в макроэкономических моделях, образование гелей из молекул, возникновение пробок в транспортных потоках. Чтобы указать конкретный предмет исследования, мы будем рассматривать системы, в которых возникает синхронизация, обычно присущая классическим сложным системам. Однако мы не ограничиваемся только классическими системами. По этой причине в ходе нашего исследования будет естественным образом возникать феномен конденсации Бозе-Эйнштейна и связанные с этим явления.

Сложные системы широко встречаются как в природе, так и в человеческой деятельности. Несмотря на бурное развитие математических методов, компьютерных технологий и физических концепций, строгое описание таких систем и по сей день представляет амбициозную и трудную задачу. Как легко догадаться, именно существование нелинейностей вызывает трудности в попытках изучать и прогнозировать поведение сложных систем. Нелинейности играют двойную роль: с одной стороны все упомянутые особенные свойства (эмерджентное поведение и т.д.) обусловлены именно нелинейностями, а с другой стороны присутствие нелинейностей делает попытки описать поведение отдельных степеней свободы практически бессмысленными. Однако существует особый класс систем, привлекающих огромное внимание исследователей, – *интегрируемые* сложные системы, для которых ввиду наличия большого количества сохраня-

ющихся величин (интегралов движения) задача об описании "индивидуальной", микроскопической динамики может быть решена и все ключевые свойства систем могут быть описаны посредством интегралов движения. В противоположность интегрируемым системам, *хаотические* и *неинтегрируемые* системы не обладают таким свойством и ключевыми методами для их исследования являются *статистические методы*. Статистические методы сфокусированы не на микроскопическом описании, а на макроскопическом, т.е. описывают поведение системы с привлечением идей теории вероятности и статистической механики. И статистические методы, и методы теории интегрируемых систем взаимодополняют друг друга и на самом деле довольно близки по смыслу: в основе всех этих методов лежат идеи на стыке теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории динамических стохастических систем.

В ходе развития науки о сложных системах стало понятно, что требуется расширить арсенал методов для их исследования. Существует много примеров сложных систем, в которых степени свободы локализованы в вершинах некоторых графов. В качестве простейшего примера удобно привести модель Изинга на двумерной квадратной решетке. Статистическая механика оперирует с понятием термодинамического предела, поскольку именно в таком пределе идеи теории вероятности (в частности различные версии закона больших чисел) работают в полную силу. Первоначально большинство результатов для моделей типа Изинга было получено для регулярных графов-решеток, т.к. это наиболее релевантный случай, иллюстрирующий свойства кристаллических решеток. Но с течением времени стало понятно, что сложные системы на произвольных и даже случайных графах представляют особый интерес. Изучение систем на таких графах тесно связано с теорией случайных матриц (в силу того, что граф можно полноценно охарактеризовать некоторым набором матриц) и также ставит перед исследователями более глубокий и концептуальный вопрос: как исследовать большие графы, так называемые *сети*? Данный вопрос возник в теории графов самостоятельным образом. Его можно переформулировать в более строгом виде: как локальные особенности структуры графа отражаются на его глобальных свойствах? При этом на практике часто встречается ситуация, когда вся структура графа неизвестна и имеется информация только о его отдельных подграфах. Таким образом, современный набор методов для изучения сложных систем включает в себя теорию интегрируемых систем, статистические подходы и некоторые аспекты теории графов. Именно такое взаимопроникновение раз-

ных областей физики и математики позволяет добиться наибольшего успеха в задаче об описании поведения сложных систем и, в особенности, о возникновении эффектов конденсации в них.

Данное исследование посвящено сравнительно простой модели сложной системы, в которой феномен конденсации степеней свободы является ключевым эффектом: модели Курамото и её различным обобщениям и расширениеям. Мы сознательно ограничиваемся рядом сравнительно простых моделей, на которых развиваем и иллюстрируем применение методов исследования, описанных выше. Несмотря на кажущуюся простоту, выбранные для исследования модели демонстрируют значимость, поскольку возникают как эффективные теории для ряда реализуемых в эксперименте и встречающихся в природе систем.

Цели и задачи исследования

Изложив кратко суть предмета исследования и обосновав актуальность, мы готовы сформулировать конкретные цели и задачи исследования. Основная цель исследования посвящена вопросу о том, как внутренняя организация (в частности, пространственная структура, т.е. архитектура графа) и взаимодействия влияют на возможность конденсации степеней в классической или квантовой сложной системе, а именно на возможность синхронизации и образование квазистационарных состояний в модели Курамото и её обобщениях. В исследовании мы решаем следующие задачи:

1. Применяя идеи и методы теории интегрируемых систем, развить описание низкоразмерной динамики в модели Курамото
2. Проанализировать случаи графов, для которых модель Курамото и её обобщения могут быть аналитически исследованы, в частности исследовать фазовые диаграммы модели на таких графах
3. Развить методы описания термодинамического предела модели Курамото и её обобщений на произвольных графах
4. Исследовать существование квазистационарных и химерных состояний в квантовых системах, которые могут быть описаны моделью Курамото (в качестве эффективной теории)
5. Объединить полученные результаты и сформулировать их практическую значимость для моделей в нейронауке, физике конденсированного состояния и теории динамических систем

Актуальность

Современный технологический прогресс позволяет одновременно и создавать искусственные, и детально исследовать естественные сложные системы. В искусственных системах вопросы о конденсации степеней свободы возникают в различном контексте: поддержание и создание синхронизации в энергетических сетях, возникновение когерентных состояний в квантовых устройствах, синхронизация фаз в массивах Джозефсоновских контактов и непосредственно вопросы о Бозе-конденсации в системах поляритонов и возникновении сверхпроводимости в материалах с беспорядком.

Существенная часть искусственных систем создается и разрабатывается с целью ускорить и улучшить процессы обработки и переноса информации. Особенно стоит выделить интенсивно развивающуюся область нейроморфных технологий. Нейроморфные архитектуры призваны существенно снизить энергетические затраты на проведение вычислений, а также ускорить сами вычисления за счет принципиально новой архитектуры вычислений, основанной на биомиметике. Создание таких вычислительных архитектур сопряжено с огромными трудностями по масштабируемости, быстродействию, стабильности и попросту созданию ключевых элементов нейроморфной архитектуры. Аналогичные проблемы встречаются и в области квантовых технологий, где все усилия направлены на создание квантового компьютера. Эти трудности приводят к появлению альтернативных видений вычислительной архитектуры, к примеру в виде поляритонных устройств, но и в их создании сталкиваются с похожими проблемами. Такие экспериментальные и инженерные трудности делают важным теоретическую часть процесса исследования и разработки. Теоретическое исследование призвано указать на верный путь развития, а вопросы о конденсации степеней свободы возникают естественным образом в этом исследовании, поскольку являются общими для указанных искусственных систем.

В качестве естественных сложных систем можно привести пример в виде биологических нейронных сетей. Описание динамики отдельных нейронов посредством набора обыкновенных дифференциальных уравнений оказалось успешным и было подтверждено экспериментально. В свою очередь, понимание того, как именно нейроны взаимодействуют между собой, как они связаны и организованы в живых организмах, было частично достигнуто лишь недавно и полноценной теории все еще не разработано. Среди различных теорий, описы-

вающих *почему* и *как именно* работают биологические нейронные сети, важной является *коннектомная* теория. В рамках этой теории анализируется *коннектом* — совокупность всех нейронов и их соединений. При этом анализируют как его структурные свойства, так и динамику ансамблей нейронов. Вопросы о конденсации степеней свободы возникают естественно и здесь, поскольку синхронизация нейронов, возникновение когерентных состояний и другие виды коллективного поведения обнаруживаются экспериментально. Наконец стоит упомянуть еще один тип естественных сложных систем — сообщества, состоящие из большого числа взаимодействующих индивидов. В таких системах также возникают вопросы о конденсации степеней свободы, которая проявляется в виде образования роев, стай и мурмураций.

Феномен конденсации изначально возник в физике конденсированного состояния, но за годы исследований стало понятно, что конденсация проявляется в различных биологических, химических и физических системах. Конечно, как и уже явно указывалось, в таких системах под конденсацией понимается довольно широкий круг явлений, но все они объединены тем, что определенные наблюдаемые, характеризующие свойства, системы ведут себя аналогичным образом, т.е. асимптотически достигают некоторого единственного (нетривиального) значения, которое обуславливается параметрами системы и её типом. Практически все примеры систем, приведенных выше, могут быть описаны в виде динамической системы с большим количеством степеней свободы, заданной на графе. Сам граф содержит информацию как о пространственной структуре системы (регулярная решетка, коннектом, случайный граф и т.д.), так и о взаимодействии между степенями свободы, т.к. взаимодействие может быть учтено в виде весов ребер графа. В такой формулировке естественным и практически значимым вопросом является: как структура графа (пространственная локализация степеней свободы и их взаимодействие) влияет на возможность конденсации? В силу изложенных выше примеров мы видим, что такой вопрос является актуальным для развития как теории сложных систем, так и для возможного технологического развития.

Основные положения, выносимые на защиту

На основе полученных результатов, выносятся на защиту следующие положения:

1. Продемонстрировано, что динамика модели Курамото на полном графе может быть описана в терминах градиентного потока на статистическом многообразии, образованном свернутыми распределениями Коши. Показано, что переход в синхронизованное состояние соответствует возникновению особенностей в метрике Фишера такого многообразия. Данный результат остается верным для произвольного графа.
2. Проанализирован фазовый переход синхронизации в модели Курамото на графе-звезде с белым шумом. В термодинамическом пределе найдены явные решения, которые соответствуют синхронизованным состояниям, проанализирован переход в это состояние. Показано, что синхронизация в такой модели является фазовым переходом первого рода, имеется гистерезис и трикритическая точка.
3. Проанализирован фазовый переход синхронизации в модели Курамото на графах, представляющих собой различные модификации графа-звезды. Показано, что имеет место гистерезис и возникновение частично синхронизованных состояний.
4. Для модели Курамото с шумом и инерцией на взвешенном неориентированном графе с помощью применения графонов найдено явное выражение для критической константы связи, проанализирована стабильность несинхронизованного состояния, возможность образования химер и кластеров синхронизации.
5. Показано, что возникновение сверхпроводимости в SYK-модели комлексных фермионов с дополнительным Хаббардовским притяжением напрямую связано с синхронизацией фаз Куперовских пар, т.к. модель Курамото с инерцией возникает как эффективная теория в такой задаче. Показано, что в квантовой модели также имеет место образование долгоживущих квазистационарных состояний. Это соответствует существованию частично когерентных пар, т.е. формированию конденсата пар, плотность которого изменяется во времени.

Научная новизна

Все результаты исследования являются оригинальными и были получены автором в ходе научной работы. Первые результаты исследования посвящены анализу синхронизации на графе-звезде и его модификациях. В работе [I] было показано, что на графе-звезде с длинными лучами синхронизация происходит поэтапно, при этом возможно образование частично синхронизованных состояний, а сам переход в синхронизованный режим имеет "взрывной" характер (англ. abrupt synchronization). В этой же работе было продемонстрировано, что в термодинамическом пределе, т.е. когда число вершин графа стремится к бесконечности, возможно образование состояний с высокой симметрией, которые глобально не синхронизованы. Следующим шагом в изучении графа-звезда стала работа [II], где автором было изучено влияние шума на "взрывную" синхронизацию на графе-звезде. В рамках этой работы было показано, что шум подавляет гистерезис и приводит к образованию трикритической точки в системе, при этом практически весь анализ может быть проведен аналитически.

В ходе анализа графа-звезды, неоднократно возникали *свернутые* распределения (англ. wrapped distribution), в которых случайная величина распределена не на вещественной прямой, а на единичной окружности. Это привело к гипотезе о том, что явление синхронизации может быть описано в терминах энтропии вероятностных распределений. Данная гипотеза получила подкрепление в работе [III], где изучена синхронизация на полном графе и показано, что расхождение Кульбака-Лейблера является мерой синхронизации, как и метрика Фишера, сингулярности в которой соответствуют точкам фазового перехода в синхронизованное состояние.

Следующий этап исследований был посвящен обобщениям модели Курамото, а именно модели Курамото с инерцией и шумом, заданной на взвешенном неориентированном графе. В статье [IV] обсуждается синхронизация куперовских пар в SYK модели с дополнительным Хаббардовским притяжением, в которой модель Курамото с инерцией (она же Гамильтонова модель среднего поля) возникает как эффективное описание. В рамках этой статьи показано, что частично синхронизованные квазистационарные состояния существуют как в классической, так и в квантовой модели, и соответствуют нестационарному конденсату фаз.

Данные результаты были мотивацией для изучения термодинамических пре-

делов модели Курамото на графах. В работе [V] показано, что модель Курамото с инерцией и шумом на взвешенном неориентированном графе в термодинамическом пределе может быть описана с помощью *графонов*. При этом, добавление шума не сказывается на построении доказательств сходимости между дискретной и непрерывной моделью. В свою очередь шум влияет на положение критической точки и в данной работе было впервые получено аналитическое выражение для критической константы связи, которая соответствует точке фазового перехода в синхронизованное состояние. Помимо этого, в работе обсуждается влияние шума на различные бифуркации в модели и образование паттернов синхронизации (кластеры, химеры и т.д.)

Научная новизна исследования заключается в применении комбинации идей теории графов, статистической механики и информационной геометрии. Использование идеи графонов для построения термодинамического предела позволило соискателю продвинуться в изучении обобщений модели Курамото и получить аналитические результаты для модели с шумом и инерцией. Применение градиентных потоков на статистических многообразиях позволило предложить новый взгляд на низкоразмерную динамику модели Курамото. Использование интегралов движения в модели Курамото позволило проанализировать как наличие шума влияет на фазовый переход в модели на графе-звезде, а также позволило описать частично синхронизованные состояния в обобщениях графа-звезды. Построение термодинамических пределов в модели с инерцией позволило описать квазистационарные состояния и их роль в возникновении синхронизованного состояния.

Практическая и научная ценность

Научная ценность полученных результатов заключается в развитии междисциплинарной науки о сложных системах, где методы теории вероятности, статистической физики, теории конденсированного состояния и теории динамических систем находятся в тесном пересечении с друг другом. Исследование несет теоретический характер, однако в виду специфики обсуждаемых моделей и явлений, может иметь практическую значимость.

Практическая ценность полученных результатов заключается в том, что, как минимум, некоторые из описанных в исследовании явлений можно можно легко проверить посредством экспериментов. В качестве практически значи-

мой экспериментальной платформы следует использовать массивы поляритонных конденсатов, массивы контактов Джозефсона, осцилляторы со спиновым кручением (англ. spin-torque) или же системы сверхпроводящих зерен или микромагнетиков. Выбор таких платформ обусловлен тем, что они представляют собой видения новых вычислительных архитектур и вопросы о конденсации степеней свободы в виде синхронизации, образования квазистационарных состояний и когерентных состояний могут быть описаны в терминах обсуждаемых в исследовании моделей (модель Курамото, Гамильтонова модель среднего поля и их обобщения).

Еще один аспект, который представляет собой потенциальную практическую ценность, заключается в применении описанных в исследовании идей к нейронауке. Здесь ключевым моментом является построение термодинамического предела для многочастичной стохастической сложной системы. Изучение даже небольших совокупностей связанных нейронов, т.е. нейронных ансамблей, представляет собой трудную задачу: каждый нейрон описывается набором уравнений, имеется взаимодействие между нейронами и т.д. Методы фазовой редукции и построение термодинамических пределов для такого рода систем позволяют продвинуться в аналитическом изучении, построить приближенное описание, основанное на ряде обоснованных допущений.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследования были представлены на различных конференциях, семинарах и воркшопах, а именно:

Семинары: Лаборатории физики высоких энергий МФТИ (г. Долгопрудный), семинары по теории твердого тела ФИАН, семинар по квантовой теории поля ФИАН, отдела механики МИАН (г. Москва), отдела теоретической физики МИАН (г. Москва), Добрушинской лаборатории ИППИ РАН (г. Москва), Лаборатории квантовой физики ИППИ РАН (г. Москва), научно-исследовательский семинар “Сложные сети” математического факультета ВШЭ (г. Москва), семинар группы топологического анализа данных ФКН ВШЭ (г. Москва)

Международные конференции: “Statistical Mechanics and its applications” (Дилижан, Армения, 2022), “The international Winter Physctech Theory School and Conference” (Цахкадзор, Армения, 2023), “Landau Week” (Ереван, Армения, 2023), “The international Summer Conference on Theoretical Physics” (Дол-

гопрудный, Россия, 2023), “Integrable systems and its applications” (Сириус, Россия, 2023), “Regular and Chaotic Dynamics” (Сириус, Россия, 2023), “Nor-Amberd School in Theoretical Physics” (Цахкадзор, Армения, 2024), “Ergodicity and Localization” (Триест, Италия, 2024), “Dynamic Days in Sirius” (Сириус, Россия, 2024)

Отечественные конференции: 65- и 66-ая научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 2023, 2024), “Математическая Весна” (Нижний Новгород, 2024), “Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем” (Нижний Новгород, 2024)

По материалам диссертации опубликовано 5 статей в международных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. Все результаты согласуются с результатами других специалистов, работающих в этой области исследований, что подтверждает их достоверность.

Публикации автора по теме диссертации

I. Alexandrov A., Arkhipov P., Gorsky A. Synchronization on star-like graphs and emerging $\mathbb{Z}_p$-symmetries at strong coupling // Journal of Complex Networks. — 2022. — Vol. 10, no. 3. — cnac015.

II. Alexandrov A. Synchronization on star graph with noise // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Vol. 167. — P. 113056.

III. Alexandrov A., Gorsky A. Information geometry and synchronization phase transition in the Kuramoto model // Physical Review E. — 2023. — Vol. 107, no. 4. — P. 044211.

IV. Alexandrov A., Gorsky A. On out-of-equilibrium phenomena in pseudogap phase of complex SYK+ U model // Physics Letters B. — 2023. — Vol. 847. — P. 138318.

V. Alexandrov A., Gorsky A. Penrose method for Kuramoto model with inertia and noise // Chaos, Solitons & Fractals. — 2024. — Vol. 183. — P. 114938.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Введение), пяти глав основного текста (Главы 2-6), заключения (Глава 7) и трёх приложений (A-C). Общий объем диссертации составляет 156 страниц, включая рисунка 34 и 2 таблицы. Список литературы содержит 199 ссылок.

Содержание диссертации

Модель Курамото и её обобщения

В основной части диссертации, посвященной классическим системам, обсуждается модель Курамото и её различные обобщения. В самом простом случае уравнения движения модели имеют вид

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \omega_i \in \mathbb{R}, K \geq 0. \tag{1}$$

Модель с инерцией получается добавлением слагаемого $m\ddot{\varphi}_i$ в левую часть (1), модель с шумом содержит белый шум заданной амплитуды в правой части (1). Модель, на графе отличном от полного, содержит матрицу смежности W_{ij} данного графа под знаком суммы в (1). Показывается, что синхронизация в модели Курамото в термодинамическом пределе является *неравновесным фазовым переходом* [1; 2], а положение критической точки, в которой возникает синхронизация, может быть найдено посредством анализа линейной стабильности несинхронизованного состояния [3]. Параметром порядка выступает величина $r = r(t)$, определенная следующим образом,

$$r(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\exp\left(i\varphi_j(t)\right). \tag{2}$$

В синхронизованной фазе усредненная по времени величина $|r(t)|$ отлична от нуля, а сама величина $|r(t)|$ асимптотически стремится к константе, близкой к единице. В несинхронизованной фазе временное среднее равно нулю, а величина $|r(t)|$ является осциллирующей функцией времени. В термодинамическом пределе модель Курамото на полном графе, т.е. со связью "все-со-всеми", описывается *уравнением Власова*,

$$\frac{\partial\rho(t,\varphi,\omega)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left[\omega - iK\left(re^{-i\varphi} - \bar{r}e^{+i\varphi}\right)\right]\rho(t,\varphi,\omega)\right\}, \tag{3}$$

где $\rho = \rho(t,\varphi,\omega)$ есть функция распределения, $g = g(\omega)$ есть функция распределения собственных частот (обычно это четная юнимодальная, т.е. имеющая один максимум, функция), а $r(t)$ есть параметр порядка,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)\int_{0}^{2\pi} d\theta\, \rho(t,\theta,\omega)e^{i\theta}. \tag{4}$$

Несинхронизованное состояние соответствует стационарному решению $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$. Анализ линейной стабильности подразумевает рассмотрение флуктуации $\delta\rho = \delta\rho(t,\varphi,\omega)$. Подстановка анзаца $\rho_0 + \epsilon\delta\rho(t,\varphi,\omega)$, $\epsilon \ll 1$ в уравнение Власова и удержание линейных по ϵ вкладов дает интегро-дифференциальное уравнение на $\delta\rho(t,\varphi,\omega)$. Разложение $\delta\rho(t,\varphi,\omega)$ в ряд Фурье сводит задачу к поиску спектра интегрального оператора $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{T}[f] = \lambda f, \quad \boldsymbol{T}[f](\omega) = -i\omega f(\omega) + K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) f(\omega). \tag{5}$$

В тот момент, когда у собственного значения λ оператора возникает положительная действительная часть, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, состояние ρ_0 теряет линейную стабильность. Это соответствует появлению синхронизации и позволяет найти критическую константу связи $K_c = (\pi g(0))^{-1}$. В случае конечного числа степеней свободы возникновение синхронизованного состояния соответствует бифуркация раздвоения.

После описания основных свойств, обсуждается существование низкоразмерной динамики в модели Курамото. Для этого излагаются два подхода: *анзац Отт-Антонсена* (далее OA анзац) [4] и *анзац Ватанабе-Строгаца* (далее WS анзац) [5; 6]. OA анзац применяется в термодинамическом пределе, WS анзац применяется для случая конечного числа степеней свободы. OA анзац иллюстрирует, что в модели Курамото на полном графе в термодинамическом пределе существует инвариантная (относительно динамики модели) мера, так называемое *многообразие Отт-Антонсена*, и она является притягивающей (случаи, когда мера не является притягивающей обсуждаются в работе [7]). Объясняется связь между двумя анзацами, которая основана на том факте, что динамика модели Курамото тесно связана с потоком по орбите группы преобразований Мёбиуса, отображающих окружность в окружность. Данная Мёбиусова динамика обсуждается детально, в частности указывается, что *квазиинтегрируемость* (т.е. существование большого числа интегралов движения) объясняется фактом, что преобразование Мёбиуса сохраняет двойное отношение (кросс-отношение) четырех точек на единичной окружности. Показывается явно, что Мёбиусова динамика сводится к динамике на диске Пуанкаре [8]. Далее показывается, что динамика на диске есть ничто иное как градиентный поток расхождения Кульбака-Лейблера на статистическом многообразии. Расхождение Кульбака-Лейблера также является мерой синхронизации, а метрика Фишера (т.е. метрика статистического многообразия) имеет особенность, кото-

рая соответствует полностью синхронизованному состоянию. Данное статистическое многообразие образовано свернутыми распределениями Коши и совпадает с диском Паункаре. Этот факт окончательно устанавливает связь между OA и WS анзацем, а также объясняет возникновение метрики диска Пуанкаре в задаче о динамике в модели на полном графе. Такая интерпретация была предложена в работе [III].

Далее обсуждаются пределы применимости OA и WS анзацев. Излагаются случаи графов, отличных от полного, для которых WS анзац применим и указывается построение пертурбативного (по неоднородностям в системе) WS анзаца. Для OA анзаца обсуждается его применимость при наличии шума вблизи критической точки, а также разложение по кумулянтам, которое является аналогом OA анцзаца при наличии шума. Особое внимание уделяется графу-звезде и его модификациям, поскольку в этом случае удается получить аналитические результаты: найти критические константы, которые соответствуют переходу в синхронизованное состояние, исследовать термодинамический предел и описать динамику синхронизации. Для графов типа “длинная звезда” и “декорированная звезда” продемонстрировано наличие гистерезиса и “ступенчатая” синхронизация, когда в системе возникают частично синхронизованные состояния. Эти результаты получены в работе [I].

Модель Курамото на графе-звезде представляет собой особый случай, т.к. может быть исследована аналитически практически полностью. Эта модель описывается системой уравнений

$$\dot{\Phi} = \beta\omega + \frac{\beta K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j - \Phi\right); \quad \dot{\theta}_j = \omega + K\sin\left(\Phi - \theta_j\right), \tag{6}$$

где $\beta > 0$, $\omega > 0$ есть параметры. Для графа-звезды в работе [9] показано, что синхронизация является фазовым переходом *первого рода* и имеется *гистерезис*. Данный гистерезис подавляется белым шумом и в модели на графе-звезде имеется трикритическая точка. Влияние такого шума на гистерезис изучено аналитически и численно в статье [II].

После обсуждения обобщений модели на модификациях графа-звезды и модели на графе-звезде с шумом, излагается математический строгий подход к построению термодинамического предела для модели Курамото на произволь-

ном взвешенном и неориентированном графе. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{7}$$

где W_{ij} есть матрица смежности взвешенного неориентированного графа G из N вершин. Построение данного предела основано на слабой сходимости вероятностных мер и применении идеи графонов — пределов последовательности графов с бесконечным числом вершин [10]. Применение графонов позволяет явно проанализировать влияние архитектуры графа, выраженной в виде матрицы W_{ij}, на значение критической константы связи [11; 12]. Графон есть симметричная и измеримая функция $W = W(x,y)$, $W : [0,1]^2 \mapsto [0,1]$. Эта функция порождает оператор Фредгольма, действующий на пространстве функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом на $[0,1]$,

$$\boldsymbol{W}[f](x) = \int_0^1 dy\, W(x,y) f(x), \tag{8}$$

спектр которого находится на отрезке $[-1,1]$. Ключевую роль играет поточечная сходимость между спектрами матриц смежности последовательности графов $\{G_n\}$ и спектром оператора $\boldsymbol{W}$.

В рамках этого подхода обсуждаются обобщения модели с шумом и инерцией, для которых с помощью анализа линейной стабильности с применением метода Пенроуза [13–15] находится положение критической точки и анализируются фазовые диаграммы. Такой подход позволяет получить аналитическое выражения для константы связи модели с белым шумом амплитуды D и инерцией m на полном графе,

$$K_c^{-1} = D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{D^2 + \omega^2} - m\,(1 + mD) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{(1 + mD)^2 + m^2\omega^2}, \tag{9}$$

которое было получено в работе [V]. Данное выражение легко обобщается на случай графов, отличных от полного. Используя метод Пенроуза, также исследуется образование более сложных режимов синхронизации, таких как бикластерная синхронизация (образование двух синхронизованных кластеров), возникновение химероподобных состояний (когда часть степеней свободы синхронизована, но глобальной синхронизации нет).

Далее вводится Гамильтонова модель среднего поля (далее HMF модель). Эта модель является бездиссипативным пределом модели Курамото с инерцией. Для этой модели также строится термодинамический предел. На примере

HMF модели описываются ключевые особенности систем с *дальнодействием*: существование долгоживущих квазистационарных состояний и затрудненность термализации [16–18]. Возникновение таких состояний связано с тем, что уравнение Власова, которое соответствует HMF-модели, имеет бесконечное число интегралов движения [19]. Эти интегралы движения отражают простой факт: фазовый объем сохраняется в процессе временной эволюции.

Синхронизация в квантовых системах

Следующая часть диссертации посвящена синхронизации в квантовых системах. В качестве квантовых систем рассматривается SYK модель с дополнительным Хаббардовским притяжением, массивы контактов Джозефсона и сверхпроводящих зерен, а также массивы поляритонных конденсатов. В каждой из перечисленных систем модель Курамото или её обобщение возникает как эффективная теория.

Комплексная SYK модель с Хаббардовским притяжением

Первым примером выступает комплексная SYK модели (т.е. фермионы в модели не майорановские, а обычные), в которой помимо случайного отталкивания имеется дополнительное Хаббардовское притяжение. Такая модель называется SYK+U моделью, она была введена и исследована в работе [20]. Гамильтониан рассматриваемой SYK-модели имеет вид

$$H_{\text{SYK}} = \ = \frac{1}{2} \sum_{ijkl,\sigma,\sigma'} J_{ijkl} \left[c^\dagger_{i\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{k\sigma'} c_{l\sigma} + c^\dagger_{l\sigma} c^\dagger_{k\sigma'} c_{j\sigma'} c_{i\sigma} \right], \tag{10}$$

где $J_{ij;kl}$ есть случайная величина с нулевым первым моментом и ненулевым вторым моментом. К этому гамильтониану добавляется Хаббардовское притяжение,

$$H_{\text{Hub}} = -U \sum_{i}^{N} c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow} c_{i\uparrow} - \mu \sum_{i,\sigma}^{N} c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma}, \tag{11}$$

где $U > 0$ есть сила притяжения, а μ есть химический потенциал. Безразмерным параметром, который контролирует силу притяжения, является отношение U/J. Предел $U/J \to \infty$ описывается обобщенной моделью Ричардсона и в этом пределе возникают локализованные пары фермионов. Обратный предел

$U/J \to 0$ есть обычная SYK-модель. В области $U/J \sim 1$ имеется нетривиальное поведение. Построение эффективного действия с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича и последующим рассмотрением седловой точки, которая возникает в пределе $N \to \infty$, приводит к эффективной теории, описываемой гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)^2 - \frac{g}{N}\sum_{i<j}^{N}\cos\left(\theta_j - \theta_i\right), \tag{12}$$

где $g > 0$ есть константа взаимодействия, имеющая квантовую природу. Условие на возникновение конденсата фаз легко находится из анализа линейной стабильности обобщенного уравнения Гросса-Питаевского для системы (12). В силу наличия дальнодействия в системе возможно нетривиальное поведение фаз, описанное в работе [IV], (см. также [21; 22]), а именно возникновение долгоживущих состояний с частичной синхронизацией фаз, т.е. квантовых аналогов квазистационарных состояний в классических системах с дальнодействием.

Сверхпроводящие зёрна и контакты Джозефсона

Механизм образования Куперовских пар в SYK+U модели является довольно экзотическим, но сам феномен возникновения щели в спектре без проявления сверхпроводимости является хорошо известным. Параметр порядка в теории сверхпроводимости является комплексной величиной, т.е. представим в виде $\Delta\exp(i\varphi)$, где Δ есть амплитуда (щель), а φ – фаза. Подавление сверхпроводимости может происходить двумя различными способами: подавление амплитуды Δ, либо потеря жесткости фазы φ. Первый сценарий связан непосредственно со взаимодействием фермионов (электронов), а именно с подавлением Куперовского притяжения. Второй сценарий называют “сценарий предсформированных пар” (англ. preformed pair scenario), т.е. Куперовские пары образуются, но сверхпроводимость не возникает. Здесь ключевым фактором оказывается, что фазы теряют дальний порядок (жесткость) и начинают меняться во времени. Эти два сценария подробно обсуждены в недавнем обзоре [23], первый сценарий часто называют фермионным, а второй — бозонным.

Сценарий с потерей сверхпроводимости за счет взаимодействия фаз Куперовских пар тесно связан с изучением низкоразмерной сверхпроводимости, а именно сверхпроводимостью в 2D плёнках. Описанный сценарий также встречается при описании систем сверхпроводяших зёрен. В работе [24] показывается,

что два сверхпроводящих зерна, размещенных на поверхности графена начинают взаимодействовать, а система таких зерен может перейти в сверхпроводящее состояние за счет эффекта близости. Это явление было экспериментально изучено в работе [25]. Описание систем сверхпроводящих зерен и динамики фаз в таких системах активно обсуждается, а начало исследований по всей видимости было заложено в [26] и привело к активным исследованиям в работах [27].

В статье [26] показано, что система из сверхпроводящих зерен описывается эффективным гамильтонианом

$$H_{\text{eff}} = \sum_{ij} \left\{ -\frac{B_{ij}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2} + J_{ij} \left(1 - \cos(\varphi_i - \varphi_j)\right) \right\}, \tag{13}$$

где матрица B_{ij} связана с матрицей емкостей, а матрица J_{ij} есть матрица Джозефсоновских энергий. В такой системе возможен фазовый переход в сверхпроводящее состояние когда Джозефсоновское взаимодействие J_{ij} оказывается достаточно сильным. В последующих работах [28; 29] уточняется влияние диссипации на такой переход. В упомянутых выше работах помимо существования предсформированных пар, важную роль играют диссипативные эффекты. После ряда обоснованных приближений, динамика фаз может быть описана посредством модели Курамото с инерцией и шумом.

Системы Джозефсоновских контактов описываются аналогичным образом, в них модель Курамото также возникает как эффективная теория в квазиклассическом пределе.

Массивы поляритонных конденсатов

В качестве следующего примера квантовой системы, в которой важную роль играет синхронизация фаз, приводятся массивы поляритонных конденсатов. Такие массивы описываются многочастичной волновой функцией Ψ, которая удовлетворяет обобщенному уравнению Гросса-Питаевского ($\hbar = 1$),

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu + i\left(\gamma_p - \gamma_l\right) + \left(g - i\kappa\right)|\Psi|^2 \right\} \Psi, \tag{14}$$

где коэффициенты $\gamma_{p,l}$ описывают линейные накачку и диссипацию, а g и κ – нелинейные накачку и диссипацию, соответственно. Данная функция $\Psi(x,t)$ может быть представлена как $\Psi(x,t) = \sum_{j=1}^{N} c_i(t)\psi_i(x)$, где $c_i(t) \in \mathbb{C}$. Подстановка такого анзаца в уравнение Гросса-Питаевского приводит к системе уравнений для коэффициентов $c_i(t)$. Оказывается, что данная система уравнений

описывает N взаимодействующих осцилляторов Ландау-Стюарта [30] и в условиях, реализуемых на эксперименте (т.е. при значениях параметров, которые используются на практике), в задаче возможна фазовая редукция. После фазовой редукции естественным образом возникает модель Курамото на графе. Поскольку динамика модели Курамото может быть рассмотрена как градиентный поток, это означает что стационарные нетривиальные решения уравнений движения для фаз минимизируют гамильтониан XY-модели на этом графе [31–33]. Важным аспектом является тот факт, что в таких системах возможно баллистическое взаимодействие между поляритонами [34]. Это взаимодействие имеет запаздывающий характер, а синхронизация в такой системе с запаздыванием может быть проанализирована с помощью метода Пенроуза.

Структура и объем работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы; сформулирована цель исследований и научная новизна; представлены выносимые на защиту научные положения.

В **главе 1** приведены основные понятия и определения, а также сведения из теории динамических систем, необходимые для дальнейшего изложения. Изложение снабжено примерами. Обсуждается процедура фазовой редукции для нелинейного осциллятора и ансамбля нелинейных осцилляторов на ряде примеров. Для системы двух нелинейных осцилляторов обсуждается возникновение синхронизации и её зависимость от параметров системы. Детально описываются основные свойства синхронизации.

В **разделе 1.1** дается определение понятию синхронизации и описываются её различные виды.

В **разделе 1.2** вводится понятие захвата фазы и излагаются основные сведения из теории динамических систем на двумерном торе. Дается определение понятию числа вращения и отображению Пуанкаре в системах на двумерном торе, описывается важный для дальнейшего изложения класс Мёбиусовых систем.

В **разделе 1.3** дается определение понятию предельного цикла в динамических системах.

В **разделе 1.4** объясняется процедура фазовой редукции для системы с устойчивым предельным циклом, вводится понятие фазы на предельном цикле

и в бассейне притяжения.

В **разделе 1.5** приводятся два примера систем с предельным циклом: осциллятор Ландау-Стюарта и осциллятор Релэя-Ван дер Поля. Указывается как появление предельного цикла связано с бифуркацией Андронова-Хопфа на примере осциллятора Ландау-Стюарта.

В **разделе 1.6** подчеркивается, что в квантовых системах также могут существовать устойчивые предельные циклы. В качестве примеров приводится предельный цикл в обобщенном уравнении Гросса-Питаевского и предельные циклы в уравнении Линдблада.

В **разделе 1.7** описывается процедура фазовой редукции для ансамбля взаимодействующих нелинейных осцилляторов, а затем в качестве примера показана фазовая редукция в ансамбле осцилляторов Ландау-Стюарта.

В **разделе 1.8** описывается простейший пример системы с синхронизацией по частоте: система из двух взаимодействующих осцилляторов Ландау-Стюарта. Для этой системы проводится фазовая редукция, вводится уравнение Адлера и обсуждается связь синхронизации по частоте с захватом фазы. Формулируются основные свойства синхронизации в многочастичных системах.

Глава 2 посвящена описанию базовых свойств простейшей версии модели Курамото. На физическом уровне строгости показывается, что синхронизация в термодинамическом пределе является непрерывным фазовым переходом.

В **разделе 2.1** проводится поиск критической константы связи, основанный на двух предположениях, касающихся синхронизованного состояния. Указываются недостатки сделанных предположений.

В **разделе 2.2** иллюстрируется, что возникновение синхронизации соответствует потере стабильности несинхронизованного состояния и проводится анализ оператора, связанного с линейной стабильностью. Указывается, что в простейшей вариации модели Курамото несинхронизованное состояние обладает только нейтральной стабильностью.

В **разделе 2.3** демонстрируется как данная нейтральная стабильность влияет на затухание слабых возмущений несинхронизованного состояния и описывается аналог затухания Ландау в модели Курамото.

В **разделе 2.4** дается описание обобщений модели Курамото, которые рассматриваются в ходе дальнейшего изложения: модель с шумом, модель с инерцией и их вариации на разных типах графов. Указываются ключевые отличия этих обобщений от модели в её простейшей вариации.

В **разделе 2.5** сформулированы промежуточные выводы по данной главе.

В **главе 3** дается описание так называемой квази-интегрируемости в модели Курамото. Под квази-интегрируемостью понимается наличие скрытой низкоразмерной динамики, чье существование обусловлено большим количеством интегралов движения, которое однако недостаточно для полной интегрируемости в смысле Лиувилля. Существование низкоразмерной динамики описывается как в термодинамическом пределе, так и в случае конечного числа степеней свободы. Глава содержит результаты работ [I; III].

В **разделе 3.1** вводится анзац Отт-Антонсена, позволяющий изучать динамику в модели Курамото в термодинамическом пределе. Указывается, что в пространстве функций распределения, описывающих динамику модели Курамото, существует инвариантное относительно динамики распределение. Объясняется его связь с распределением Коши и преобразованием Мёбиуса.

В **разделе 3.2** анзац Отт-Антонсена применяется для изучения динамики параметра порядка. Показывается, что многочастичная синхронизация также происходит асимптотически, вводится понятие времени первого достижения, т.е. времени, за которое параметр порядка достигает заданной величины и описывается распределение этих времен.

В **разделе 3.3** обсуждается динамика модели Курамото в случае конечного числа степеней свободы. Устанавливается, что модель Курамото является динамической системой на торе Мёбиусова типа, что приводит к существованию интегралов движения и скрытой низкоразмерной динамики.

В **разделе 3.4** обсуждается низкоразмерная динамика, показывается, что данная динамика является потоком на диске Пуанкаре. Дается статистическая интерпретация такой динамики в термодинамическом пределе с помощью расхождения Кульбака-Лейблера. Указывается связь динамики с градиентными потоками на статистических многообразиях и подчеркивается, что метрика Фишера может быть индикатором фазового перехода.

В **разделе 3.5** дается подробное описание о том, как архитектура взаимодействий в модели Курамото влияет на наличие интегралов движения. Указывается общая стратегия поиска низкоразмерной динамики и описывается подход, который позволяет анализировать такую динамику по теории возмущений. Приводятся примеры графов, для которых модель также обладает низкоразмерной динамикой.

В **разделе 3.6** иллюстрируется низкоразмерная динамика модели Кура-

мото на графе-звезде. Демонстрируется, что синхронизация в такой модели является фазовым переходом первого рода, т.е. имеет место так называемая взрывная синхронизация.

В **разделе 3.7** обсуждаются обобщения графа-звезды: граф типа длинная звезда и граф типа декорированная звезда. Для этих графов исследуются аналитически и численно фазовые диаграммы, обсуждается гистерезис. Для графа длинная звезда в термодинамическом пределе иллюстрируется возможность образования при больших константах связи состояний с нулевым параметром порядка, обладающих высокой симметрией. Обсуждается динамика процесса синхронизации на таких графах.

В **разделе 3.8** дается определение понятию химерных состояний. Описывается простейший пример возникновения химерного состояния и обсуждается как структура графа может влиять на возможность существования подобных состояний.

В **разделе 3.9** формулируются промежуточные выводы по данной главе.

В **главе 4** обсуждается обобщение модели Курамото с шумом. Описывается как шум влияет на стабильность полностью несинхронизованного состояния и как фазовый переход в модели может быть обнаружен разными способами. Далее описывается как шум влияет на гистерезис в модели Курамото на графе звезде. Глава содержит результаты работ [II; III].

В **разделе 4.1** обсуждается модель на полном графе, проводится построение термодинамического предела модели. Далее анализируется уравнение Фоккера-Планка, явно находятся его решения, соответствующие синхронизованным состояниям и решается уравнение самосогласованности для параметра порядка.

В **разделе 4.2** указывается как фазовый переход может быть обнаружен с помощью метрики Фишера, численно изучаются компоненты метрики Фишера, построенные на синхронизованных решения уравнения Фоккера-Планка.

В **разделе 4.3** описывается как шум влияет на стабильность несинхронизованного состояния. Демонстрируется, что шум улучшает стабильность. Проводится анализ спектра оператора линейной стабильности и указывается что вновь потеря стабильности соответствует появлению синхронизации.

В **разделе 4.4** обсуждается применимость анзаца Отт-Антонсена в случае шума и подчеркивается, что он остается применим вблизи критической точки, когда параметр порядка мал. Обсуждается также альтернатива анзаца Отт-Антонсена в виде разложение функции распределения по кумулянтам.

В **разделе 4.5** проводится анализ влияния шума на гистерезис в модели Курамото на графе-звезде. С помощью анализа решений уравнения Фоккера-Планка и применения анзаца Отт-Антонсена вблизи критической точки демонстрируется, что шум может подавлять гистерезис. Описывается механизм исчезновения гистерезиса. Аналитические результаты подтверждаются численными расчетами фазовых диаграмм.

В **разделе 4.6** даются промежуточные выводы по данной главе.

Глава 5 содержит описание математически строгого обоснования построения термодинамических пределов в модели Курамото, основанного на слабой сходимости вероятностных мер. Формулируется задача о построении предела для модели, заданной на произвольном неориентированном взвешенном графе. Приводится решение этой задачи, дается описание метода Пенроуза, который позволяет найти критическую константу связи для различных обобщений модели Курамото. Глава содержит результаты работы [V].

В **разделе 5.1** содержится определение понятия слабой сходимости вероятностных мер. Показывается как слабая сходимость позволяет построить термодинамический предел модели Курамото, так называемый предел Власова. Формулируется известная теорема, позволяющая в дальнейшем построить предел Власова для обобщений модели Курамото.

В **разделе 5.2** формулируется задача о построении предела Власова модели Курамото на произвольном графе (с учетом, что граф является взвешенным, неориентированным и плотным). Объясняется, что данная задача может быть решена с привлечением теории больших графов посредством применения графонов. Дается определение понятию графона, сходимости последовательностей графов и формулируется известная теорема о сходимости к графону. Описывается как структурные свойства графа связаны со свойствами графона. После этого формулируется теорема, связывающая структуру графа и значение критической константы связи для синхронизации на этом графе.

В **разделе 5.3** приводится исчерпывающе описание метода Пенроуза, который позволяет исследовать стабильность несинхронизованного состояния в модели Курамото в самом общем случае. Здесь же дано полное описание спектра оператора, ответственного за линейную стабильность этого состояния.

В **разделе 5.4** демонстрируется применение метода Пенроуза для различных обобщений модели Курамото: с шумом, с инерцией, с задержкой по времени. Для модели с шумом и инерцией в случае полного графа приводится

явное аналитическое выражение для критической константы связи и детально обсуждается как шум влияет на возможность существование синхронизованных кластеров и химероподобных состояний.

В **разделе 5.5** вводится Гамильтонова модель среднего поля, которая тесно связана с моделью Курамото. Приводятся основные свойства этой модели, с помощью предела Власова описываются квазистационарные состояния, возникающие в данной модели. Указываются простейшие примеры этих состояний.

В **разделе 5.6** формулируются промежуточные выводы по данной главе.

Глава 6 посвящена примерам квантовых систем, где естественным образом возникает фазовая динамика, которая может быть описана моделью Курамото или же её различными обобщениями. Глава содержит результаты работы [IV].

В **разделе 6.1** описывается SYK модель с дополнительным Хаббардовским притяжением. Показывается, что в данной модели есть квантовый фазовый переход из нормального в сверхпроводящее состояние. Этот фазовый переход может быть проанализирован аналитически, путем построения эффективного действия. Показано, что эффективное действие приводит к квантовой Гамильтоновой модели среднего поля, а переход в сверхпроводящее состояние соответствует синхронизации куперовских пар в системе. Показывается, что в квантовой Гамильтоновой модели среднего поля также существуют квазистационарные состояния с частичной синхронизацией.

В **разделе 6.2** кратко описываются системы сверхпроводящих зёрен и массивы контактов Джозефсона, где фазовая динамика возникает за счёт потери жесткости фаз и также может быть описана в рамках обобщений модели Курамото.

В **разделе 6.3** описываются массивы поляритонных конденсатов, где фазовая динамика возникает за счёт наличия хорошо локализованных конденсатов посредством фазовой редукции обобщенного уравнения Гросса-Питаевского. Описывается синхронизация на примере двух поляритонных конденсатов. Затем проводится фазовая редукция для системы большого числа конденсатов, указывается связь синхронизации с локализацией.

В **разделе 6.4** подводятся промежуточные выводы, формулируются ключевые идеи главы.

В **главе 7 (Заключение)** сформулированы основные результаты диссертации, обсуждается их связь с разработкой нейроморфных архитектур, описываются дальнейшие направления исследований.

Список литературы

1. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. — Springer, 1984.
2. Sakaguchi H. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields // Progress of theoretical physics. — 1988. — Vol. 79, no. 1. — P. 39–46.
3. Strogatz S.H., Mirollo R.E. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // Journal of Statistical Physics. — 1991. — Vol. 63, no. 3. — P. 613–635.
4. Ott E., Antonsen T.M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2008. — Vol. 18, no. 3. — P. 037113.
5. Watanabe S., Strogatz S.H. Integrability of a globally coupled oscillator array // Physical review letters. — 1993. — Vol. 70, no. 16. — P. 2391.
6. Watanabe S., Strogatz S.H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1994. — Vol. 74, no. 3/4. — P. 197–253.
7. Engelbrecht J.R., Mirollo R. Is the Ott-Antonsen manifold attracting? // Physical Review Research. — 2020. — Vol. 2, no. 2. — P. 023057.
8. Chen B., Engelbrecht J.R., Mirollo R. Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — Vol. 50, no. 35. — P. 355101.
9. Vlasov V., Zou Y., Pereira T. Explosive synchronization is discontinuous // Physical Review E. — 2015. — Vol. 92, no. 1. — P. 012904.
10. Lovász L.M. Large Networks and Graph Limits // Colloquium Publications. — 2012.

11. Chiba H., Medvedev G.S. The mean field analysis of the Kuramoto model on graphs I. the mean field equation and transition point formulas // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2019. — Vol. 39, no. 1. — P. 131–155.

12. Chiba H., Medvedev G.S. The mean field analysis of the Kuramoto model on graphs II. asymptotic stability of the incoherent state, center manifold reduction, and bifurcations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2019. — Vol. 39, no. 7. — P. 3897–3921.

13. Dietert H. Stability and bifurcation for the Kuramoto model // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 2016. — Vol. 105, no. 4. — P. 451–489.

14. Chiba H., Medvedev G.S. Stability and bifurcation of mixing in the Kuramoto model with inertia // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2022. — Vol. 54, no. 2. — P. 1797–1819.

15. Chiba H., Medvedev G.S., Mizuhara M.S. Bifurcations and patterns in the Kuramoto model with inertia // Journal of Nonlinear Science. — 2023. — Vol. 33, no. 5. — P. 78.

16. Antoni M., Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // Physical Review E. — 1995. — Vol. 52, no. 3. — P. 2361.

17. Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Birth and long-time stabilization of out-of-equilibrium coherent structures // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. — 2002. — Vol. 29, no. 4. — P. 577–591.

18. Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Out-of-equilibrium states as statistical equilibria of an effective dynamics in a system with long-range interactions // Physical review letters. — 2002. — Vol. 89, no. 11. — P. 110601.

19. Yamaguchi Y.Y., Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Stability criteria of the Vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2004. — Vol. 337, no. 1/2. — P. 36–66.

20. Wang H., Chudnovskiy A., Gorsky A., Kamenev A. Sachdev-Ye-Kitaev superconductivity: Quantum Kuramoto and generalized Richardson models // Physical Review Research. — 2020. — Vol. 2, no. 3. — P. 033025.

21. Plestid R., Mahon P., O'Dell D. Violent relaxation in quantum fluids with long-range interactions // Physical Review E. — 2018. — Vol. 98, no. 1. — P. 012112.

22. Plestid R., O'Dell D. Balancing long-range interactions and quantum pressure: Solitons in the Hamiltonian mean-field model // Physical Review E. — 2019. — Vol. 100, no. 2. — P. 022216.

23. Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T.M. Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // Nature Physics. — 2020. — Vol. 16, no. 7. — P. 734–746.

24. Feigel'man M.V., Larkin A.I., Skvortsov M.A. Quantum superconductor–metal transition in a proximity array // Physics-Uspekhi. — 2001. — Vol. 44, 10S. — P. 99.

25. Han Z., Allain A., Arjmandi-Tash H., [et al.]. Collapse of superconductivity in a hybrid tin–graphene Josephson junction array // Nature Physics. — 2014. — Vol. 10, no. 5. — P. 380–386.

26. Efetov K. Phase transitions in granulated superconductors // Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki. — 1980. — Vol. 78. — P. 2017–2032.

27. Šimánek E. Reentrant phase diagram for granular superconductors // Physical Review B. — 1985. — Vol. 32, no. 1. — P. 500.

28. Šimánek E., Brown R. Effect of dissipation on the phase transition in granular superconductors // Physical Review B. — 1986. — Vol. 34, no. 5. — P. 3495.

29. Ambegaokar V., Eckern U., Schön G. Quantum dynamics of tunneling between superconductors // Physical Review Letters. — 1982. — Vol. 48, no. 25. — P. 1745.

30. Harrison S.L., Sigurdsson H., Lagoudakis P.G. Synchronization in optically trapped polariton Stuart-Landau networks // Physical Review B. — 2020. — Vol. 101, no. 15. — P. 155402.

31. Kalinin K.P., Berloff N.G. Polaritonic network as a paradigm for dynamics of coupled oscillators // Physical Review B. — 2019. — Vol. 100, no. 24. — P. 245306.

32. Lagoudakis P.G., Berloff N.G. A polariton graph simulator // New Journal of Physics. — 2017. — Vol. 19, no. 12. — P. 125008.

33. Berloff N.G., Silva M., Kalinin K., [et al.]. Realizing the classical XY Hamiltonian in polariton simulators // Nature materials. — 2017. — Vol. 16, no. 11. — P. 1120–1126.

34. Töpfer J.D., Sigurdsson H., Pickup L., Lagoudakis P.G. Time-delay polaritonics // Communications Physics. — 2020. — Vol. 3, no. 1. — P. 2.