Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Александров Артем Александрович

Эффекты конденсации степеней свободы в сложных системах

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Горский А. С.

Москва — 2025

Оглавление

Оглавление **2**

Введение **4**

1 Основные понятия и определения **16**

1.1 Феномен синхронизации 16
1.2 Захват фазы 17
1.3 Предельный цикл в динамических системах 23
1.4 Фазовая редукция 24
1.5 Примеры систем с предельными циклами 25
1.6 Предельный цикл в квантовых системах 29
1.7 Фазовая редукция для ансамбля осцилляторов 32
1.8 Простейший случай 33

2 Модель Курамото **39**

2.1 Анализ Курамото 41
2.2 Анализ стабильности 42
2.3 Затухание Ландау в модели Курамото 45
2.4 Обобщения модели Курамото 46
2.5 Промежуточные выводы 48

3 Квази-интегрируемость модели Курамото **49**

3.1 Анзац Отт-Антонсена 49
3.2 Время выхода в синхронизованный режим 51
3.3 Динамика модели как поток на группе Мёбиуса 52
3.4 Поток на диске Пуанкаре 56
3.5 Влияние связей на квази-интегрируемость 62
3.6 Граф-звезда 64
3.7 Обобщения графа-звезды 65
3.8 Химеры 71
3.9 Промежуточные выводы 73

4 Шум в модели Курамото **75**

4.1 Модель на полном графе . . . 75
4.2 Метрика Фишера и критическая точка . . . 77
4.3 Влияние шума на стабильность . . . 78
4.4 OA анзац при наличии шума . . . 80
4.5 Влияние шума на гистерезис на графе-звезде . . . 81
4.6 Промежуточные выводы . . . 85

5 Предел Власова для модели Курамото **87**
5.1 Слабая сходимость мер . . . 87
5.2 Анализ стабильности в общем случае . . . 89
5.3 Метод Пенроуза . . . 94
5.4 Применение метода Пенроуза . . . 95
5.5 Гамильтонова модель среднего поля . . . 107
5.6 Промежуточные выводы . . . 114

6 Квантовые системы **115**
6.1 SYK модель с Хаббардовским притяжением . . . 115
6.2 Массивы контактов Джозефсона . . . 123
6.3 Конденсаты поляритонов . . . 125
6.4 Промежуточные выводы . . . 130

7 Заключение **132**
7.1 Низкоразмерная динамика модели Курамото . . . 133
7.2 Обобщение модели Курамото с шумом . . . 133
7.3 Термодинамический предел на графах . . . 134
7.4 Связь локализации и синхронизации . . . 134
7.5 Нейроморфные архитектуры . . . 135

A Решение уравнения Адлера **137**

B Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка **139**

C Вычисление резольвенты **142**

Список литературы **144**

Введение

Сложными системами мы будем называть системы, состоящие из большого числа степеней свободы, которые взаимодействуют между собой. В силу наличия взаимодействия между степенями свободы для таких систем характерны нелинейность, эмерджентность, самоорганизация и возникновение спонтанной упорядоченности, адаптивность и возникновение механизмов обратной связи. По существу все упомянутые свойства проистекают из самого первого — нелинейности. Возникновение спонтанной упорядоченности, эмерджентность и самоорганизация тесно связаны с явлением *конденсации*.

Под *конденсацией* в сложной системе понимается возникновение состояния, в котором наблюдаемая стремится к одному значению (нетривиальному) асимптотически, когда время (или другой параметр модели) стремится к бесконечности. Феномен конденсации степеней свободы широко распространен в сложных системах, среди которых можно выделить хорошо известную конденсацию Бозе-Эйнштейна, возникновение коллективного поведения, синхронизацию, аккумулирование богатства в макроэкономических моделях, образование гелей из молекул, возникновение пробок в транспортных потоках. Чтобы указать конкретный предмет исследования, мы будем рассматривать системы, в которых возникает синхронизация, обычно присущая классическим сложным системам. Однако мы не ограничиваемся только классическими системами. По этой причине в ходе нашего исследования будет естественным образом возникать феномен конденсации Бозе-Эйнштейна и связанные с ним явления.

Сложные системы широко встречаются как в природе, так и в человеческой деятельности. Несмотря на бурное развитие математических методов, компьютерных технологий и физических концепций, строгое описание таких систем и по сей день представляет амбициозную и трудную задачу. Как легко догадаться, именно существование нелинейностей вызывает трудности в попытках изучать и прогнозировать поведение сложных систем. Нелинейности играют двойную роль: с одной стороны все упомянутые особенные свойства (эмерджентное поведение и т.д.) обусловлены именно нелинейностями, а с другой стороны их присутствие делает попытки описать поведение отдельных степеней свободы практически бессмысленными. Однако существует особый класс систем, привлекающих огромное внимание исследователей, – *интегрируемые* сложные системы, для которых в виду наличия большого количества сохраняющихся величин (интегралов движения) задача об описании “индивидуальной” микроскопической динамики может быть решена и все ключевые свойства систем могут быть описаны посредством интегралов движения. В противоположность интегрируемым системам, *хаотические* и *неинтегрируемые* системы не обладают таким свойством и ключевыми ме-

тодами для их исследования являются *статистические методы*. Статистические методы сфокусированы не на микроскопическом описании, а на макроскопическом, т.е. описывают поведение системы в целом, с привлечением идей теории вероятности и статистической механики. И статистические методы, и методы теории интегрируемых систем взаимодополняют друг друга и на самом деле довольно близки по смыслу: в основе всех этих методов лежат идеи на стыке теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории динамических стохастических систем.

В ходе развития науки о сложных системах стало понятно, что требуется расширить арсенал методов для их исследования. Существует много примеров сложных систем, в которых степени свободы локализованы в вершинах некоторых графов. В качестве простейшего примера удобно привести модель Изинга на двумерной квадратной решетке. Статистическая механика оперирует с понятием термодинамического предела, поскольку именно в таком пределе идеи теории вероятности (в частности различные версии закона больших чисел) работают в полную силу. Первоначально большинство результатов для моделей типа Изинга было получено для регулярных графов-решеток, т.к. это наиболее релевантный случай, иллюстрирующий свойства кристаллических решеток и термодинамический предел для системы на решетке легко построить. Но с течением времени стало понятно, что сложные системы на произвольных и даже случайных графах представляют особый интерес. Изучение систем на таких графах тесно связано с теорией случайных матриц (в силу того, что граф можно полноценно охарактеризовать некоторым набором матриц) и также ставит перед исследователями более глубокий и концептуальный вопрос: как исследовать большие графы, так называемые *сети* или же как устроены пределы графов с большим числом вершин? Данный вопрос возник в теории графов самостоятельным образом. Его можно переформулировать в более строгом виде: как локальные особенности структуры графа отражаются на его глобальных свойствах? При этом на практике часто встречается ситуация, когда вся структура графа неизвестна и имеется информация только о его отдельных подграфах. Таким образом, современный набор методов для изучения сложных систем включает в себя теорию интегрируемых систем, статистические подходы и некоторые аспекты теории графов. Именно такое взаимопроникновение разных областей физики и математики позволяет добиться наибольшего успеха в задаче об описании поведения сложных систем и, в особенности, о возникновении эффектов конденсации в них.

Данное исследование посвящено сравнительно простой модели сложной системы, в которой феномен конденсации степеней свободы является ключевым эффектом: модели Курамото и её различным обобщениям и расширениям. Мы сознательно ограничиваемся рядом сравнительно простых моделей, на которых развиваем и иллюстрируем применение методов исследования, описанных выше. Несмотря на кажущуюся простоту, выбранные для исследования модели демонстрируют значимость, поскольку возникают как эффективные теории для ряда реализуемых в эксперименте и встречающихся в природе систем. Мы стремимся избежать простого "информирования о результатах" и ставим своей целью цельное повествование. Для удобства и честности изложения, мы указываем явно когда речь идет о полученных нами результатах.

Актуальность

Современный технологический прогресс позволяет одновременно и создавать искусственные, и детально исследовать естественные сложные системы. В искусственных системах вопросы о конденсации степеней свободы возникают в различном контексте: поддержание и создание синхронизации в энергетических сетях, возникновение когерентных состояний в квантовых устройствах, синхронизация фаз в массивах Джозефсоновских контактов и непосредственно вопросы о Бозе-конденсации в системах поляритонов и возникновении сверхпроводимости в материалах с беспорядком.

Существенная часть искусственных систем создается и разрабатывается с целью ускорить и улучшить процессы обработки и переноса информации. Особенно стоит выделить интенсивно развивающуюся область нейроморфных технологий. Нейроморфные архитектуры призваны существенно снизить энергетические затраты на проведение вычислений, а также ускорить сами вычисления за счет принципиально новой архитектуры вычислений, основанной на биомиметике. Создание таких вычислительных архитектур сопряжено с огромными трудностями по масштабируемости, быстродействию, стабильности и попросту созданию ключевых элементов нейроморфной архитектуры. Аналогичные проблемы встречаются и в области квантовых технологий, где все усилия направлены на создание квантового компьютера. Эти трудности приводят к появлению альтернативных видений вычислительной архитектуры, к примеру в виде поляритонных устройств, но и в их создании сталкиваются с похожими проблемами. Такие экспериментальные и инженерные трудности делают важным теоретическую часть процесса исследования и разработки. Теоретическое исследование призвано указать на верный путь развития, а вопросы о конденсации степеней свободы возникают естественным образом в этом исследовании, поскольку являются общими для указанных искусственных систем.

В качестве естественных сложных систем можно привести пример в виде биологических нейронных сетей. Описание динамики отдельных нейронов посредством набора обыкновенных дифференциальных уравнений оказалось успешным и было подтверждено экспериментально. В свою очередь, понимание того, как именно нейроны взаимодействуют между собой, как они связаны и организованы в живых организмах, было частично достигнуто лишь недавно и полноценной теории все еще не разработано. Среди различных теорий, описывающих *почему* и *как именно* работают биологические нейронные сети, важной является *коннектомная* теория. В рамках этой теории анализируется *коннектом* — совокупность всех нейронов и их соединений. При этом анализируют как его структурные свойства, так и динамику ансамблей нейронов. Вопросы о конденсации степеней свободы возникают естественно и здесь, поскольку синхронизация нейронов, возникновение когерентных состояний и другие виды коллективного поведения обнаруживаются экспериментально. Наконец стоит упомянуть еще один тип естественных сложных систем — сообщества, состоящие из большого числа взаимодействующих индивидов. В таких системах также возникают вопросы о конденсации степеней свободы, которая проявляется в виде образования роев, стай и мурмураций.

Феномен конденсации изначально возник в физике конденсированного состояния, но за

годы исследований стало понятно, что конденсация проявляется в различных биологических, химических и физических системах. Конечно, как и уже явно указывалось, в таких системах под конденсацией понимается довольно широкий круг явлений, но все они объединены тем, что определенные наблюдаемые, характеризующие свойства, системы ведут себя аналогичным образом, т.е. асимптотически достигают некоторого единственного (нетривиального) значения, которое обуславливается параметрами системы и её типом. Практически все примеры систем, приведенных выше, могут быть описаны в виде динамической системы с большим количеством степеней свободы, заданной на графе. Сам граф содержит информацию как о пространственной структуре системы (регулярная решетка, коннектом, случайный граф и т.д.), так и о взаимодействии между степенями свободы, т.к. взаимодействие может быть учтено в виде весов ребер графа. В такой формулировке естественным и практически значимым вопросом является: как структура графа (пространственная локализация степеней свободы и их взаимодействие) влияет на возможность конденсации? В силу изложенных выше примеров мы видим, что такой вопрос является актуальным для развития как теории сложных систем, так и для возможного технологического развития.

Цели и задачи исследования

Изложив кратко суть предмета исследования и обосновав актуальность, мы готовы сформулировать конкретные цели и задачи исследования. Основная цель исследования посвящена вопросу о том, как внутренняя организация (в частности, пространственная структура, т.е. архитектура графа) и взаимодействия влияют на возможность конденсации степеней в классической или квантовой сложной системе, а именно на возможность синхронизации и образование квазистационарных состояний в модели Курамото и её обобщениях. В исследовании мы решаем следующие задачи:

1. Применяя идеи и методы теории интегрируемых систем, развить описание низкоразмерной динамики в модели Курамото
2. Проанализировать случаи графов, для которых модель Курамото и её обобщения могут быть аналитически исследованы, в частности исследовать фазовые диаграммы модели на таких графах
3. Развить методы описания термодинамического предела модели Курамото и её обобщений на произвольных графах
4. Исследовать существование квазистационарных и химерных состояний в квантовых системах, которые могут быть описаны моделью Курамото (в качестве эффективной теории)
5. Объединить полученные результаты и сформулировать их практическую значимость для моделей в нейронауке, физике конденсированного состояния и теории динамических систем

Основные положения, выносимые на защиту

На основе полученных нами результатов, мы формулируем следующие положения:

1. Продемонстрировано, что динамика модели Курамото на полном графе может быть описана в терминах градиентного потока на статистическом многообразии, образованном свернутыми распределениями Коши. Показано, что переход в синхронизованное состояние соответствует возникновению особенностей в метрике Фишера такого многообразия. Данный результат остается верным для произвольного графа.
2. Проанализирован фазовый переход синхронизации в модели Курамото на графе-звезде с белым шумом. В термодинамическом пределе найдены явные решения, которые соответствуют синхронизованным состояниям, проанализирован переход в синхронизованное состояние. Показано, что синхронизация в такой модели является фазовым переходом первого рода, имеется гистерезис и трикритическая точка.
3. Проанализирован фазовый переход синхронизации в модели Курамото на графах, представляющих собой различные модификации графа-звезды. Показано, что имеет место гистерезис и возникновение частично синхронизованных состояний.
4. Для модели Курамото с шумом и инерцией на взвешенном неориентированном графе с помощью применения графонов найдено явное выражение для критической константы связи, проанализирована стабильность несинхронизованного состояния, возможность образования химер и кластеров синхронизации.
5. Показано, что возникновение сверхпроводимости в SYK-модели комплексных фермионов с дополнительным Хаббардовским притяжением напрямую связано с синхронизацией фаз Куперовских пар, т.к. модель Курамото с инерцией возникает как эффективная теория в такой задаче. Показано, что в квантовой модели также имеет место образование долгоживущих квазистационарных состояний. Это соответствует существованию частично когерентных пар, т.е. формированию конденсата пар, плотность которого изменяется во времени.

Научная новизна

Все результаты исследования являются оригинальными и были получены автором в ходе научной работы. Первые результаты исследования посвящены анализу синхронизации на графе-звезде и его модификациях. В работе [I] было показано, что на графе-звезде с длинными лучами синхронизация происходит поэтапно, при этом возможно образование частично синхронизованных состояний, а сам переход в синхронизованный режим имеет “взрывной” характер (англ. abrupt synchronization). В этой же работе было продемонстрировано, что в термодинамическом пределе, т.е. когда число вершин графа стремится к бесконечности, возможно образование состояний с высокой симметрией, которые глобально не синхронизованы. Следующим шагом в изучении графа-звезда стала работа [II], где автором было изучено влияние шума на “взрывную” синхронизацию на графе-звезде. В рамках этой работы было

показано, что шум подавляет гистерезис и приводит к образованию трикритической точки в системе, при этом практически весь анализ может быть проведен аналитически.

В ходе анализа графа-звезды, неоднократно возникали *свернутые* распределения (англ. wrapped distribution), в которых случайная величина распределена не на вещественной прямой, а на единичной окружности. Это привело к гипотезе о том, что явление синхронизации может быть описано в терминах энтропии вероятностных распределений. Данная гипотеза получила подкрепление в работе [III], где изучена синхронизация на полном графе и показано, что расхождение Кульбака-Лейблера является мерой синхронизации, как и метрика Фишера, сингулярности в которой соответствуют точкам фазового перехода в синхронизованное состояние.

Следующий этап исследований был посвящен обобщениям модели Курамото, а именно модели Курамото с инерцией и шумом, заданной на взвешенном неориентированном графе. В статье [IV] обсуждается синхронизация куперовских пар в SYK модели с дополнительным Хаббардовским притяжением, в которой модель Курамото с инерцией (она же Гамильтонова модель среднего поля) возникает как эффективное описание. В рамках этой статьи показано, что частично синхронизованные квазистационарные состояния существуют как в классической, так и в квантовой модели, и соответствуют нестационарному конденсату фаз.

Данные результаты были мотивацией для изучения термодинамических пределов модели Курамото на графах. В работе [V] показано, что модель Курамото с инерцией и шумом на взвешенном неориентированном графе в термодинамическом пределе может быть описана с помощью *графонов*. При этом, добавление шума не сказывается на построении доказательств сходимости между дискретной и непрерывной моделью. В свою очередь шум влияет на положение критической точки и в данной работе было впервые получено аналитическое выражение для критической константы связи, которая соответствует точке фазового перехода в синхронизованное состояние. Помимо этого, в работе обсуждается влияние шума на различные бифуркации в модели и образование паттернов синхронизации (кластеры, химеры и т.д.)

Научная новизна исследования заключается в применении комбинации идей теории графов, статистической механики и информационной геометрии. Использование идеи графонов для построения термодинамического предела позволило соискателю продвинуться в изучении обобщений модели Курамото и получить аналитические результаты для модели с шумом и инерцией. Применение градиентных потоков на статистических многообразиях позволило предложить новый взгляд на низкоразмерную динамику модели Курамото. Использование интегралов движения в модели Курамото позволило проанализировать как наличие шума влияет на фазовый переход в модели на графе-звезде, а также позволило описать частично синхронизованные состояния в обобщениях графа-звезды. Построение термодинамических пределов в модели с инерцией позволило описать квазистационарные состояния и их роль в возникновении синхронизованного состояния.

Практическая и научная ценность

Научная ценность полученных результатов заключается в развитии междисциплинарной науки о сложных системах, где методы теории вероятности, статистической физики, теории конденсированного состояния и теории динамических систем находятся в тесном пересечении с друг другом. Исследование несет теоретический характер, однако в виду специфики обсуждаемых моделей и явлений, может иметь практическую значимость.

Практическая ценность полученных результатов заключается в том, что, как минимум, некоторые из описанных в исследовании явлений можно можно легко проверить посредством экспериментов. В качестве практически значимой экспериментальной платформы следует использовать массивы поляритонных конденсатов, массивы контактов Джозефсона, осцилляторы со спиновым кручением (англ. spin-torque) или же системы сверхпроводящих зерен или микромагнетиков. Выбор таких платформ обусловлен тем, что они представляют собой видения новых вычислительных архитектур и вопросы о конденсации степеней свободы в виде синхронизации, образования квазистационарных состояний и когерентных состояний могут быть описаны в терминах обсуждаемых в исследовании моделей (модель Курамото, Гамильтонова модель среднего поля и их обобщения).

Еще один аспект, который представляет собой потенциальную практическую ценность, заключается в применении описанных в исследовании идей к нейронауке. Здесь ключевым моментом является построение термодинамического предела для многочастичной стохастической сложной системы. Изучение даже небольших совокупностей связанных нейронов, т.е. нейронных ансамблей, представляет собой трудную задачу: каждый нейрон описывается набором уравнений, имеется взаимодействие между нейронами и т.д. Методы фазовой редукции и построение термодинамических пределов для такого рода систем позволяют продвинуться в аналитическом изучении, построить приближенное описание, основанное на ряде обоснованных допущений.

Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследования были представлены на различных конференциях, семинарах и воркшопах, а именно:

Семинары: Лаборатории Физики Высоких Энергий МФТИ (г. Долгопрудный), семинары по теории твердого тела ФИАН, семинар по квантовой теории поля ФИАН, отдела механики МИАН (г. Москва), отдела теоретической физики МИАН (г. Москва), Добрушинской лаборатории ИППИ РАН (г. Москва), Лаборатории квантовой физики ИППИ РАН (г. Москва), научно-исследовательский семинар “Сложные сети” математического факультета ВШЭ (г. Москва), семинар группы топологического анализа данных ФКН ВШЭ (г. Москва)

Международные конференции: “Statistical Mechanics and its applications” (Дилижан, Армения, 2022), “The international Winter Physctech Theory School and Conference” (Цахкадзор, Армения, 2023), “Landau Week” (Ереван, Армения, 2023), “The international Summer Conference on Theoretical Physics” (Долгопрудный, Россия, 2023), “Integrable systems and its applications”

(Сириус, Россия, 2023), “Regular and Chaotic Dynamics” (Сириус, Россия, 2023), “Nor-Amberd School in Theoretical Physics” (Цахкадзор, Армения. 2024), “Ergodicity and Localization” (Триест, Италия, 2024), “Dynamic Days in Sirius” (Сириус, Россия, 2024)

Отечественные конференции: 65- и 66-ая научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 2023, 2024), “Математическая Весна” (Нижний Новгород, 2024), “Моделирование и экспериментальные исследования динамики сложных систем” (Нижний Новгород, 2024)

По материалам диссертации опубликовано 5 статей в международных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. Все результаты согласуются с результатами других специалистов, работающих в этой области исследований, что подтверждает их достоверность.

Публикации автора по теме диссертации

I. *Alexandrov A.*, *Arkhipov P.*, *Gorsky A.* Synchronization on star-like graphs and emerging $\mathbb{Z}_p$-symmetries at strong coupling // Journal of Complex Networks. — 2022. — Т. 10, № 3. — cnac015.

II. *Alexandrov A.* Synchronization on star graph with noise // Chaos, Solitons & Fractals. — 2023. — Т. 167. — С. 113056.

III. *Alexandrov A.*, *Gorsky A.* Information geometry and synchronization phase transition in the Kuramoto model // Physical Review E. — 2023. — Т. 107, № 4. — С. 044211.

IV. *Alexandrov A.*, *Gorsky A.* On out-of-equilibrium phenomena in pseudogap phase of complex SYK+ U model // Physics Letters B. — 2023. — Т. 847. — С. 138318.

V. *Alexandrov A.*, *Gorsky A.* Penrose method for Kuramoto model with inertia and noise // Chaos, Solitons & Fractals. — 2024. — Т. 183. — С. 114938.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения (Введение), пяти глав основного текста (Главы 2-6), заключения (Глава 7) и трёх приложений (A-C). Общий объем диссертации составляет 156 страниц, включая 34 рисунка и 2 таблицы. Список литературы содержит 199 ссылок.

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы; сформулирована цель исследований и научная новизна; представлены выносимые на защиту научные положения.

В **главе 1** приведены основные понятия и определения, а сведения из теории динамических систем, необходимые для дальнейшего изложения. Изложение снабжено примерами. Обсуждается процедура фазовой редукции для нелинейного осциллятора и ансамбля нелинейных осцилляторов на ряде примеров. Для системы двух нелинейных осцилляторов обсуждается возникновение синхронизации и её зависимость от параметров системы. Детально описываются основные свойства синхронизации.

В **разделе 1.1** дается определение понятию синхронизации и описываются её различные виды.

В **разделе 1.2** вводится понятие захвата фазы и излагаются основные сведения из теории динамических систем на двумерном торе. Дается определение понятию числа вращения и

отображению Пуанкаре в системах на двумерном торе, описывается важный для дальнейшего изложения класс Мёбиусовых систем.

В **разделе 1.3** дается определение понятию предельного цикла в динамических системах.

В **разделе 1.4** объясняется процедура фазовой редукции для системы с устойчивым предельным циклом, вводится понятие фазы на предельном цикле и в бассейне притяжения.

В **разделе 1.5** приводятся два примера систем с предельным циклом: осциллятор Ландау-Стюарта и осциллятор Релэя-Ван дер Поля. Указывается как появление предельного цикла связано с бифуркацией Андронова-Хопфа на примере осциллятора Ландау-Стюарта.

В **разделе 1.6** подчеркивается, что в квантовых системах также могут существовать устойчивые предельные циклы. В качестве примеров приводится предельный цикл в обобщенном уравнении Гросса-Питаевского и предельные циклы в уравнении Линдблада.

В **разделе 1.7** описывается процедура фазовой редукции для ансамбля взаимодействующих нелинейных осцилляторов, а затем в качестве примера показана фазовая редукция в ансамбле осцилляторов Ландау-Стюарта.

В **разделе 1.8** описывается простейший пример системы с синхронизацией по частоте: система из двух взаимодействующих осцилляторов Ландау-Стюарта. Для этой системы проводится фазовая редукция, вводится уравнение Адлера и обсуждается связь синхронизации по частоте с захватом фазы. Формулируются основные свойства синхронизации в многочастичных системах.

Глава 2 посвящена описанию базовых свойств простейшей версии модели Курамото. На физическом уровне строгости показывается, что синхронизация в термодинамическом пределе является непрерывным фазовым переходом.

В **разделе 2.1** проводится поиск критической константы связи, основанный на двух предположениях, касающихся синхронизованного состояния. Указываются недостатки сделанных предположений.

В **разделе 2.2** иллюстрируется, что возникновение синхронизации соответствует потере стабильности несинхронизованного состояния и проводится анализ оператора, связанного с линейной стабильностью. Указывается, что в простейшей вариации модели Курамото несинхронизованное состояние обладает только нейтральной стабильностью.

В **разделе 2.3** демонстрируется как данная нейтральная стабильность влияет на затухание слабых возмущений несинхронизованного состояния и описывается аналог затухания Ландау в модели Курамото.

В **разделе 2.4** дается описание обобщений модели Курамото, которые рассматриваются в ходе дальнейшего изложения: модель с шумом, модель с инерцией и их вариации на разных типах графов. Указываются ключевые отличия этих обобщений от модели в её простейшей вариации.

В **разделе 2.5** сформулированы промежуточные выводы по данной главе.

В **главе 3** дается описание так называемой квази-интегрируемости в модели Курамото. Под квази-интегрируемостью понимается наличие скрытой низкоразмерной динамики, чье существование обусловлено большим количеством интегралов движения, которое однако недо-

статочно для полной интегрируемости в смысле Лиувилля. Существование низкоразмерной динамики описывается как в термодинамическом пределе, так и в случае конечного числа степеней свободы. Глава содержит результаты работ [I; III].

В **разделе 3.1** вводится анзац Отт-Антонсена, позволяющий изучать динамику в модели Курамото в термодинамическом пределе. Указывается, что в пространстве функций распределения, описывающих динамику модели Курамото, существует инвариантное относительно динамики распределение. Объясняется его связь с распределением Коши и преобразованием Мёбиуса.

В **разделе 3.2** анзац Отт-Антонсена применяется для изучения динамики параметра порядка. Показывается, что многочастичная синхронизация также происходит асимптотически, вводится понятие времени первого достижения, т.е. времени, за которое параметр порядка достигает заданной величины и описывается распределение этих времен.

В **разделе 3.3** обсуждается динамика модели Курамото в случае конечного числа степеней свободы. Устанавливается, что модель Курамото является динамической системой на торе Мёбиусова типа, что приводит к существованию интегралов движения и скрытой низкоразмерной динамики.

В **разделе 3.4** обсуждается низкоразмерная динамика, показывается, что данная динамика является потоком на диске Пуанкаре. Дается статистическая интерпретация такой динамики в термодинамическом пределе с помощью расхождения Кульбака-Лейблера. Указывается связь динамики с градиентными потоками на статистических многообразиях и подчеркивается, что метрика Фишера может быть индикатором фазового перехода.

В **разделе 3.5** дается подробное описание о том, как архитектура взаимодействий в модели Курамото влияет на наличие интегралов движения. Указывается общая стратегия поиска низкоразмерной динамики и описывается подход, который позволяет анализировать такую динамику по теории возмущений. Приводятся примеры графов, для которых модель также обладает низкоразмерной динамикой.

В **разделе 3.6** иллюстрируется низкоразмерная динамика модели Курамото на графе-звезде. Демонстрируется, что синхронизация в такой модели является фазовым переходом первого рода, т.е. имеет место так называемая взрывная синхронизация.

В **разделе 3.7** обсуждаются обобщения графа-звезды: граф типа длинная звезда и граф типа декорированная звезда. Для этих графов исследуются аналитически и численно фазовые диаграммы, обсуждается гистерезис. Для графа длинная звезда в термодинамическом пределе иллюстрируется возможность образования при больших константах связи состояний с нулевым параметром порядка, обладающих высокой симметрией. Обсуждается динамика процесса синхронизации на таких графах.

В **разделе 3.8** дается определение понятию химерных состояний. Описывается простейший пример возникновения химерного состояния и обсуждается как структура графа может влиять на возможность существования подобных состояний.

В **разделе 3.9** формулируются промежуточные выводы по данной главе.

В **главе 4** обсуждается обобщение модели Курамото с шумом. Описывается как шум

влияет на стабильность полностью несинхронизованного состояния и как фазовый переход в модели может быть обнаружен разными способами. Далее описывается как шум влияет на гистерезис в модели Курамото на графе звезде. Глава содержит результаты работ [II; III].

В **разделе 4.1** обсуждается модель на полном графе, проводится построение термодинамического предела модели. Далее анализируется уравнение Фоккера-Планка, явно находятся его решения, соответствующие синхронизованным состояниям и решается уравнение самосогласованности для параметра порядка.

В **разделе 4.2** указывается как фазовый переход может быть обнаружен с помощью метрики Фишера, численно изучаются компоненты метрики Фишера, построенные на синхронизованных решения уравнения Фоккера-Планка.

В **разделе 4.3** описывается как шум влияет на стабильность несинхронизованного состояния. Демонстрируется, что шум улучшает стабильность. Проводится анализ спектра оператора линейной стабильности и указывается что вновь потеря стабильности соответствует появлению синхронизации.

В **разделе 4.4** обсуждается применимость анзаца Отт-Антонсена в случае шума и подчеркивается, что он остается применим вблизи критической точки, когда параметр порядка мал. Обсуждается также альтернатива анзаца Отт-Антонсена в виде разложение функции распределения по кумулянтам.

В **разделе 4.5** проводится анализ влияния шума на гистерезис в модели Курамото на графе-звезде. С помощью анализа решений уравнения Фоккера-Планка и применения анзаца Отт-Антонсена вблизи критической точки демонстрируется, что шум может подавлять гистерезис. Описывается механизм исчезновения гистерезиса. Аналитические результаты подтверждаются численными расчетами фазовых диаграмм.

В **разделе 4.6** даются промежуточные выводы по данной главе.

Глава 5 содержит описание математически строгого обоснования построения термодинамических пределов в модели Курамото, основанного на слабой сходимости вероятностных мер. Формулируется задача о построении предела для модели, заданной на произвольном неориентированном взвешенном графе. Приводится решение этой задачи, дается описание метода Пенроуза, который позволяет найти критическую константу связи для различных обобщений модели Курамото. Глава содержит результаты работы [V].

В **разделе 5.1** содержится определение понятия слабой сходимости вероятностных мер. Показывается как слабая сходимость позволяет построить термодинамический предел модели Курамото, так называемый предел Власова. Формулируется известная теорема, позволяющая в дальнейшем построить предел Власова для обобщений модели Курамото.

В **разделе 5.2** формулируется задача о построении предела Власова модели Курамото на произвольном графе (с учетом, что граф является взвешенным, неориентированным и плотным). Объясняется, что данная задача может быть решена с привлечением теории больших графов посредством применения графонов. Дается определение понятию графона, сходимости последовательностей графов и формулируется известная теорема о сходимости к графону. Описывается как структурные свойства графа связаны со свойствами графона.

После этого формулируется теорема, связывающая структуру графа и значение критической константы связи для синхронизации на этом графе.

В **разделе 5.3** приводится исчерпывающе описание метода Пенроуза, который позволяет исследовать стабильность несинхронизованного состояния в модели Курамото в самом общем случае. Здесь же дано полное описание спектра оператора, ответственного за линейную стабильность этого состояния.

В **разделе 5.4** демонстрируется применение метода Пенроуза для различных обобщений модели Курамото: с шумом, с инерцией, с задержкой по времени. Для модели с шумом и инерцией в случае полного графа приводится явное аналитическое выражение для критической константы связи и детально обсуждается как шум влияет на возможность существование синхронизованных кластеров и химероподобных состояний.

В **разделе 5.5** вводится Гамильтонова модель среднего поля, которая тесно связана с моделью Курамото. Приводятся основные свойства этой модели, с помощью предела Власова описываются квазистационарные состояния, возникающие в данной модели. Указываются простейшие примеры этих состояний.

В **разделе 5.6** формулируются промежуточные выводы по данной главе.

Глава 6 посвящена примерам квантовых систем, где естественным образом возникает фазовая динамика, которая может быть описана моделью Курамото или же её различными обобщениями. Глава содержит результаты работы [IV].

В **разделе 6.1** описывается SYK модель с дополнительным Хаббардовским притяжением. Показывается, что в данной модели есть квантовый фазовый переход из нормального в сверхпроводящее состояние. Этот фазовый переход может быть проанализирован аналитически, путем построения эффективного действия. Показано, что эффективное действие приводит к квантовой Гамильтоновой модели среднего поля, а переход в сверхпроводящее состояние соответствует синхронизации куперовских пар в системе. Показывается, что в квантовой Гамильтоновой модели среднего поля также существуют квазистационарные состояния с частичной синхронизацией.

В **разделе 6.2** кратко описываются системы сверхпроводящих зёрен и массивы контактов Джозефсона, где фазовая динамика возникает за счёт потери жесткости фаз и также может быть описана в рамках обобщений модели Курамото.

В **разделе 6.3** описываются массивы поляритонных конденсатов, где фазовая динамика возникает за счёт наличия хорошо локализованных конденсатов посредством фазовой редукции обобщенного уравнения Гросса-Питаевского. Описывается синхронизация на примере двух поляритонных конденсатов. Затем проводится фазовая редукция для системы большого числа конденсатов, указывается связь синхронизации с локализацией.

В **разделе 6.4** подводятся промежуточные выводы, формулируются ключевые идеи главы.

В **главе 7 (Заключение)** сформулированы основные результаты диссертации, обсуждается их связь с разработкой нейроморфных архитектур, описываются дальнейшие направления исследований.

Глава 1

Основные понятия и определения

В этой главе мы формулируем основные понятия, которые потребуются для дальнейшего изложения. Мы даем определение феномену синхронизации и описываем её виды, а затем приводим базовые сведения из теории динамических систем, необходимые для описания более сложных структур, которым посвящены последующие разделы. Отправной точкой служит описание динамических систем на двумерном торе с помощью отображения Пуанкаре и числа вращения. Дав необходимые определения, мы объясняем связь феномена захвата фазы с синхронизацией и детально обсуждаем особый класс динамических систем на торе, которые являются главным предметом данного исследования. Затем мы обсуждаем предельные циклы в динамических системах на плоскости, даем определение понятию фазовой переменной и объясняем процедуру фазовой редукции. В завершение этого раздела мы приводим примеры возникновения предельных циклов в классических и квантовых системах. Данные примеры служат опорой для обсуждения синхронизации в многочастичных классических и квантовых системах.

1.1 Феномен синхронизации

Согласно общепринятому определению, *синхронизацией* называется состояние многочастичной динамической системы, в котором *фазы* (понятие фазовой переменной будет уточнено далее) скоррелированы с друг другом. Под корреляцией понимается довольно разное поведение. Простейший случай — это так называемая *синхронизация в фазе* (англ. in-phase), когда фазы компонентов системы совпадают либо начиная с некоторого момента времени, либо асимптотически. Следующий вид, аналогичный предыдущему есть *синхронизация в противофазе* (англ. anti-phase). Последним типом из наиболее часто встречающихся в литературе является *синхронизация по частоте*, когда между фазами компонентов системы, начиная с некоторого момента времени или асимптотически, имеется не меняющаяся во времени разность фаз. Данная разность фаз определяется параметрами системы. Важно отметить, что для обсуждения синхронизации ключевым фактом является наличие периодического движения. В большинстве рассматриваемых систем, как естественных, так и искусственных, такое периодическое движение описывается в терминах *автогенератора* —

системы, в которой имеется как накачка и диссипация, но они уравновешены с друг другом. При таком условии возможно возникновение *стабильного предельного цикла* (мы дадим определение и опишем свойства далее). Среди большого массива литературы по явлению синхронизации в нелинейных системах, мы хотим отметить следующие книги: монографию [1], где в доступной форме изложены основные идеи теоретического описания синхронизации, а также монографии [2—4].

1.2 Захват фазы

1.2.1 Неформальное описание

Простейшей системой, в которой можно наблюдать синхронизацию, является фазовый осциллятор, взаимодействующий с внешней силой. В отсутствии взаимодействия фазовый осциллятор совершает колебания с частотой ω_0 и описывается лишь одной переменной, собственно фазой $\varphi \in S^1$. В таком случае мы имеем дело с *дискретной* динамической системой, которая называется *круговым отображением*,

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_0 T + K \sin \varphi_n, \tag{1.1}$$

где T есть период колебаний внешней силы, $K > 0$ есть константа взаимодействия, ω_0 есть собственная частота фазового осциллятора, а $\varphi_n \in S^1$ есть фаза осциллятора. Фазовое пространство такой системы представляет собой двумерный тор. Оказывается, что для изучения свойств такой системы полезно определить величину ρ, которую называют *числом вращения*,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{2\pi n}, \tag{1.2}$$

где φ_0 есть начальное условие. Известно также, что число вращения не зависит от начального условия φ_0 и поэтому является лишь функцией параметров задачи. В такой системе имеется два типа динамики, первый тип характеризуется иррациональными числами вращения, второй тип – рациональными. Легко видеть, что число вращения есть ничто иное как отношение наблюдаемой частоты осциллятора к частоте внешней силы. Действительно,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n - \varphi_0}{2\pi n} = \lim_{t\to\infty} \frac{T(\varphi(t) - \varphi(0))}{2\pi t} = \frac{\Omega}{\omega}, \tag{1.3}$$

где Ω есть наблюдаемая частота,

$$\Omega = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \tag{1.4}$$

а ω есть частота внешней силы, $\omega = 2\pi/T$. Теорема Данжуа утверждает, что иррациональные числа вращения соответствуют квазипериодическому движению и круговое отображение есть просто поворот окружности на угол $2\pi\rho$. В терминах частот, иррациональное число вращения соответствует *несоизмеримым* частотам. Рациональное же число вращения соответствует случаю, когда круговое отображение имеет периодическую орбиту. В этом случае частоты *соизмеримы* и осциллятор совершает периодическое движение так, что $\Omega/\omega = p/q$, где p есть

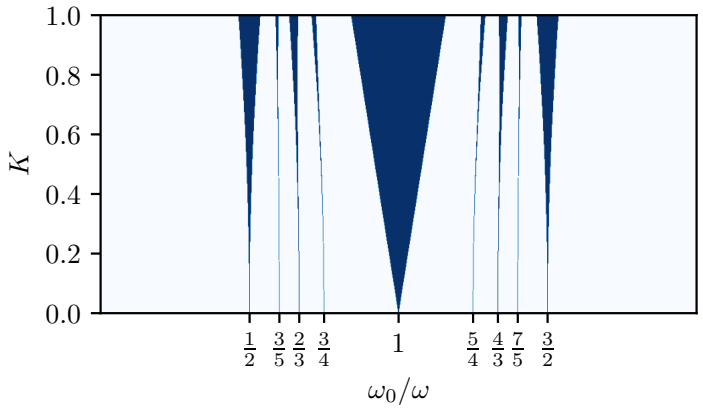


Рисунок 1.1—Языки Арнольда для системы (1.1). Внутри закрашенных областей происходит захват фазы, а число вращения является рациональным

целое, а q есть натуральное число. В случае, когда круговое отображение имеет периодическую орбиту, т.е. число вращения является рациональным, говорят, что для переменной φ происходит *захват фазы*.

Захват фазы есть обобщение понятия синхронизации по частоте. Действительно, синхронизация по частоте подразумевает совпадение частоты внешней силы и фазового осциллятора. Области фазового захвата в пространстве параметров задачи называют *языками Арнольда*. В данной задаче два параметра: отношение двух частот, т.е. ω_0/ω и сила взаимодействия $K > 0$. Хорошо известен следующий факт: взятый наугад диффеоморфизм окружности (т.е. *типичный* диффеоморфзим) имеет иррациональное число вращение, поэтому связан с поворотом окружности (например, см. обсуждение динамики на торе в [5] и [6]). На основании этого суждения, для типичного диффеоморфизма языки Арнольда представляют собой малые области в пространстве параметров задачи. В частности, это подтверждается численным анализом решений системы (1.1), см. Рисунок 1.1. Мы видим, что понятие захвата фазы тесно связано с диффеоморфизмами окружности и их свойствами. Изучение диффеоморфизмов окружности играет важную роль в теории динамических систем, поскольку с одной стороны этот класс динамических систем является очень простым, а с другой стороны демонстрирует нетривиальные свойства и встречается как “компонент” при изучении более сложных динамических систем. Дадим теперь строгое описание явлению фазового захвата для динамических систем на двумерном торе.

1.2.2 Строгое описание

Рассмотрим некоторый двумерный поток на торе, $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$, который задается следующим неавтономным дифференциальным уравнением,

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, t) \tag{1.5}$$

где $f(\varphi, t)$ есть гладкая 2π-периодическая функция по каждой переменной. Рассмотрим произвольное решение $\varphi(t)$ уравнения (1.5). Оно однозначно определяется начальным условием, $\varphi(t_0) = \varphi_0$. Заметим, что если $\varphi(t)$ является решением, то и $\varphi(t + 2\pi)$ также решение. *Числом*

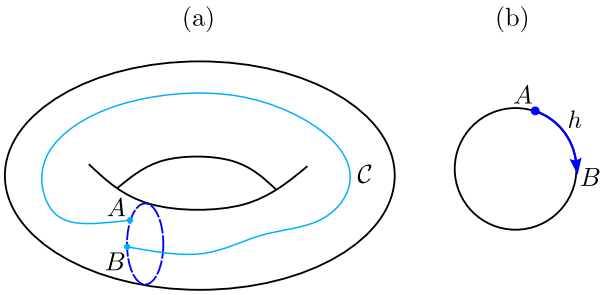


Рисунок 1.2—(a) Траектория $\mathcal{C}$ на торе, начинающаяся в точке A и приходящая в точку B после одного периода, штрихованная окружность представляет собой сечение Пуанкаре, (b) Отображение Пуанкаре h, которое отображает точку $A \in S^1$ в точку $B \in S^1$

вращения для потока (1.5) называется предел

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} \in \mathbb{R},$$

который существует и не зависит от начального условия (φ_0, t_0), см. [5]. *Отображением Пуанкаре* потока (1.5) называется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h : S^1 \to S^1$ окружности $S^1 = S^1_\varphi \times \{0\} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, определенный следующим образом: пусть $\varphi(t)$ есть решение с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0$, тогда определим $h(\varphi_0) = \varphi(2\pi)$. Каждый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S^1 \to S^1$ можно записать в координатах φ на универсальной накрывающей $\mathbb{R}$ окружности в виде $h(\varphi) = \varphi + g(\varphi)$, где $g(\varphi)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция. Функция $g(\varphi)$ определена однозначно с точностью до прибавления числа $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. По определению, *число вращения гомеоморфизма* h есть предел

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{h^k(\varphi_0)}{2\pi k} (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}).$$

Данный период не зависит от φ_0. Если добавить 2π к $g(\varphi)$, то это приведет к добавлению $m \in \mathbb{Z}$ к числу вращения ρ, что объясняет почему ρ хорошо определено по модулю $\mathbb{Z}$. Также известно, что число вращения *потока*, взятое по модулю $\mathbb{Z}$ равно числу вращения *отображения Пуанкаре*. Вычисление числа вращения позволяет изучать свойства динамической системы на торе. В частности, если число вращения рационально, то все фазовые траектории на торе замкнуты. Если же число вращения иррационально, то траектории всюду плотны. Таким образом, мы заключаем, что *захват фазы* соответствует существованию замкнутой кривой на торе.

1.2.3 Системы Мёбиуссова типа

Особо выделяется класс систем, в которых захват фазы возможен только при целых числах вращения (в то время как типично захват фазы происходит уже при рациональных числах вращения). В ходе нашего исследования такие системы занимают важное место, поэтому про них нужно рассказать отдельно. Данные системы возникают в различном контексте, в частности при изучении захвата фазы в моделях Джозефсоновского контакта и разных механических системах (см. работу [7], где доказывается целочисленность числа вращения и обсуждается модель Джозефсона).

Как мы уже знаем, отображение Пуанкаре для системы на двумерном торе является гомеоморфизмом окружности. В системах Мёбиуссова типа (мы будем также говорить *системы типа Мёбиуса)* отображение Пуанкаре $h : S^1 \to S^1$ является преобразованием Мёбиуса, которое отображает окружность в окружность. Все такие преобразования образуют трехмерную группу Ли $G \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Определим комплексную фазу $\Phi(t) = \exp(i\varphi(t))$, тогда системы на торе Мёбиуссова типа в самом общем виде могут быть представлены как

$$\dot{\Phi} = iA(t)\Phi + B(t)\left(\Phi^2 - 1\right) + C(t)\left(i\Phi^2 + i\right), \tag{1.6}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ есть некоторые заданные функции времени, имеющие одинаковый период 2π. Отображение Пуанкаре задает дискретную динамическую систему,

$$\Phi_n = \mathcal{P}\left(\Phi_{n-1}\right), \tag{1.7}$$

где $\mathcal{P} : S^1 \to S^1$ есть преобразование Мёбиуса, вид которого нам следует установить. Преобразование Мёбиуса из группы G можно представить в следующем виде,

$$\mathcal{M}(\Phi) = \zeta \frac{\Phi - w}{1 - \overline{w}\Phi}, \quad |\zeta| = 1,\ |w| < 1. \tag{1.8}$$

Это преобразование содержит три параметра: аргумент параметра ζ (т.к. $|\zeta| = 1$), мнимую и действительную части параметра w. Полагая два из трёх параметров равными нулю, мы получим три однопараметрических семейства,

$$\mathcal{M}_1 = e^{it}\Phi, \quad \mathcal{M}_2 = \frac{\Phi - t}{1 - t\Phi}, \quad \mathcal{M}_3 = \frac{\Phi + it}{1 - it\Phi} \tag{1.9}$$

Дифференцируя эти преобразования по параметру t и полагая затем $t = 0$, мы найдем инфинитезимальные генераторы группы G,

$$v_1 = i\Phi, \quad v_2 = \Phi^2 - 1, \quad v_3 = i\Phi^2 + i. \tag{1.10}$$

Отсюда мы видим, что правая часть уравнения содержит линейную комбинацию генераторов. Это означает, что решение $\Phi(t)$ следует искать в виде

$$\Phi(t) = \zeta(t)\frac{\Phi_0 - w(t)}{1 - \overline{w}(t)\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \exp(i\varphi(0)). \tag{1.11}$$

Продифференцируем (1.11) по времени с учетом $\Phi_0 = \mathrm{const}$,

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} = \dot{\zeta}\frac{\Phi_0 - w}{1 - \overline{w}\Phi_0} + \zeta\left(-\frac{\dot{w}}{1 - \overline{w}\Phi_0}\right) - \zeta\left(\frac{\Phi_0 - w}{(1 - \overline{w}\Phi_0)^2}\right)\left(-\dot{\overline{w}}\Phi_0\right) = \\ = \dot{\zeta}\overline{\zeta}\Phi - \left(\frac{\dot{w}}{\Phi_0 - w}\right)\Phi + \overline{\zeta}\dot{\overline{w}}\left(1 + \frac{w}{\Phi_0 - w}\right)\Phi^2.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Теперь обратим формулу (1.11) и заметим, что

$$\Phi_0 = \frac{\Phi + \zeta w}{\zeta + \overline{w}\Phi}, \quad \frac{1}{\Phi_0 - w} = \frac{\zeta + \overline{w}\Phi}{\Phi\left(1 - |w|^2\right)}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1.11), откуда получается

$$-\left(\frac{\dot{w}}{\Phi_0 - w}\right)\Phi = -\dot{w}\Phi \cdot \frac{\zeta + \overline{w}\Phi}{\Phi(1-|w|^2)} = -\frac{\dot{w}\zeta}{1-|w|^2} - \frac{\dot{w}\overline{w}}{(1-|w|^2)},$$
$$\frac{\overline{\zeta}\dot{\overline{w}}w}{\Phi_0 - w}\Phi^2 = \overline{\zeta}\dot{\overline{w}}w\Phi^2 \cdot \frac{\zeta + \overline{w}\Phi}{\Phi(1-|w|^2)} = \frac{\dot{\overline{w}}w}{1-|w|^2}\Phi + \frac{\overline{\zeta}|w|^2\dot{\overline{w}}}{1-|w|^2}\Phi^2,$$
$$\overline{\zeta}\dot{\overline{w}}\left(1 + \frac{w}{\Phi_0 - w}\right)\Phi^2 = \frac{\dot{\overline{w}}w}{1-|w|^2}\Phi + \frac{\dot{\overline{w}}\overline{\zeta}}{1-|w|^2}\Phi^2.$$

Собирая все вместе, мы получаем выражение для производной,

$$\dot{\Phi} = -\frac{\dot{w}\zeta}{1-|w|^2} + \left(\dot{\zeta}\overline{\zeta} + \frac{\dot{\overline{w}}w - \dot{w}\overline{w}}{1-|w|^2}\right)\Phi + \frac{\dot{\overline{w}}\overline{\zeta}}{1-|w|^2}\Phi^2. \tag{1.13}$$

Сопоставляя правые части уравнений, мы получим уравнения, описывающее эволюцию коэффициентов $w(t)$ и $\zeta(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -\left(1-|w|^2\right)\left(B(t) + iC(t)\right)\overline{\zeta}, \\ \dot{\zeta} &= iA(t)\zeta + B(t)\left(\overline{w} - \zeta^2 w\right) + iC(t)\left(\overline{w} + \zeta^2 w\right). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Начальные условия для этих уравнений нам известны. Действительно, из уравнения (1.11) следует, что начальные условия есть $w(0) = 0$ и $\zeta(0) = 1$. Таким образом, мы можем явно представить отображение Пуанкаре для нашей системы,

$$\varphi(2\pi) = \operatorname{Im}\log\mathcal{P}\left(e^{i\varphi_0}\right), \quad \mathcal{P}(\bullet) = \zeta(2\pi)\frac{\bullet - w(2\pi)}{1 - \overline{w}(2\pi)\bullet}. \tag{1.15}$$

Итак, отображение Пуанкаре есть преобразование Мёбиуса с коэффициентами, зависящими от времени и взятыми в момент времени $t = 2\pi$.

Вернемся теперь к дискретной динамической системе, которую задает отображение Пуанкаре. По определению, Ляпуновская экспонента дискретной динамической системы дается выражением

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left|\mathcal{P}'(\Phi_i)\right| = \ln\left|\mathcal{P}'\left(\Phi^*\right)\right|, \tag{1.16}$$

где Φ^* есть притягивающая (или нейтральная в параболическом случае) фиксированная точка отображения $\mathcal{P}$. При этом данный предел существует при любом начальном условии Φ_0. Согласно общей теории преобразований Мёбиуса, производные преобразования, взятые в его фиксированных точках, называются *множителями*. В общем случае преобразование Мёбиуса содержит две фиксированные точки, поэтому у нас имеется два множителя, μ_1 и μ_2. Эти два множителя удовлетворяют соотношению $\mu_1\mu_2 = 1$ и связаны с собственными значениями λ_1 и λ_2 матрицы преобразования Мёбиуса как $\mu_1 = \lambda_2/\lambda_1$, $\mu_2 = \mu_1^{-1}$.

Преобразования Мёбиуса, сохраняющие единичный диск, могут быть классифицированы в зависимости от следа матрицы преобразования Мёбиуса M, нормированной так, чтобы эта матрица имела единичный детерминант, т.е. была унимодулярной,

$$M = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 - |b|^2}}\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}, \quad a,\, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 > 0. \tag{1.17}$$

Данная матрица имеет действительный след. Если $0 < |\operatorname{tr} M| < 2$, то соответствующее преобразование называется *эллиптическим*, его фиксированные точки находятся вне единичной окружности, множители сопряжены друг другу, $\mu_1 = \overline{\mu_2}$, а само преобразование сопряжено повороту единичной окружности. Если $|\operatorname{tr} M| > 2$, то преобразование называется *гиперболическим*, оно имеет две фиксированные точки на единичной окружности, его множители действительны, причем $\mu_1 > 1$ и $\mu_2 < 1$. Если $|\operatorname{tr} M| = 2$ и преобразование не тождественно, то оно называется *параболическим*, оно имеет единственную фиксированную точку на единичной окружности, а его множители есть $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Дав классификацию преобразований Мёбиуса, укажем как из уравнений на коэффициенты $w(t)$ и $\zeta(t)$ получить явные выражения для показателей Ляпунова. Чтобы приведенная выше классификация преобразований работала, нам следует добиться унимодулярности матрицы преобразования Мёбиуса. Нормированное отображение Пуанкаре $\mathcal{P}$ имеет следующую матрицу,

$$M = \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-|w|^2)}} \begin{pmatrix} \zeta & -w\zeta \\ -\overline{w} & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

собственные значения которой есть

$$\lambda_\pm = \frac{1+\zeta \pm \sqrt{(1-\zeta)^2 + 4\zeta|w|^2}}{2\sqrt{\zeta(1-|w|^2)}}, \tag{1.19}$$

откуда следует явное выражение для множителей $\mu_1 = \mu$ и $\mu_2 = 1/\mu$ в виде

$$\mu = \frac{1+\zeta+\sqrt{(1-\zeta)^2+4\zeta|w|^2}}{1+\zeta-\sqrt{(1+\zeta)^2+4\zeta|w|^2}}. \tag{1.20}$$

Во всех формулах выше мы считаем, что коэффициенты взяты в момент времени $t = 2\pi$. Таким образом, множители преобразования Мёбиуса могут быть вычислены, если известны зависимости коэффициентов $w(t)$ и $\zeta(t)$ преобразования Мёбиуса. Зная выражения для множителей, мы можем мгновенно вычислить показатель Ляпунова (их два, но они одинаковы по модулю и противоположны по знаку), $\Lambda = \ln|\mu|$.

Пока $|\operatorname{tr} M| < 2$, то отображение Пуанкаре не имеет фиксированных точек на единичной окружности и сопряжено повороту. Это означает, что захвата фазы не происходит. В момент, когда $|\operatorname{tr} M| = 2$ появляется фиксированная точка на единичной окружности, имеющая нейтральную стабильность. Когда $|\operatorname{tr} M| > 2$, то происходит бифуркация и появляются две фиксированные точки. Одна из них является стабильной и характеризуется отрицательной Ляпуновской экспонентой, вторая является нестабильной и характеризуется положительной Ляпуновской экспонентой. Эта ситуация соответствует *захвату фазы*.

Описывая феномен захвата фазы и его связь с синхронизацией, мы не исследовали вопрос о том как в динамической системе может возникнуть фазовая (периодическая) динамика. Данная динамика может возникать под действием разных факторов, однако в контексте синхронизации нас будет интересовать конкретный сценарий возникновения периодической динамики в системах с накачкой и диссипацией: возникновение предельного цикла.

1.3 Предельный цикл в динамических системах

Особо важную роль в нашем исследовании играет понятие *предельного цикла* в динамической системе. Предельный цикл является одним из двух типов стационарного состояния системы на плоскости (т.е. динамической системы, чье фазовое пространство двумерно), второй тип – это достижение равновесия (эти утверждения основаны на теоремах Андронова-Понтрягина и Пуанкаре-Бендиксона). Предельный цикл может быть отталкивающим (с ростом времени траектории системы внутри и вне цикла уходят от него, такой цикл также называют неустойчивым или нестабильным) или притягивающим (с ростом времени траектории внутри и вне цикла асимптотически его достигают, цикл называют устойчивым или стабильным).

Строгое определение предельного цикла имеет следующий вид. Пусть задана двумерная динамическая система,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)),$$

где $\boldsymbol{V} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ есть гладкая функция. Траектория $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ называется замкнутой (периодической) если

$$\exists t_0 > 0 : \quad \boldsymbol{x}(t + t_0) = \boldsymbol{x}(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Орбитой называется образ траектории, т.е. подмножество $\mathbb{R}^2$. *Замкнутой орбитой (циклом)* называется образ замкнутой кривой. *Предельный цикл* – это цикл, который является предельным множеством некоторой другой траектории. Понятие предельного цикла не обязательно требует динамики на плоскости, определение предельного цикла аналогично и для систем с более высокой размерностью. Однако, в случае высокой размерности фазового пространства само существование предельных циклов является редким феноменом для таких систем.

Определим *фазовую переменную* $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}) \in S^1$ на предельном цикле $\mathcal{C}$. Для этого достаточно выбрать любую точку на предельном цикле $\mathcal{C}$, а затем положить $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}_0(t))$, где $\boldsymbol{x}_0(t)$ есть периодическое решение и добиться чтобы $\varphi(t) = \omega t$, $\omega = \text{const}$, т.е. фазовая переменная должна монотонно расти. Теперь расширим определение фазы на всём бассейне притяжения предельного цикла $\mathcal{C}$. Для этого рассмотрим состояния осциллятора $\{\boldsymbol{x}(t)\}$, которые сходятся к одному и тому же решению $\boldsymbol{x}_0(\varphi(t))$ на предельном цикле $\mathcal{C}$ в пределе $t \to \infty$. Набор таких состояний осциллятора называется *изохроной*. Математически это можно сформулировать так. Пусть $\Phi(\boldsymbol{x}(t))$ есть фазовая переменная в бассейне притяжения, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\Phi(\boldsymbol{x}(t))}{dt} = \nabla_{\boldsymbol{x}(t)}\Phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}), \tag{1.21}$$

и если потребовать

$$\nabla_{\boldsymbol{x}(t)}\Phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \omega$$

для любого $\boldsymbol{x}$ из бассейна притяжения, то $\dot{\varphi} = \omega$ выполняется автоматически.

1.4 Фазовая редукция

Наиболее доступное изложение понятия фазовой редукции содержится в работе [8]. В виду исключительной важности этого понятия для дальнейшего изложения, мы приведем основные сведения про фазовую редукцию. Как было указано ранее, нас интересуют такие нелинейные осцилляторы, которые можно описать системой ОДУ на плоскости вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}), \tag{1.22}$$

где $\boldsymbol{V}$ есть некоторая гладкая вектор-функция. Пусть решение $\boldsymbol{x}_0(t)$ соответствует стабильному предельному циклу. Как было показано раньше, не составляет труда ввести переменную фазы на самом предельном цикле и в его окрестности. Рассмотрим теперь ту же систему, в которой однако присутствует возмущение $\boldsymbol{I}$. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{I}$, введём функцию

$$f(\varphi, \boldsymbol{I}) = \Phi(\boldsymbol{x}_0(\varphi) + \boldsymbol{I}) - \varphi, \tag{1.23}$$

которую называют *откликом* на $\boldsymbol{I}$. Если $|\boldsymbol{I}|$ достаточно мало, то мы можем разложить функцию $\Phi(\boldsymbol{x}_0(\varphi) + \boldsymbol{I})$ по $\boldsymbol{I}$,

$$\Phi\left(\boldsymbol{x}_0(\varphi) + \boldsymbol{I}\right) = \Phi(\boldsymbol{x}_0(\varphi)) + \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \cdot \boldsymbol{I} + \mathcal{O}\left(|\boldsymbol{I}|^2\right). \tag{1.24}$$

Подставив это разложение в функцию отклика, мы получим для неё

$$f\left(\varphi, \boldsymbol{I}\right) \approx \nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \cdot I \equiv \boldsymbol{z}(\varphi) \cdot \boldsymbol{I}. \tag{1.25}$$

Функцию $\boldsymbol{z}(\varphi)$ называют функцией *чувствительности* к возмущению $\boldsymbol{I}$. Можно её определить следующим образом,

$$\boldsymbol{z}(\varphi) = \lim_{I\to 0} \frac{f(\varphi, I\boldsymbol{e})}{I}, \tag{1.26}$$

где $\boldsymbol{e}$ есть единичный вектор и обозначено $I = |\boldsymbol{I}|$. Рассмотрим осциллятор с возмущением,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) + \epsilon\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \epsilon \ll 1. \tag{1.27}$$

С учетом введённой функции отклика, мы можем записать уравнение динамики фазы как

$$\dot{\varphi} = \dot{\Phi}(\boldsymbol{x}(t)) = \omega + \epsilon\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}(t)} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t). \tag{1.28}$$

Поскольку ϵ мало, то отклонение от предельного цикла также можно считать малым, поэтому можно приблизить градиент фазы как

$$\nabla_{\boldsymbol{x}(t)}\Phi(\boldsymbol{x}(t))\big|_{\boldsymbol{x}(t)} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t), t) \approx \nabla_{\boldsymbol{x}(t)}\Phi(\boldsymbol{x}(t))\big|_{\boldsymbol{x}_0} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{z}(\varphi(t)) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t). \tag{1.29}$$

В итоге, мы получаем уравнение для $\varphi(t)$ вида

$$\dot{\varphi} = \omega + \epsilon\boldsymbol{z}(\varphi) \cdot \boldsymbol{F}(\varphi, t). \tag{1.30}$$

Рассмотрим теперь случай, когда внешняя сила $\boldsymbol{F}$ является периодической функцией с частотой Ω. Будем также считать, что частоты ω и Ω близки, а именно

$$\omega - \Omega = \epsilon\Delta\omega, \quad \Delta\omega = \mathcal{O}(1). \tag{1.31}$$

Введем переменную $\theta(t) = \varphi(t) - \Omega t$, которая будет удовлетворять уравнению

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega - \epsilon \boldsymbol{z}(\theta(t) + \Omega t) \cdot \boldsymbol{F}(t) = \epsilon \left\{ \Delta\omega + \boldsymbol{z}\left(\theta(t) + \Omega t\right) \cdot \boldsymbol{F}(t) \right\}. \tag{1.32}$$

В этом уравнении переменная $\theta(t)$ является *медленной*, а переменная Ωt является *быстрой*. Усредним по быстрой переменной, что приведет к уравнению вида

$$\dot{\theta} = \epsilon \left\{ \Delta\omega + \Gamma(\theta) \right\}, \tag{1.33}$$

где функция $\Gamma(\theta)$ есть

$$\Gamma(\theta) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' \, \boldsymbol{z}\left(\theta + \Omega t'\right) \cdot \boldsymbol{F}(t') \; = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \boldsymbol{z}\left(\theta + \psi\right) \cdot \boldsymbol{F}(\psi/\Omega). \tag{1.34}$$

Погрешность в правой части уравнения есть $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. При этом, уравнение для $\theta(t)$ является автономным, поэтому его легче анализировать. Исследуем фиксированные точки этого уравнения. Две фиксированные точки существует если

$$\min \Gamma(\theta) < \Delta\omega < \max \Gamma(\theta). \tag{1.35}$$

Одна из этих точек является стабильной, другая – нестабильной. Это значит, что фаза $\theta(t) = \varphi(t) - \Omega t$ стремится к стабильной фиксированной точке при $t \to \infty$, то есть имеет место *захват фазы*. Мы полагали, что частоты ω и Ω слабо отличаются, т.е. выполняется $\omega : \Omega \approx 1 : 1$. Если частоты являются соизмеримыми, т.е. $\omega/\Omega = p/q$, где $p/q \in \mathbb{Q}$, то приведенные выше рассуждения остаются верными.

1.5 Примеры систем с предельными циклами

Рассмотрим теперь примеры фазовой редукции и возникновения предельных циклов в классических системах. Цель этого раздела состоит в том, чтобы проиллюстрировать введенные ранее понятия и подчеркнуть их физическую значимость.

1.5.1 Осциллятор Ландау-Стюарта

Рассмотрим в качестве первого примера *осциллятор Ландау-Стюарта* (далее L-S осциллятор), который задается системой уравнений первого порядка следующего вида,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y - (\beta x - \eta y)\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y - (\eta x + \beta y)\left(x^2 + y^2\right), \end{cases} \tag{1.36}$$

где параметры α, ω, β, $\eta \in \mathbb{R}$. Введем переменную $z = x + iy$, тогда получим одно уравнение для комплексной переменной,

$$\dot{z} = (i\omega + \alpha)\, z - (\beta + i\eta)\, |z|^2 z, \tag{1.37}$$

Введём переменные

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x},$$

т.е. $z = r\exp\{i\theta\}$. Эти переменные удовлетворяют уравнениям

$$\dot{r} = \left(\alpha - \beta r^2\right) r, \quad \dot{\theta} = \omega - \eta r^2. \tag{1.38}$$

Отметим, что переменная θ *не является* фазой. Это просто угловая переменная. Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} r(t) &= \left\{ \frac{\beta}{\alpha} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-2\alpha t} \right\}^{-1/2}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + \left(\omega - \frac{\alpha\eta}{\beta} \right) t - \frac{\eta\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{\beta r_0^2}{\alpha} + \left(1 - \frac{\beta r_0^2}{\alpha} \right) e^{-2\alpha t} \right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

где $\theta_0 = \theta(0)$ и $r_0 = r(0)$ есть начальные условия. В пределе $t \to \infty$, мы получаем,

$$r(t) \to r_{\mathrm{LC}} = \sqrt{\beta/\alpha} \tag{1.40}$$

и видим что частота фазы есть $\omega_0 = \omega - \alpha\eta/\beta$, т.е. $z_{\mathrm{LC}}(t) = r_{\mathrm{LC}}\exp\{i\omega_0 t + i\theta_0\}$. В исходных переменных предельный цикл выглядит как

$$(x_0(t),\, y_0(t))^T = (r_{\mathrm{LC}}\cos(\omega_0 t + \theta_0),\, r_{\mathrm{LC}}\sin(\omega_0 t + \theta_0))^T \tag{1.41}$$

Мы видим что на предельном цикле период осцилляций есть $T = 2\pi/\omega_0$, а их частота есть ω_0. Угловая переменная $\theta(t)$ является фазой, но только на предельном цикле. Зная это, мы можем ввести переменную фазы $\varphi = \varphi(z)$ во всей плоскости,

$$\varphi(z) = \varphi(r, \varphi) = \arg z - \frac{\eta}{\beta}\ln|z| = \theta - \frac{\eta}{\beta}\ln r. \tag{1.42}$$

Эта переменная удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} - \frac{\eta}{\beta r}\frac{dr}{dt} = \omega - \eta r^2 - \frac{\eta}{\beta}\left(\alpha - \beta r^2\right) = \omega_0 = \omega - \frac{\eta\alpha}{\beta} = \mathrm{const}\,. \tag{1.43}$$

т.е. действительно является фазовой переменной. Вычислим чувствительность $\boldsymbol{z}(\theta)$ для этой системы. Для этого достаточно продифференцировать фазовую переменную $\varphi = \varphi(x, y)$ в точке (x_0, y_0), где решения $x_0(t)$ и $y_0(t)$ соответствуют предельному циклу. Это вычисление приводит к следующему выражению для $\boldsymbol{z}(\theta)$,

$$\boldsymbol{z}(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,(-\eta\cos\theta - \beta\sin\theta,\ \beta\cos\theta - \eta\sin\theta)^T \tag{1.44}$$

Исследуем теперь поведение системы (1.37) при изменении параметров. Рассмотрим для этого уравнения (1.38). Изучим фиксированные уравнения для $r(t)$ в зависимости от параметров α и β. Имеется четыре возможности, описанные в Таблице 1.1.

Зафиксируем $\beta > 0$ и начнем изменять α. Пока $\alpha < 0$ у нас есть только стабильная фиксированная точка, при $\alpha = 0$ происходит бифуркация Андронова-Хопфа (А-Н бифуркация): из стабильной фиксированной точки рождается устойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{\beta/\alpha}$. Это называют *мягкой потерей устойчивости*. Если же мы зафиксируем $\beta < 0$ и начнем изменять α, то картина изменится. В области $\alpha < 0$ у нас имеется предельный цикл, которой исчезает в точке $\alpha = 0$ и превращается в одну стабильную фиксированную точку. Это называют *жесткой потерей устойчивости*. Если $\alpha < 0$ при $\beta < 0$, то А-Н бифуркацию называют *суперкритической*. Если $\alpha > 0$ при $\beta > 0$, то бифуркацию называют *субкритической*. Осциллятор Ландау-Стюарта является нормальной формой бифуркации Андронова-Хопфа.

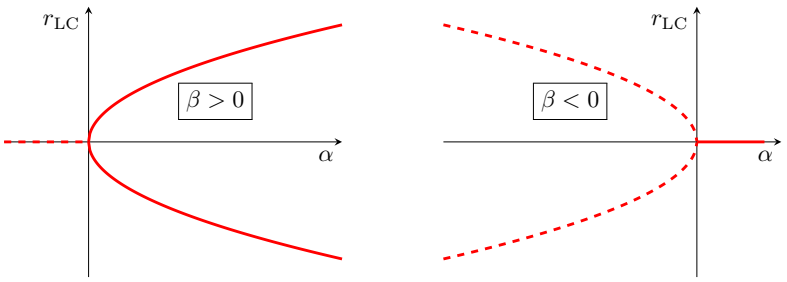


Рисунок 1.3—Слева: субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ($\beta > 0$) в осцилляторе Ландау-Стюарта, при $\alpha > 0$ появляется устойчивый предельный цикл радиуса r_{LC}; справа: суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа ($\beta < 0$), при $\alpha < 0$ есть неустойчивый предельный цикл радиуса r_{LC}

параметры	точка $r = 0$	предельный цикл
$\alpha < 0,\ \beta > 0$	стабильная	—
$\alpha > 0,\ \beta > 0$	нестабильная	устойчивый
$\alpha < 0,\ \beta < 0$	стабильная	неустойчивый
$\alpha > 0,\ \beta > 0$	нестабильная	—

Таблица 1.1—Свойства фиксированной точки $r = 0$ и предельного цикла в зависимости от параметров α и β

1.5.2 Осцилятор Рэлея-Ван дер Поля

Случай L-S осциллятора оказывается чрезвычайно простым для анализа, потому что в этом случае фазовая переменная находится просто и не требуется делать фазовую редукцию. Более сложный случай – это так называемый *осциллятор Рэлея-Ван дер Поля* (RVdP осциллятор). Рассмотрим нелинейный осциллятор с накачкой и диссипацией,

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = (\kappa - \lambda)\,\dot{x} - \tilde{\eta}\dot{x}x^2 - \tilde{\zeta}\,(\dot{x})^3\,, \tag{1.45}$$

затем перемасштабируем время, $t \to \omega t$,

$$m\omega^2\ddot{x} + m\omega^2 x = \omega\,(\kappa - \gamma) - \omega\tilde{\eta}\dot{x}x^2 - \omega^3\tilde{\zeta}\,(\dot{x})^3 = 0,$$

и введем новые обозначения,

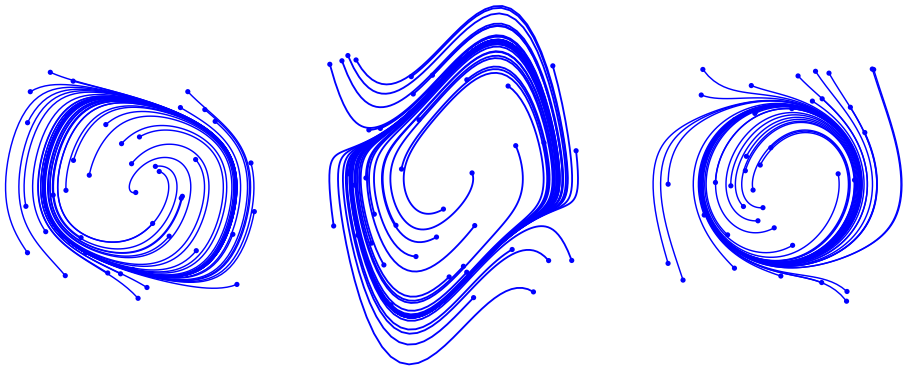
$$\epsilon = \frac{\kappa - \lambda}{m\omega}, \quad \gamma\eta = \frac{\tilde{\eta}}{m^2\omega^2}, \quad \gamma\zeta = \frac{\tilde{\zeta}}{m^2}.$$

В новых переменных уравнение движения осциллятора принимает вид

$$\ddot{x} + x - \epsilon\dot{x} + \gamma\left(\eta x^2 + \zeta\dot{x}^2\right)\dot{x} = 0. \tag{1.46}$$

Параметр $\gamma > 0$ является безразмерным и описывает общую нелинейную диссипацию, а параметры η и ζ соответствуют двум разным вкладам в эту диссипацию. Разные соотношения параметров η и ζ соответствуют разным моделям, а именно:

1. при $\eta = 0$ и $\zeta = 1$ система называется *осциллятором Рэлея*
2. при $\eta = 1$ и $\zeta = 0$ система называется *осциллятором Ван дер Поля* (VdP)
3. при $\eta = 1$ и $\zeta = 1$ система называется *осциллятором Рэлея-Ван дер Поля* (RVdP)



$\eta = 0,\ \zeta = 1$ $\eta = 1,\ \zeta = 0$ $\eta = 1,\ \zeta = 1$

Рисунок 1.4—Стабильные предельные циклы, возникающие в ходе эволюции с разных начальных условий в фазовом пространстве (синие точки) для разных параметров η и ζ

Соответствующие стабильные предельные циклы изображены на Рисунке 1.4. Для анализа систем типа (1.46) применяют теорию возмущений, в основе которой лежит знание о существовании двух хорошо различимых временных масштабах. Коэффициент ϵ определяет характерный временной масштаб, поэтому можно ввести переменную $T = \epsilon t$. Если $\epsilon \ll 1$, то $T = \epsilon t$ называют *медленным временем*. Введя разные временные масштабы, можно искать решение в виде

$$x(t, \epsilon) = x_0(t, T) + \epsilon x_1(t, T) + \epsilon^2 x_2(t, T) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{1.47}$$

Применим идею о разделении временных масштабов к нашей задаче. С точностью до ϵ^2 выражения для производных имеют вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial T} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}. \tag{1.48}$$

Подставив эти выражения для производных и анзац (1.47) в уравнение (1.46), мы получим уравнения для $x_0(t, T)$, $x_1(t, T)$ и т.д. Собирая слагаемые в нужном порядке по ϵ, мы можем найти решение $x_0(t, T)$, коэффициенты в котором однако теперь являются функциями временного масштаба T. В ряде теории возмущений будут возникать неограниченно растущие во времени вклады, которые называют *секулярными*. Чтобы устранить эти члены, необходимо чтобы коэффициенты решения $x_0(t, T)$ удовлетворяли определенным уравнениям. Чтобы увидеть это, удобнее всего представить решение как

$$x(t) = \frac{1}{2}\left\{A(T)e^{-it} + \text{с.с.}\right\} + \epsilon x_1(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad T = \epsilon t, \tag{1.49}$$

где с.с. означает комплексное сопряжение. Чтобы секулярные вклады исчезли, необходимо чтобы коэффициент $A = A(T)$ удовлетворял уравнению

$$\frac{dA}{dT} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta + 3\zeta|A|^2}{4A_c^2}\right) A, \quad A_c = \frac{\epsilon}{\gamma}. \tag{1.50}$$

Неподвижные точки уравнения (1.50) определяются нулями правой части. Неподвижная точка $A_0 = 0$ является стабильным фокусом, а ноль скобки определяет радиус предельного цикла,

$$|A_0| = \frac{2A_c}{\sqrt{\eta + 3\zeta}}, \tag{1.51}$$

при этом фаза комплексного числа A_0 остается незафиксированной. Несмотря на нелинейность, уравнение (1.50) легко решить. Для этого удобно использовать представление $A(T) = r(T)\exp\{i\varphi(T)\}$, тогда мы получим систему

$$\frac{dr}{dT} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad \frac{d\varphi}{dT} = 0, \tag{1.52}$$

где $r_0 = 2A_c/\sqrt{\eta + 3\zeta}$. Переменная φ является фазовой, поскольку $\dot{\varphi} = 0$.

1.5.3 Изостабильные координаты

Важно отметить, что введение фазовой переменной может быть не столь простым в ряде случаев. Проиллюстрируем это на следующем примере,

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma x - y - \sigma a\,(x^2 + y^2)\,, \\ \dot{y} = x + \sigma y - \sigma y\,(x^2 + y^2) + g(t), \end{cases} \tag{1.53}$$

Введем новые переменные $\tan\theta = y/x$, $r^2 = x^2 + y^2$, тогда

$$\begin{cases} \dot{r} = \sigma r(1 - r^2) + g(t)\sin\theta, \\ \dot{\theta} = 1 + g(t)\cos\theta/r. \end{cases} \tag{1.54}$$

В отсутствии внешней силы $g(t)$ в системе имеется предельный цикл $r = 1$. Фазовая переменная на предельном цикле удовлетворяет уравнению

$$\dot{\theta} = 1 + g(t)\cos\theta \tag{1.55}$$

Но если мы захотим определить фазовую переменную не на самом предельном цикле $r = 1$, а в его окрестности, то столкнемся с тем, что одинаковые начальные условия $\theta(0) = 0$ по разному откликаются на возмущение. Чтобы разрешить эту проблему, вводят изостабильные координаты. Общее построение изостабильных координат и описание изостабильных координат для указанного выше примера приведено в работе [9].

1.6 Предельный цикл в квантовых системах

1.6.1 Нелинейное уравнение Шрёдингера

Квантовые системы, как многочастичные, так и одночастичные, могут быть описаны волновой функцией $\Psi = \Psi(\boldsymbol{x}, t)$, которая является комплекснозначной и может быть представлена в виде

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{x}, t)}\exp\left\{i\varphi(\boldsymbol{x}, t)\right\},$$

где $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ есть функция плотности, а $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ есть фаза волновой функции (не путать с фазовой переменной). Динамика квантовой системы описывается нестационарным уравнением

Шрёдингера и его различными обобщениями. Среди этих обобщений диссипативное уравнение Гросса-Питаевского играет важную роль в описании открытых квантовых систем,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left\{-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu + i\left(\gamma_p - \gamma_l\right) + \left(g - i\kappa\right)|\Psi|^2\right\}\Psi + \xi, \tag{1.56}$$

где μ есть химический потенциал, γ_p & γ_l есть накачка и диссипация, g коэффициент нелинейности, а κ описывает двухчастичные процессы диссипации, $\xi = \xi(t)$ есть белый шум,

$$\langle\overline{\xi(\boldsymbol{x},t)}\xi(\boldsymbol{x}',t)\rangle_\xi = 2D\delta(t-t')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

который можно представить в виде $\xi = \xi_R + i\xi_I$. Положим временно $\xi = 0$, выпишем уравнения для $\rho(\boldsymbol{x},t)$ и $\varphi(\boldsymbol{x},t)$,

$$\begin{aligned}\partial_t\rho &= 2\left(\gamma_p - \gamma_l\right)\rho - 2\kappa\rho^2 - \frac{\rho(\partial_x^2\varphi)}{m} - \frac{(\partial_x\rho)(\partial_x\varphi)}{m},\\ \partial_t\varphi &= \mu + g\rho - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial_x^2\rho}{\rho} - (\partial_x\varphi)^2 - \frac{(\partial_x\rho)^2}{4\rho}\right).\end{aligned} \tag{1.57}$$

Уравнение для $\rho(\boldsymbol{x},t)$ имеет решение в виде стабильного предельного цикла, если считать что плотность слабо зависит от координаты, т.е. $\partial_x\rho \approx \partial_x^2\rho \approx 0$. Радиус предельного цикла есть

$$\rho_0 = \frac{2\kappa m}{2m(\gamma_p - \gamma_l) - (\partial_x^2\varphi)} \approx \frac{\kappa}{(\gamma_p - \gamma_l)} + \frac{\kappa}{2(\gamma_p - \gamma_l)^2}(\partial_x^2\varphi).$$

Подстановка этого решения в уравнение для $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ приводит к уравнению вида

$$\partial_t\varphi = a + b\Delta\varphi - c(\nabla\varphi)^2, \tag{1.58}$$

где a, b, c есть коэффициенты, содержащие параметры μ, g, κ, $\gamma_{p,l}$. Таким образом в системе (1.56) существование предельного цикла приводит к уравнению (1.58) для величины $\varphi(\boldsymbol{x},t)$, которая в случае если она не зависит от $\boldsymbol{x}$ является фазой на предельном цикле. Появление такого уравнения связывают со спонтанным нарушением непрерывной симметрии.

Напомним, что спонтанное нарушение симметрии может быть обнаружено с помощью корреляционной функции $\langle\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(0,0)\rangle$. В фазе со спонтанно-нарушенной симметрией имеет место поведение

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\langle\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(0,0)\rangle = c \neq 0, \tag{1.59}$$

т.к. в этой фазе мы можем приближенно считать $\Psi(\boldsymbol{x},t) \approx \Psi_0$, где $\Psi_0 = \text{const}$. Если же существует предельный цикл, то коррелятор ведет себя как

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\langle\Psi(\boldsymbol{x},t)\Psi(0,0)\rangle = c(t) \neq 0, \tag{1.60}$$

где $c(t)$ есть периодическая функция, т.к. в этом случае $\Psi(\boldsymbol{x},t) \approx \Psi_0(t)$, где $\Psi_0(t)$ тоже является периодической функцией. Сравнивая эти два поведения, мы заключаем, что *возникновение* предельного цикла ассоциировано со спонтанным нарушением *трансляционной симметрии по времени*. Поскольку трансляционная симметрия является непрерывной, то согласно теореме

Намбу-Голдстоуна должна появиться *мягкая мода*. Данная мягкая мода есть фаза $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\partial_t \varphi - C_1 \nabla^2 \varphi + C_2 (\nabla \varphi)^2 + \xi = 0, \tag{1.61}$$

где $C_{1,2}$ есть некоторые коэффициенты. Данное уравнение является ничем иным как уравнением Кардара-Паризи-Чжана (KPZ-уравнением). Отсюда мы заключаем, что фаза, удовлетворяющая KPZ-уравнению и есть мягкая мода (т.е. голдстоун), который соответствует спонтанному нарушению трансляционной симметрии по времени (возникновению предельного цикла). данная гипотеза была выдвинута в работе [10].

1.6.2 Уравнение Линдблада

Описанный выше сценарий не является единственно возможным, предельные циклы могут проявляться в квантовых системах и иным образом. Однако по-прежнему важнейшую роль играет существование накачки и диссипации, компенсирующих друг друга. Укажем еще один пример квантовой системы, в которой возникает предельный цикл, описанный в работах [11—14]. Рассмотрим обычный квантовый гармонический осциллятор, взаимодействующий со средой. Эволюция такой системы описывается *уравнением Линдблада* для матрицы плотности ρ,

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \gamma_+ \mathcal{D}[a^\dagger](\rho) + \gamma_- \mathcal{D}[a](\rho) + \kappa_2 \mathcal{D}[a^2](\rho), \tag{1.62}$$

где операторы Линдблада устроены как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[a^\dagger](\rho) &= a^\dagger \rho a - \frac{1}{2}\left(a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger\right), \\ \mathcal{D}[a](\rho) &= a \rho a^\dagger - \frac{1}{2}\left(a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a\right), \\ \mathcal{D}[a^2](\rho) &= a^2 \rho a^{\dagger 2} - \frac{1}{2}\left(a^{\dagger 2} a^2 \rho + \rho a^{\dagger 2} a^2\right), \end{aligned} \tag{1.63}$$

а коэффициенты $\gamma_\pm$ и κ_2 описывают скорость процессов накачки и диссипации, операторы a и $a^\dagger$ есть операторы рождения и уничтожения квантового гармонического осциллятора. Имея уравнение Линдблада, легко выписать уравнение для динамики любых наблюдаемых. В частности, для оператора a получаем

$$\frac{d\langle a \rangle}{dt} = -i\omega \langle a \rangle + \kappa_1 \langle a \rangle - 2\kappa_2 \langle a^\dagger a^2 \rangle. \tag{1.64}$$

В классическом пределе оператор a можно заменить на комплексное число α, которое описывает когерентное состояние. Легко видеть, что это уравнение совпадает с уравнением L-S осциллятора. Используя представление Вигнера для матрицы плотности, можно также показать, что в уравнении для функции Вигнера и его квазиклассическом пределе также возникают предельные циклы, см. работу [11]. Более того, если рассматривать два взаимодействующих с друг другом гармонических осцилляторов, помещенных в среду, возникает квантовый аналог языка Арнольда, что было показано в работе [13].

1.7 Фазовая редукция для ансамбля осцилляторов

Ранее мы определили понятие фазовой редукции и продемонстрировали как она устроена на примере осциллятора, взаимодействующего с внешней периодической силой. Теперь мы хотим провести фазовую редукцию для системы из большого числа взаимодействующих нелинейных осцилляторов, следуя работе [8]. Рассмотрим ансамбль нелинейных осцилляторов со взаимодействием,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{f}_j\left(\boldsymbol{x}_j\right) + \epsilon \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{G}_{jk}\left(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k\right), \tag{1.65}$$

где величина $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_j)$ характеризует невозмущенную динамику каждого осциллятора, $\boldsymbol{G}_{jk}(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_k)$ есть матрица связей, которая описывает влияние k-го осциллятора на j-ый осциллятор. Величина ϵ является константой и считается малой в сравнении с параметрами каждого осциллятора. Более того, мы полагаем что функция $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_j)$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j) + \epsilon \boldsymbol{h}_j(\boldsymbol{x}_j)$. Это означает, что мы считаем осцилляторы слабо отличающимися друг от друга. По этой причине величину $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_j)$ мы будем также рассматривать как возмущение вместе со взаимодействием осцилляторов.

Пусть система $\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)$ имеет стабильный предельный цикл с частотой $\omega = 2\pi/T$, состояния на котором мы обозначим как $\boldsymbol{x}_0$. Тогда мы можем написать следующие уравнения для фазовой динамики,

$$\dot{\theta}_j = \omega + \epsilon \boldsymbol{z}(\theta_j) \cdot \left[\boldsymbol{f}_j(\theta_j) + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{G}_{jk}(\theta_j, \theta_k) \right], \tag{1.66}$$

где $\boldsymbol{z}(\theta_j)$ есть функция чувствительности, функция $\boldsymbol{f}_j(\theta_j)$ берется на предельном цикле, то есть $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}_0(\theta_j(t))$ и матрица связей также вычисляется на предельном цикле, $\boldsymbol{G}_{jk}(\theta_j, \theta_k) = \boldsymbol{G}_{jk}(\boldsymbol{x}_0(\theta_j(t)), \boldsymbol{x}_0(\theta_k(t)))$. Полученное уравнение верно в линейном порядке по ϵ, а погрешность между редуцированной и полной динамикой есть $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Считая что неоднородности и связи достаточно слабы, введем переменную $\varphi_j = \theta_j - \omega t$, тогда

$$\dot{\varphi}_j = \epsilon \boldsymbol{z}\left(\varphi_j + \omega t\right) \cdot \left[\boldsymbol{f}_j(\varphi_j + \omega t) + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{G}_{jk}\left(\varphi_j + \omega t, \varphi_k + \omega t\right) \right]. \tag{1.67}$$

В этом уравнении правая часть линейна по ϵ, причем ϵ мы считаем малым. Это означает, что переменная φ_j является медленной. Тогда мы можем усреднить правую часть, записав

$$\dot{\varphi}_j = \epsilon \left\{ \Delta_j + \sum_{k=1}^{N} \Gamma_{jk}\left(\varphi_j - \varphi_k\right) \right\}. \tag{1.68}$$

В этом уравнении величина

$$\Delta_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi\, \boldsymbol{f}_j(\psi) \cdot \boldsymbol{z}(\psi) \tag{1.69}$$

описывает отклонение частоты j-го осциллятора от частоты ω. Функция $\Gamma_{jk}(\varphi)$, определяемая выражением

$$\Gamma_{jk}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi\, \boldsymbol{z}\left(\psi + \varphi\right) \cdot \boldsymbol{G}_{jk}\left(\psi + \varphi, \psi\right) \tag{1.70}$$

называется *функцией взаимодействия фаз*. Важно подчеркнуть, что эта функция зависит именно от *разности фаз*, а не от каждой из фаз в отдельности. Теперь вернемся к переменной θ_j, для этого достаточно подставить $\theta_j = \varphi_j + \omega t$. Сделав это, мы получим окончательный вид фазовой динамики,

$$\dot{\theta}_j = \omega_j + \epsilon \sum_{k=1}^{N} \Gamma_{jk} \left(\theta_j - \theta_k\right), \tag{1.71}$$

где мы обозначили $\omega_j = \omega + \epsilon\Delta_j$. Важно отметить, что требуя малости по ϵ мы сравниваем ϵ с параметрами самого осциллятора, поэтому данное приближение контролируемо: оно не является формальным разложением по малому параметру.

Данная процедура фазовой редукции может быть применена к произвольному ансамблю нелинейных взаимодействующих осцилляторов, имеющих стабильный предельный цикл. Поскольку важно лишь наличие стабильного предельного цикла, удобно продемонстрировать в качестве примера ансамбль L-S осцилляторов. Такой выбор связан с тем, что L-S осциллятор является нормальной формой A-H бифуркации.

1.7.1 Ансамбль осцилляторов Ландау-Стюарта

В комплексной форме система взаимодействующих L-S осцилляторов задается уравнением

$$\dot{z}_k = \left(i\omega_k + \alpha_k\right) z_k - \left(\beta_k + i\eta_k\right) |z_k|^2 z_k + K \sum_{j=1}^{N} W_{jk} \left(z_j - z_k\right), \tag{1.72}$$

где W_{jk} есть матрица размера $N \times N$, которую мы будем для простоты полагать симметричной, а K есть сила связи между осцилляторами. Мы рассматриваем простейший случай взаимодействия, так называемую *диссипативную связь*, т.е. матрица связей имеет вид $G_{ij} = W_{ij}\left(z_i - z_j\right)$. Вместо того, чтобы проводить фазовую редукцию в такой системе в максимально общем виде, удобно рассмотреть случай $N = 2$ осцилляторов, вычислить функцию взаимодействия фаз $\Gamma(\varphi)$, а затем выписать итоговый ответ для системы

1.8 Простейший случай

Рассмотрим $N = 2$ взаимодействующих L-S осциллятора,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(i\omega_1 + \alpha_1\right) z_1 - \left(\beta_1 + i\eta_1\right) |z_1|^2 z_1 + K(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= \left(i\omega_2 + \alpha_2\right) z_2 - \left(\beta_2 + i\eta_2\right) |z_2|^2 z_2 + K(z_1 - z_2). \end{aligned} \tag{1.73}$$

В отсутствии взаимодействия, т.е. при $K = 0$ в системе у каждого из осцилляторов имеется устойчивый предельный цикл, который имеет радиус $r_{1,2}^{\mathrm{LC}} = \sqrt{\beta_{1,2}/\alpha_{1,2}}$. Согласно изложенной теории, мы полагаем, что "внутренние параметры" осцилляторов слабо отличаются, т.е. в частности мы считаем, что предельные циклы обоих осцилляторов имеют практически одинаковый радиус. Тогда взаимодействие осцилляторов на предельном цикле имеет вид

$$\boldsymbol{G}(\theta, \varphi) = K\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) - \cos\theta \\ \sin\left(\theta + \varphi\right) - \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

Выражение для восприимчивости $\boldsymbol{z}(\varphi)$ мы уже получили ранее. Для функции взаимодействия фаз мы получим

$$\Gamma(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, \boldsymbol{z}(\theta+\varphi)\cdot \boldsymbol{G}(\theta,\varphi) \tag{1.75}$$

Выполнив интегрирование, мы получаем

$$\Gamma(\varphi) = K\sin\varphi + \frac{K\eta}{\beta}\left(\cos\varphi - 1\right). \tag{1.76}$$

Без ограничения общности мы можем положить $\eta = 0$, то есть $\Gamma(\varphi) = K\sin\varphi$. Итак, после фазовой редукции мы получим динамическую систему на торе $T^2 = S^1_{\varphi_1}\times S^1_{\varphi_2}$,

$$\dot\varphi_1 = \omega_1 + K\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right), \quad \dot\varphi_2 = \omega_2 + K\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right). \tag{1.77}$$

Для такой системы легко получить явные решения $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Для этого введем новые переменные,

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,\ \psi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1,\ \omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{1.78}$$

В новых переменных уравнения движения есть

$$\dot\psi = \omega, \quad \dot\varphi = \Delta\omega - K\sin\varphi \tag{1.79}$$

Фазовым пространством этой системы по-прежнему является тор $T^2 = S^1_\psi\times S^1_\varphi$. Уравнение для функции $\psi(t)$ элементарно интегрируется,

$$\psi(t) = \omega t + \varphi_1(0) + \varphi_2(0), \tag{1.80}$$

где $\varphi_1(0)$ и $\varphi_2(0)$ есть начальные значения фаз. Рассмотрим теперь уравнение для разности фаз $\varphi(t)$. Это уравнение называют *уравнением Адлера*, оно было изучено Робертом Адлером в работе [15].

1.8.1 Уравнение Адлера

Уравнение Адлера в нашей задаче имеет вид

$$\dot\varphi = \Delta\omega - K\sin\varphi. \tag{1.81}$$

Исследуем для начала фиксированные точки этого уравнения. Видно, что фиксированная точка дается выражением

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right). \tag{1.82}$$

и существует в области $K > |\Delta\omega|$. Уравнение (1.82) на самом деле определяет две фиксированные точки,

$$\varphi_0 = \begin{cases} +\arcsin\left(\Delta\omega/K\right), & \Delta\omega > 0, \\ -\arcsin\left(|\Delta\omega|/K\right), & \Delta\omega < 0. \end{cases} \tag{1.83}$$

Одна из фиксированных точек является стабильной, в то время как другая нестабильна. Линейная стабильность фиксированной точки определяется знаком производной правой части уравнения (1.81) в φ_0,

$$f(\varphi) = \Delta\omega - K\sin\varphi, \quad f'(\varphi_0) = -K\cos\varphi_0 = \mp\sqrt{1-\left(\frac{\Delta\omega}{K}\right)^2}. \tag{1.84}$$

Точка с $\cos\varphi_0 > 0$ является стабильной. Также уравнение Адлера можно рассматривать как движение частицы в потенциале. Действительно, данное уравнение можно записать в "градиентном виде",

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}, \quad V(\varphi) = -\Delta\omega\varphi + K\cos\varphi. \tag{1.85}$$

Пока $|\Delta\omega| > K$, то частица в таком потенциале "проскальзывает", минуя минимумы потенциала. Когда $K > |\Delta\omega|$, то частица останавливается в одном из минимумов потенциалов.

Теперь изучим решения уравнений для $\psi = \psi(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Рассмотрим явный вид решения $\varphi(t)$ при условии $|\Delta\omega| > K > 0$. Прямое интегрирование уравнения с начальным условием $\varphi(0)$ дает

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{\nu^2\tan(\Omega t) + \nu\tan\left(\dfrac{\varphi(0)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\nu - \tan(\Omega t)\tan\left(\dfrac{\varphi(0)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}, \tag{1.86}$$

где мы ввели следующие величины,

$$\Omega = \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}}{\Delta\omega + K}.$$

Детали процедуры интегрирования приведены в Приложении А. В случае $\varphi(0) = \pi/2$ это решение существенно упрощается,

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\sqrt{\frac{\Delta\omega - K}{\Delta\omega + K}}\tan\left(\frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}t}{2}\right)\right]. \tag{1.87}$$

Наличие функции arctan в решении (1.86) приводит к тому, что переменная $\varphi(t)$ становится многозначной. Это связано с тем, что функция определена arctan с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из решения также следует, что усредненная по времени разность мгновенных частот есть

$$\langle\dot{\varphi}(t)\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t ds\,\dot{\varphi}(s) = \begin{cases} +\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}, & \Delta\omega > 0, \\ -\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}, & \Delta\omega < 0. \end{cases} \tag{1.88}$$

На линейный рост разности фаз со средней скоростью $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ накладываются колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}}. \tag{1.89}$$

Когда $K \to |\Delta\omega|$, то это период становится очень большим, что называют *критическим замедлением*, а скорость роста разности фаз $\langle\dot{\varphi}(t)\rangle$ стремится к нулю. В таком режиме график

функции $\varphi(t)$ состоит из участков постоянной разности фаз и скачков на величину, близкую к 2π.

Рассмотрим теперь режим захвата фазы, когда $K > |\Delta\omega| > 0$. В этом режиме решение уравнения (1.81) имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{\nu\tan\left(\dfrac{\varphi(0)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - \nu^2\tanh(\Omega t)}{\nu - \tan\left(\dfrac{\varphi(0)}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tanh(\Omega t)}, \tag{1.90}$$

где мы обозначили

$$\Omega = \frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{K + \Delta\omega}. \tag{1.91}$$

Вновь в случае $\varphi(0) = \pi/2$ решение существенно упрощается,

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{K + \Delta\omega}\tanh(\Omega t)\right] \tag{1.92}$$

Рассмотрим в этом выражении предел $t \to \infty$, т.е. tanh стремится к единице и мы получаем

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{K + \Delta\omega}\right] \neq 0. \tag{1.93}$$

Характерное время релаксации фазы к этому значению есть

$$t_{\text{rel}} = \frac{1}{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}. \tag{1.94}$$

Мы видим, что даже при $K > |\Delta\omega|$ разность фаз не обращается в ноль, поэтому синхронизации *по фазе* не происходит. Однако, если посмотреть на асимптотику мгновенной разности частот $\dot\varphi(t)$, то мы получим

$$\lim_{t\to\infty}\dot\varphi(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{(\Delta\omega)^2 - K^2}{\Delta\omega + K\cosh\left(\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}t\right)} = 0, \tag{1.95}$$

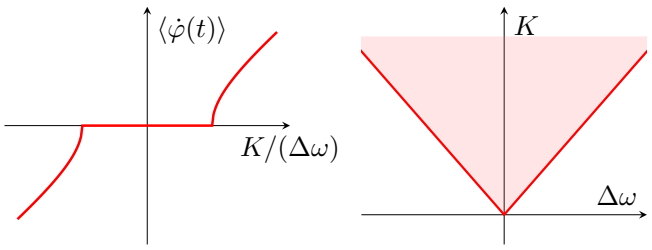
когда $K > |\Delta\omega|$. Таким образом, имеет место синхронизация *по частоте*.

1.8.2 Число вращения

Как мы уже упомянули, система (1.79) является динамической системой на торе. Рассмотрим отдельно уравнение Адлера (1.81). Введём комплексную величину $\Phi(t) = \exp\{i\varphi(t)\}$,

$$\Phi(t) = i\Delta\omega\Phi(t) - \frac{K}{2}\left(1 - \Phi(t)^2\right). \tag{1.96}$$

Из этой записи сразу видим, что данная система является системой Мёбиуссова типа: динамика фазы $\Phi(t)$ сводится к действию преобразования Мёбиуса на начальное условие $\Phi(0)$, имеется дискретная динамическая система, т.к. вся нетривиальная динамика содержится в отображении Пуанкаре за период. Значит, захват фазы в этой системе может происходить



(а) (б)

Рисунок 1.5—(а) усредненная по времени частота как функция $K/(\Delta\omega)$, (б) язык Арнольда в уравнении Адлера; внутри закрашенной области число вращения целое и имеет место синхронизация по частоте; на линии $\Delta\omega = 0$ имеет место полная синхронизация

только при целых числах вращения. Ранее мы уже показали, что число вращения может быть вычислено как отношение двух частот на торе. Для нашей системы в случае отсутствия захвата фазы, т.е. когда $|\Delta\omega| > K > 0$, мы имеем иррациональное число вращения. В случае, когда происходит захват фазы, $K > |\Delta\omega|$, переменная число вращения становится целым, см. Рисунок 1.5.

1.8.3 Исчезновение осцилляций

Мы обсудили синхронизацию в ансамбле двух L-S осцилляторов после фазовой редукции, однако имеется еще один феномен, который требует внимания. Вернемся к системе уравнений (1.73), где сразу положим $\eta = 0$. Будем рассматривать эту систему в непосредственной близости к предельному циклу, поэтому можем пренебречь нелинейностью,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (i\omega_1 + \alpha)\, z_1 + K(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= (i\omega_2 + \alpha)\, z_2 + K(z_1 - z_2). \end{aligned} \tag{1.97}$$

В этом режиме мы можем считать, что амплитуды практически не меняются и вся динамика сосредоточенна в фазах. Пусть $z_1(t) = A\exp(i\Omega t)$ и $z_2(t) = B\exp(i\Omega t)$, причем $A - B \ll 1$. Подставим этот анзац в уравнения и найдем соотношение, которое определяет Ω как функцию параметров системы,

$$K^2 = \left(i\Omega - \alpha - \frac{i\omega}{2} + \frac{i\Delta\omega}{2} + K\right)\left(i\Omega - \alpha - \frac{i\omega}{2} - \frac{i\Delta\omega}{2} + K\right), \tag{1.98}$$

где мы обозначили $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Решив это уравнение относительно Ω, мы получим

$$\Omega = \frac{\omega}{2} + i\,(K - \alpha) \pm \frac{i}{2}\sqrt{K^2 - \frac{(\Delta\omega)^2}{4}}. \tag{1.99}$$

Если $|\Delta\omega| > 2K$, то подкоренное выражение отрицательно, поэтому мнимая часть частоты Ω есть просто $\operatorname{Im}\Omega = (K - \alpha)$. Значит, при $K > \alpha$ мнимая часть Ω положительна и осцилляции на затухают, т.к. $\exp(-(K - \alpha)t) \to 0$ при $t \to \infty$. Связь K входит в уравнения линейно по комплексной амплитуде и вносит дополнительную диссипацию, поэтому при слишком больших значениях константы связи K диссипативные эффекты не компенсируются накачкой

α, происходит *исчезновение колебаний* (англ. oscillation death). Чтобы осцилляции не исчезли, следует потребовать условия

$$K - \alpha > \sqrt{K^2 - \frac{(\Delta\omega)^2}{4}}. \tag{1.100}$$

Итак, полная карта режимов состоит из следующих областей: имеется область в виде языка Арнольда, где происходит синхронизация по частоте и захват разности фаз, границы этой области есть линии $K = |\Delta\omega|$; если $K > \alpha$, то возникают области исчезновения колебаний.

1.8.4 Основные свойства синхронизации

Ансамбль взаимодействующих нелинейных осцилляторов с предельным циклом посредством фазовой редукции приводится к системе взаимодействующих фаз на единичной окружности. В случае осцилляторов Ландау-Стюарта взаимодействие между фазами устроено просто. Основные свойства синхронизации могут быть поняты уже в случае всего двух взаимодействующих осцилляторов.

Мы проиллюстрировали на примере двух взаимодействующих осцилляторов Ландау-Стюарта основные свойства синхронизации, а именно:

1. Синхронизация происходит в области захвата фазы, которую называют языком Арнольда. Захват фазы имеет место для *разности* фаз.
2. Синхронизация происходит асимптотически, т.е. полностью синхронизованное состояние не достигается за конечное время.
3. Возникновение синхронизованного состояния соответствует бифуркации
4. В системах нелинейных. взаимодействующих осцилляторов возможна синхронизация по частоте, по фазе, а также исчезновение колебаний.

Обсудив основные свойства синхронизации на примере двух осцилляторов, мы переходим к рассмотрению модели Курамото. Данная модель описывают синхронизацию $N > 2$ осцилляторов, а также позволяет учитывать различные эффекты в виде наличия шума, инерционной динамики, временные задержки во взаимодействии, дополнительные сдвиги фаз, а также позволяет рассматривать разные топологию связей и описывать влияние связей на синхронизацию.

Глава 2

Модель Курамото

Как было показано ранее, фазовая редукция ансамбля нелинейных осцилляторов в общем случае приводит к уравнению вида

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \epsilon \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{ij} \left(\varphi_j - \varphi_i \right), \tag{2.1}$$

что в случае L-S осцилляторов принимает простой вид,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + 2K \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \sin \left(\varphi_j - \varphi_i \right), \tag{2.2}$$

где мы для удобства обозначили константу взаимодействия как $2K$. В силу того, что L-S осциллятор является нормальной формой A-H бифуркации и другие типы нелинейных осцилляторов с предельным циклом можно привести к этой нормальной форме, полученную систему часто называют *универсальной*. Система (2.2) была предложена Йошики Курамото и называется *моделью Курамото* [16; 17].

Как было показано ранее, в случае двух осцилляторов синхронизация по частоте происходит посредством *бифуркации раздвоения* (англ. pitchfork bifurcation). На основе этого факта, была выдвинута следующая гипотеза,

Гипотеза. *Пусть все параметры модели (2.2) с N степенями свободы (т.е. частоты ω_i и константа связи K) заданы, тогда существует некоторое значение $K_c > 0$ такое, что $\forall K > K_c$ имеет место захват фазы и синхронизация по частоте, т.е. выполняется*

$$\forall i, j \lim_{t \to \infty} |\dot{\varphi}_j - \dot{\varphi}_i| = 0 \tag{2.3}$$

При этом, в точке $K = K_c$ происходит бифуркация раздвоения.

В силу нелинейности доказательство данной гипотезы является трудоемкой задачей. Одним из самых сложных моментов является оценка величины K_c. Однако в доказательстве этой гипотезы можно существенно продвинуться, если видоизменить модель,

$$\varphi_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin \left(\varphi_j - \varphi_i \right). \tag{2.4}$$

Данная модель отличается от (2.2) тем, что между степенями свободы связь организована по принципу "все-со-всеми" (т.е. $W_{ij} = 1$). Модель (2.4) обладает хорошо определенным непрерывным пределом, который возникает при $N \to \infty$. Именно для такой модели Йошики Курамото из физических соображений получил оценку K_c и описал процесс синхронизации для случая $W_{ij} \equiv 1$, а затем в 2015 году Хаято Чиба сформулировал строгое доказательство этой гипотезы для системы (2.4) в пределе $N \to \infty$ в работе [18].

Чтобы объяснить физические соображения, приводящие к оценке K_c и утверждению про бифуркацию в $K = K_c$, нам следует ввести количественную меру синхронизации, т.е. *параметр порядка*. Для модели Курамото (2.4) параметром порядка является следующая величина,

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \exp\{i\varphi_j(t)\} \tag{2.5}$$

Легко видеть, что $|r(t)| \leq 1$. *Синхронизованной фазе* в модели Курамото соответствует $|r(t)| > 0$. *Полностью синхронизованному* состоянию соответствует $|r(t)| \to 1$ при $t \to \infty$. Типичное поведение $|r(t)|$ в некогерентной фазе является осциллирующим с нулевым средним, в то время как в когерентной фазе $|r(t)|$ асимптотически (т.е. при $t \to \infty$) стремится к константе, близкой к единице, с ростом K. Полезно ввести величину $\langle r \rangle$,

$$\langle r \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\, |r(t)|, \tag{2.6}$$

т.е. это среднее по времени значение модуля параметра порядка. Величина $\langle r \rangle$ равна нулю пока $K < K_c$ и отлична от нуля при $K \geq K_c$, а при $K \to \infty$ это среднее стремится к единице. Таким образом, величина $\langle r \rangle$ позволяет отличать (частично)синхронизованную фазу (когерентную) от несинхронизованной (некогерентной). Таким образом, синхронизация по частоте в модели Курамото является примером конденсации в *классической* сложной системе.

Из случая $N = 2$ мы уже видели, что расстройка частот напрямую связана со значением K_c. Для модели (2.4) выражение для параметра порядка (2.5) позволяет записать уравнения движения в виде

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + 2K|r(t)| \sin\left(\arg r(t) - \varphi_i\right). \tag{2.7}$$

Формально переход от (2.4) к (2.7) является точным, поскольку имеется уравнение самосогласования – выражение для $r(t)$. Структура этого уравнения говорит нам о том, что каждый осциллятор взаимодействуют со средним полем $r(t)$, поэтому возможен захват фазы этим полем. По существу, это означает что динамика модели (2.4) сходна с уравнением Адлера. Система (2.7) является динамической системой на N-мерном торе $T^N = (S^1)^N$, поэтому для этой системы число вращения определить невозможно. Однако эту же систему можно рассматривать как набор из N взаимодействующих динамических систем на двумерном торе, учитывая уравнение самосогласования (2.5). В таком подходе можно строить график усредненных по времени частот $\langle \dot{\varphi}_i \rangle$ как функцию параметра K. Участкам $\langle \dot{\varphi}_i \rangle = \text{const}$ будет соответствовать захват фазы, т.е. синхронизация между средним полем $r(t)$ и i-ым осциллятором.

2.1 Анализ Курамото

Используя среднеполевой подход, Курамото смог проанализировать случай $N \to \infty$ [16; 19]. В основе его анализа лежит предположение, что в синхронизованной фазе параметр порядка слабо осциллирует, т.е. практически является константой, $|r| = \text{const}$, а фазу параметра порядка без ограничения общности можно считать равной нулю, $\arg r = 0$. Более того, Курамото рассматривает случай, когда ω_i являются случайными одинаково распределенными независимыми величинами с симметричным юнимодальным распределением $g(\omega)$, т.е. функция $g(\omega)$ является чётной функцией с одним пиком. Тогда уравнение (2.7) принимает простой вид,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i - 2Kr\sin\varphi_i, \tag{2.8}$$

где мы заменили $|r|$ на r, т.к. положили $\arg r = 0$. Повторяя анализ существования фиксированных точек, мы видим что существуют две группы осцилляторов: для группы с $|\omega_i| < 2Kr$ фиксированная точка существует, а для группы с $|\omega_i| > 2Kr$ – нет. Существование второй группы осцилляторов подвергает предположение Курамото сомнению, т.к. это означает что параметр порядка зависит от времени и считать его константой вообще говоря нельзя. Чтобы разрешить это данную проблему, Курамото предположил, что такие осцилляторы не вносят вклада в параметр порядка, а именно образуют стационарное распределение на единичной окружности S^1.

Теперь устремив $N \to \infty$, мы можем формально ввести функцию распределения $\rho = \rho(t, \varphi, \omega)$, которая описывает долю числа осцилляторов, имеющих частоту ω и фазу φ. В силу того, что число осцилляторов сохраняется, данная функция удовлетворяет уравнению непрерывности,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial\varphi}(v\rho) = 0, \quad v(t,\varphi,\omega) = \omega + \frac{K}{i}\left\{r(t)e^{-i\varphi} - \overline{r(t)}e^{i\varphi}\right\}, \tag{2.9}$$

где $r(t)$ есть параметр порядка, определяемый как

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho(t,\theta,\omega)e^{i\theta}. \tag{2.10}$$

Сама функция распределения $\rho(t, \varphi, \omega)$ является 2π-периодической функцией по переменной φ и в любой момент времени нормирована на единицу. Ранее мы уже указали что для осцилляторов с частотами $|\omega_i| < 2Kr$ имеет место существование фиксированной точки, поэтому их фазы лежат в интервале

$$\varphi \in \left[-\arcsin\left(\frac{\omega}{2Kr}\right), +\arcsin\left(\frac{\omega}{2Kr}\right)\right]$$

Таким образом, параметр порядка запишется в виде

$$r = \int_{|\omega|<2Kr} d\omega\, g(\omega)e^{i\varphi^*} + \int_{|\omega|>2Kr} d\omega\, g(\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\, \rho_{\text{drift}}(\theta,\omega)e^{i\theta}. \tag{2.11}$$

Здесь $\rho_{\text{drift}}(\theta, \omega)$ есть функция распределения осцилляторов с $|\omega| > 2Kr$, а φ^* обозначает фиксированную точку. В силу предположения Курамото, эта функция распределения

удовлетворяет уравнению

$$\omega\frac{\partial\rho_{\text{drift}}(\varphi,\omega)}{\partial\varphi}-2Kr\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\rho_{\text{drift}}(\varphi,\omega)\right)=0,\quad\int_{-\pi}^{+\pi}d\theta\,\rho_{\text{drift}}(\theta,\omega)=1. \tag{2.12}$$

Это уравнение легко проинтегрировать, что дает нам

$$\rho_{\text{drift}}(\theta,\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\omega^2-(2Kr)^2}}{|\omega-2Kr\sin\theta|}. \tag{2.13}$$

Эта функция обладает свойством $\rho_{\text{drift}}(\varphi,\omega)=\rho_{\text{drift}}(\varphi+\pi,-\omega)$. Прямое вычисление вклада в параметр порядка с $\rho_{\text{drift}}(\varphi,\omega)$ и с учетом того, что $g(\omega)$ является четной функцией, показывает, что осцилляторы с $|\omega|>2Kr$ не вносят вклада в параметр порядка. Замена переменных в первом слагаемом в выражении для параметра порядка позволяет нам записать уравнение самосогласованности,

$$r=2Kr\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta\,\cos^2\theta\,g(2Kr\sin\theta). \tag{2.14}$$

Наше исходное предположение состоит в том, что $r\neq 0$. Значит,

$$1=2K\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta\,\cos^2\theta\,g(2Kr\sin\theta). \tag{2.15}$$

Критическая точка легко находится из требования $r\to 0$, откуда

$$1=K_cg(0)\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta\,\cos^2\theta,\quad K_c=\frac{1}{\pi g(0)}. \tag{2.16}$$

Чтобы найти поведение параметра порядка вблизи точки перехода, мы можем разложить в ряд по малости r подинтегральное выражение в (2.15),

$$1=2K\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta\,\cos^2\theta\left\{g(0)+2K_c^2\sin^2\theta g''(0)r^2+\mathcal{O}(r^4)\right\}, \tag{2.17}$$

откуда мы получаем

$$r=\sqrt{\frac{4}{|g''(0)|K_c^3}(K-K_c)}, \tag{2.18}$$

где учтёно, что $g'(0)=0$ и $g''(0)<0$. Таким образом, мы заключаем что в точке $K=K_c$ действительно происходит бифуркация раздвоения.

2.2 Анализ стабильности

Несмотря на значимый результат, анализ Курамото не позволяет ответить на вопрос о стабильности синхронизованного и несинхронизованного состояний в зависимости от параметров модели. Тем не менее, исследование стабильности является важной задачей и оно было проведено в работе [20]. Рассмотрим несинхронизованное состояние $\rho_0=(2\pi)^{-1}$, которое также называют *смешивающим* или *некогерентным*. Это состояние является стационарным решением уравнения (2.9). Добавим слабое возмущение к этому состоянию, т.е. рассмотрим

$\rho(t,\varphi,\omega) = \rho_0 + \epsilon\delta\rho(t,\varphi,\omega)$ с $\epsilon \ll 1$. Подставляя $\rho(t,\varphi,\omega)$ в уравнение (2.9), мы получим уравнение для $\delta\rho(t,\varphi,\omega)$,

$$\epsilon\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\rho_0 + \epsilon\delta\rho)\, v(t,\varphi,\omega)\right]. \tag{2.19}$$

Теперь подставим $\rho_0 + \epsilon\,\delta(t,\varphi,\omega)$ в выражение для параметра порядка (2.15), что дает

$$r = \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)\left[\rho_0 + \epsilon\delta\rho(\theta,\omega,t)\right] e^{i\theta} = 0 + \epsilon r_1. \tag{2.20}$$

С учетом этого уравнение для (2.19) принимает вид

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = -\omega\frac{\partial\delta\rho}{\partial\varphi} + \frac{K}{2\pi}r_1 e^{-i\varphi} + \frac{K}{2\pi}\overline{r_1}e^{i\varphi},\ r_1 = \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)\delta\rho(t,\theta,\omega)e^{i\theta}. \tag{2.21}$$

Разложим возмущение $\delta\rho(t,\varphi,\omega)$ в ряд Фурье на единичной окружности S^1 (это возможно, т.к. функция распределения 2π-периодична по переменной φ),

$$\delta\rho(t,\varphi,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t,\omega)e^{-ik\varphi}, \quad u_0 = 0,\ \overline{u_k} = u_{-k}. \tag{2.22}$$

Подставляя это разложение в (2.21), мы найдем систему уравнений на моды $u_k(t,\omega)$. Для моды с индексом $k = 1$ уравнение имеет вид

$$\dot{u}_1 = i\omega u_1(\omega,t) + K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)u_1(\omega,t), \tag{2.23}$$

а для других мод с $k > 1$ мы имеем уравнения

$$\dot{u}_k = ik\omega u_k(\omega,t). \tag{2.24}$$

Таким образом, вся нетривиальная динамика сосредоточена в уравнении для $u_1(\omega,t)$, т.к. решение для мод с $k > 1$ есть $u_k \sim \exp\{ik\omega t\}$. Правая часть уравнения для $u_1(\omega,t)$ определяет оператор линейной стабильности $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{T}[v](\omega) = i\omega v(\omega) + K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)v(\omega). \tag{2.25}$$

Чтобы проанализировать линейную стабильность, нам надо найти спектр оператора $\boldsymbol{T}$, т.е. решить задачу на собственные значения,

$$\boldsymbol{T}[f] = \lambda f.$$

Если в спектре оператора есть собственные значения с положительной действительной частью, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то мы имеем *линейную нестабильность* основного состояния. Случай $\operatorname{Re}\lambda < 0$ соответствует *линейной стабильности*, а $\operatorname{Re}\lambda = 0$ соответствует т.н. *нейтральной стабильности*. Мы приведем математически аккуратное описание спектра оператора $\boldsymbol{T}$ в Главе 5, а пока ограничимся утверждениями, которые помогают определить изменение стабильности.

Чтобы найти дискретную часть спектра, мы сделаем подстановку $u_1(\omega, t) = f(\omega)e^{\lambda t}$, где $f(\omega)$ есть собственная функция,

$$\lambda f(\omega) = i\omega f(\omega) + K \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) f(\omega). \tag{2.26}$$

Заметим, что интеграл в правой части уравнения (2.25) есть попросту число, которое мы обозначим как J, тогда собственная функция $f(\omega)$ есть

$$f(\omega) = \frac{J}{i\omega + \lambda}. \tag{2.27}$$

Подставляя это выражение в уравнение на собственные значения, мы находим что собственные значения λ удовлетворяют интегральному уравнению вида

$$1 = K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{i\omega + \lambda}. \tag{2.28}$$

Если функция $g(\omega)$ является четной и юнимодальной, то можно доказать, что уравнение (2.28) для λ имеет как минимум одно решение и это решение является вещественным, $\lambda \in \mathbb{R}$. Левая часть этого уравнения не имеет мнимой части, значит правая часть также не должна иметь мнимой части. Умножив подинтегральное выражение на комплексно-сопряженное и затем положив мнимую часть равной нулю, мы получим

$$1 = K\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\lambda^2 + \omega^2}. \tag{2.29}$$

Рассмотрим предел $\lambda \to 0$. Это означает, что несинхронизованное состояние теряет свою линейную стабильность. Это происходит в момент, когда $K = K_c$, а K_c определяется из уравнения

$$1 = K_c \lim_{\lambda \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)\lambda}{\lambda + \omega^2} = K_c \cdot \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \delta(\omega) g(\omega) = \pi g(0) K_c, \tag{2.30}$$

то есть $K_c = (\pi g(0))^{-1}$. Это согласуется с выражением для критической константы связи, полученным на основе анализа уравнения самосогласованости.

Теперь рассмотрим вопрос о непрерывной части спектра оператора $\boldsymbol{T}$. Непрерывная часть спектра линейного функционального оператора определяется как множество $\lambda \in \mathbb{C}$ для которых оператор $\boldsymbol{T} - \lambda \boldsymbol{I}$ (здесь $\boldsymbol{I}$ тождественный оператор) не является сюръективным. Это требование приводит к уравнению вида

$$-(\lambda - i\omega) f(\omega) + K \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) f(\omega) = h(\omega), \tag{2.31}$$

где $h(\omega)$ есть произвольная функция. Если уравнение (2.31) всегда можно решить для $f(\omega)$, то тогда λ не принадлежит непрерывному спектру. Отсюда заключаем, что непрерывный спектр $\sigma_c(\boldsymbol{T})$ оператора $\boldsymbol{T}$ имеет вид

$$\sigma_c(\boldsymbol{T}) = \{i\omega : \omega \in \operatorname{supp} g(\omega)\}. \tag{2.32}$$

Схематично спектр оператора $\boldsymbol{T}$ изображен на Рисунке 2.1. Несинхронизованное состояние $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$ в модели Курамото является лишь *нейтрально стабильным* при $K < K_c$. Когда K достигает K_c, то нейтральная стабильность теряется, даже малые возмущения приводят к сильному изменению функцию распределения $\rho(t, \varphi, \omega)$ и происходит переход в синхронизованное состояние.

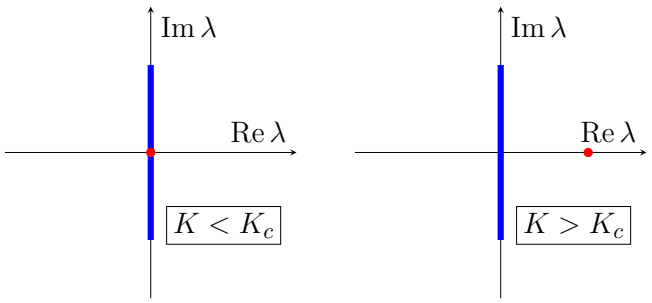


Рисунок 2.1—Спектр оператора $\boldsymbol{T}$ в зависимости от значения константы связи K. Синим цветом выделена непрерывная часть спектра оператора, красным показано дискретное собственное значение.

2.3 Затухание Ландау в модели Курамото

Выше на физическом уровне строгости мы показали, что при $K < K_c$ некогерентное состояние *нейтрально* стабильно. Если бы стабильность была не нейтральной, то из этого следовало бы, что параметр порядка $r = r(t)$ релаксирует к нулевому значению очень быстро при слабом возмущении. Случай нейтральной стабильности требует более детального анализа релаксации $r(t)$ после слабого возмущения.

В работе [21] было проведено исследование как именно происходит такая релаксация. Были выдвинуты две гипотезы: параметр порядка релаксирует алгебраически и параметр порядка релаксирует экспоненциально. Численные же симуляции показывают, что вблизи K_c релаксация экспоненциальная. Это противоречит результатам работы [20], изложенным выше, т.к. нейтральная стабильности подразумевает *не*экспоненциальную релаксацию. Противоречие разрешается аккуратным анализом, приведенным в статье [22]. Мы кратко изложим этот результат.

Рассмотрим возмущение $\epsilon\delta\rho(t,\varphi,\omega)$, $\epsilon \ll 1$ вблизи несинхронизованного состояния $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$. Разложим вновь $\delta\rho(t,\varphi,\omega)$ в ряд Фурье,

$$\delta\rho(t,\varphi,\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(\omega,t)e^{+ik\theta}, \quad u_0 = 1,\ \overline{u_k} = u_{-k},$$

и выпишем для эволюции первой моды $u_1(\omega,t) \equiv u(\omega,t)$,

$$\dot{u} = -i\omega u + K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)u(t,\omega). \tag{2.33}$$

Введем функцию $R = R(t)$, определенную как

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)u(t,\omega). \tag{2.34}$$

Асимптотическое поведение функции $R(t)$ сильно зависит от носителя функции $g(\omega)$, $\operatorname{supp} g(\omega)$. Если функция $g(\omega)$ имеет конечный носитель, скажем $\operatorname{supp} g(\omega) = [-\Omega,\Omega]$ и $K < K_c$, то интегральный оператор является ограниченным, т.е. функции $u(t,\omega)$ и $R(t)$ аналитичны по t. Эти функции растут не быстрее экспоненты по переменной t, откуда следует что образы Лапласа функций $u(t,\omega)$ и $R(t)$ хорошо определенны. Поведение $R(t)$ на больших временах определяется особенностями образа Лапласа этой функции.

Пусть $g(\omega)$ имеет конечный носитель, $\operatorname{supp} g(\omega) = [-\Omega, +\Omega]$, тогда для любых начальных условий $u(0, \omega)$ величина $R(t)$ спадает медленнее чем экспонента при $t \to \infty$. Доказательство этого факта строится от противного и приведено в [22]. Однако, можно показать, что вблизи K_c имеет место экспоненциальное затухание. Причина такого поведения состоит в том, что в задаче появляются "ложные" собственные значения (это в точности повторяет механизм затухания Ландау), приводящие к экспоненциальному затуханию $R(t)$. Полная картина затухания возмущений в модели Курамото выглядит следующим образом. Если распределение частот $g(\omega)$ имеет конечный носитель $\operatorname{supp} g(\omega) = [-\Omega, +\Omega]$ и является равномерным, то асимптотика $R(t)$ имеет вид

$$R(t) \sim -\frac{16\Omega}{K^2} \frac{\sin \Omega t}{t \ln^2 t}, \quad t \to \infty.$$

Если же $g(\omega)$ имеет носитель на всей вещественной оси, т.е. $\operatorname{supp} g(\omega) = \mathbb{R}$, то имеет место экспоненциальное затухание. В частности, для распределения Лоренца с центром в нуле и шириной γ, имеет место асимптотика

$$R(t) \sim \exp\{(K - \gamma)t\}, \quad t \geq 0.$$

Этим заканчивается обсуждение стабильности несинхронизованного состояния модели Курамото на полном графе в термодинамическом пределе.

2.4 Обобщения модели Курамото

Как уже было отмечено, модель Курамото является простейшей моделью, которая описывает феномен многочастичной синхронизации. В силу этой простоты, модель позволяет получить некоторые аналитические результаты, которые позволяют лучше понять явление синхронизации. Для того, чтобы учесть более тонкие эффекты прибегают к различным модификациям модели, среди которых особенно выделяются несколько: добавление инерции, т.е. слагаемого со второй производной по времени; добавление стохастического вклада; учет запаздывания во взаимодействии; наличие сдвига фазы во взаимодействии, а также учет более сложной архитектуры связей и рассмотрение более высоких гармоник во взаимодействии между степенями свободы.

Мы сосредоточимся на следующих обобщениях:

1. Модель Курамото с шумом,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \varphi_i) + \eta_i(t), \tag{2.35}$$

   где $\eta_i(t)$ есть белый шум с амплитудой D, т.е. $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle_\eta = 2D\delta_{ij}\delta(t - t')$

2. Модель Курамото с инерцией,

$$m\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \tag{2.36}$$

   где $m > 0$ есть параметр инерции

3. Вариации первых двух обобщений, когда модель задана на некотором графе G, отличном от полного, т.е.

$$m\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i) + \eta_i(t), \tag{2.37}$$

где W_{ij} есть матрица смежности графа G.

Можно легко проверить, что для модели с шумом при $N = 2$ добавление стохастического вклада в виде белого шума сужает область зоны захвата фазы. Более того, существует такое значение амплитуды шума D при котором зона захвата вырождается в одну точку, т.е. шум $\eta_i(t)$ ухудшает синхронизацию. В случае добавления второй производной, мы имеем дело с уравнением следующего типа,

$$m\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = \omega - 2Kr\sin\varphi, \tag{2.38}$$

Перемасштабированием времени и параметров, это уравнение может быть записано в виде

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + \sin\varphi = I. \tag{2.39}$$

Данное уравнение можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка,

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = I - \sin\varphi - \alpha y. \end{cases} \tag{2.40}$$

Это динамическая система на цилиндре $S^1_\varphi \times \mathbb{R}_y$. Неподвижные точки этой динамической системы удовлетворяют уравнениям

$$y^* = 0,\ I - \sin\varphi^* - \alpha y^* \to y^* = 0,\ \sin\varphi^* = I. \tag{2.41}$$

Когда $I > 1$, то фиксированных точек нет, когда $I < 1$, то у нас имеется седло и фокус. В точке $I = 1$ седло и фокус сливаются посредством седло-узловой бифуркации. Все траектории системы лежат в полосе $y_1 \le y \le y_2$, где $0 < y_1 < (I-1)/\alpha$ и $y_2 > (I+1)/\alpha$. Внутри этой полосы поток всегда направлен справа налево. Рассмотрим отображение Пуанкаре, $y \mapsto P(y)$. Существует такая точка y_0, что $P(y_0) = y_0$. Соответствующая траектория есть предельный цикл и является единственной. Пусть $I > 1$, будем медленно уменьшать I. Пока $I_c < I < 1$, то в системе есть *бистабильность*: стабильный предельный цикл сосуществует с фокусом. Затем в $I = I_c$ предельный цикл исчезает посредством гомоклинической бифуркации. При $I < I_c$ траектории системы стремятся к стабильному фокусу. Детальное обсуждение бифуркаций в этой системе приводится в книге [23] (раздел 8.5), а также в оригинальной работе [24]. В терминах синхронизации такая бистабильность приводит к явлению гистерезиса: пока константа связи K меньше некоторого критического значения K_c усредненный по времени модуль параметра порядка $\langle r\rangle$ в точности равен нулю. Когда K достигает K_c, то параметр порядка скачком меняется до $\langle r\rangle > 0$ и достигает своего максимального значения с ростом K. Если же взять систему в состоянии с $\langle r\rangle \approx 1$ и начать уменьшать K, то тогда параметр порядка будет сначала незначительно уменьшаться, оставаясь в точке $K = K_c$ и после

обратится в ноль посредством непрерывного перехода при некоторой K, *отличной* от K_c. То есть, в модели Курамото с инерцией существуют *две* критические константы связи.

Модель Курамото и её обобщения тесно связаны с другими моделями в статистической механике. Её ключевые особенности – это диссипативная динамика, т.е. наличие первой производной $\dot{\varphi}$ в уравнениях движения, и наличие "вмороженного беспорядка" в виде частот ω_i с распределением $g(\omega)$. Добавление белого шума в модель Курамото на графе G позволяет связать её с XY-моделью, заданной на этом же графе G, с добавлением беспорядка, роль которого выполняет распределение частот $g(\omega)$. Эти две модели связаны в том смысле, что Гиббсовская мера для такой XY-модели совпадает со стационарным решением уравнения Фоккера-Планка для модели Курамото. Здесь белый шум играет роль температуры в XY-модели. Добавление инерции вместе с удалением диссипативного вклада $\dot{\varphi}$ в случае одинаковых частот сводит модель Курамото с Гамильтоновой модели среднего поля (HMF модель), которую также иногда называют *кинетической* XY-моделью.

2.5 Промежуточные выводы

Анализ, проведенный Курамото, был основан на двух существенных допущениях: в синхронизованном состоянии параметр порядка $r(t)$ практически не зависит от времени, поэтому его можно считать постоянным; функция распределения $g(\omega)$ является четной и юнимодальной. Кроме того, существенными оказываются термодинамический предел $N \to \infty$ и топология связей "все-со-всеми", обеспечивающая среднеполевой характер взаимодействия.

Переход в синхронизованное состояние соответствует потере нейтральной стабильности несинхронизованного состояния $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$. Из-за нейтральной стабильности слабые возмущения состояния ρ_0 могут затухать не обязательно экспоненциально. В синхронизованном состоянии существует часть популяции осцилляторов, для которых не происходит захвата фазы, но они образуют стационарное распределение, которое не вносит вклада в параметр порядка. Переход в синхронизованное в пределе $N \to \infty$ является фазовым переходом второго рода. Механизм синхронизации заключается в захвате фазы осцилляторов $\varphi_i(t)$ средним полем $r(t)$.

Мы описали на физическом уровне строгости как устроен переход в синхронизованное состояние. Наша следующая цель заключается в том, чтобы исследовать динамику модели в случае конечных N и в термодинамическом пределе $N \to \infty$. В первую очередь нас будет интересовать как быстро устанавливается полностью синхронизованное состояние и можно ли получить явное уравнение на динамику параметра порядка $r(t)$.

Глава 3

Квази-интегрируемость модели Курамото

В этой главе мы обсуждаем низкоразмерную динамику в модели Курамото, связывая её с так называемой *квази-интегрируемостью*[1] [25]. Поскольку мы рассматриваем негамильтоновы диссипативные системы, мы не можем воспользоваться арсеналом методов классической теории интегрируемых систем. Однако существуют такие диссипативных систем (в частности, см. работы [25—29]), в которых за счёт некоторых симметрий возникают интегралы движения. Количество этих интегралов движения сравнимо с числом степеней свободы системы, поэтому позволяет частично упростить исследование динамики. Такую интегрируемость иногда называют *квази-интегрируемостью*.

3.1 Анзац Отт-Антонсена

Модель Курамото на полном графе, т.е. со связью "все-со-всеми", является примером системы, в которой наблюдается явление квази-интегрируемости как в случае $N \to \infty$, так и в случае конечного числа степеней N. Чтобы продемонстрировать это явление, легче всего начать с рассмотрения случая $N \to \infty$. Тогда динамика модели описывается уравнением непрерывности (2.9) на функцию распределения $\rho = \rho(t, \varphi, \omega)$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(v\rho) = 0, \quad v(t, \varphi, \omega) = \omega + \frac{K}{i}\left\{ r(t)e^{-i\varphi} - \overline{r(t)}e^{i\varphi} \right\},$$

Разложим вновь функцию распределения в ряд Фурье на единичной окружности,

$$\rho(t, \varphi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(\omega, t) e^{-ik\varphi}, \quad \overline{u_k} = u_{-k}, \tag{3.1}$$

и запишем систему уравнений на моды $u_k(t, \omega)$,

$$\dot{u}_k = ik\omega u_k + Kr(t)u_{k-1}(\omega, t) - K\overline{r(t)}u_{k+1}(\omega, t), \; r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, g(\omega) u_1(\omega, t) \tag{3.2}$$

Результаты этой главы основаны на работах [I; III]

[1] Это понятие не является строгим в математическом смысле, однако оно используется в литературе. Не установлено строгой связи *квази-интегрируемости* с деформациями интегрируемых систем

Данная система представляет собой бесконечную иерархию уравнений, которые "зацепляются" друг за друга, т.е. k-ая мода зависит от $(k-1)$-ой и $(k+1)$-ой моды. Возникает закономерный вопрос: можно ли решить данную иерархию уравнений или хотя бы исследовать случаи, когда такая иерархия обрывается, т.е. остается конечная система уравнений. Оказывается, что иерархия обрывается, если положить $u_k = (u_1)^k$. Действительно, такая подстановка оставляет только одно уравнение на u_1,

$$\dot{u} = i\omega u + Kr(t) - K\overline{r(t)}u^2, \quad r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)u(\omega,t). \tag{3.3}$$

где мы обозначили $u(\omega,t) \equiv u_1(\omega,t)$. При этом, используя эту подстановку, мы можем сразу выписать явный ответ для функции распределения, просуммировав ряд Фурье,

$$\rho_{\text{OA}}(t,\varphi,\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-|u(\omega,t)|^2}{|u(\omega,t)-e^{i\varphi}|^2}. \tag{3.4}$$

Функция $\rho(t,\varphi,\omega)$ является плотностью вероятности на единичной окружности S^1. В теории вероятностей, функция $\rho(t,\varphi,\omega)$ соответствует так называемому *свёрнутому* (компактному) распределению, т.е. случайная величина φ принимает значения на компактном множестве, в нашем случае – на единичной окружности. Подстановка $u_k = (u_1)^k$ называется *анзацем Отт-Антонсена* (далее ОА анзац) [30], функция распределения $\rho_{\text{OA}}(t,\varphi,\omega)$ соответствует этому анзацу.

В пространстве всех функций распределения на единичной окружности, ОА анзац выделяет двумерное многообразие (т.к. величина $u(\omega,t)$ является комплексной), которое является инвариантным относительно динамики модели Курамото. Его инвариантность подразумевает, что если при $t=0$ начальное распределение $\rho(0,\varphi,\omega)$ обладало свойством $u_k(\omega,0) = (u_1(\omega,0))^k$, то во все моменты времени $t>0$ это свойство также будет выполняться. Данное многообразие называют *многообразием Отт-Антонсена* (ОА многообразием). Если же начальное распределение не принадлежало ОА многообразию, то в ходе временной эволюции функция $\rho(t,\varphi,\omega)$ будет асимптотически стремиться к $\rho_{\text{OA}}(t,\varphi,\omega)$. По-видимому, данное утверждение верно для *большинства* начальных распределений, однако можно привести пример, когда мера $\rho_{\text{OA}}(t,\varphi,\omega)$ не является притягивающей. Данный пример детально пояснен в работе [31].

Функция распределения $\rho_{\text{OA}}(t,\varphi,\omega)$ является свёрнутым распределением Коши. Роль случайной переменной играет угол $\varphi \in S^1$, а само распределение параметризуется двумя величинами: $\operatorname{Re} u(\omega,t)$ и $\operatorname{Im} u(\omega,t)$, причем $|u(\omega,t)| < 1$. Причину, по которой свёрнутое распределение Коши играет столь исключительную роль в модели Курамото мы проясним далее. Сейчас однако полезно указать на особенное свойство распределения Коши и его свернутого аналога. Обычное распределение Коши имеет вид

$$p_{\text{C}}(\gamma,\beta;x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2+(x-\beta)^2}, \quad \gamma>0,\ \beta\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

и его можно переписать в более удобном виде как

$$p_{\text{C}}(w;x) = \frac{\operatorname{Im} w}{\pi|x-w|^2}, \quad w = \beta + i\gamma. \tag{3.6}$$

Пусть x' есть образ точки x под действием преобразования Мёбиуса, $x' = \mathcal{M}(x)$. Тогда величина x' также имеет распределение Коши с теми же параметрами. Это обстоятельство впервые было замечено в работе [32]. Свернутая версия распределения Коши получается из обычной его версии "компактификацией" случайной переменной, $x \to \theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$p_{\mathrm{wC}}(\gamma, \beta; \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\theta - \beta + 2\pi n)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh \gamma}{\cosh \gamma - \cos(\theta - \beta)}, \tag{3.7}$$

и его удобно представить в виде

$$p_{\mathrm{wC}}\left(w; e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\varphi} - w|^2}, \quad w = e^{-\gamma} e^{i\beta}, \ |w| < 1. \tag{3.8}$$

Свернутое распределение Коши обладает тем же свойством, что обычное: под действием преобразования Мёбиуса, которое отображает диск в диск, образ случайной переменной также будет распределен по свернутому распределению Коши. Это распределение можно также получить, подействовав на случайную переменную x из (3.5) преобразованием Мёбиуса, отображающим вещественную прямую в единичную окружность. Выше мы не накладывали никакого ограничения на распределение частот $g(\omega)$. Легко видеть, что в случае одинаковых частот, т.е. $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, ОА анзац позволяет явно исследовать динамику параметра порядка $r = r(t)$. Еще одним таким распределением частот является распределение Коши. Эта возможность позволяет понять как зависит быстрота синхронизации от параметров модели.

3.2 Время выхода в синхронизованный режим

Наличие неравновесного фазового перехода в модели Курамото автоматически делает актуальным вопрос о том как быстро при $K > K_c$ модель достигает полностью синхронизованного состояния. Ранее для случая $N = 2$ мы показывали, что полностью синхронизованное состояние достигается асимптотически. Проверим верно ли это в случае $N \to \infty$ осцилляторов. Применим ОА анзац и запишем итоговую систему уравнений,

$$\dot{u} = i\omega u + Kr(t) - K\overline{r(t)}u^2, \quad r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, g(\omega) u(\omega, t). \tag{3.9}$$

Пусть $g(\omega)$ есть распределение Коши с параметрами γ и ω_0, т.е.

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi(\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2)} = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\omega - \omega_0 - i\gamma} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma} \right], \quad \gamma > 0, \ \omega_0 \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Такая запись позволяет вычислить интеграл по частотам для $r(t)$. Замыкая контур в нижней полуплоскости и пользуясь леммой Жордана, мы получаем $r(t) = u(\omega_0 - i\gamma, t)$, т.е. параметр порядка выражается через моду $u(\omega, t)$ напрямую. Обозначим $r(t) = R(t)e^{i\alpha(t)}$, тогда мы получим систему уравнений

$$\frac{dR}{dt} + (\gamma - K) R + KR^3 = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим фиксированные точки этого уравнения. Видим, что у этого уравнения имеется стабильный предельный цикл, радиус которого есть $R_{\mathrm{LC}} = \sqrt{1-\gamma/K}$. Из этой формулы мгновенно следует выражение для критической константы связи, $K_c = \gamma$. Существование предельного цикла означает, что выход в синхронизованный режим происходит асимптотически. Действительно, мы можем указать явное решение в виде

$$R(t) = R_{\mathrm{LC}} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{R_{\mathrm{LC}}^2}{R_0^2} \right) e^{2(\gamma - K)t} \right\}^{-1/2}, \quad R_0 \equiv R(0), \tag{3.12}$$

из которого видно, что значение R_{LC} достигается в пределе $t \to \infty$. Мы можем найти время T_ϵ, за которое параметр порядка $r(t)$ достигает значения $r_{\mathrm{ss}} - \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$. Назовем это время *временем первого достижения* (по аналогии с англ. first passage time). Изучим вопрос как распределена величина T_ϵ, считая начальные условия однородными. Впервые этот вопрос был исследован в работе [33], где было показано для однородных начальных условий, что распределение величин T_ϵ имеет плотность

$$f_{T_\epsilon}(t) = \frac{ABr_{ss}^2}{2\sigma^2 \left(1 + Ae^{Bt}\right)^2} \exp\left\{ Bt - \frac{r_{ss}^2}{2\sigma^2 \left(1 + Ae^{Bt}\right)} \right\}, \tag{3.13}$$

где обозначено

$$A = 1 - \left(\frac{R_{\mathrm{LC}}}{R_{\mathrm{LC}} - \epsilon} \right)^2, \quad B = K - \gamma. \tag{3.14}$$

Рассмотрим предельные случаи. Пусть $K \gg \gamma$, то есть константа намного больше критической. Тогда $B \gg 1$ и распределение имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-z - e^{-z} \right), \quad \beta = B^{-1},\ z = \frac{T_\epsilon - \mu}{\beta},\ \mu = \frac{1}{B} \ln \frac{r_{ss}^2}{2\sigma^2 A}. \tag{3.15}$$

Это есть распределение Гумбеля с параметрами μ и β. В случае $K \approx \gamma$, то есть мы находимся близко к критической точке. Тогда T_ϵ очень большое, значит $1 + A\exp(BT_\epsilon) \approx A\exp(BT_\epsilon)$, откуда мы вновь получим распределение Гумбеля. Таким образом, полная синхронизация в модели Курамото происходит асимптотически, что находится в согласии с изложенным ранее свойством. В тоже время, времена первого достижения T_ϵ, за которые параметр порядка достигает значения, близкого к заданному r_{ss}, распределены по Гумбелю.

3.3 Динамика модели как поток на группе Мёбиуса

Пусть начальное распределение $\rho_0(\varphi, \omega) = \rho(0, \varphi, \omega)$ не удовлетворяет условию OA анзаца, т.е. $u_k(\omega) \neq (u_1)^k$. Зададимся вопросом: как тогда устроена эволюция начального распределения ρ_0 и какую роль играет ρ_{OA}? Выше мы уже отмечали, что распределение ρ_{OA} обладает интересным свойством: оно инвариантно относительно преобразования Мёбиуса. Чтобы дать полноценный ответ на этот вопросы, мы рассмотрим случай конечных N, а затем сделаем предельный переход $N \to \infty$ и покажем, что OA многообразие есть *статистическое многообразие*.

3.3.1 Низкоразмерная динамика

Чтобы понять связь группы Мёбиуса и свойств функции распределения $\rho_{\text{OA}}(t, \varphi, \omega)$, нам следует вернуться к случаю конечных N. Мы также наложим дополнительное условие, что $\forall i\ \omega_i = \omega$, т.е. мы рассматриваем модель с одинаковыми частотами. Смысл наложения этого условия мы поясним далее. Итак, мы рассматриваем модель Курамото,

$$\dot{\varphi}_i = \omega + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right). \tag{3.16}$$

Сделаем замену переменной, $\Phi_i = e^{i\varphi_i}$, тогда получим

$$\dot{\Phi}_i = i\omega\Phi_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\Phi_j - \overline{\Phi}_j \Phi_i^2\right), \tag{3.17}$$

где учтём определение параметра порядка, $r(t) = \sum_j \Phi_j(t)/N$. Итоговый вид уравнений движения есть

$$\dot{\Phi}_i = i\omega\Phi_i + K\left(r(t) - \overline{r(t)}\Phi_i^2\right). \tag{3.18}$$

Параметр порядка $r(t)$ является комплексной величиной, поэтому можем его представить как $r(t) = a(t) + ib(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ есть мнимая и действительная части, причем очевидно выполняется $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 \leq 1$. Подставим это выражение в (3.18),

$$\dot{\Phi}_i(t) = i\omega\Phi_i(t) + Ka(t)\left(1 - \Phi_i(t)^2\right) + Kb(t)\left(i + i\Phi_i(t)^2\right). \tag{3.19}$$

Сравнивая вид этого уравнения с (1.6), заключаем, что модель Курамото является системой Мёбиусова типа. Несмотря на то, что фазовое пространство модели является $T^N = (S^1)^N$, динамика эффективно состоит во взаимодействии параметра порядка $r(t)$ с фазой $\Phi_i(t)$. Правая часть уравнения (3.19) содержит линейную комбинацию генераторов преобразования Мёбиуса, отображающего диск в диск, что было впервые продемонстрировано в работе [34], хотя использовалось ранее в работе [35]. Поскольку коэффициенты этой линейной комбинации не зависят от индекса i (именно по этой причине мы положили $\forall i\ \omega_i \equiv \omega$) , то на каждую из точек $\Phi_i(t = 0)$ действует одно и то же преобразование Мёбиуса. Как мы уже знаем, это преобразование можно записать в виде

$$\mathcal{M}(\Phi) = \zeta \frac{\Phi - w}{1 - \overline{w}\Phi}, \quad |\Phi| = 1,\ |\zeta| = 1,\ |w| < 1. \tag{3.20}$$

Эволюцию переменной $\Phi_i = \Phi_i(t)$ теперь представим как

$$\Phi(t) = \zeta(t) \frac{\Phi_0 - w(t)}{1 - \overline{w}(t)\Phi_0}, \quad \Phi_0 = \exp(i\varphi_0),\ |\Phi_0| = 1,\ |\Phi| = 1. \tag{3.21}$$

Формула (3.21) известна как *анзац Ватанабе-Строгаца* (далее WS анзац). Введем вектор

$$\mathbf{\Phi}(t) = \left(\Phi_1(t),\ \Phi_2(t), ..., \Phi_N(t)\right)^T,$$

тогда систему уравнений можно записать в векторном виде,

$$\dot{\mathbf{\Phi}} = \omega \boldsymbol{v}_1 + Ka\boldsymbol{v}_2 + Kb\boldsymbol{v}_3, \tag{3.22}$$

где мы обозначили

$$\boldsymbol{v}_1 = i\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\Phi}^2 - 1, \quad \boldsymbol{v}_3 = i\boldsymbol{\Phi}^2 + i \tag{3.23}$$

и подразумеваем покомпонентную запись, т.е. $\boldsymbol{\Phi}^2 \equiv (\Phi_1^2, \ldots \Phi_N^2)^T$. Такая форма записи удобна, чтобы применить теорему об экспоненциировании генераторов и сказать, что $\boldsymbol{\Phi}(t)$ действительно имеет решение в виде преобразования Мёбиуса, действующего на начальные условия $\boldsymbol{\Phi}(t=0)$.

Получим теперь уравнения на эволюцию параметров $w(t)$ и $\zeta(t)$. Выпишем формулу для производной $\dot{\Phi}_i$ через параметры $w(t)$ и $\zeta(t)$ преобразования Мёбиуса (см. (1.13)),

$$\dot{\Phi}_i = -\frac{\dot{w}\zeta}{1-|w|^2} + \left(\dot{\zeta}\overline{\zeta} + \frac{\dot{\overline{w}}w - \dot{w}\overline{w}}{1-|w|^2}\right)\Phi_i + \frac{\dot{\overline{w}}\overline{\zeta}}{1-|w|^2}\Phi_i^2.$$

Теперь сравним правую часть этого выражения с правой частью (3.19). Приравнивая коэффициенты при степенях Φ_i и учитывая определения величин $a(t)$ и $b(t)$, мы получим уравнения на $w = w(t)$ и $\zeta = \zeta(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -K\left(1-|w|^2\right)\overline{\zeta}r, \\ \dot{\zeta} &= i\omega\zeta - K\left(\overline{w}r - w\overline{r}\zeta^2\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Это уравнения низкоразмерной динамики модели Курамото. Начальные условия определяются непосредственно из (3.21), $w(0)=0$, $\zeta(0)=1$, т.к. при $t=0$ мы имеем $\Phi_i(t=0) = \exp(i\varphi_i(t=0))$. Эти уравнения являются сложными нелинейными, однако уравнение для функции $w(t)$ не зависит от $\zeta(t)$, т.к.

$$\overline{\zeta}r = \overline{\zeta}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\zeta\frac{\Phi_j^0 - w}{1-\overline{w}\Phi_j^0} = |\zeta|^2\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j^0 - w}{1-\overline{w}\Phi_j^0} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\Phi_j^0 - w}{1-\overline{w}\Phi_j^0}, \tag{3.25}$$

где учтено $|\zeta| = 1$. Эта независимость позволяет исследовать уравнение для $w(t)$ отдельно. Заметим также еще одну особенность. Выпишем выражение для параметра порядка $r(t)$ и разложим в ряд знаменатель $\left(1-\overline{w}\Phi_j^0\right)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j = -\frac{w\zeta}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\Phi_j^0 w^{-1}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\overline{w}\Phi_j^0\right)^l, \tag{3.26}$$

а затем отделим первые слагаемые,

$$-\frac{w\zeta}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\Phi_j^0 w^{-1}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\overline{w}\Phi_j^0\right)^l = -w\zeta - w\zeta\left(1-|w|^2\right)\sum_{l=1}^{\infty}\left(\overline{w}\right)^l\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\Phi_j^0\right)^l\right]. \tag{3.27}$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в этой формуле. Вспомним, что $\Phi_j^0 = \exp(i\varphi_j^0)$, где $\varphi_j^0 \in S^1$. С учетом этого факта, приходим к выводу что выражение $\sum_j \exp(il\varphi_j^0)$ есть l-ый момент распределения N точек на единичной окружности, заданных углами φ_j^0. Как уже было отмечено, в теории вероятностей такие распределения называются *свернутыми*, у этих распределений случайная величина распределена на компактном множестве (в нашем случае на окружности S^1). Если распределение точек φ_j^0 равномерное, то всего его моменты $l \geq 1$ равны нулю, поэтому параметр порядка $r(t)$ принимает простой вид,

$$r(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j(t) = -w(t)\zeta(t), \tag{3.28}$$

а его модуль есть ничто иное как $|w(t)|$. Подставим теперь $r(t) = -w(t)\zeta(t)$ в систему (3.24), в уравнение для $w(t)$,

$$\dot{w} = +K\left(1 - |w|^2\right) w, \tag{3.29}$$

Это говорит о том, что если выбрать однородные начальные условия, то уравнения для WS анзаца совпадают с OA анзацем.

3.3.2 Интегралы движения

Получив уравнения (3.24), мы по сути продемонстрировали, что в модели с одинаковыми частотами со связью "все-со-всеми" существует *размерная редукция*: N уравнений для описания динамики переходят в 3 уравнения (одно для действительной величины $\arg\zeta$, т.к. $|\zeta| = 1$ и два уравнения для мнимой и действительной части величины $|w| < 1$, соответственно). Такая размерная редукция происходит за счет существования некоторых интегралов движения. Установим явный вид этих интегралов, следуя работе [34]. Для этого напомним, что отображение Мёбиуса сохраняет двойное отношение (или кросс-отношение) четырех точек в комплексной плоскости,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}. \tag{3.30}$$

Для N осцилляторов существует $N!/(N-4)!$ двойных отношений, но среди них существует ровно $N - 3$ независимых. В терминах обычных фаз двойное отношение имеет вид

$$\left(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, e^{i\varphi_4}\right) = \frac{S_{13}S_{24}}{S_{14}S_{23}}, \quad S_{ij} = \sin\left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}\right). \tag{3.31}$$

Величина

$$I = S_{12}S_{23}...S_{(N-1)N}S_{N1} \tag{3.32}$$

является интегралом движения и называется *WS интегралом*. Заметим, что любая перестановка индексов будет давать другой интеграл движения. Обозначим $(z_i,\, z_j,\, z_k,\, z_l)$ как Λ_{ijkl}. Заметим, что эта величина обладает следующими симметриями

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{klij} = \Lambda_{lkji}, \quad \Lambda_{ijlk} = \frac{1}{\Lambda_{ijkl}},$$
$$\Lambda_{iklj} = \frac{1}{1 - \Lambda_{ijkl}}, \quad \Lambda_{ikjl} = 1 - \Lambda_{ijkl},$$
$$\Lambda_{ilkj} = \frac{\Lambda_{ijkl}}{1 - \Lambda_{ijkl}}, \quad \Lambda_{ilkj} = \frac{\Lambda_{ijkl} - 1}{\Lambda_{ijkl}}, \quad \Lambda_{ijkl}\Lambda_{jmkl} = \Lambda_{imkl}$$

С помощью этих соотношений можно доказать упомянутый факт, что имеется только $N - 3$ независимых кросс-отношения. Данные интегралы движения были обнаружены путем "проб и ошибок" в работе [35], однако были по всей видимости известны еще раньше (см. ссылку [21] в работе [35]).

3.3.3 Физический смысл параметров анзаца

Представление WS анзаца в виде преобразования Мёбиуса (3.21) было предложено в [34], в то время как в первой работе [35] авторы использовали представление вида

$$\tan\frac{\varphi_i(t)-\psi(t)}{2}=R(t)\tan\frac{\varphi_i(0)-\theta(t)}{2}, \tag{3.33}$$

откуда для величин $R(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ можно получить уравнения низкоразмерной динамики. Укажем как такое представление связано с преобразованием Мёбиуса и обсудим физический смысл этих параметров. Представление (3.33) можно записать как

$$e^{i\varphi_i(t)}=-e^{i\psi(t)}e^{-i\theta(t)}\frac{e^{i\varphi_i(0)}+q(t)e^{i\theta(t)}}{1+q(t)e^{-i\theta(t)e^{i\varphi(0)}}},\quad q(t)=\frac{1-R(t)}{1+R(t)}, \tag{3.34}$$

откуда видна связь с параметрами преобразования (3.21),

$$w(t)=-\frac{1-R(t)}{1+R(t)}e^{i\theta(t)},\quad \xi(t)=-e^{i\psi(t)-i\theta(t)}.$$

Глобальные параметры $R(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$ имеют простой физический смысл, подробно рассмотренный в [36]. Величина $R(t)$ описывает ширину распределения фаз осцилляторов на единичной окружности. Переменная $\psi(t)$ описывает положение пика этого распределения, а переменная $\theta(t)$ описывает движение осцилляторов по отношению к максимуму (здесь имеется в виду максимум плотности осцилляторов на окружности). Описав базовые свойства низкоразмерной динамики и указав её физическую интерпретацию, изучим её более тонкие свойства.

3.4 Поток на диске Пуанкаре

3.4.1 Градиентная динамика

Обратимся теперь к уравнениям низкоразмерной динамики в модели Курамото (3.24) и изучим их детально. Рассмотрим уравнение на параметр w,

$$\dot{w}=-\frac{K}{N}\left(1-|w|^2\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{w-\Phi_j^0}{1-\overline{w}\Phi_j^0} \tag{3.35}$$

Как было отмечено ранее, это уравнение не содержит параметра ζ, поэтому может быть изучено отдельно. С точки зрения теории динамических систем, мы имеем дело с динамической системой, заданной на диске Пуанкаре [37].

Данная система является градиентной. Это означает, что существует такая функция H, что динамика есть

$$\dot{w}=-K\left(1-|w|^2\right)^2\frac{\partial H}{\partial\overline{w}}. \tag{3.36}$$

Чтобы найти H, достаточно записать

$$\frac{\partial H}{\partial\overline{w}}=-\frac{1}{(1-|w|^2)}\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{w-\Phi_j^0}{1-\overline{w}\Phi_j^0}. \tag{3.37}$$

Разложив на простые дроби, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{w}{1-|w|^2} - \frac{\Phi_j^0}{1-\Phi_j^0\overline{w}}\right).$$

Теперь выполним интегрирование по $\overline{w}$, считая w константой, откуда находим вид H с точностью до некоторой функции $f(w)$,

$$H(w) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ln\frac{1-\Phi_j^0\overline{w}}{1-|w|^2} + f(w).$$

Выберем $f(w)$ так, чтобы $H(w)$ была действительной. Это дает следующее уравнение,

$$H = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\ln\frac{1-\Phi_j^0\overline{w}}{1-|w|^2} + \ln\left(1-\overline{\Phi_j^0}w\right)\right) = -\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ln P\left(w,\Phi_j^0\right), \tag{3.38}$$

где функция $P(w,z)$ есть ничто иное как *ядро Пуассона*,

$$P(w,z) = \frac{1-|w|^2}{|w-z|^2}, \quad |z|=1, \quad |w|<1. \tag{3.39}$$

Подставляя это выражение в уравнение для $w(t)$, мы получаем

$$\dot{w} = -\nabla_{\text{hyp}}H = -K\left(1-|w|^2\right)^2\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ln P\left(w,\Phi_j^0\right)\right\}, \tag{3.40}$$

Логарифм ядра Пуассона имеет геометрическую интерпретацию на диске Пуанкаре: он связан с функцией, которая измеряет расстояние до бесконечно удаленной точки (в данном случае точки, находящейся на границе диска). Такая функция называется *функцией Буземана* и связана с ядром Пуассона соотношением $B(w,z) = \ln P(w,z)$, поэтому градиентный поток можно записать как

$$\dot{w} = -\frac{K}{N}\left(1-|w|^2\right)^2\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\sum_{j=1}^{N}B\left(w,\Phi_j^0\right).$$

С другой стороны, функцию Буземана можно рассматривать как регуляризацию длины геодезической. Действительно, её определение есть

$$B(w,z) = \lim_{w'\to z}\left[L(w',w) - L(w',0)\right], \tag{3.41}$$

где $L(w',w)$ есть длина геодезической, соединяющая две точки w' и w внутри диска Пуанкаре. На диске Пуанкаре длина геодезической дается выражением

$$L(w,w') = \ln\frac{|1-\overline{w}w'|+|w'-w|}{|1-\overline{w}w'|-|w'-w|} = 2\,\text{arctanh}\left|\frac{w-w'}{1-\overline{w}w'}\right|. \tag{3.42}$$

В заключение отметим еще один факт: как известно, именно через ядро Пуассона выражаются функции Грина, заданные на диске. Вкупе со всеми описанными выше фактами, мы считаем уместным выдвинуть гипотезу о том, что в модели Курамото по всей видимости имеется дуальность граница/объем. Однако изучение этого вопроса является темой дальнейшего исследования.

3.4.2 Энтропийная интерпретация потока

Теперь перейдем в уравнении для $w = w(t)$ к пределу $N \to \infty$, тогда сумма в правой части уравнения превратится в интеграл с начальным распределением фаз $f_0(e^{i\varphi})$,

$$\dot{w} = -K\left(1 - |w|^2\right)^2 \frac{\partial}{\partial \overline{w}} \oint_\Gamma d\theta\, f_0(e^{i\theta}) \ln p_{\mathrm{wC}}(w; e^{i\theta}), \tag{3.43}$$

где $p_{\mathrm{wC}}(w; e^{i\theta})$ есть свернутое распределение Коши,

$$p_{\mathrm{wC}}(w; e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |w|^2}{|w - e^{i\theta}|^2}, \quad \oint_\Gamma d\theta\, p_{\mathrm{wC}}(w; e^{i\theta}) = 1, \tag{3.44}$$

а Γ есть любой контур интегрирования длины 2π. Интеграл в правой части уравнения есть ничто иное как *кросс-энтропия* двух распределений,

$$S_{\mathrm{cross}} = \oint_{|z|=1} \frac{dz\, f_0(z) \ln p_{\mathrm{wC}}(w; z)}{iz}. \tag{3.45}$$

Рассмотрим так же расхождение Кульбака-Лейблера двух распределений, которое тесно связано с кросс-энтропией,

$$S_{\mathrm{KL}}[f, g] = -\oint_{|z|=1} dz\, \frac{f(z)}{iz} \ln \frac{g(z)}{f(z)} = -S_0[f(z)] - S_{\mathrm{cross}}, \tag{3.46}$$

где $S_0[f](z)$ обозначает энтропию распределения f. В итоге, уравнение для $w = w(t)$ принимает вид

$$\dot{w} = K\left(1 - |w|^2\right)^2 \frac{\partial S_{\mathrm{KL}}[f_0; p_{\mathrm{wC}}]}{\partial \overline{w}}. \tag{3.47}$$

где $f_0 = f_0(z)$ есть начальное распределение, а $p_{\mathrm{wC}} = p_{\mathrm{wC}}(w; z)$ есть свернутое распределение Коши. Заметим также, что равномерное распределение есть частный случай свернутого распределения Коши с $w = 0$, а дельта-распределение Дирака есть свернутое распределение Коши с $|w| = 1$.

Пусть начальное распределение однородно, то есть $f_0(z) = (2\pi)^{-1}$, тогда расхождение Кульбака-Лейблера легко вычислить явно,

$$S_{\text{K-L}}[f_0, p_{\mathrm{wC}}] = -\ln\left(1 - |w|^2\right). \tag{3.48}$$

Подставляя это выражение в градиентный поток, мы получаем

$$\dot{w} = +K\left(1 - |w|^2\right) w. \tag{3.49}$$

Это уравнение интересно по двум причинам: во-первых, оно повторяет уравнение на фундаментальную моду распределения, которое возникает при использовании OA анзац; во-вторых, оно указывает что модель Курамото на полном графе и с одинаковыми частотами в пределе больших N описывается в терминах *одного* L-S осциллятора.

Путем прямых вычислений можно найти решение $w = w(t)$ и увидеть как именно K-L расхождение изменяется во времени. Действительно, вновь мы можем записать $w(t) = A(t) \exp\{i\alpha(t)\}$ и получить уравнения

$$\dot{A} = +K\left(1 - A^2\right) A, \quad \dot{\alpha} = 0,$$

где первое уравнение есть просто уравнение для L-S осциллятора. До момента выхода в синхронизованный режим, расхождение очень мало (это логично, т.к. мгновенное распределение на единичной окружности близко к равномерному). В момент перехода K-L расхождение начинает сильно расти и в итоге расходится, т.к. распределение на единичной окружности очень сильно отличается от равномерного, что соответствует полной синхронизации.

Мы показали, что синхронизация в модели Курамото на полном графе в пределе $N \to \infty$ соответствует максимизации K-L расхождения между начальным распределением и свернутым распределением Коши, зависящим от параметра. Однако в случае конечных N расхождение между дискретной и непрерывной мерой бесконечно. Чтобы сравнивать дискретный и непрерывный случай, нам следует метризовать пространство распределений. Для этого можно использовать метрику Вассерштейна.

3.4.3 Связь с информационной геометрией

Выше мы показали, что низкоразмерная динамика в модели Курамото является градиентным потоком от K-L расхождения. В теории вероятностей функции расхождения позволяют количественно описывать насколько два заданных распределения похожи между собой. Вопрос о том как измерить "расстояние" в пространстве параметров между двумя распределениями приводит к *информационной геометрии*. Это раздел науки, который сочетает в себе элементы теории дифференциальной геометрии вместе с теорией вероятностей и статистикой.

Предметом изучения информационной геометрии являются так называемые *статистические многообразия*. Пусть $p = p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ есть плотность вероятности некоторого распределения случайной величины $\boldsymbol{x}$, которое зависит от набора величин $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_N)$. Параметры распределения ξ могут принимать значения из некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$. Тогда статистическое многообразие $\mathcal{M}$ есть множество $\mathcal{M} = \{p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) | \xi \in \mathcal{D}\}$, т.е. каждой точке этого многообразия соответствует своя плотность вероятности с некоторым набором параметров $\boldsymbol{\xi}$. Важнейшая особенность этого многообразия состоит в том, что оно *не является* Римановым. Это связано с тем, что у каждой его точки есть "вес", который есть энтропия распределения $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$. Доступное изложение основных аспектов информационной геометрии дается в [38]. Здесь же мы отметим лишь следующий факт. Статистическое многообразие многообразие описывается двумя тензорными структурами: метрикой Фишера g^F_{ij} и тензором асимметрии T_{ijk} (симметричен по всем индексам). Для семейства распределений $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ эти два тензора определяются как

$$\begin{aligned} g^F_{ij} &= \int d\boldsymbol{x}\, p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}, \\ T_{ijk} &= \int d\boldsymbol{x}\, p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Геометрический смысл метрического тензора g^F_{ij} ясен. Тензор асимметрии T_{ijk} отражает тот факт, что расстояние на статистических многообразиях может быть несимметрично по отношению к перестановке точек, т.е. расстояние от A до B не обязательно совпадает с расстоянием от B до A.

Существует особый класс распределений, для которых метрика Фишера и тензор асимметрии имеют очень простой вид. Это распределения из экспоненциального семейства,

$$p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = \exp\left\{\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\xi})\right\},$$

где $\psi(\boldsymbol{\xi})$ есть строго выпуклая функция. Для распределений из этого семейства метрика Фишера и тензор асимметрии имеют следующий вид,

$$g^F_{ij} = \partial_i\partial_j\psi, \quad T_{ijk} = \partial_i\partial_j\partial_k\psi, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\xi_i}.$$

Существование строго выпуклой функции $\psi(\boldsymbol{\xi})$ позволяет исследовать градиентные потоки на статистических многообразиях,

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = -\left(g^F\right)^{-1}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\psi(\boldsymbol{\xi}). \tag{3.51}$$

Примеры таких градиентных потоков обсуждаются в [39; 40] на простейшем примере распределение экспоненциального семейства – Гауссова распределения. Как известно, Гауссовы распределения задаются двумя параметрами, $\mu\in\mathbb{R}$ и $\sigma>0$. Они образуют статистическое многообразие $\mathcal{M}_G = \{p(\mu,\sigma;x)|\mu\in\mathbb{R},\ \sigma>0\}$. Чтобы убедиться в том, что Гауссово распределение является экспоненциальным, достаточно переписать его в подходящих координатах, выбрав в качестве параметров величины $\xi_1 = \mu/\sigma^2$ и $\xi_2 = -1/(2\sigma^2)$. Тогда строго выпуклой функцией будет являться функция

$$\psi(\mu,\sigma) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right).$$

Экспоненциальное семейство распределений обладает еще одним примечательным свойством: для них K-L расхождение является расхождением Брегмана, которое задается выражением

$$D_B[\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\xi}_0] = \psi(\boldsymbol{\xi}) - \psi(\boldsymbol{\xi}_0) - \nabla\psi(\boldsymbol{\xi}_0)\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0),$$

и обе эти конструкции приводят к одному и тому же градиентному потоку (3.51).

Как легко заметить, распределение Коши и его свёрнутая версия не принадлежат экспоненциальному семейству распределений. Тем не менее, статистическое многообразие распределений Коши обладает важным свойством: тензор асимметрии T_{ijk} тождественно равен нулю при любом выборе параметров. Это означает, что это статистическое многообразие является Римановым. К сожалению, это свойство не помогает продвинуться в интерпретации потока K-L расхождения.

Однако распределение Коши также является представителем q-экспоненциального семейства распределений. Данные распределения были предложены в работах [41—43] с целью изучения проявления неэкстенсивности энтропии в дальнодействующих системах, их можно представить в виде

$$\mathcal{N}_q(\beta,x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}\exp_q\left\{-\beta x^2\right\}, \quad \beta>0, \tag{3.52}$$

где C_q есть константа нормировки, а функция $\exp_q(x)$ есть q-экспонента, определенная как

$$\exp_q(x) = \begin{cases} \exp(x), & q = 1, \\ (1 + (1-q)x)^{1/(1-q)}, & q \neq 1,\ 1 + (1-q)x > 0, \\ 0^{1/(1-q)}, & q \neq 1,\ 1 + (1-q)x \leq 0. \end{cases} \tag{3.53}$$

Соответственно q-логарифмом называется функция, определенная следующим образом

$$\ln_q(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0,\ q = 1, \\ (x^{1-q} - 1)/(1-q), & x > 0,\ q \neq 1, \end{cases} \tag{3.54}$$

а для $x < 0$ данная функция не определена. Распределение Коши соответствует выбору $q = 2$ и может быть записано как

$$p_{\mathrm{C}}(\gamma, \beta; x) = \mathcal{N}_q\left(\gamma^{-2}, (x-\beta)^2\right)\big|_{q=2}. \tag{3.55}$$

Используя определение q-экспоненты, легко проверить, что функция распределения $p_{\mathrm{C}}(\gamma, \beta; x)$ также может быть представлена как

$$p_{\mathrm{C}}(\gamma, \beta; x) = \exp_q\left(\xi_i g_i(x) - \psi(\xi)\right)\big|_{q=2} \tag{3.56}$$

с $\xi_1 = 2\pi\beta/\gamma$, $\xi_2 = -\pi/\gamma$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$, а потенциальная функция $\psi(\xi)$ определяется как

$$\psi(\xi) = -\frac{\pi^2}{\xi_2} - \frac{\xi_1^2}{4\xi_2} - 1. \tag{3.57}$$

Для q-экспоненциальных распределений существует аналог расхождения Брегмана, расхождение Тсаллиса [44],

$$D_T[\xi_1; \xi_2] = \left(\int dx\, p(\xi_2; x)^2\right)^{-1} \left[\int dx\, \frac{p(\xi_2; x)^2}{p(\xi_1; x)} - 1\right]. \tag{3.58}$$

Для q-экспоненциального семейства распределений существует метрика, построенная как гессиан функции потенциала,

$$g_{ij}^q = \frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{2\pi}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

Прямым вычислением можно убедиться, что в случае распределения Коши данная метрика не будет совпадать с метрикой Фишера. Метрика g_{ij}^q имеет следующий вид,

$$g_{ij}^q = \frac{2\pi}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

в то время как Фишеровская метрика есть

$$g_{ij}^{\mathrm{F}} = \frac{1}{2\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

Однако эти две метрики конформно-эквивалентны, т.е. существует такая функция $u(\gamma)$, что $g^{\mathrm{F}}_{ij} = \exp(u(\gamma))g^{q}_{ij}$. Легко видеть, что эта функция есть $u(\gamma) = \ln[2/(\pi\gamma)]$. Свернутое распределение Коши получается из обычного конформным преобразованием, поэтому все конструкции, связанные с q-экспонентами и функциями расхождения сохраняют свою силу. Конформная эквивалентность метрик позволяет связывать между собой градиентный поток K-L расхождения и градиентный поток потенциала $\psi(\boldsymbol{\xi})$. Указав на эту связь, вернемся к интерпретации градиентного потока в терминах синхронизации.

Мы знаем, что возникновение синхронизованного состояния в модели на полном графе и одинаковыми частотами соответствует с одной стороны $|r| \to 1$, когда все осцилляторы собираются в одну точку на единичной окружности и двигаются с угловой частотой ω. С другой стороны, в случае равномерного распределения начальных условий и в термодинамическом пределе модуль параметра порядка $|r|$ совпадает с величиной $|w|$. Поэтому синхронизация соответствует выходу точки $w(t)$ на границу диска Пуанкаре, т.е. $|w| \to 1$. В свою очередь, это соответствует возникновению особенности в метрике Фишера. Таким образом, метрика Фишера чувствительна к появлению синхронизованного состояния.

3.5 Влияние связей на квази-интегрируемость

Рассмотренная ранее низкоразмерная динамика в модели Курамото была тесно связана не только с конкретным типом взаимодействия фаз, но и с тем, что степени свободы взаимодействовали по принципу “все-со-всеми”. Ключевую роль в проявлении квази-интегрируемости играет тот факт, что все осцилляторы в модели Курамото с одинаковыми частотами являются идентичными, т.е. коэффициенты при генераторах группы Мёбиуса в правой части уравнения одинаковы для всех индексов i. Легко видеть, что такое поведение наблюдается только в случае связей “все-со-всеми”, т.е. когда степени свободы (осцилляторы) расположены в вершинах полного графа, ребрами которого являются связи между осцилляторами. Далее мы опишем как неоднородность в параметрах может сказаться на квази-интегрируемости, т.е. низкоразмерной динамике.

3.5.1 Поиски замены переменных

В общем случае следует рассматривать модель вида

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k + 2K \sum_{j=1}^{N} W_{kj} \sin\left(\varphi_j - \varphi_k\right), \tag{3.62}$$

где W_{kj} является матрицей смежности некоторого графа G (обычно полагают, что граф взвешенный и ненаправленный, т.е. все элементы матрицы W_{ij} неотрицательны, а сама матрица симметрична), в вершинах которого заданы степени свободы. Этот граф вообще говоря может быть направленным. Введение комплексной фазы $\Phi_k = \exp\left(i\varphi_k\right)$ сводит систему (3.62) к виду

$$\dot{\Phi}_k = i\omega_k\Phi_k + K \sum_{j=1}^{N} W_{kj} \left(\Phi_j - \overline{\Phi}_j\Phi_k^2\right). \tag{3.63}$$

Можно ввести величину, аналогичную параметру порядка в виде $r_k(t) = \sum_j W_{kj}\Phi_j(t)$ и представить её как $r_k(t) = a_k(t) + ib_k(t)$, где $a_k(t)$ и $b_k(t)$ есть действительнозначные функции. Тогда уравнения движения можно представить в виде

$$\dot{\Phi}_k = i\omega_k\Phi_k - \left(\Phi_k^2 - 1\right) a_k(t) + \left(i\Phi_k^2 + i\right) b_k(t). \tag{3.64}$$

Правая часть этого уравнения все также представляет собой комбинацию генераторов группы Мёбиуса, однако теперь коэффициенты зависят от индекса k, т.е. имеется неоднородность. Если посредством алгебраических преобразований и замен переменных удается найти новые переменные $\widetilde{\Phi}_i$, в которых уравнения движения принимают вид

$$\dot{\widetilde{\Phi}}_i = i\Omega(t)\Phi_i - \left(\widetilde{\Phi}_i - 1\right) A(t) + \left(i\widetilde{\Phi}_i^2 + i\right) B(t), \tag{3.65}$$

где величины $\Omega(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ есть комбинации исходных величин ω_k, $a_k(t)$ и $b_k(t)$, то вновь динамика системы сводится к действию *одинакового* преобразования Мёбиуса на начальные условия $\widetilde{\Phi}_i(0)$. Как только динамика была сведена к Мёбиусу, можно получить уравнения низкоразмерной динамики, т.е. уравнения для коэффициентов преобразования Мёбиуса $w(t)$ и $\zeta(t)$. В пределе $N \to$ величина $|w(t)|$ напрямую связана с модулем параметра порядка $|r(t)|$, поэтому анализируя фиксированные точки уравнения на $w(t)$ мы можем исследовать как от функций $\Omega(t)$, $A(t)$ и $B(t)$ зависит синхронизация. К сожалению, очень немногое число графов позволят реализовать эту программу. Мы обсудим один из немногих таких графов далее. Следует отметить также следующий факт. Пусть модель Курамото на графах G_1 и G_2 приводится к виду (3.64). Пусть G есть граф, который представляет собой декартово произведение графов G_1 и G_2, то есть $G = G_1 \square G_2$. Тогда модель на графе G также будет приводится к виду (3.64). Примеры модели Курамото на декартовом произведении графов обсуждаются в [45; 46]

В изложенной выше стратегии предполагается поиск такой замены переменных, в которых в системе существует *одинаковое для всех* вершин графа преобразование Мёбиуса. Как было отмечено, очень редко удается найти такую замену. Более естественным шагом является попытка понизить размерность системы так, чтобы существовали группы осцилляторов, на каждую из которых действует свое преобразование Мёбиуса. При этом, естественно такая стратегия оказывается хоть сколько-нибудь полезной только если таких групп меньше, чем полное число вершин графа. В этом подходе мы с необходимостью сталкиваемся с учетом симметрий графа. Данный подход был использован в работе [47], где авторы реализуют следующую схему. Пусть у графа G имеется N вершин, тогда выберем наугад четыре вершины. Если кросс-отношение этих вершин сохраняется в ходе временной эволюции, то это означает что данная четверка вершин описывается Мёбиусовой динамикой. Перебирая все возможные четверки вершин, можно найти число различных преобразований Мёбиуса, которыми описывается динамика модели на данном графе. Еще одним вариантом рассмотрения неоднородностей в модели Курамото является построение теории возмущений в случае, когда данные неоднородности малы. Этот метод был предложен в работе [48].

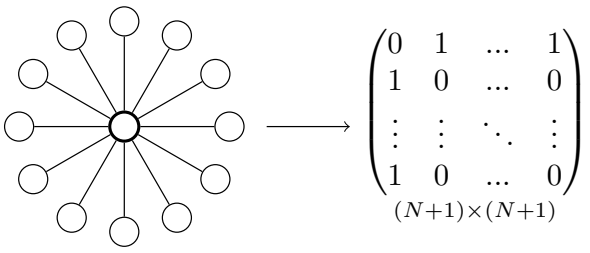


Рисунок 3.1—Граф-звезда с $N = 12$ листьями и его матрица смежности

3.6 Граф-звезда

Одним из редких случаев, который допускает применение WS анзаца, является модель Курамото на графе-звезде [49; 50]. Матрица смежности такого графа устроена совсем просто, см. Рисунок 3.1. Можно рассмотреть модель с асимметричными связями на графе-звезде, чьи уравнения движения имеют вид

$$\dot{\Phi} = \beta\omega + \frac{K\beta}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j - \Phi\right); \quad \dot{\theta}_j = \omega + K\sin\left(\Phi - \theta_j\right), \tag{3.66}$$

где Φ есть фаза так называемого *хаба*, т.е. центральной вершины графа-звезды, вершины θ_j называют *листьями*, $\beta > 0$ есть параметр корреляции частот ω с валентностью вершин. Введя разность фаз между хабом и листьями, $\varphi_j = \theta_i - \Phi$, мы получаем систему уравнений

$$\dot{\varphi}_i = -(\beta-1)\omega - K\sin\varphi_i - \frac{K\beta}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\varphi_i. \tag{3.67}$$

Параметр порядка задается выражением $r = \sum_j e^{i\varphi_j}/N$. Правая часть уравнений в этой системе вновь одинакова для всех индексов i. Значит, можно применить WS анзац и представить φ_i как преобразование Мёбиуса,

$$z_i(t) = \exp(\varphi_i(t)) = \frac{w(t) + e^{i\alpha(t)}z_i^0}{1 + \overline{w(t)}e^{i\alpha(t)}z_i^0}, \quad z_i^0 \equiv \varphi_i(t=0). \tag{3.68}$$

Здесь мы выбрали другую параметризацию преобразования Мёбиуса лишь из соображений удобства. В этой параметризации $\alpha \in \mathbb{R}$, $|w| < 1$. Рассмотрим теперь выражение для параметра порядка и представим его в виде степенного ряда по w,

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} w\left(1 + e^{i\alpha}z_j^0|w|^{-2}\overline{w}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\overline{w}e^{i\alpha}z_j^0\right)^l = \\ = \frac{w}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\overline{w}e^{i\alpha}z_j^0\right)^l - |w|^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\overline{w}e^{i\alpha}z_j^0\right)^{l+1}\right). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Из этого выражения вновь следует, что в случае однородного начального распределения фаз $z_j^0 = \exp(i\varphi_j(0))$ параметр порядка имеет простой вид, $r = w$. Это позволяет записать уравнение на параметры преобразования Мёбиуса, $w(t)$ и $\alpha(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -i(\beta-1)\omega - i\beta K w\,\mathrm{Im}\,w + \frac{K}{2}\left(1 - w^2\right), \\ \dot{\alpha} &= -(\beta-1)\omega - \beta K\,\mathrm{Im}\,w + K\,\mathrm{Im}\,\overline{w}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Видно, что уравнение на параметр w не содержит параметра α, поэтому мы вправе рассмотреть его отдельно. Фиксированные точки первого уравнения системы (3.70) имеют вид

$$w_{\mathrm{s1,2}} = \exp\left[i \arcsin \frac{(\beta-1)\omega}{(\beta+1)K}\right], \quad K > K_c^f \tag{3.71}$$

$$\begin{gathered} w_{\mathrm{a1,2}} = -i\frac{(\beta-1)\omega \pm \sqrt{(\beta-1)^2\omega^2 - (2\beta+1)K^2}}{(2\beta+1)K}, \\ w_{\mathrm{s1,2}} = \exp\left[i \arcsin \frac{(\beta-1)\omega}{(\beta+1)K}\right], \quad K_c^f \geq K \geq K_c^b, \end{gathered} \tag{3.72}$$

$$w_{\mathrm{a2}} = -i\frac{(\beta-1)\omega - \sqrt{(\beta-1)^2\omega^2 - (2\beta+1)K^2}}{(2\beta+1)K}, \quad K < K_c^b. \tag{3.73}$$

Точка w_{s1} является центром и соответствует синхронизованному состоянию. Точка w_{a1} является седловой и соответствует сепаратриссе. Точка w_{a2} является источником и соответствует несинхронизованному состоянию. Здесь K_c^f и K_c^b есть две критические константы, которые соответствуют эволюции по константе связи "вперед" и "назад",

$$K_c^f = \frac{\beta-1}{\sqrt{2\beta+1}}\omega, \quad K_c^b = \frac{\beta-1}{\beta+1}\omega. \tag{3.74}$$

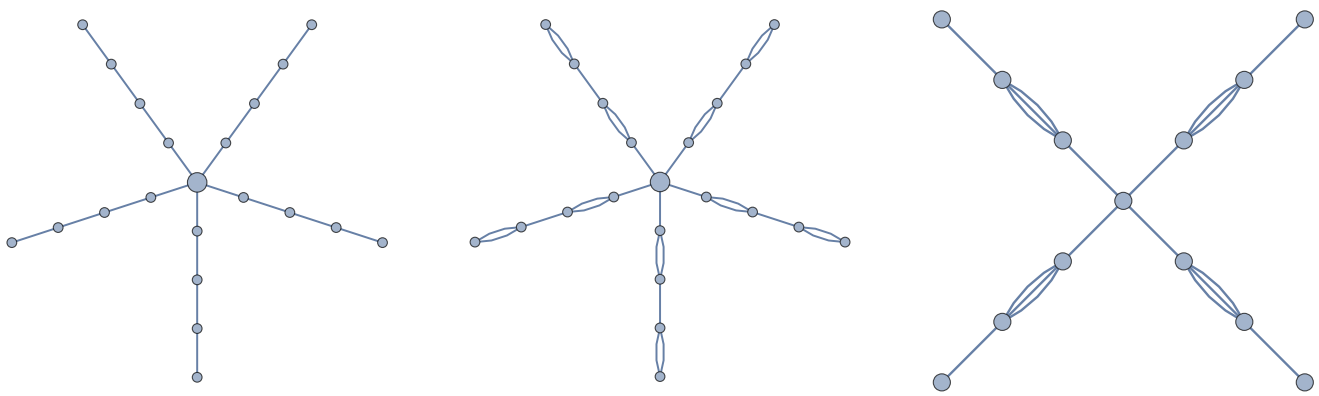
Первая константа K_c^f соответствует процессу, когда выбрав в качестве начального условия несинхронизованное состояние, мы медленно изменяем константу связи K. Пока $K < K_c^f$ усредненное по времени значение модуля параметра $\langle r \rangle$ порядка равно нулю, затем в точке $K = K_c^f$ величина $\langle r \rangle$ испытывает скачок и становится отличной от нуля. Далее, при $K > K_c^f$ величина $\langle r \rangle$ стремится к своему максимальному значению, т.е. к единице. Вторая константа K_c^b соответствует процессу, когда мы выбираем в качестве начального условия полностью синхронизованное состояние с $\langle r \rangle \approx 1$ и большую константу связи, т.е. $K > K_c^f$ (отметим также, что стабильность синхронизованного состояния показана в работе [51]). Затем мы медленно уменьшаем K. Тогда величина $\langle r \rangle$ начинает медленно уменьшаться, но все еще остается существенно отличной от нуля. В точке $K = K_c^b$ параметр порядка $\langle r \rangle$ скачком меняется до околонулевой величины и затем убывает в ноль с последующим уменьшением K. Такое поведение называют *взрывной синхронизацией*. Одним из условий взрывной синхронизации является наличие корреляции между собственными частотами ω_i в модели Курамото и валентностями вершин d_i графа, на котором задана модель, это обсуждается в [52].

3.7 Обобщения графа-звезды

Рассмотрим теперь обобщения графа звезды. В первую очередь нас будет интересовать так называемая *длинная звезда*, также мы рассмотрим *декорированную звезду*. От графа-звезды оба эти графа отличается лишь тем, что теперь помимо вершин-листьев существуют "лучи", см. Рисунок 3.2

Модель Курамото на таких графах дается системой уравнений

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + K\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{3.75}$$



(а) (б) (в)

Рисунок 3.2—(а) Граф длинная звезда с $n = 5$ лучами и длиной луча $p = 4$; (б) декорированная звезда с $n = 5$ лучами, длинной луча $p = 4$ и $m = 2$ дополнительными ребрами на лучах; (в) декорированная звезда с $n = 4$, $p = 2$, $m = 3$

где A_{ij} есть матрица смежности соответствующего графа. Мы будем полагать, что $\omega_i = d_i$, где $d_i = \sum_j A_{ij}$, т.е. собственные частоты совпадают с валентностью вершин графа с матрицей смежности A_{ij}. В качестве меры синхронизации рассматривается величина

$$R(K) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{N} \left| \sum_{i=k}^{N} e^{i\varphi_k(t)} \right|, \tag{3.76}$$

т.е. усредненное по времени значение модуля параметра порядка $r(t)$, запись $R(K)$ призвана подчеркнуть, что данное значение не зависит от начальных условий $\varphi_i(t = 0)$, а является лишь функцией константы связи K.

3.7.1 Синхронизованное состояние и его стабильность

Полностью синхронизованное состояние описывается фазами в виде $\varphi_i = \Omega t + \theta_i$, где θ_i есть некоторая константа, зависящая от вершины i. В синхронизованном состоянии все лучи длинной звезды симметричны, т.е. не отличаются друг от друга. Можно показать, что наибольшее значение величины $|K \sin(\varphi_k - \varphi_{k+1})|$, где отсчет индекса k идет от вершины-хаба, есть $(np-1)/(np+1)$ и оно достигается при $k = p$. Это означает, что с уменьшением константы связи K полностью синхронизованное состояние исчезает при

$$K < \frac{np-1}{np+1},$$

поскольку $\sin(\varphi_p - \varphi_{p+1}) \leq 1$. Значит, при уменьшении константы связи сначала происходит десинхронизация листьев, самых удаленных от хаба вершин. Так мы находим первую критическую константу,

$$K_c^b = \frac{np-1}{np+1}. \tag{3.77}$$

Далее процесс десинхронизации распространяется вдоль лучей, пока не доходит до ближайших соседей вершины-хаба. Здесь ситуация полностью воспроизводит обычный граф-звезду: все

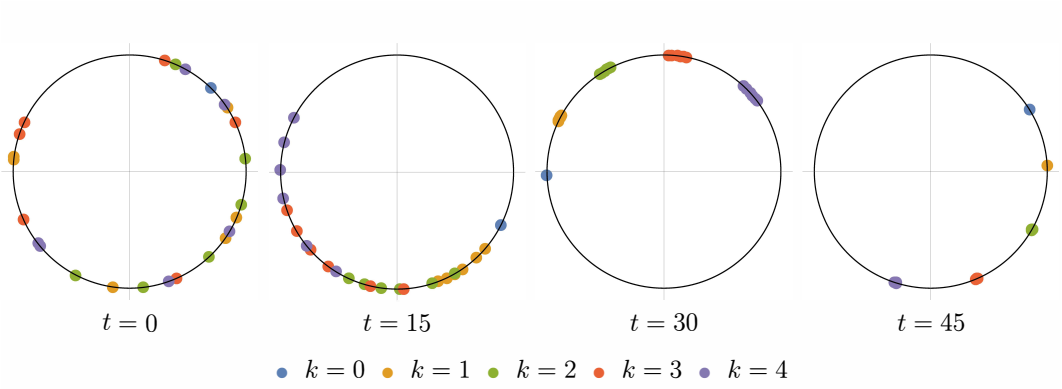


Рисунок 3.3—Динамика процесса синхронизации на длинной звезде при $K = 1.5 \geq K_c^f$ (вне области гистерезиса) с параметрами $n = 6$, $p = 4$, индекс k обозначает номер слоя, $k = 0$ соответствует хабу

вершины, кроме ближайших соседей хаба уже не представляют интереса. При значении константы связи

$$K_c^i = \frac{n-1}{n+1} \tag{3.78}$$

скачком происходит полная десинхронизация. В свою очередь, если бы мы начали медленно увеличивать константу связи K, то в точке

$$K_c^f = \frac{n-1}{\sqrt{2n+1}} \tag{3.79}$$

усредненное по времени значение модуля параметра порядка $\langle r \rangle$ скачком становилось бы отличным от нуля и достигало своего максимального значения с последующим ростом K. В точке $K = K_c^f$ происходит синхронизация вершины-хаба с его ближайшими соседями, затем процесс синхронизации распространяется вдоль лучей до вершин-листьев. Такой сценарий синхронизации подтверждается численными симуляциями, приведенным на Рисунке 3.3. Важным моментом оказывается учет гистерезиса в численном счёте. Ключевая особенность численной схемы, учитывающей гистерезис, состоит в том, что решение системы ОДУ, найденное на k-ом шаге (т.е. при заданном значении K) используется в качестве начального условия на $(k+1)$-ом шаге (т.е. при изменении K на $K + \delta K$).

Обсудим теперь стабильность синхронизованного состояния. Рассмотрим слабое возмущение в виде $\varphi_i(t) = \Omega t + \theta_i + \delta\theta_i(t)$, где $\delta\theta_i(t)$ мало. Подставим это решение в уравнения движения (3.75), что дает

$$\delta\dot{\theta}_i + \Omega = \omega_i + K \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \cos\left(\varphi_j - \varphi_i\right) \left(\delta\theta_j - \delta\theta_i\right), \tag{3.80}$$

откуда в линейном приближении мы находим

$$\delta\dot{\theta}_i = K \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \Delta_{ji} \left(\delta\theta_j - \delta\theta_i\right), \quad \Delta_{ji} = \cos\left(\varphi_j - \varphi_i\right). \tag{3.81}$$

Линейная стабильность системы может быть проанализирована с помощью теоремы Гершгорина. Переставляя индексы, запишем (3.81) в виде

$$\delta\dot{\theta}_i = -K T_{ik} \delta\theta_k,$$

где T_{ik} есть взвешенная матрица Лапласа для матрицы $A_{ij}\Delta_{ji}$ и подразумевается суммирование по индексу k. Идея применения теоремы Гершгорина для анализа стабильности в модели Курамото была применена в работе [53] для графа кольца. В соответствии с теоремой Гершгорина, собственные значения матрицы T_{ij} заключены в кругах радиуса $R_i = \sum_{k=1} T_{ik}$ с центрами в T_{ii}. Матрица T_{ik} также имеет нулевое собственное значение, которое соответствует параллельному переносу, $\theta_i \to \theta_i + \chi$, где χ есть константа (см. также [53] и [51] для детального обсуждения). Простой анализ показывает, что если выполняется условие

$$\forall i, j \in \{1, ..., N\} \to |\varphi_j - \varphi_i| < \pi/2,$$

то все собственные значения матрицы T_{ij} неотрицательны, т.е. синхронизованное состояние стабильно. Если же $|\varphi_j - \varphi_i| > \pi/2$, то синхронизованное состояние нестабильно. Наконец, если найдутся такие i и j что $|\varphi_j - \varphi_i| > \pi/2$ и одновременно найдутся такие k и l что $|\varphi_k - \varphi_l| < \pi/2$, то требуется более аккуратный анализ. Отметим в заключение этого раздела, что промежуточное состояние, когда только часть компонент графа (т.е. например внутренность луча) синхронизируется, можно трактовать как пример химероподобных состояний.

3.7.2 Термодинамический предел

Рассмотрим теперь случай, когда число лучей очень большое, $n \gg 1$ и длина каждого луча также большая, $p \gg 1$. Это соответствует термодинамическому пределу, т.к. полное число вершин графа стремится к бесконечности. Мы покажем, что в таком пределе в системе может возникать состояние с нулевой синхронизацией даже при очень больших значениях константы связи K. Это состояние называют *распределенным состоянием* (англ. splay state, описано в работах [34; 54; 55]), только в нашем случае такое состояние имеет симметрию.

Подставим синхронизованное решение в уравнения движения. Тогда мы получим систему линейных уравнений для величины $\Delta_k = K \sin(\theta_k - \theta_{k-1})$. Как мы отмечали ранее, в синхронизованном состоянии все лучи эквивалентны. Решением уравнений движения является $\theta_k(t) = \Omega t + \varphi_k$, где Ω есть средняя частота, а величины φ_k являются константами, индекс k меняется в пределах от 1 to p. Подставляя это решение в уравнения движения, мы получим систему линейных уравнений для величин $\Delta_k = K \sin(\theta_k - \theta_{k-1})$,

$$\begin{gathered} \Omega = n + Kn \sin(\theta_1 - \theta_0), \\ \Omega = 2 + K \sin(\theta_k - \theta_{k-1}), k \in [1, p-1], \\ \Omega = 1 + K \sin(\theta_p - \theta_{p-1}). \end{gathered} \tag{3.82}$$

Из этой системы легко получить явные выражения для величин Δ_k, которые связаны с разностью фаз на луче,

$$\Delta_k = \frac{2p}{np+1} - 1 - \frac{2(k-1)}{np+1}, \tag{3.83}$$

где θ_0 есть фаза хаба, а k есть индекс вершины на луче. В пределе $p \gg 1$, раскладывая (3.83) в ряд, мы получим

$$\Delta_k = \left(-1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{2(kn - n + 1)}{n^2 p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^2}\right). \tag{3.84}$$

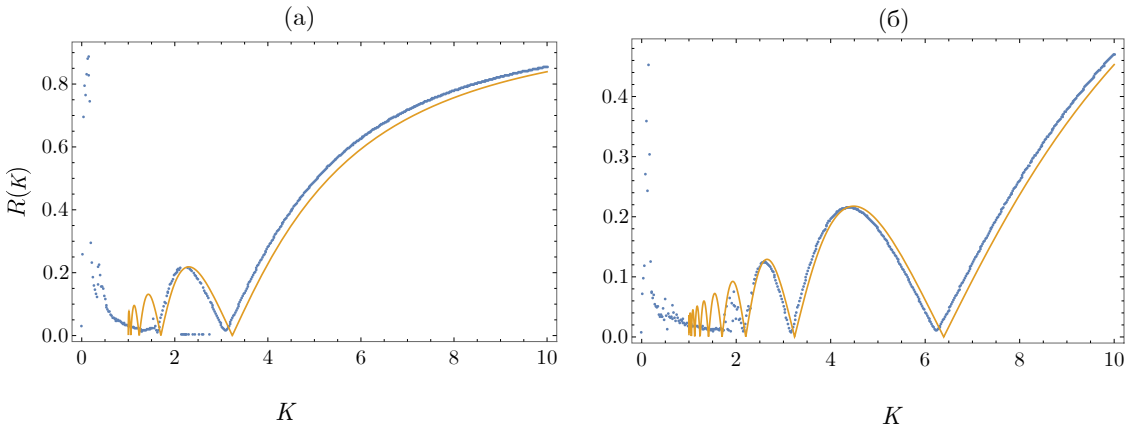


Рисунок 3.4—Сравнение параметра порядка $R(K)$, полученного численно (синие точки) и аналитически (сплошная линия, по выражению (3.88)) для параметров (а) $n = p = 20$, (б) $n = p = 40$ длинной звезды

Из этого выражения в пределе $n \gg 1$ также находим

$$\theta_k - \theta_{k-1} = -\operatorname{arccsc} K. \tag{3.85}$$

Положим $k = 1$, тогда $\theta_1 = \theta_0 - \operatorname{arccsc} K$. Воспользуемся теперь рекуррентным соотношением (3.85), что позволит найти все θ_k. Тогда параметр порядка можно записать как

$$r = \frac{e^{i\theta_0}}{np+1} + \frac{n}{np+1}\sum_{k=1}^{p} e^{i\theta_0 - ik\operatorname{arccsc} K}. \tag{3.86}$$

В пределе больших p и n, вклад от хаба пренебрежимо мал, значит мы можем записать следующее выражение для параметра порядка,

$$r = \frac{n}{np+1}\sum_{k=1}^{p} e^{i\theta_0 - ik\operatorname{arccsc} K}. \tag{3.87}$$

Просуммировав ряд, мы получим

$$|r|^2 = \frac{n^2}{(np+1)^2}\frac{\cos(p\operatorname{arccsc} K) - 1}{\sqrt{1-(1/K)^2} - 1} \tag{3.88}$$

Отсюда следует что при $K > 1$ параметр порядка имеет нули при $K = \csc(2\pi m/p)$, $m \in \mathbb{Z}$ и $1 \le m \le \lfloor p/4 \rfloor$. Из формулы (3.88) следует, что число нулей параметра порядка определяется значением p. Численное моделирование в этом пределе согласуется с уравнением (3.88), что представлено на Рисунке 3.4. Если рассмотреть предел большого p и конечного n, выражение для параметра порядка можно получить тем же способом, но теперь вклад хаба не является пренебрежимо малым. В таком случае выражение для параметра порядка более сложное, но также демонстрирует появление $\mathbb{Z}_k$-симметричной структуры с некоторым k. В случае $m = 1$ осцилляторы образуют конфигурацию на единичной окружности S^1, которая сохраняет $\mathbb{Z}_p$-симметрию. Для больших значений m эта $\mathbb{Z}_p$-симметричная структура перестраивается. Для m из $1 \le m \le \lfloor p/4 \rfloor$ возникшая структура имеет симметрию $\mathbb{Z}_q$, где $q = p/\gcd(p, m)$,

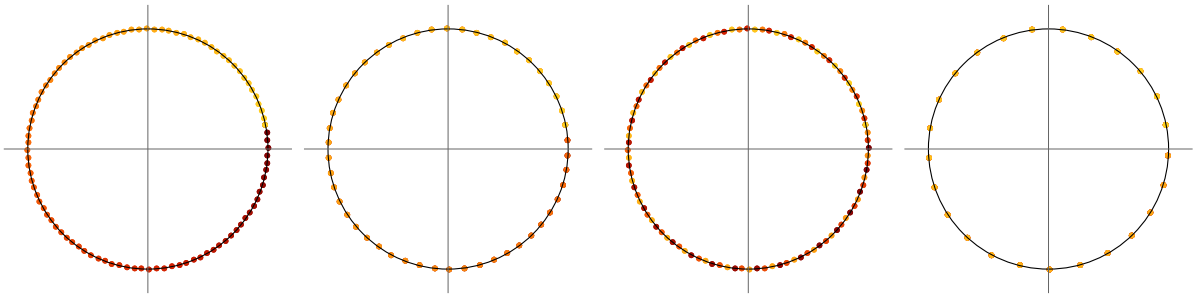


Рисунок 3.5—Возможные $\mathbb{Z}$-симметричные состояния, отвечающие разным m с фиксированным значением $p = 100$. Более яркие цвета соответствуют большим значениям $k \in [1, p]$

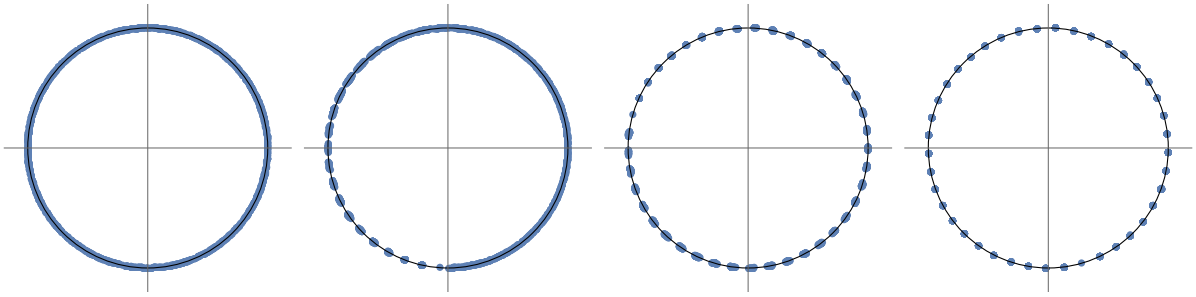
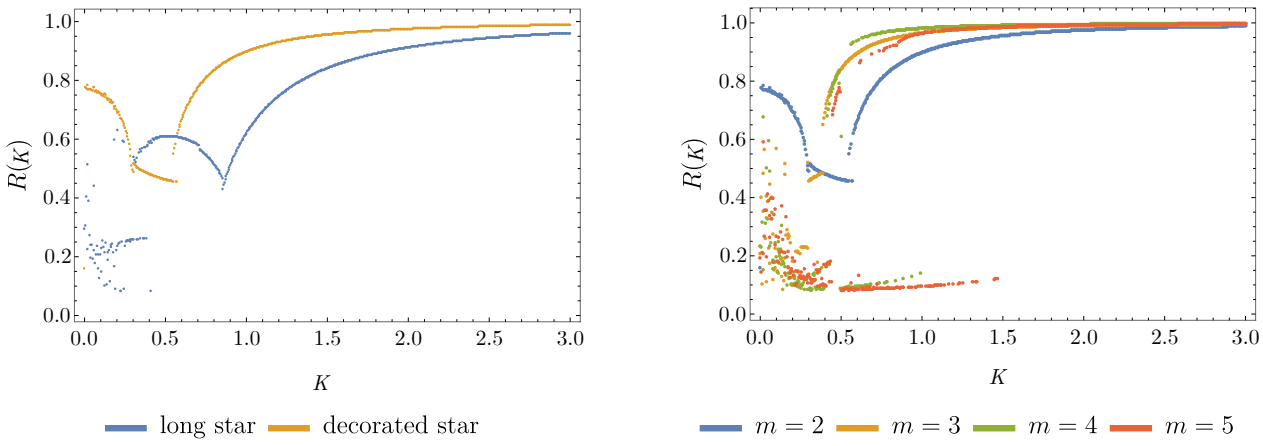


Рисунок 3.6—Снимки динамики модели с $n = p = 40$, $R(K = \csc(2\pi/p)) \approx 4.4 \cdot 10^{-4}$.

где $\gcd(p, m)$ есть наибольший общий делитель чисел p и m. Такие конфигурации имеют q кластеров. Рисунок 3.5 иллюстрирует возможные структуры с симметриями циклической группы. На Рисунке 3.6 показана эволюция модели на единичном диске, приводящая к такой структуре.

Рассмотрим теперь другой вид графа, *декорированную звезду*. Граф декорированной звезды определяется тремя величинами: числом лучей n, длиной каждого луча p и числом дополнительных ребер на каждом луче m. Очевидно, что при $m = 1$ граф декорированной звезды – это просто граф длинная звезда. Поэтому разумно ожидать, что при малых значениях m фазовая диаграмма модели Курамото на графе декорированной звезды будет весьма похожа на соответствующую фазовую диаграмму длинного графа звезды, см. Рисунок 3.7(а). Было показано, что вершины с высокой степенью существенно влияют на процесс синхронизации (например, в работе [56]), поэтому можно ожидать, что при увеличении m зависимость $R = R(K)$ для декорированного звездного графа существенно отличается от поведения параметра порядка на длинном звездном графе. Это наблюдение согласуется с моделированием, см. Рисунок 3.7(б). Мы приходим к выводу, что модель Курамото на декорированном звездном графе демонстрирует поведение, похожее на поведение модели на длинном звездном графе, но оно модифицировано наличием дополнительных связей m через луч. Для достаточно больших m, $m \sim n$, поведение параметра порядка становится сильно гистерезисным. Наконец, процесс синхронизации на декорированном звездном графе также демонстрирует пошаговое поведение во времени. Его можно обнаружить с помощью снимков системы для разных времен, см. Рисунок 3.8. Как и в случае с длинной звездой, синхронизация сначала захватывает ближайших соседей центрального узла-хаба, а листья становятся синхронизированными в



(а) (б)

Рисунок 3.7—(а) Сравнение фазовых диаграмм для длинной звезды с $n = 3$ и $p = 4$ и декорированной звезды с $n = 3$, $p = 4$ и $m = 2$; (б) фазовые диаграммы для декорированной звезды с $n = 3$, $p = 4$ и разными значениями m

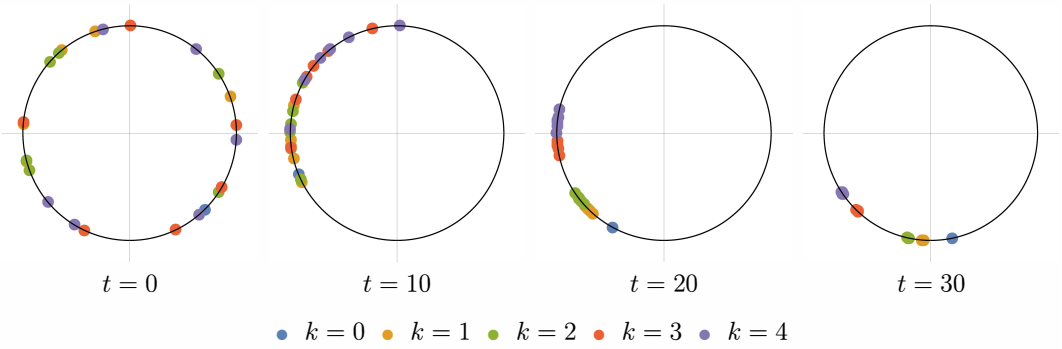


Рисунок 3.8—Динамика синхронизации на графе типа декоритированная звезда при $K = 2.0$ (вне области гистерезиса) с параметрами $n = 6$, $p = 4$, $m = 3$, индекс k нумерует слои вершин от хаба, $k = 0$ соответствует хабу

последнюю очередь. Синхронизированное состояние также имеет кластерную структуру из-за разности фаз между осцилляторами на лучах.

3.8 Химеры

В ходе изучения феномена синхронизации одним из ярких событий было открытие так называемых *химер*. Наличие сложной топологии взаимодействий в модели Курамото может приводить к возникновению структур (паттернов), где частично синхронизованные степени свободы сосуществуют с несинхронизованными. Такую структуру называют химерой. Более строго определения понятия химерного состояния по всей видимости не существует. Впервые такое сосуществование синхронизованных и несинхронизованных степеней свободы было продемонстрировано в работе [57]. В этой работе авторы рассматривают популяцию нелинейных осцилляторов, заданных на кольце, но взаимодействующих нелокальным образом. Такая

система в непрерывном пределе описывается уравнением Гинзбурга-Ландау вида

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (i\omega_0 + 1)\, A - (ib + 1)\, |A|^2 A + K\,(1 + ia)\,(F(x,t) - A(x,t))\,, \tag{3.89}$$

где ω_0, a и b есть параметры осцилляторов, $A(x,t)$ есть комплексная амплитуда, K является константой взаимодействия, а функция $F(x,t)$ есть нелокальное взаимодействие вида

$$F(x,t) = \int dx'\, G(x - x')A(x,t), \quad G(x) = \frac{\kappa}{2} e^{-\kappa|x|},\ \kappa > 0. \tag{3.90}$$

Отметим ключевые особенности: взаимодействие имеет нелокальный характер, т.е. есть явная зависимость от координаты x. Фазовая редукция в такой системе приводит к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - \int dx'\, G(x - x') \sin\left(\varphi(x,t) - \varphi(x',t) + \alpha\right), \tag{3.91}$$

где величина α определяется соотношением $\tan\alpha = (b-a)/(1+ab)$, причем полагаем, что $\alpha(b-a) > 0$. Введем переменную $\psi = \varphi - \Omega t$ и локальный параметр порядка $r(x,t)\exp\{i\theta(x,t)\}$, определенный как

$$r(x,t)e^{i\theta(x,t)} = \int dx'\, G(x - x')e^{i\psi(x',t)}. \tag{3.92}$$

Подставив определение $\psi(x,t)$ и параметра порядка в уравнение на $\varphi(x,t)$, мы получим

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \omega - \Omega - r(x,t)\sin\left(\psi(x,t) + \alpha + \theta(x,t)\right). \tag{3.93}$$

Полагая, что $r(x,t)$ и $\theta(x,t)$ не зависят от времени, можно найти решения $\psi(x,t)$, которые затем подставить в определение (3.92) и найти уравнение самосогласованности для параметра порядка. Такая стратегия вместе с численным анализом показывает возможность образования *химеры*: при определенных значениях параметров задачи и начальных условиях, возникает состояние, когда малая часть популяции осцилляторов оказывается синхронизованной (т.е. есть захват фазы), а большая часть является несинхронизованной. При этом, рассматриваются *одинаковые* осцилляторы, т.е. такое состояние возникает только из-за нелокальности связей и архитектуры взаимодействия (кольцо). Работа [57] является одной из самых первых, посвященных описанию химерных состояний. В последующих работах [58—61] были предложены как другие возможности реализации химерных состояний, так и более аккуратные методы их описания. Отметим также статью [62], где описана реализация химероподобных состояний посредством бифуркаций несинхронизованного состояния.

Обсудим теперь вопрос о связи структуры графа с химерами и химеро-подобными состояниями. Сразу отметим, что полноценной и аккуратной теории, связывающей однозначным образом структуру графа с возможностью образования химерных состояний на текущий момент не разработано, однако существует как минимум несколько разных подходов. Мы расскажем кратко о подходе, предложенном в [63], т.к. считаем его наиболее перспективным.

Пусть модель Курамото задана на некотором графе G с матрицей смежности W_{ij}. Отображение $i \to \pi(i)$ такое что, $W_{ij} = W_{\pi(i)\pi(j)}$ называется *автоморфизмом* графа. Все автоморфизмы графа образуют группу $\mathrm{Aut}(G)$. У данной групы есть орбиты, определенные как $O(i) = \{\pi(i) | \pi \in \mathrm{Aut}(G)\}$. Все возможные орбиты $O(i)$ образуют разбиение графа G на

кластеры, состоящий из вершин, имеющих одну и ту же орбиту. Среди этих кластеров конечно же могут оказаться тривиальные, т.е. содержащие одну вершину. Набор нетривиальных кластеров $\{C_i\}$ называют *независимыми кластерами синхронизации*. Каждый из кластеров характеризуется тем, что в системе возможна синхронизация вершин *только* внутри одного из кластеров, в то время как другие вершины могут быть несинхронизованы. С точки зрения этих определений, химерное состояние характеризуется тем, что имеется как минимум один кластер, размер которого меньше полного размера графа и синхронизованное состояние в этом кластере является стабильным, в то время как синхронизованное состояние вне этого кластера нестабильно.

Химерные состояния интенсивно изучаются, но большинство результатов для этих структур получают численными методами. Мы избегаем обсуждения этих результатов, поскольку фокусируемся на аналитических методах описания синхронизации настолько, насколько это возможно. Однако из изложенных выше рассуждений следует, что по всей видимости для существование химерного состояния важна нелокальность взаимодействия и наличие нетривиальной структуры у графа. Далее мы покажем, что эти два критерия в некотором смысле повторяют друг друга: нелокальное взаимодействие может быть следствием структуры графа.

3.9 Промежуточные выводы

Соберем теперь ключевые факты про квази-интегрируемость в модели Курамото, см. Таблицу 3.1.

	WS анзац	OA анзац
число степеней свободы	$N > 4$	$N \to \infty$
начальные условия	любые	однородные
распределение	одинаковые частоты	любое
понижение размерности	до трёх степеней свободы	до трёх степеней свободы
квази-интегрируемость	$N - 3$ интеграла движения	2D инвариантное многообразие
низкоразмерная динамика	градиентный поток на диске Пуанкаре	уравнение типа Ландау-Стюарта
применимость на разных графах	сильно ограничена	сильно ограничена
учет неоднородностей	возможен по теории возмущений	возможен по теории возмущений

Таблица 3.1—Сравнение WS и OA анзацев в модели Курамото

Если мы будем рассматривать обобщения модели Курамото, то и WS анзац, и OA анзац становятся неприменимы. Как уже было продемонстрировано, это связано с тем, что оба анзаца существенно опираются на Мёбиусову динамику модели. Существенность Мёбиусовой динамики позволяет рассматривать другие модельные системы, например дискретную динамическую систему из взаимодействующих преобразований Мёбиуса, см. [64]. И шум, и инерция нарушают Мёбиусову динамику, поэтому изложенная нами стратегия описания

поиска низкоразмерной динамики перестает быть актуальной. Конечно в случае, когда шум и инерция очень малы, то можно считать отклонения от Мёбиусовой динамики малым и пытаться продолжать применять упомянутые анзацы.

Низкоразмерная динамика модели Курамото является градиентной и может быть описана в терминах градиентного потока расхождения Кульбака-Лейблера на статистическом многообразии. Это статистическое многообразие образовано свернутыми распределениями Коши и является ничем иным как OA многообразием. Более того, эта величина чувствительная к синхронизации, т.е. может быть мерой синхронизации. Также выход в полностью синхронизованное состояние соответствует появлению особенности в метрике Фишера этого статистического многообразия. В следующей главе мы укажем обобщение этого факта на случай модели с шумом.

Для ряда графов удается изучить основные свойства перехода в синхронизованное состояние. Для графа-звезды переход можно проанализировать полностью аналитически, для обобщений графа-звезды значения критических констант удается найти в случае длинной звезды явно. При наличии корреляции между собственными частотами осцилляторов и валентностью вершин графов типично проявляется гистерезис, т.е. синхронизация является взрывной. В небольшом количестве частных случаев динамика модели на графе, отличном от полного, также является Мёбиусовой. Однако, чтобы увидеть данную динамику необходимо сделать некоторую последовательность замен переменных. Наиболее общая стратегия поиска Мёбиусовой динамики основана на переборе вершин графа и изучении закона сохранения в виде кросс-отношения комплексных фаз, соответствующих выбранной четверке вершин.

Глава 4

Шум в модели Курамото

В этой главе мы анализируем влияние шума на синхронизацию в модели Курамото. Мы демонстрируем общие свойства на примере модели на полном графе, а затем детально обсуждаем как шум может повлиять на гистерезис в модели Курамото на графе-звезде. Мы исследуем как положение критической точки связано с расхождениями метрики Фишера, построенной по стационарным решениям уравнения Фоккера-Планка с ненулевым параметром порядка. Также мы кратко обсуждаем применимость ОА анзаца в модели с шумом и перечисляем альтернативные подходы, которые оказываются полезным при рассмотрении системы с шумом. Наконец, мы подчеркиваем связь между моделью Курамото с шумом и обобщениями классической XY-модели.

4.1 Модель на полном графе

Одним из простейших обобщений модели Курамото является модель с шумом, исследованная в работе [65]. Уравнения движения такой системы отличаются от оригинальной модели лишь добавлением стохастического вклада в правую часть и имеют вид

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right) + \eta_i(t), \tag{4.1}$$

где $\eta_i = \eta_i(t)$ есть стохастический вклад. Простейшим вариантом стохастического вклада является белый шум, т.е. величины $\eta_i(t)$ обладают свойством

$$\langle \eta_i(t)\rangle_\eta = 0, \quad \langle \eta_i(t)\eta_j(t')\rangle_\eta = 2D\delta_{ij}\delta(t-t'), \tag{4.2}$$

где $D > 0$ является амплитудой шума. Более общий случай модели с цветным шумом рассмотрен в [66], случай стохастического вклада в виде процесса Орнштейна-Уленбека изучается в [67]. Применяя многомерную лемму Ито к системе (4.1), мы получим уравнение Фоккера-Планка для функции ρ, которое описывает модель Курамото с шумом,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left(\omega + 2K|r(t)|\sin(\arg r(t) - \varphi)\right)\rho(\varphi,\omega,t)\right\} + D\frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2}, \tag{4.3}$$

Результаты этой главы основаны на работах [II; III]

где параметр порядка $r(t)$ имеет вид

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\, \rho(\theta, \omega, t) e^{i\theta}, \tag{4.4}$$

Синхронизованные состояния являются стационарными решениями с $|r| > 0$. Приравнивая к нулю производную по времени, мы запишем интеграл по углу в виде (данный анзац впервые описан в книге [68]),

$$\rho(\varphi, \omega) = C_1 e^{f(\varphi)} \int_{C_2}^{\varphi} d\theta\, e^{-f(\theta)}, \quad f(\varphi) = \frac{\omega\varphi + 2K|r|\cos(\arg r - \varphi)}{D}, \tag{4.5}$$

где две константы C_1 и C_2 нам предстоит определить. Константа C_2 определяется из условия периодичности функции распределения, а константа C_1 – из условия нормировки. Вычисление обеих констант приведено в Приложении В. Вычислив явно обе константы, мы получаем семейство стационарных решений, параметризованных $|r| > 0$,

$$\rho(\varphi, \omega) = \frac{e^{\pi\omega/D} e^{\{\omega\varphi + 2K|r|\cos(\arg r - \varphi)\}/D}}{4\pi^2 I_{i\omega/D}(2K|r|/D) I_{-i\omega/D}(2K|r|/D)} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} d\theta\, e^{-(\omega\theta + 2K|r|\cos\{\arg r - \theta\})/D}. \tag{4.6}$$

Подставляя это решение в параметр порядка, мы получим уравнение самосогласованности,

$$r = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \frac{I_{1-i\omega/D}(2K|r|/D)}{I_{-i\omega/D}(2K|r|/D)}. \tag{4.7}$$

В этом уравнении левая и правая части являются комплексными. При этом, оказывается что мнимая часть отношения модифицированных функций Бесселя под интегралом в правой части уравнения самосогласованности является *нечетной* функцией по переменной ω, в то время как действительная часть является *четной* функцией. Это означает, что в случае симметричного распределения $g(\omega)$, т.е. $g(\omega) = g(-\omega)$, мнимая часть отношения не вносит вклада в интеграл в правой части. В свою очередь, это значит что мнимая часть левой части уравнения самосогласованности также обращается в ноль и мы получаем

$$|r| = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \left[\frac{I_{1+i\omega/D}(2K|r|/D)}{I_{i\omega}(2K|r|/D)} + \frac{I_{1-i\omega/D}(2K|r|/D)}{I_{-i\omega}(2K|r|/D)} \right]. \tag{4.8}$$

В окрестности точки перехода параметр порядка мал, поэтому мы можем разложить подинтегральное выражение в ряд по $|r|$,

$$|r| = KD|r| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\omega^2 + D^2} - 2K^3|r|^3 D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)(D^2 - 2\omega^2)}{(D^2 + \omega^2)(4D^2 + \omega)^2} + \mathcal{O}\left(|r|^4\right). \tag{4.9}$$

Поскольку мы рассматриваем нетривиальные решения уравнения самосогласованности, т.е. такие что $|r| > 0$, то из этого разложения мы получаем критерий их существования: такие решения существуют, если $K > K_c$, где K_c определяется как

$$K_c^{-1} = D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\omega^2 + D^2}. \tag{4.10}$$

Данный результат был получен сходным способом в работе [65]. В модели Курамото с шумом синхронизация является *фазовым переходом* по константе связи K. Интересным частным

случаем проведенных вычислений является случай, когда все частоты одинаковы, т.е. можно считать что $g(\omega) = \delta(\omega)$. Действительно, когда все частоты осцилляторов одинаковы, то можно перейти в систему отсчета, где частоты равны нулю. Тогда выражение для функции распределения принимает очень простой вид.

$$\rho(\theta, 0) = \frac{1}{2\pi I_0(2K|r|/D)} \exp\left\{\frac{2K|r|}{D}\cos(\arg r - \theta)\right\}, \tag{4.11}$$

Это хорошо известное распределение *фон Мизеса*, которое зависит от двух параметров: среднего угла $\arg r$ и концентрации (аналог дисперсии) $2K|r|/D$. В случае одинаковых частот уравнение самосогласованности также существенно упрощается,

$$|r| = \frac{I_1(2K|r|/D)}{I_0(2K|r|/D)} \tag{4.12}$$

В таком случае критическая константа есть просто $K_c = D$. Такое же уравнение на параметр порядка возникает при рассмотрении XY-модели на полном графе, т.е. в случае одинаковых частот модель Курамото с шумом *дуальна* XY-модели на полном графе (связь "все-со-всеми"), причем параметр D играет роль температуры. Под дуальностью понимается тот факт, что в обеих моделях возникает одинаковая Гиббсовская мера, поэтому средние, вычисленные с этой мерой будут совпадать. В случае же наличия разных частот, модель Курамото с шумом дуальна XY-модели на полном графе с дополнительным *вмороженным беспорядком*. Распределение частот $g(\omega)$ играет роль распределения примесей в XY-модели.

4.2 Метрика Фишера и критическая точка

Как уже было сказано, синхронизованное состояние характеризуется стационарным решением уравнения Фоккера-Планка с ненулевым $|r|$. Такие решения являются ничем иным как вероятностными мерами на единичной окружности. Можно исследовать статистическое многообразие этих мер. Первый шаг в этом направлении – это вычисление метрики Фишера. Проведем это вычисление для случая $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ (т.е. у всех осцилляторов одинаковые частоты ω_0), поскольку в других случаях задача становится лишь технически сложнее, а ключевые особенности остаются такими же как для случая одинаковых частот. Мы знаем, что в случае такого распределения можно перейти в систему отсчета, где собственные частоты равны нулю, а стационарные решения даются распределениями фон Мизеса с двумя параметрами $2K|r|/D$ и $\arg r$, причем $|r|$ удовлетворяет уравнению самосогласованности.

Покажем теперь как результаты, полученные в предыдущей главе для метрики Фишера, могут быть использованы для модели Курамото с шумом. Как уже было отмечено, в таком случае критическая константа связи имеет простой вид, $K_c = D$. Также, мы знаем что в этом случае стационарное решение ρ_0 уравнения Фоккера-Планка имеет простой вид,

$$\rho_0(\theta) = \ = \frac{1}{2\pi I_0(2K|r|/D)} \exp\left\{\frac{2K|r|}{D}\cos\left(\arg r - \theta\right)\right\}. \tag{4.13}$$

Также и уравнение самосогласованности упрощается,

$$|r| = \frac{I_1(2K|r|/D)}{I_0(2K|r|/D)}, \tag{4.14}$$

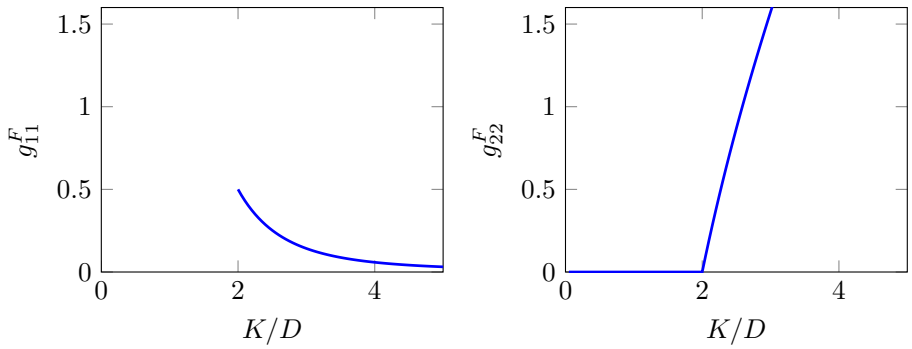


Рисунок 4.1—Зависимость компонент метрики Фишера от отношения $2K/D$ ($K_c = D$) для фиксированного значения $|r|$

откуда легко видеть, что нетривиальное решение существует только если $K > K_c$. Такое стационарное распределение хорошо известно — это распределение фон Мизеса. В более общем виде оно выглядит как

$$p_{\text{vM}}(\kappa, \mu; \theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\left\{\kappa \cos(\theta - \mu)\right\}, \quad \kappa \geq 0,\ \mu = \mu \bmod 2\pi. \tag{4.15}$$

Не представляет труда найти метрику Фишера для семейства распределений фон Мизеса,

$$g^{\text{F}}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{I_1(\kappa)^2}{I_0(\kappa)^2} - \dfrac{I_1(\kappa)}{\kappa I_0(\kappa)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\kappa I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

где введено обозначение $(i, j) = (\kappa, \mu)$. Выбрав $\kappa = 2K|r|/D$, $\mu = \arg r$ (без ограничения общности можем положить $\arg r = 0$), мы получим метрику Фишера, которая соответствует стационарным решениям уравнения Фоккера-Планка.

Полученную метрику мы можем интерпретировать двояко: либо зафиксировать $|r|$ и затем исследовать компоненты метрики как функцию параметров K и D или же мы можем сначала решить уравнение самосогласованности (4.14), найти параметр порядка $|r|$ как функцию параметров K и D, а затем проанализировать компоненты метрического тензора только как функции K и D. Вторая интерпретация приводит к следующей зависимости компонент метрики Фишера от параметров, см. Рисунок 4.1. Видно, что компонента g^{F}_{11} не существует при $K < K_c$, в то время как компонента g^{F}_{22} равна нулю при $K < K_c$. Первая интерпретация позволяет нам построить компоненты метрики Фишера как функции параметра порядка $|r|$ и отношения $2K/D$, что приводит к поверхности, изображенной на Рисунке 4.2.

Из этих графиков видно, что точка $K_c = D$ действительно является точкой перехода. Более того, из этого рассуждения следует, что особенности в метрике Фишера соответствуют точкам фазового перехода. Это находится в согласии с известными результатами, полученными для квантовых и классических фазовых переходов.

4.3 Влияние шума на стабильность

Мы показали, что в модели Курамото с шумом в термодинамическом пределе есть фазовый переход по константе K при фиксированной амплитуде шума. Интересно изучить механизм

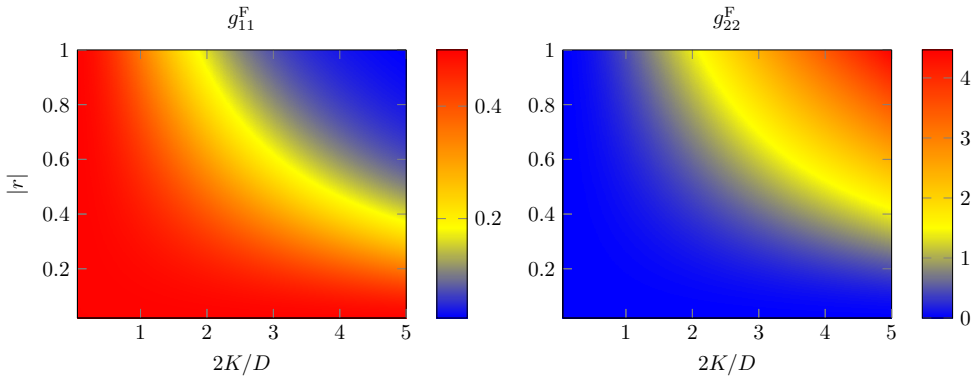


Рисунок 4.2—Зависимость компонент метрики Фишера от параметров модели ($K_c = D$)

этого перехода, т.е. выяснить как полностью несинхронизованное состояние $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$ теряет свою стабильность, что также было исследовано в [20]. Для этого вновь рассмотрим слабое возмущение этого состояния $\epsilon\delta(t, \varphi, \omega)$, $\epsilon \ll 1$. Удерживая линейные по ϵ вклады, мы получим уравнения Фоккера-Планка для возмущения $\delta\rho$,

$$\epsilon\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} = \epsilon D\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[(\rho_0 + \epsilon\delta\rho)\, v\right], \quad v(\varphi,\omega,t) = \omega - iK\left(re^{-i\varphi} + \overline{r}e^{+i\varphi}\right) \tag{4.17}$$

Вновь разложив возмущение в ряд Фурье, $\delta\rho = \sum_k u_k(\omega,t)e^{-ik\varphi}$, выпишем уравнение для первой моды $u_1(\omega,t)$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -(D + i\omega)u_1 + K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega)u_1(\omega,t). \tag{4.18}$$

В правой части уравнения вновь стоит интегральный оператор $\boldsymbol{T}$, ответственный за линейную стабильность. Он отличается от случая без шума добавлением $-Du_1$ в правой часть уравнения. Подставляя анзац $u_1(\omega,t) = e^{\lambda t}f(\omega)$, найдем интегральное уравнение на λ, имеющее вид

$$K\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega\, g(\omega)}{\lambda + D + i\omega} = 1. \tag{4.19}$$

Правая часть этого уравнения является действительным числом, поэтому левая часть должна быть действительной также. С учетом этого можно записать

$$K\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega\, g(\omega)(\lambda + D)}{(\lambda + D)^2 + \omega^2} = 1. \tag{4.20}$$

Анализируя правую и левую части этого уравнения, мы заключаем что наличие шума D сдвигает действительную часть спектра оператора: при $K < K_c$ имеет место $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. То есть наличие белого шума улучшает стабильность некогерентного состояния, имеется линейная стабильность (в отличие от случая без шума, когда имеется лишь нейтральная стабильность), см. Рисунок 4.3. Критическая константа K_c дается выражением

$$K_c^{-1} = D\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega\, g(\omega)}{\omega^2 + D^2}. \tag{4.21}$$

Естественно, этот результат согласуется с явным решением уравнения самосогласованности. Обсудим теперь как ведет себя ОА анзац при наличии шума.

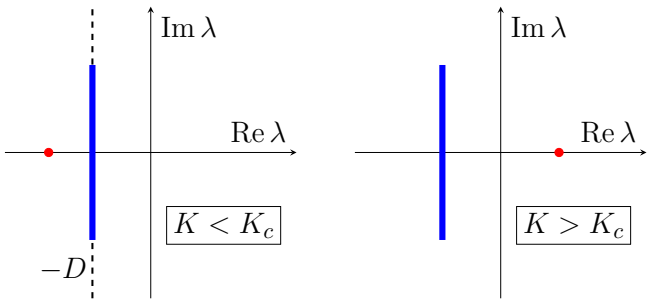


Рисунок 4.3—Спектр оператора линейной стабильности $\boldsymbol{T}$ ниже и выше критической точки при наличии шума D. Синим изображена непрерывная часть спектра, красной точкой изображено дискретное собственное значение

4.4 OA анзац при наличии шума

Уже из предыдущей секции можно заметить, что OA анзац не работает при наличии шума. Действительно, иерархия уравнений на моды Фурье u_n имеет вид

$$\dot{u}_n = i\omega n u_n + Knr(t)u_{n-1} - Kn\overline{r(t)}u_{n+1} - n^2 D u_n. \tag{4.22}$$

и легко видеть что подстановка $u_k = (u_1)^k$ не приводит к редукции иерархии уравнений. Однако, вблизи точки перехода OA анзац все еще применим. Формально применив OA анзац и положив $k = 1$, мы получим уравнение вида

$$\dot{u} = i\omega u + Kr(t) - K\overline{r(t)}u^2 - Du, \quad r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) u(\omega, t). \tag{4.23}$$

Если проанализировать его фиксированные точки, то мы получим уравнение на $|r|$ как функцию параметров модели. Далее, вновь полагая, что $|r| \to 0$, мы воспроизведем выражение для критической константы связи K_c. Таким образом, мы заключаем, что OA анзац формально применим в области $|r| \to 0$, т.е. в непосредственной близости от критической точки.

Это можно объяснить самим видом разложения функции распределения $\rho(t, \varphi, \omega)$ в ряд Фурье. Смысл OA анзаца состоит в том, что мы пытаемся аппроксимировать старшие моменты распределения $\rho(t, \varphi, \omega)$ через его первый момент. Действительно, разложение в ряд Фурье есть ничто иное как характеристическая функция распределения, через которую как раз можно выразить моменты. Введём параметр порядка Курамото-Дайдо,

$$r_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \int_0^{2\pi} d\theta\, \rho(t, \theta, \omega) e^{in\theta},$$

то есть это есть попросту старший момент распределения $\rho(t, \varphi, \omega)$, усредненный по частоте. Теперь подставим разложение в ряд Фурье функции распределения,

$$r_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(\omega, t) \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(n-k)\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, g(\omega) u_n(\omega, t). \tag{4.24}$$

Эти параметры позволяют уловить кластеризацию популяции осцилляторов. Можно показать, что для несинхронизованного состояния параметры Курамото-Дайдо быстро убывают с ростом n, т.е. все сконцентрировано в первой моде. Именно этот факт позволяет все еще

применять OA анзац вблизи критической точки, т.к. несмотря на то, что иерархия уравнений не расцепляется, моды $u_n(\omega, t)$ будут убывать быстро с ростом n. Когда синхронизация становится значимой, т.е. когда $|r| \sim 1$, то члены ряда не убывают с ростом n быстро, ряд в OA анзаце начинает сходиться все медленнее и анзац становится неприменим.

Вопрос о низкоразмерной динамике при наличии шума является в большей степени недоисследованным. Различные стратегии поиска низкоразмерной динамики в случае ненулевого шума изложены в [69; 70]. Среди этих подходов, мы отметим только метод кумулянтов. Идея состоит в том, чтобы вместо разложения по моментам рассматривать разложение по кумулянтам,

$$F(k) = \left\langle \exp\left(ke^{i\varphi}\right)\right\rangle = 1 + r_1 k + r_2 \frac{k^2}{2!} + r_3 \frac{k^3}{3!} + ..., \tag{4.25}$$

где r_n есть параметры Курамото-Дайдо. Производящей функцией кумулянтов является

$$\Psi(k) = k\frac{\partial \ln F(k)}{\partial k} = \kappa_1 k + \kappa_2 k^2 + \kappa_3 k^3 + ... \tag{4.26}$$

Первые три кумулянта имеют простой вид, $\kappa_1 = r_1$, $\kappa_2 = r_2 - r_1^2$ и $\kappa_3 = (r_3 - 3r_2 r_1 + 2r_1^3)/2$. OA анзац в терминах кумулянтов соответствует ситуации, когда $\kappa_1 = r_1$ и $\kappa_{m\geq 2} = 0$. Кумулянтное разложение позволяет последовательно анализировать низкоразмерную динамику и искать поправки к OA анзацу. Такой анализ был проведен в [69].

4.5 Влияние шума на гистерезис на графе-звезде

Как уже было показано ранее, случай графа-звезды является выделенным, т.к. для этого графа успешно работает WS анзац. Естественно, что в термодинамическом пределе для этой же модели будет работать и OA анзац. Для графа-звезды имеет место взрывная синхронизация и наличие гистерезиса на фазовой диаграмме. Изучим как шум влияет на эту взрывную синхронизацию. Без ограничения общности можно считать что стохастический вклад имеется лишь на листьях, тогда уравнения движения хаба и листьев примут вид

$$\dot{\Phi} = \beta\omega + \frac{K\beta}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j - \Phi\right); \quad \dot{\theta}_j = \omega + K\sin\left(\Phi - \theta_j\right) + \eta_j, \tag{4.27}$$

где $\eta_i(t)$ есть белый шум. Вновь вводя разность фаз между листьями и хабом, мы получаем систему уравнений,

$$\dot{\varphi}_i = -(\beta - 1)\omega - K\sin\varphi_i - \frac{K\beta}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\varphi_i + \eta_i. \tag{4.28}$$

которая отличается от обычной системы на графе-звезде лишь добавлением белого шума. Применяя многомерную лемму Ито, мы переходим от системы стохастических дифференциальных уравнений к уравнению Фоккера-Планка. Данное уравнение отличается от случая графа-звезды более сложной структурой и имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\left[-(\beta - 1)\omega - K\sin\varphi - K\beta\ \mathrm{Im}\, r\right]\rho\right\} + D\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}. \tag{4.29}$$

Введем переменные

$$A = -\frac{(\beta-1)\omega + K\beta \operatorname{Im} r}{D}, \quad B = +\frac{K}{D}. \tag{4.30}$$

Синхронизованное состояние соответствует стационарным решениям этого уравнения с $|r| > 0$. Чтобы найти такое решение, достаточно произвести интегрирование и учесть нормировку функции распределения. Анзац для стационарного решения выглядит как

$$\rho(\varphi, \omega) = C_1 e^{f(\varphi)} \int_{C_2}^{\varphi} d\theta\, e^{-f(\theta)}, \quad f(\varphi) = A\varphi + B\cos\varphi \tag{4.31}$$

где две константы C_1 и C_2 требуется определить. Вновь константа C_1 определяется из условия нормировки функции распределения, а константа C_2 – из условия периодичности по переменной φ. В итоге, функция распределения принимает следующий вид

$$\rho(\varphi, \omega) = \frac{e^{A\varphi + B\cos\varphi}}{4\pi^2 e^{-\pi A} I_{-iA}(B) I_{iA}(B)} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\psi\, e^{-A\psi - B\cos\psi} \tag{4.32}$$

Подстановка этого стационарного решения в выражение для параметра порядка приводит к уравнению самосогласованности,

$$r = \frac{I_{1-iA}(B)}{I_{-iA}(B)}. \tag{4.33}$$

Данное уравнение структурно похоже на уравнение самосогласованности в случае полного графа, однако полученное оно является сложным для аналитического и численного изучения в силу большого количества параметров и того факта, что теперь и мнимая, и действительная часть подинтегрального выражения в правой части уравнения вносят вклад. Действительно, полученное отношение модифицированных функций Бесселя не является ни четным, ни нечетным по ω, поэтому параметр порядка имеет как мнимую, так и действительную части.

Это обстоятельство наводит на мысль о том, что следует поискать другой подход. Как уже было отмечено выше, ОА анзац все еще применим вблизи точки перехода даже при наличии шума. Мы воспользуемся этим, т.е. выпишем уравнение на первую моду Фурье и проанализируем его фиксированные точки. Разлагая функцию распределения в ряд Фурье, мы получим систему ОДУ для мод Фурье α_m,

$$\dot{\alpha}_m = -im(\beta-1)\omega\alpha_m + \frac{Km}{2}\alpha_{m-1} - \frac{Km}{2}\alpha_{m+1} - imK\beta \operatorname{Im} r\alpha_m - m^2 D\alpha_m. \tag{4.34}$$

Теперь положим $m = 1$ и выпишем уравнение для $\alpha_1 \equiv \alpha$. Это уравнение имеет вид

$$\dot{\alpha} = -i(\beta-1)\omega\alpha + \frac{K}{2} - \frac{K}{2}\alpha^2 + \frac{K\beta}{2}|\alpha|^2 - \frac{K\beta}{2}\alpha^2 - D\alpha \tag{4.35}$$

и при $D \to 0$ переходит в уравнение ОА анзаца или же уравнение для параметров WS анзаца в пределе $N \to \infty$. Его фиксированные точки в случае $D = 0$ нам уже известны (см. (3.71)-(3.73) и первое уравнение системы (3.70)), добавление шума смещает их положение. Положим $\alpha = Re^{i\theta}$, тогда мы получим следующие уравнения для R и θ,

$$\begin{cases} \dot{R} = \dfrac{K}{2}\left(1 - R^2\right)\cos\theta - DR, \\ \dot{\theta}R = -(\beta-1)\omega R - \dfrac{K}{2}\sin\theta(1+2\beta)R^2 - \dfrac{K}{2}\sin\theta. \end{cases} \tag{4.36}$$

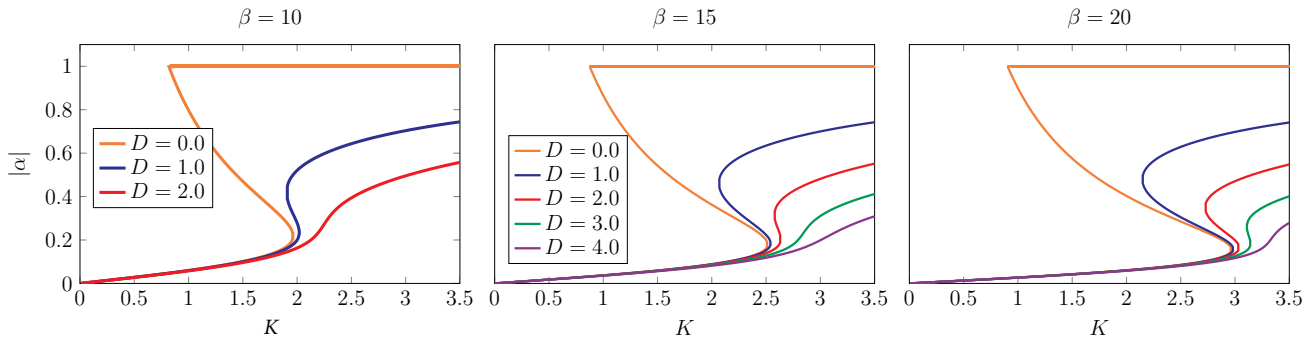


Рисунок 4.4—Параметр порядка ($|r| \equiv |\alpha|$) в термодинамическом пределе

Фиксированные точки определяются условиями $\dot{\theta} = 0$, $\dot{R} = 0$. Фазу θ можно исключить, тогда мы получим уравнение на модуль,

$$\frac{4D^2R^2}{K^2(1-R^2)^2} + \frac{4(\beta-1)^2\omega^2R^2}{K^2[(2\beta+1)R^2+1]^2} = 1, \tag{4.37}$$

В пределе нулевого шума, $D \to 0$, первое слагаемое в левой части уравнения (4.37) пренебрежимо мало в сравнении со вторым слагаемым. Принимая во внимание этот факт, мы получим простое квадратное уравнение на R, из которого легко найти критические константы и они будут совпадать с выражениями (3.74) для графа-звезды без шума. В пределе большого шума, $D \to \infty$, можно пренебречь вторым слагаемым, тогда

$$KR^2 + 2DR - K = 0, \tag{4.38}$$

которое всегда имеет решения, что соответствует отсутствию фазового перехода: параметр порядка r плавно растет с ростом константы связи. Это поведение указывает на то, что в (K, D)-плоскости (при фиксированном значении β и ω) существует точка, где гистерезис исчезает и фазовый переход является непрерывным. Выше этой точки нет фазового перехода по K. Эта гипотеза подтверждается численным анализом фиксированных точек уравнения (4.35), см. Рисунок 4.4. Чтобы определить точку в пространстве параметров, где фазовый переход становится непрерывным, удобно обозначить $R^2 \equiv z$ и записать уравнение (4.37) с этой переменной. Такая замена приводит к полиному четвертой степени по z, коэффициенты которого зависят от всех параметров модели. Нам требуется найти корни этого полинома, которые лежат на отрезке $z \in [0, 1]$. Кроме того, нам интересен случай, когда этот полином имеет только два корня (которые соответствуют критическим точкам). В итоге, все сводится к анализу дискриминанта $\Delta(K, \omega, D)$ полинома четвертого порядка: требуется найти область в пространстве параметров (K, D) при фиксированной частоте ω, где выполняется $\Delta(K, \omega, D) < 0$. Нужно разрешить данное неравенство относительно K, а затем найти такое D при заданном ω, когда критические константы совпадают с друг другом. Это определит критическое значение амплитуды шума при заданных ω и β, т.е. позволит найти точку, где фазовый переход становится непрерывным.

Изложенная выше стратегия может быть проделана аналитически, однако получающиеся выражения оказываются слишком громоздкими, поэтому мы реализуем эту стратегию численно. Сначала мы определим область в (K, D)-плоскости, где имеется фазовый переход

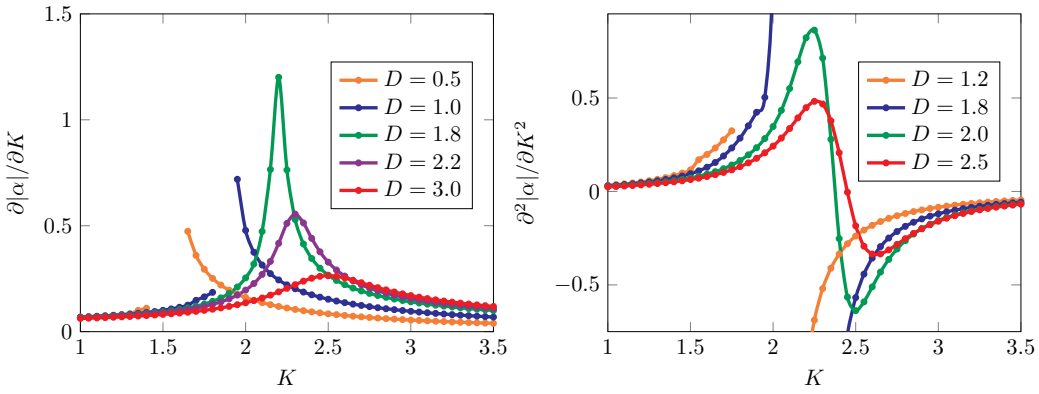


Рисунок 4.5—Производные параметра порядка ($|r| \equiv |\alpha|$) в термодинамическом пределе

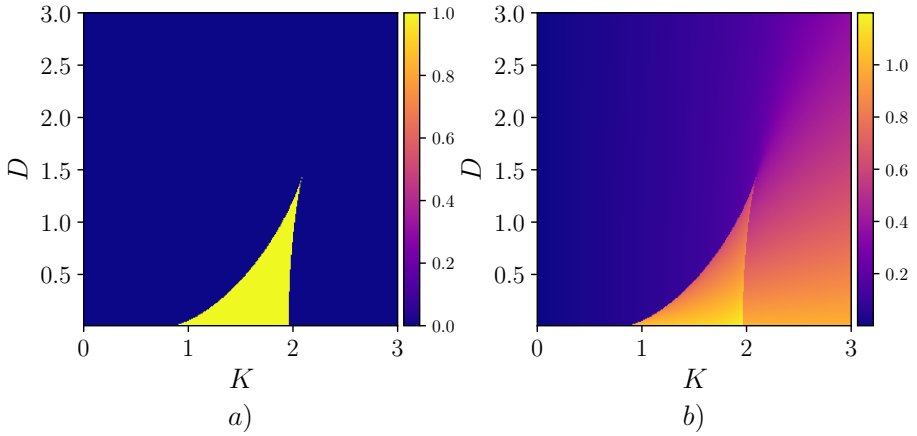


Рисунок 4.6—a) Границы области в (K, D)-плоскости, где происходит гистерезис; b) фазовая диаграмма в (K, D)-плоскости, цветом показано значение параметра порядка (в области, где есть гистерезис суммируются значения параметра порядка на каждой из частей петли гистерезиса). Здесь $\beta = 10$, и $\omega = 1$

первого рода. Для этого мы зафиксируем значения β и ω, а затем численно исследуем корни полинома, требуя чтобы их было ровно два. Это позволяет определить область, где имеется гистерезис, см. Рисунок 4.6. Далее, мы также проанализируем производные величины $|\alpha|$ как функции параметра K. Мы численно исследуем “восприимчивость”, т.е. первую и вторую производные параметра порядка по константе связи. Если первая производная имеет разрыв, то это указывает на фазовый переход первого рода, в то время как разрыв во второй производной указывает на фазовый переход второго рода. Легко видеть, что при достаточно малых значениях шума D имеется фазовый переходом первого рода, в то время как при достаточно большом значении шума фазовый переход становится второго рода. Более того, отметим также, что при очень больших значениях шума обе производные непрерывны, то есть фазовый переход отсутствует, см. Рисунок 4.5. В заключение мы также построим фазовую диаграмму в (K, D)-плоскости, см. Рисунок 4.6. Из этой диаграммы мы видим уже найденную область, где имеется фазовый переход первого рода, а также трикритическую точку, где фазовый переход становится непрерывным.

Приведенные выше рассуждения проводились в термодинамическом пределе. Мы можем также численно исследовать фазовую диаграмму, стартуя с системы (4.27). Она строится

путем вычисления усредненного по времени модуля параметра порядка $\langle r \rangle$ как функции константы связи K при различных значениях амплитуды шума D и коэффициента β для фиксированной и заданной частоты ω. Для этого достаточно численно решить систему (4.27) для заданных параметров любым подходящим методом. Чтобы эффекты конечных размеров не проявлялись, необходимо выбрать достаточно большое N. Оказывается, что для $N = 1000$ эффекты конечных размеров уже не оказывают сильного влияния на фазовую диаграмму. Полученные диаграммы для разных значений шума D приведены на Рисунке 4.7. С ростом шума D фазовый переход исчезает вообще величина $\langle r \rangle$ монотонно возрастает при увеличении K, см. Рисунок 4.7 и Рисунок 4.8.

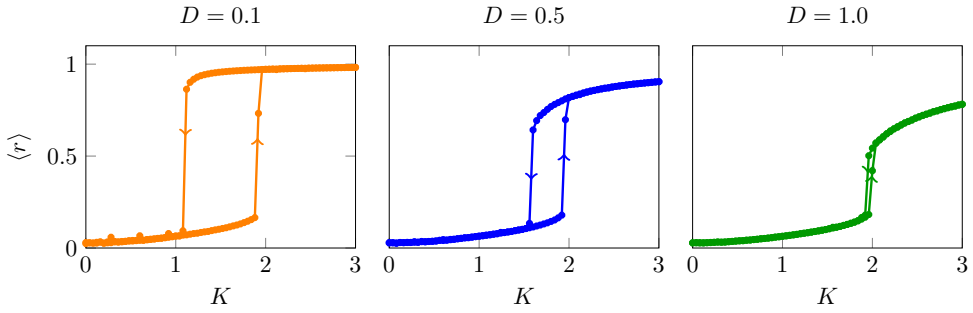


Рисунок 4.7—Фазовые диаграммы для разных значений D при $\beta = 10$ и $\omega = 1$. Стрелки указывают на эволюцию константы связи K (прямая и обратная)

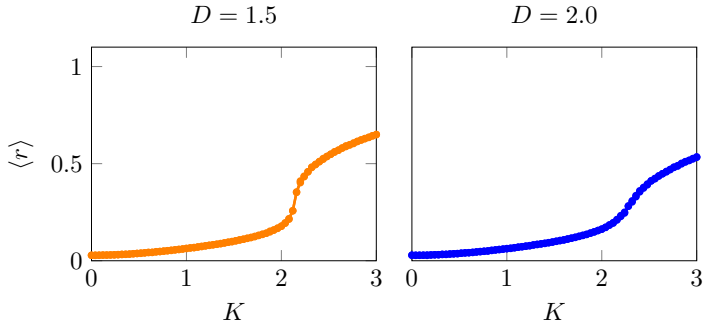


Рисунок 4.8—Усредненный по времени параметр порядка $\langle r \rangle$ для модели с фиксированным $\beta = 10$ и двумя относительно большими значениями шума D (показана прямая и обратная эволюция, гистерезис отсутствует)

Полученные результаты указывают на то, что шум может подавлять гистерезис в модели Курамото на графе, для которого характерна взрывная синхронизация. При этом, механизм подавления интересен тем, что гистерезис не исчезает мгновенно, а плавно уменьшается по мере роста амплитуды шума. Это легко интерпретируется на основе анализа фиксированных точек уравнения для параметра порядка в термодинамическом пределе.

4.6 Промежуточные выводы

В модели Курамото шум оказывает влияние на положение критической точки K_c, причем шум играет роль “динамического” беспорядка, в то время как распределение частот $g(\omega)$ играет роль “статического” (вмороженного) беспорядка. Для модели на полном графе влияние шума

может быть напрямую проанализировано через решение уравнения самосогласованности для параметра порядка r. Этот анализ включает в себя поиск стационарного решения уравнения Фоккера-Планка, которое описывает синхронизованные состояния. В случае полного графа и одинаковых собственных частот осцилляторов, этим решением является распределение фон Мизеса – еще один представитель семейства свернутых распределений. Момент перехода в синхронизованное состояние может быть обнаружен с помощью анализа особенностей метрики Фишера для распределений фон Мизеса. Шум также улучшает стабильность полностью несинхронизованного состояния, сдвигая собственные значения оператора линейной стабильности на отрицательную действительную полуось. Также из-за шума OA анзац теряет свою применимость, однако все еще работает в непосредственной близости от критической точки. Существуют альтернативы OA анзаца, которые основаны на разложении не по моментам свернутого распределения, а по кумулянтам, однако низкоразмерная динамика до конца так и не исследована.

В случае модели на графе-звезде шум оказывает существенное влияние на гистерезис. При больших значениях шума может происходить исчезновение гистерезиса и фазового перехода вообще. В тоже время, существует такое значение шума, при котором фазовый переход становится непрерывным, т.е. в модели существует трикритическая точка. Исчезновение гистерезиса может быть описано в термодинамическом пределе с помощью OA анзаца. Механизмом исчезновения служит слияние фиксированных точек уравнения OA анзаца, которое оказывается уравнением для параметра порядка. Данная картина подтверждается численными расчетами.

Глава 5

Предел Власова для модели Курамото

Изложенные ранее результаты во многом опираются лишь на физический уровень строгости, который несмотря на интуитивную понятность не позволяет достичь существенного успеха в анализе модели Курамото. Чтобы продвинуться в исследовании модели Курамото, заданной на произвольных графах, следует привести математически строгие аргументы для предельного перехода $N \to \infty$ и анализа стабильности некогерентного состояния. В основе этих аргументов лежит теория, разработанная для физических систем весьма общего вида. Мы продемонстрируем основные утверждения этой теории на главном объекте нашего исследования — модели Курамото и её обобщениях. Для более подробного изложения интересующийся читатель может ознакомиться с обзором [71] и монографией [72].

5.1 Слабая сходимость мер

Чтобы сформулировать понятие слабой сходимости, мы рассмотрим модель Курамото в её простейшем варианте,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right). \tag{5.1}$$

Пусть нам известны все параметры модели и набор начальных условий $\varphi_i(t=0)$. Тогда по этим начальным условиям можно построить задачу Коши. Фазовые пространство такой модели может быть записано как $\Gamma(\varphi, \omega)$. Построим на этом фазовом пространстве Борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\Gamma)$. Тогда *эмпирической мерой* множества $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ называется величина

$$\mu_t^N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{P_i(t)}(A), \tag{5.2}$$

где индекс N указывает, что речь идет про N точек, а индекс t указывает, что данная мера зависит от времени. Под $P_i(t)$ понимается величина $P_i = (\varphi_i(t), \omega_i(t))$, где $\varphi_i(t)$ и $\omega_i(t)$ (частоты в общем случае могут зависеть от времени, в нашем случае этой зависимости нет) есть решения системы (5.1), то есть это траектория в фазовом пространства Γ.

Результаты этой главы основаны на работе [V]

Пусть задано уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\{f(t,\varphi,\omega)v(t,\varphi,\omega)\} = 0, v(t,\varphi,\omega) = \omega + 2K\int_{S^1}\int_{\mathbb{R}} d\theta\, d\omega\, \sin(\theta-\varphi) f(t,\varphi,\omega), \quad (5.3)$$

которое называется *уравнением Власова*. Мы можем определить *непрерывную меру* множества $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ как

$$\mu_t(A) = \int_A dP\, f(t,P), \quad (5.4)$$

где $P = (\varphi, \omega)$ есть точка в фазовом пространстве. Функция $f(t,\varphi,\omega)$ является плотностью данной непрерывной меры. Говорят, что между мерами $\mu_N^t(A)$ и $\mu_t(A)$ есть слабая сходимость, если выполняется

$$d\left(\mu_t^N,\, \mu_t\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0, \quad (5.5)$$

где под $d(\mu,\nu)$ понимается расстояние между мерами μ и ν. В качестве этого расстояния можно выбрать расстояние Вассерштейна или любую другую подходящую норму. В частности, в качестве расстояния $d(\mu,\nu)$ можно указать следующую величину,

$$d(\mu,\nu) = \sup_{f\in\mathcal{L}}\left|\int_G d\mu\, f - \int_G d\nu\, f\right|, \quad (5.6)$$

где $\mathcal{L} = \{f : G \to [0,1] : |f(P) - f(Q)| \le |P-Q|_E,\, P,Q \in G\}$, а $|\cdot|_E$ обозначает Евклидово расстояние.

Сформулируем теперь аккуратное утверждение про слабую сходимость в модели Курамото на полном графе. Заметим, что модель Курамото можно записать как систему уравнений первого порядка,

$$\begin{aligned} \dot\varphi_i &= \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \\ \dot\omega_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Введем поле скоростей,

$$\boldsymbol{v}[\mu](t,\varphi,\omega) = \begin{pmatrix} \omega + 2K\int_\Gamma \mu_t(d\theta,\, d\omega)\sin(\theta-\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Фазовое пространство такой системы есть $\Gamma = (\varphi,\omega)$. Имеет место следующее утверждение,

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{v}[\mu](t,P)$ является непрерывной однородной Липшицевой функцией на Γ, т.е.*

$$T > 0, \forall t \in [0,T] : |v[\mu](t,P) - v[\mu](t,Q)| \le C|P-Q|_E, \quad P,\, Q \in \Gamma,\, C > 0$$

где $|\cdot|_E$ есть Евклидово расстояние, тогда у уравнения (5.3) существует слабое решение с заданными начальными условиями, причем

$$d(\mu_t^N, \mu_t) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

равномерно $\forall t \in [0,T]$ если $d(\mu_0^N, \mu_0) \to 0$ при $N \to \infty$.

Доказательство этой теоремы было проведено в работе [73] и основано на классических работах [74—77]. Наличие слабой сходимости позволяет исследовать свойства системы (5.1) в пределе $N \to \infty$, анализируя уравнение (5.3). В частности, для поиска критической константы связи K_c в пределе $N \to \infty$ следует анализировать линейную стабильность несинхронизованного состояния. Резюмируя, у модели Курамото существует хорошо определенный предел Власова, т.е. термодинамический (непрерывный) предел. Именно на этом свойстве был основан анализ, проведенный Й. Курамото. В случае модели с инерцией и с шумом имеют место аналогичные утверждение, которые доказываются аналогичным образом. Сложность возникает как только мы начинаем обсуждать модель, заданную на некотором графе.

5.2 Анализ стабильности в общем случае

Рассмотрим модель Курамото на графе G с матрицей смежности W_{ij}. Пусть граф G имеет N вершин, является взвешенным и ненаправленным. Тогда матрица W имеет размер $N \times N$, является симметричной, $W = W^T$, и имеет неотрицательные элементы, $W_{ij} \geq 0$. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{5.9}$$

где $K \in \mathbb{R}$, ω_i распределены с $g(\omega)$. Вообще говоря, мы не будем налагать ограничения на распределение $g(\omega)$, т.к. рассматриваем общий случай. Наша цель состоит в том, чтобы построить термодинамический предел $N \to \infty$ для этой системы (5.9). Для построения предела мы будем использовать слабую сходимость.

5.2.1 Графон как предел последовательности графов

С необходимостью мы сталкиваемся с задачей построения термодинамического предела графа. Чтобы определить этот объект, нам следует рассматривать последовательности графов $\{G_n\}$ с растущим числом вершин. Оказывается, что если данная последовательность сходится (в каком именно смысле мы уточним далее), то её пределом является *графон*. Графон – это симметричная измеримая функция $W = W(x, y)$,

$$W(x, y) : I^2 \mapsto I, \quad I = [0, 1]. \tag{5.10}$$

Чтобы сформулировать понятие сходимости последовательности графов и дать определение её пределу, мы введем ряд понятий из теории графов. Исчерпывающее изложение всех обсуждаемых понятий и утверждений содержится в книге [78], где Л. Ловашем как раз и было введено понятие графона. Также мы отметим работы [79; 80], где изучается связь графонов со спектральной теорией графов, и работу [81], доступную читателю без предварительной подготовки.

Рассмотрим два графа F и G. Множества их вершин будем обозначать как $V(F)$ и $V(G)$ соответственно, множества ребер – как $E(F)$ и $E(G)$. Отображение h множества вершин

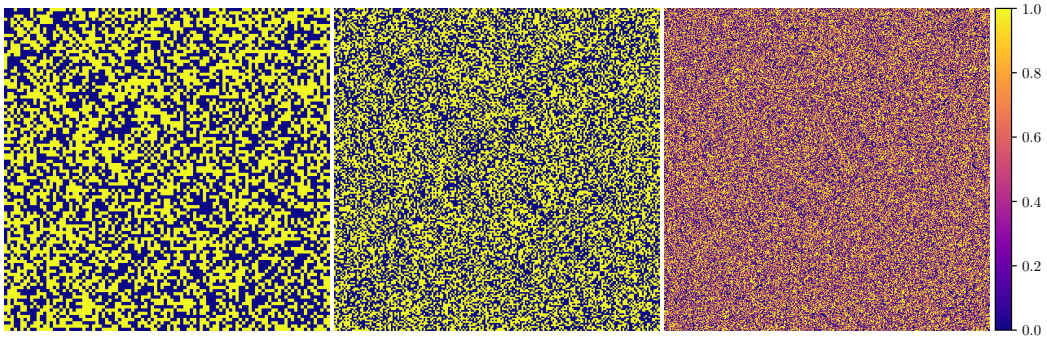


Рисунок 5.1—“Дискретизация” графона случайного графа Эрдоша-Реньи с вероятностью $p = 0.5$ иметь ребро между двумя вершинами. Число вершин растет от 100 до 500 слева направо. Графоном графа Эродша-Реньи является константа, $W(x, y) = p$

графа F во множество вершин графа G, сохраняющее смежность называется *гомофорфизмом*,

$$h : V(F) \mapsto V(G). \tag{5.11}$$

Под сохранением смежности мы имеем виду следующее,

$$\forall i, j \in V(F) : (i, j) \in E(F)\ (h(i), h(j)) \in E(G). \tag{5.12}$$

Пусть граф G имеет n вершин, граф F имеет k вершин. Тогда число всех возможных отображений $V(F)$ в $V(G)$ (не обязательно гомоморфизмов) есть n^k. Пусть $\hom(F, G)$ есть число всех возможных гомоморфизмов. Введем величину

$$t(F, G) = \frac{\hom(F, G)}{n^k}, \tag{5.13}$$

то есть *плотность гомоморфизмов*. Пусть $\{G_n\}$ последовательность графов с растущим числом вершин, $V(G_n) \to \infty$. Последовательность $\{G_n\}$ называется сходящейся, если для любого графа F с конечным числом вершин плотность гомоморфизмов сходится к некоторому конечному значению. Укажем алгоритм построения графона $W(x, y)$ по заданному графу G с N вершинами. Пронумеруем вершины графа G. Затем разобьем единичный отрезок на N частей. Выберем точки $x \in [(j-1)/N, j/N]$ и $y \in [(k-1)/N, k/N]$. Если вершины j и k в графе G смежны, то присвоим $W(x, y) = 1$. Повторяя процедуру для каждой пары вершин, мы получим “дискретизацию” графона. Увеличивая число вершин графа G, $N \to \infty$, мы будем получить все более точные функции $W(x, y)$. Здесь естественным образом возникает вопрос: является ли такое построение функции $W(x, y)$ единственным? Легко видеть, что такая процедура зависит от того как именно были пронумерованы вершины графа G, поэтому по-разному пронумеровав вершины мы можем получать разные графоны для одного и такого же графа. Данная проблема является разрешимой: графоны определены с точностью до слабых изоморфизмов, детально этот вопрос обсуждается в [78]: пусть $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ (причем f сохраняет меру), тогда графоны $W^f = W(f(x), f(y))$ и $W(x, y)$ называются слабо изоморфными.

Пусть мы построили графон $W(x, y)$, который соответствует графу G с очень большим числом вершин. Рассмотрим теперь конечный граф F. Выберем точку $x_i \in [0, 1]$ для каждой i-ой вершины графа F. Рассмотрим все возможные величины $W(x_i, x_j)$, считая что вершины i и

j смежны в графе F и $x_j \in [0,1]$. Тогда произведение величин $W(x_i, x_j)$ есть вес гомофорфизма, который отображает вершины графа F в вершины графа G. Интегрируя по всем возможным значениям x_i, мы получим плотность числа гомоморфизмов. Таким образом, мы можем определить плотность гомоморфизмов между графом F и графоном W. Действительно, пусть F есть заданный конечный ненаправленный граф без петель, а $W = W(x,y)$ есть графон. Определим плотность гомоморфизмов между *графом* F и *графоном* W как

$$t_0(F,W) = \prod_{i \in V(F)} \int_0^1 dx_i \prod_{i,j \in E(F)} W(x_i, x_j). \tag{5.14}$$

Определив таким образом плотность гомоморфизмов, мы сформулируем следующую теорему,

Теорема. *Пусть $\{G_n\}$ последовательность плотных графов такая что $V(G_n) \to \infty$. Если она является сходящейся, то существует графон W такой, что $t(F, G_n)$ сходится к $t_0(F,W)$ для любого конечного графа F. При этом,*

$$t_0(F,W) = \prod_{i \in V(F)} \int_0^1 dx_i \prod_{i,j \in E(F)} W(x_i, x_j).$$

Доказательство теоремы со всеми пояснениями дается в [78]. Таким образом, мы заключаем, что графон W есть предел последовательности плотных графов $\{G_n\}$, $V(G_n) \to \infty$ при условии $t(F, G_n) \to t_0(F,W)$ для любого графа F[1].

Теперь укажем связь между спектром матрицы смежности графа и свойствами графона. Графон $W(x,y)$ порождает интегральный оператор $\boldsymbol{W}$, определенный как

$$\boldsymbol{W}[f](x) = \int_I dy\, W(x,y) f(y), \quad f(x) \in L^2(I), \quad I = [0,1]. \tag{5.15}$$

Этот оператор является самосопряженным, его спектр является счётным. Более того, т.к. $0 \leq W(x,y) \leq 1$, то все собственные значения оператора $\boldsymbol{W}$ лежат на отрезке $[-1,1]$. Упорядочим их по возрастанию,

$$-1 \leq \mu_{-1} \leq \mu_{-2} \leq \ldots \leq \mu_2 \leq \mu_1 \leq 1,$$

причем собственные значения оператора $\boldsymbol{W}$ концентрируются в точке $\mu = 0$.

Рассмотрим сходящуюся последовательность графов $\{G_n\}$. Раз она сходится, то её пределом является графон $W(x,y)$. Данный графон порождает оператор $\boldsymbol{W}$. Обозначим как A_n матрицу смежности графа-элемента последовательности G_n. Поскольку A_n симметрична и все её элементы неотрицательны, то её спектр вещественный. Упорядочим её собственные значения по возрастанию,

$$\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \ldots \leq 0 \leq \ldots \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Между спектром матрицы A_n и спектром оператора $\boldsymbol{W}$ имеется сходимость (см. [79]),

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 : \forall n > n_0, \left| \frac{\lambda_j}{n} - \mu_j \right| < \epsilon \tag{5.16}$$

[1]Сходимость в терминах плотностей изоморфизмов связана с $\delta_\square$-сходимостью, основанной на расстоянии разреза графов, этот вопрос здесь не обсуждается

Это утверждение означает, что для любой сходящейся последовательности графов собственные значения матриц смежности сходятся к собственным значениям графона. Важную роль играет то, что сходимость не является равномерной: величина n_0 может быть для каждого j-го собственного значения разной. Из такой сходимости следует, что максимальное $\mu_{\max}$ и минимальное $\mu_{\min}$ собственные значения оператора $\boldsymbol{W}$ могут быть хорошей оценкой для максимального $\lambda_{\max}$ и минимального $\lambda_{\min}$ собственных значений матрицы смежности графа, если у этого графа есть графон и число вершин графа достаточно велико.

5.2.2 Связь структуры графа с линейной стабильностью

Теперь используем понятие графона для того, чтобы выписать предел Власова системы (5.9). Для этого достаточно расширить фазовое пространство, т.е. теперь $\Gamma = (\varphi, \omega, x)$, $x \in [0,1]$ и заметить, что функция $W(x,y)$ Липшицева на $[0,1]^2$, т.е.

$$|W(x_1,y_1) - W(x_2,y_2)| \leq C\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}, \quad \forall x_{1,2},\, y_{1,2} \in [0,1]^2, \tag{5.17}$$

где $C > 0$. Доказательство сходимости аналогично случаю, рассмотренному выше. Понятие графона позволяет выписать следующее соотношение,

$$\omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i) \xrightarrow{N\to\infty} \left(\omega + \frac{K}{i}\left\{r(t,x)e^{-i\varphi} - \overline{r(t,x)}e^{i\varphi}\right\}\right) f(t,\varphi,\omega,x), \tag{5.18}$$

где величина $r(t,x)$ есть локальный параметр порядка, определенный как

$$r(t,x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^1 dy\, W(x,y) f(t,\varphi,\omega,x) e^{i\varphi}. \tag{5.19}$$

Глобальный параметр порядка определяется как интеграл от $r(t,x)$ по отрезку $[0,1]$. Говорят, что имеется слабая сходимость между динамикой модели (5.9) и следующим уравнением Власова,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{(\omega + \mathcal{N}[f])\, f\right\} = 0, \quad \mathcal{N}[f] = \frac{K}{i}\left\{r(t,x)e^{-i\varphi} - \overline{r(t,x)}e^{i\varphi}\right\}. \tag{5.20}$$

Поскольку мы считаем, что распределение частот $g(\omega)$ известно и задано, то функция распределения $f(t,\varphi,\omega,x)$ может быть представлена в виде $f(t,\varphi,\omega,x) = \rho(t,\varphi,\omega,x)g(\omega)$, где функция ρ удовлетворяет такому же уравнению Власова. Несинхронизованное состояние соответствует равномерному распределению на S^1, то есть $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$, а $f_0 = g(\omega)/(2\pi)$.

Проанализируем теперь линейную стабильность f_0 по отношению к малому возмущению. Для этого разложим функцию $f(t,\varphi,\omega,x)$ в моды Фурье $u_j(t,\eta,x)$,

$$u_j(t,\eta,x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i(j\theta+\eta\omega)} f(t,\varphi,\omega,x), \quad j \in \mathbb{Z},\, \eta \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Подстановка этого разложения в уравнение Власова дает набор уравнений на моды Фурье $u_j(t,\omega,x)$,

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial t} = i\omega u_1 + Kg(\omega)\boldsymbol{W}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, u_1(t,\omega,x)\right], \\ \frac{\partial u_l}{\partial t} = il\omega u_l, \quad l \geq 1. \end{gathered} \tag{5.22}$$

Несинхронизованное состояние имеет моды Фурье вида $u_0 = g(\omega)$ и $u_{j\neq 0} = 0$. Рассмотрим возмущение несинхронизованного состояния и выпишем линеаризованное уравнение,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \boldsymbol{T}[v], \quad \boldsymbol{T}[v](\omega, x) = i\omega v(x) + Kg(\omega)\boldsymbol{W}[v](\omega, x), \quad v \in L^2, \tag{5.23}$$

что есть ничто иное как задача на собственные значения оператора $\boldsymbol{T}$,

$$\boldsymbol{T}[v] = \lambda v. \tag{5.24}$$

Данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{Kg(\omega)}{\lambda - i\omega}\boldsymbol{W}[v](\omega, x) = v(\omega, x) \tag{5.25}$$

и затем проинтегрировать обе части по ω,

$$KG(\lambda)\boldsymbol{W}[w](x) = w(x), \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\lambda - i\omega},\ w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, v(\omega, x). \tag{5.26}$$

Пусть μ есть собственное значение оператора $\boldsymbol{W}$ с соответствующей собственной функцией $w_\mu(x)$, тогда мы получим уравнение

$$G(\lambda) = \frac{1}{K\mu}. \tag{5.27}$$

Именно это уравнение связывает структуру графа, которая "закодирована" в спектре оператора $\boldsymbol{W}$ со спектром оператора линейной стабильности $\boldsymbol{T}$, т.е. указывает на то, как именно структура графа влияет на возникновение синхронизации. Действительно, когда дискретное собственное значение λ приобретает ненулевую реальную часть, то линейная стабильность теряется и это соответствует переходу в синхронизованное состояние. Анализ полученного уравнения мы проведем в следующем разделе, а пока можем сформулировать исчерпывающее утверждение про синхронизацию в модели Курамото на взвешенном неориентированном графе в виде теоремы (сформулирована и доказана в [82]),

Теорема. *Если $K \in [K_c^-, K_c^+]$, то спектр оператора $\boldsymbol{T}$ состоит из непрерывной части, расположенной на мнимой оси, а также дискретной части спектра, состоящей из одного или более отрицательных собственных значений. Если же $K \notin [K_c^-, K_c^+]$, то в дискретной части спектра имеется хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, где*

$$K_c^- = \frac{1}{\pi g(0)\mu_{\min}}, \quad K_c^+ = \frac{1}{\pi g(0)\mu_{\max}}, \tag{5.28}$$

а величины $\mu_{\max}$ и $\mu_{\min}$ есть наибольшее и наименьшее собственные значения оператора $\boldsymbol{W}$ соответственно.

В общем случае спектр функционального оператора содержит три компоненты: непрерывную, дискретную и остаточную. У оператора $\boldsymbol{T}$ остаточной части спектра нет. Аккуратное определение функциональных пространств, в которых действует $\boldsymbol{T}$ приведено в статье [18], детальный анализ спектра оператора содержится в работе [82; 83]. Подчеркнем, что этот анализ существенно глубже и обоснованнее, чем проделанный ранее в работе [20].

Когда значение константы связи K становится больше K_c^+, то несинхронизованное состояние f_0 теряет линейную стабильность: у оператора $\boldsymbol{T}$ появляется изолированное собственное значение с положительной действительной частью. Это соответствует возникновению синхронизации. Поскольку спектр матрицы смежности взвешенного неориентированного графа может иметь отрицательные собственные значения, то значение K_c^- является отрицательным. Когда $K < K_c^-$, то несинхронизованное состояние также теряет стабильность, однако теперь не происходит перехода в синхронизованное состояние: возникает состояние анти-фазовой синхронизации, см. [82].

5.3 Метод Пенроуза

Теперь опишем процедуру как зная спектр оператора $\boldsymbol{W}$ изучить спектр оператора $\boldsymbol{T}$, используя уравнение $G(\lambda) = (K\mu)^{-1}$, где μ является собственным значением $\boldsymbol{W}$. Оказывается, что существует метод, изначально разработанный для теории плазмы, который позволяет изучить спектр $\boldsymbol{T}$, анализируя поведение некоторой кривой в комплексной плоскости. Этот метод был предложен Оливером Пенроузом [84], а затем адаптирован для модели Курамото в работе [85] и применен в работах [62; 86; 87].

Рассмотрим функцию $G(z)$ из (5.26). Эта функция отображает точку $z \in \mathbb{C}$ в некоторую другую точку комплексной плоскости $(\operatorname{Re} G(z), \operatorname{Im} G(z))$. Пусть теперь точка z движется по мнимой оси от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. $z = it$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $G(it + 0)$ является ограниченной и непрерывной, то образ $G(it)$ является замкнутой ориентированной кривой. Обозначим эту кривую как $\mathcal{C}$. Выписывая явно выражение для $G(it)$, мы находим

$$G(it + 0) = \pi g(t) + i \int_0^\infty \frac{ds\,[g(t + s) - g(t - s)]}{s}, \tag{5.29}$$

затем в этом выражении мы отделим действительную и мнимую части, обозначив

$$x(t) = \pi g(t), \quad y(t) = \int_0^\infty \frac{ds\,[g(t + s) - g(t - s)]}{s}, \tag{5.30}$$

где мы явно пользуемся тем, что функция $g(t)$ является чётной (для простоты, описанные конструкции сохраняют силу для любой функции $g(t)$, у которой имеется хорошо определенный образ Фурье). Функции $x(t)$ и $y(t)$ задают параметрически кривую $\mathcal{C}$ в комплексной плоскости. В силу свойств функции $g(t)$, кривая $\mathcal{C}$ симметрична относительно действительной оси, т.е. оси x. Она пересекает действительную положительную полуось в единственной точке $P_0 = (x_0, 0)$, $x_0 > 0$, причем $G(x_0)^{-1} = 0$. Из этих рассуждений мы заключаем, что $x_0 = \pi g(0)$.

Теперь применим принцип аргумента. Число корней уравнения $G(z) = (K\mu)^{-1}$ равно числу намоток (индексу) кривой $\mathcal{C}$ вокруг точки $(K\mu)^{-1}$ на действительной оси. Малые значения K соответствую тому, что точка $(K\mu)^{-1}$ находится далеко от кривой и индекс равен нулю. С ростом K, точка $(K\mu)^{-1}$ начинает приближаться к кривой $\mathcal{C}$ и при $K = K_c$ происходит касание кривой $\mathcal{C}$ и точки $(K\mu)^{-1}$, т.е индекс перестает быть равен нулю. Это позволяет найти критическую константу, которая соответствует потере стабильности, а значит и появлению синхронизации.

5.4 Применение метода Пенроуза

Обсудим теперь как описанная выше теория позволяет существенно продвинуться в анализе обобщений модели Курамото. Мы укажем как модифицируется уравнение Власова и метод Пенроуза для модели с шумом, модели с инерцией и модели с временной задержкой во взаимодействии. Также мы детально рассмотрим случай модели с шумом и инерцией одновременно.

5.4.1 Модель с шумом

Модель с шумом задается набором из N стохастических уравнений,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right) + \eta_i(t), \tag{5.31}$$

где $\eta_i(t)$ есть белый шум амплитуды D, т.е. $\langle\eta_i(t)\rangle_\eta = 0$, $\langle\eta_i(t)\eta_j(t')\rangle_\eta = 2D\delta_{ij}\delta(t-t')$. Для модели с шумом уравнение Власова заменяется на уравнение Фоккера-Планка, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\left(\omega + \mathcal{N}[f]\right) f\right\} + D\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \tag{5.32}$$

и является попросту применением леммы Ито к набору стохастических уравнений. Повторяя дальнейшие выкладки, мы получаем следующее уравнение на собственные значения,

$$\boldsymbol{T}v = \lambda v, \quad \boldsymbol{T}[v] = i\omega v + Kg(\omega)\boldsymbol{W}[v] - Dv. \tag{5.33}$$

То есть наличие белого шума попросту добавляет сдвиг $-Dv$ в оператор $\boldsymbol{T}$. Функция $G(\lambda)$ теперь определяется уравнением

$$G(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\lambda - i\omega + D}. \tag{5.34}$$

Уравнения для кривой Пенроуза принимают вид

$$x(t) = D\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{D^2 + (\omega - t)^2}, \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)(\omega - t)}{D^2 + (\omega - t)^2}. \tag{5.35}$$

Момент касания кривой действительной оси происходит в точке

$$x_0 = D\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{D^2 + \omega^2} = \frac{1}{K_c\mu}. \tag{5.36}$$

В случае полного графа имеется единственное собственное значение $\mu = 1$ и таким образом мы воспроизводим известный ответ для критической константы связи. Однако теперь поиск K_c может быть легко обобщен на случай произвольного плотного взвешенного графа и функции распределения частот $g(\omega)$.

5.4.2 Модель с инерцией

Модель Курамото с инерцией задается системой уравнений,

$$m\ddot{\varphi}_i + \gamma\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{5.37}$$

где $m > 0$ есть инерция, а γ есть диссипативный фактор. Без ограничения общности можно положить $\gamma = 1$ (мы детальнее поясним это далее). Уравнения движения модели удобно записать в виде следующей системы,

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_i &= \omega_i + v_i, \\
\dot{v}_i &= -v_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \\
\dot{\omega}_i &= 0,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

где переменные были перемасштабированы так, чтобы $m = 1$. Эта запись отличается от стандартной, где частоты ω_i обычно ассоциированы с уравнением для v_i, см. например [88]. У этой модели есть предел Власова, определяемый следующим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\left(v + \omega\right) f\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\left(-v + \mathcal{N}[f]\right) f\right) = 0, \quad f = f(t, \varphi, v, \omega, x). \tag{5.39}$$

Несинхронизованному состоянию соответствует стационарное решение вида $f_0 = g(\omega)\delta(v)/(2\pi)$. Впервые модель Курамото с инерцией на полном графе была проанализирована в работах [89; 90] и затем исследована в [91]. Важнейшим моментом в этих исследованиях был факт о том, что модель обладает бистабильностью: используя среднеполевой характер модели, можно показать, что в фазовом пространстве одного осциллятора φ_i может сосуществовать предельный цикл и стабильная фиксированная точка в зависимости от соотношения между ω_i, K и значением параметра порядка r. Существование бистабильности было строго доказано в [24]. Бистабильность приводит к гистерезису: синхронизация и десинхронизация происходят при разных константах связи. Рассмотрим два сценария: медленный рост константы связи K для состояния с $r = 0$ и медленное убывание константы связи для состояния $r \approx 1$. В обоих сценариях среднее поле захватывает часть осцилляторов, в то время как оставшаяся часть осцилляторов не вносят вклад в параметр порядка. В ходе первого сценария происходит следующее: данное значение параметра порядка r определяет некоторую критическую частоту ω_p, такую, что часть осцилляторов с частотами меньше по модулю чем ω_p захватываются средним полем. В ходе второго сценария, осцилляторы с частотой, большей по модулю чем ω_d перестают захватываться средним полем и происходит десинхронизация. При этом $\omega_d \neq \omega_p$. Данная картина в большей степени качественная и может быть исследована аналитически только в случае $m \ll 1$ с помощью метода Мельникова (см. Appendix B в [90]). В случае $m \ll 1$ с помощью метода Мельникова удается оценить выражения для ω_d и ω_p и убедиться, что они различны. Для модели с инерцией неприменимы ни WS, ни OA анзацы: динамика фаз более не является Мёбиусовой. В случае конечных N модель с очень малой инерцией

m может быть рассмотрена как быстро-медленная система, причем m играет как раз роль малого параметра. Это позволяет надеяться, что в пределе $m \ll 1$ тор, на котором происходит динамика модели без инерции сохраняется. Такое рассмотрение является открытой задачей. В термодинамическом пределе $N \to \infty$ альтернативы ОА анзаца обсуждались в работах [92].

Аналитическое выражение для критической константы связи, которая соответствует десинхронизации все еще не получено, её вычисление также является открытой задачей. Численные симуляции указывают на существенную зависимость этой константы от инерции. Кроме того, численные симуляции указывают также на очень сильные эффекты конечных размеров в модели с инерцией [91].

Обсудим теперь линейную стабильность несинхронизованного состояния f_0. Анализ стабильности в случае произвольного плотного графа был проведен в [86; 87] и также основан на методе Пенроуза. Сделаем преобразование Фурье функции распределения, определив моды Фурье как

$$u_j(t,\zeta,\eta,x) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, e^{i(j\theta+\zeta v+\eta\omega)} f(t,\theta,v,\omega,x), \tag{5.40}$$

где $j \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Используя уравнение Власова, мы получаем следующее уравнение на моды Фурье,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = (j-\zeta)\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} + j\frac{\partial u_j}{\partial \eta} + K\zeta\left(r(t,x)u_{j-1} - \overline{r(t,x)}u_{j+1}\right). \tag{5.41}$$

Как обычно, моды Фурье имеют следующие свойства,

$$u_0(t,0,0,x) = 1, u_{-j}(t,-\zeta,-\eta,x) = \overline{u_j(t,\zeta,\omega,x)}.$$

В этом уравнении индекс j оказывается смешан с переменной ζ. Этот факт усложняет последующий анализ, поэтому удобно сделать замену переменных, предложенную в [86],

$$\zeta - j = \begin{cases} -e^{-\xi_j}, & \zeta - j < 0, \\ +e^{-\xi_j}, & \zeta - j \geq 0. \end{cases} \tag{5.42}$$

С учетом этой замены, уравнения для мод Фурье примут вид

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j} + j\frac{\partial u_j}{\partial \eta} + K\left(j - e^{-\xi_j}\right)\left\{ru_{j-1} - \bar{r}u_{j+1}\right\}. \tag{5.43}$$

Линеаризация системы вблизи несинхронизованного состояния приводит к системе

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \boldsymbol{L}_1[w_1] + K\boldsymbol{B}[w_1] = \boldsymbol{S}[w_1], \quad \frac{\partial w_j}{\partial t} = \boldsymbol{L}_j[w_j], \quad j \geq 0,\ j \neq 1, \tag{5.44}$$

где мы ввели следующие операторы,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_j[w](\xi,\eta,x) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + j\frac{\partial}{\partial \eta}\right) w(\xi,\eta,x), \\ \boldsymbol{B}[w](\xi,\eta,x) &= \left(1 - e^{-\xi}\right)\hat{g}(\eta)\boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)](x), \end{aligned} \tag{5.45}$$

$\hat{g}(\eta)$ есть Фурье-образ функции $g(\omega)$. Аккуратное определение Банаховых пространств, в которых действуют эти операторы и их основных свойств дано в [86]. Уравнения для кривой

Пенроуза имеют вид

$$x(t) = \pi g(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{1+(t-\omega)^2},$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)(t-\omega)}{1+(t-\omega)^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{t-\omega},$$

где последний интеграл в выражении для $y(t)$ понимается в смысле главного значения. Из уравнения для $x(t)$ получаем критическую константу связи

$$K_c^{-1} = \pi g(0) - m\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{1+m^2\omega^2}. \tag{5.46}$$

Это выражение можно записать в более компактной форме, если использовать

$$\pi = m\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+m^2\omega^2},$$

что дает

$$K_c^{-1} = m\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\,(g(0)-g(\omega))}{1+m^2\omega^2}. \tag{5.47}$$

Здесь стоит отметить следующее интересное обстоятельство: в отсутствии диссипативного вклада, то есть когда инерция очень велика синхронизация не происходит вообще.

5.4.3 Модель с инерцией и шумом

Рассмотрим теперь общий случай модели с шумом и инерцией,

$$m\ddot{\varphi}_i + \gamma\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i) + \alpha_i, \tag{5.48}$$

где m есть масса (инерция) i-го осциллятора, γ диссипативный фактор, ω_i собственная частота осциллятора, K константа связи, N обозначает количество осцилляторов, α_i представляет белый шум, $\langle\alpha_i(t)\alpha_j(t')\rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t-t')$. Мы начинаем с модели, определенной на взвешенном симметричном графе с матрицей смежности W_{ij}, но в основном фокусируемся на случае полного графа. Практически всегда параметры модели (5.48) перемасштабируются. Проделаем перемасштабирование аккуратно. Во-первых, заметим, что $[m] = T^1$, т.е. массовый член имеет размерность времени. Для других параметров мы видим, что $[\gamma] = T^0$, $[\omega_i] = T^{-1}$, $[K] = T^{-1}$, $[D] = T^{-1}$. Структура уравнений говорит нам, что параметры m и γ связаны друг с другом и, более того, если мы хотим перемасштабировать уравнения, коэффициент затухания γ оказывается связан с собственными частотами и константой связи. Важным фактом является то, что коэффициент затухания безразмерен, и мы можем положить $\gamma = 1$. Уравнения движения (5.48) можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\varphi_i &= \omega_i\, dt + v_i\, dt + \alpha_i\, dt, \\ dv_i &= -\frac{v_i}{m}\, dt + \frac{1}{m}\frac{2K}{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i)\, dt \end{aligned} \tag{5.49}$$

Отметим также, данная модель (5.49) содержит стохастический член только на фазах, тогда как в случае с инерцией шум обычно связан со скоростями, т.е. $\alpha_i(t)$ появляется во второй строке системы (5.49), как в работах [88; 93]. Пользуясь слабой сходимостью и многомерной леммой Ито, мы можем выписать уравнение Фоккера-Планка для нашей системы (5.49).

На фазовом пространстве $\Gamma = (\varphi, \omega, v, x)$ модели (5.49) в пределе $N \to \infty$ существует функция распределения $f = f(t, \varphi, v, \omega, x)$ и эмпирическая мера, полученная из уравнения (5.49), которая сходится почти наверное к мере, вычисленной с помощью функции f. Уравнение Фоккера-Планка для f задается как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{(v+\omega)\, f\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{(-v + \mathcal{N}[f])\, f\right\} - D\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{5.50}$$

где мы положили $m = 1$, а величина $\mathcal{N}[f]$ определена ранее, см. (5.20). Несинхронизованное состояние вновь есть $f_0 = \delta(v)g(\omega)/2\pi$. Исследуем устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям. Разложим вновь f в по модам Фурье u_j, см. В терминах мод Фурье уравнение Фоккера-Планка (5.50) принимает вид

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = (j-\zeta)\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} + j\frac{\partial u_j}{\partial \eta} + K\zeta\left\{r u_{j-1} - \bar{r} u_{j+1}\right\} + D j^2 u_j. \tag{5.51}$$

Мы вновь воспользуемся заменой переменных (5.42) и получим систему

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial u_j}{\partial \xi_j} + j\frac{\partial u_j}{\partial \eta} + K\left(j - e^{-\xi_j}\right)\left\{r u_{j-1} - \bar{r} u_{j+1}\right\} + D j^2 u_j, \tag{5.52}$$

где функции u_j теперь зависят от ξ_j. Линеаризация вблизи f_0 дает следующее уравнение,

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \boldsymbol{L}_1[w_1] + K\boldsymbol{B}[w_1] = \boldsymbol{S}[w_1], \quad \frac{\partial w_j}{\partial t} = \boldsymbol{L}_j[w_j], \quad j \geq 0,\ j \neq 1, \tag{5.53}$$

где мы ввели следующие операторы,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_j[w](\xi, \eta, x) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + j\frac{\partial}{\partial \eta} + Dj^2\right) w(\xi, \eta, x), \\ \boldsymbol{B}[w](\xi, \eta, x) &= \left(1 - e^{-\xi}\right)\hat{g}(\eta)\boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)](x), \end{aligned} \tag{5.54}$$

и $\hat{g}(\eta)$ есть Фурье-образ функции $g(\omega)$. Существенным фактом оказывается то, что свойства операторов при наличии шума сохраняются, поэтому все теоремные утверждения из работы [86] сохраняют свою силу. Для дальнейшего продвижения нам необходимо вычислить резольвенту оператора $\boldsymbol{L}_j$, данное вычисление приведено в Приложении С. Найдя резольвенту, мы можем переформулировать задачу линейной стабильности как задачу на собственные значения для линейного оператора.

5.4.4 Спектральная задача

Мы рассматриваем следующую спектральную задачу

$$\lambda w = \boldsymbol{S} w = (\boldsymbol{L}_1 + K\boldsymbol{B})\, w, \tag{5.55}$$

где операторы $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{B}$ определяются как

$$\boldsymbol{L}_1 = (\partial_\xi + \partial_\eta - D)\,, \quad \boldsymbol{B}[w] = \left(1 - e^{-\xi}\right) \hat{g}(\eta) \boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)](x), \tag{5.56}$$

а функция $\hat{g}(\eta)$ является Фурье-образом функции $g(\omega)$. Это уравнение на собственные значения можно представить в виде

$$(\lambda - \boldsymbol{L}_1)\, w = K\boldsymbol{B}w \to w = K\,(\lambda - \boldsymbol{L})^{-1} \left(1 - e^{-\xi}\right) \hat{g}(\eta) \boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)]. \tag{5.57}$$

Используя выражения для резольвенты, мы получаем следующее уравнение,

$$(\lambda - \boldsymbol{L}_1)^{-1} \left(1 - e^{-\xi}\right) \hat{g}(\eta) = \int d\omega\, g(\omega) e^{i\eta\omega} \left(\frac{1}{\lambda - i\omega + D} - \frac{e^{-\xi}}{\lambda + 1 - i\omega + D} \right). \tag{5.58}$$

Определим теперь функцию $\mathcal{D}(\lambda, \xi, \eta)$,

$$\mathcal{D}(\lambda, \xi, \eta) = \int d\omega\, g(\omega) e^{i\eta\omega} \left(\frac{1}{\lambda - i\omega + D} - \frac{e^{-\xi}}{\lambda + 1 - i\omega + D} \right). \tag{5.59}$$

С таким определением, наша спектральная задача может быть записана в более компактном виде,

$$w = K\mathcal{D}(\lambda, \xi, \eta) \boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)]. \tag{5.60}$$

Без ограничения общности мы можем положить $\xi = \eta = 0$, откуда следует

$$w(0,0,x) = K\mathcal{D}(\lambda, 0, 0) \boldsymbol{W}[w(0,0,\bullet)]. \tag{5.61}$$

Вновь воспользуемся методом Пенроуза. Пусть $\mu > 0$ есть собственное значение оператора $\boldsymbol{W}$, а V есть соответствующая собственная функция. Обозначим $G(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda, 0, 0)$. Тогда корень уравнения $G(\lambda) = (K\mu)^{-1}$ определяет собственное значение λ как функцию μ, $\lambda = \lambda(\mu)$. Если корень есть, то $w(0,0,x) = V(x)$, то есть множество корней уравнения $G(\lambda) = (K\mu)^{-1}$ совпадает с собственными значениями оператора $\boldsymbol{S}$. Далее, заметим, что уравнение $G(\lambda) = (K\mu)^{-1}$ имеет корень если кривая $\mathcal{C} = G(it)$, $t \in \mathbb{R}$ имеет положительное число намоток (индекс) вокруг точки $(K\mu)^{-1}$.

5.4.5 Метод Пенроуза с шумом

Покажем как описанный выше метод Пенроуза позволяет определить критическую связь K_c для случая полного графа. В таком случае оператор $\boldsymbol{W}$ имеет только одно собственное значение $\mu = 1$. Критическая кривая $\mathcal{C} = G(it)$, $\in \mathbb{R}$ задается параметрически,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega) D}{D^2 + (\omega - t)^2} - m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)\,(1 + mD)}{(1 + mD)^2 + m^2\,(\omega - t)^2}, \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)(\omega - t)}{D^2 + (\omega - t)^2} - m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)(\omega - t)}{(1 + mD)^2 + m^2\,(\omega - t)^2}, \end{aligned} \tag{5.62}$$

где мы восстановили величину m по размерности. Кривые Пенроуза для разных значений параметров построены на Рисунке 5.2.

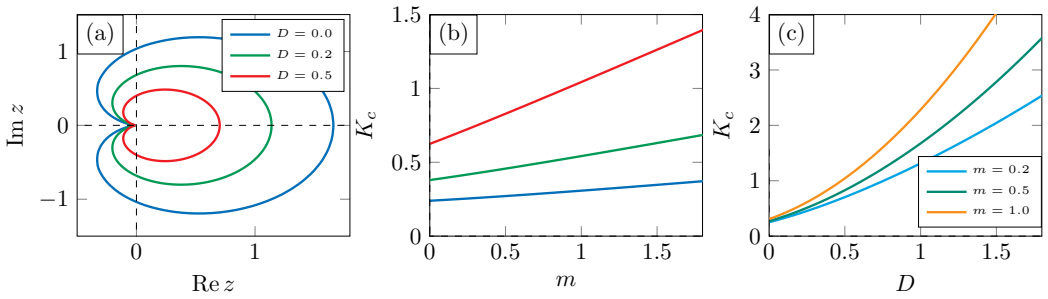


Рисунок 5.2—(a) Кривые Пенроуза для разных значений D с фиксированным значением $m = 1$, (b) зависимость критической константы K_c от массы для разных значений шума, (c) зависимость критической константы K_c от шума для разных значений массы.

Анализ кривой Пенроуза позволяет легко найти критическое значение константы связи K. В случае симметричного распределения $g(\omega)$ кривая $\mathcal{C}$ симметрична относительно действительной оси. Она пересекает действительную ось в единственной точке $x_0 > 0$. Кроме того, $G(0) = x_0$. Это означает, что если $K < K_c$, то точка K^{-1} лежит вне кривой Пенроуза. При $K > K_c$ точка лежит внутри кривой, а число намоток положительно. Следовательно, $K_c^{-1} = x_0$ и $x_0 = x(0)$. Учитывая этот факт, получаем явное выражение для критической константы связи:

$$K_c^{-1} = D \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{D^2 + \omega^2} - m\,(1 + mD) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{(1 + mD)^2 + m^2\omega^2}. \tag{5.63}$$

Данное выражение можно записать в более компактной форме,

$$K_c^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega D)}{1 + \omega^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} g\left(\omega D \left(1 + \frac{1}{mD}\right)\right) \tag{5.64}$$

Первый член соответствует пределу $m \to 0$ и дает значение критической константы связи для модели Курамото с шумом. Второй член содержит как шум, так и инерцию, но его структура идентична. В пределе $D \to 0$ мы также получаем известную критическую константу для модели с инерцией [86; 87]. Можно также рассмотреть немного более общий предел $D \to 0$, $m \to \infty$ с $mD = \text{const}$. Зависимость K_c от параметра монотонна как для m, так и для D, см. Рисунок 5.2(b) и Рисунок 5.2(c). Фазовые диаграммы приведены на Рисунке 5.3.

Полученное выражение для критической константы связи K_c может быть легко обобщено на случай графа, отличного от полного. Также отметим, что в работах [88; 93], посвященных изучению модели Курамото выражение для K_c представляется в виде сходящегося ряда интегралов, которые нельзя вычислить явно. Анализ стабильности несинхронизованного состояния проводится путем разложения решения уравнения Фоккера-Планка по базису функций параболического цилиндра и является технически сложным. Метод Пенроуза позволяет существенно упростить анализ спектра оператора и получить явное выражение для константы связи.

5.4.6 Влияние шума на паттерны

Известно, что модель Курамото имеет довольно богатый набор состояний, помимо несинхронизованного и синхронизованного состояний. Среди них наибольшее внимание привлекают

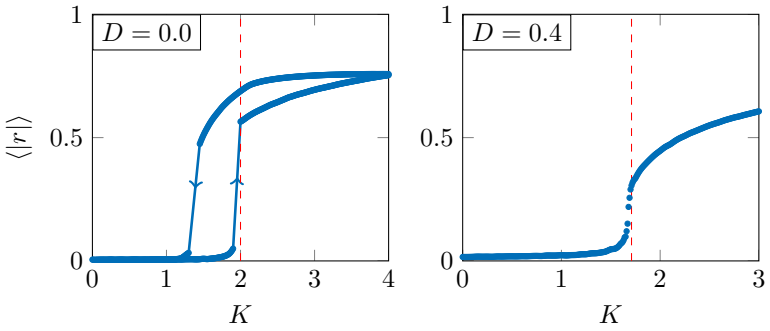


Рисунок 5.3—Фазовая диаграмма для модели Курамото с шумом и инерцией, полученная численно. Слева: $N = 40000$, распределение $g(\omega)$ есть распределение Коши с центром в нуле и шириной $\sigma = 1.0$, параметр инерции есть $m = 1.0$, шум $D = 0$. Справа: $N = 3500$, $g(\omega)$ есть распределение Коши с центром в нуле и шириной $\sigma = 0.5$, инерция $m = 1.0$, шум $D = 0.4$. На обоих рисунках красной штриховой линией показано аналитическое значение K_c из ур. (5.63), $\langle |r| \rangle$ есть усредненный по времени параметр порядка

химеры и кластеры синхронизации. Как было отмечено ранее, как химеры, так и кластеры могут возникать за счет нетривиальной структуры графа. Но еще одним из возможных механизмов реализации формирования таких структур является рассмотрение бимодального (двугорбого) распределения частот $g(\omega)$, см. [62]. Следует явно отметить тот факт, что данное состояние следует называть не химерой, а *химероподобным* состоянием. В таком случае химеры и кластеры появляются посредством бифуркаций несинхронизованного состояния, что подробно обсуждалась в [62]. Шум является дополнительным ингредиентом, который может влиять на такие структуры. В этом разделе мы используем кривые Пенроуза, чтобы изучить влияние шума на различные паттерны, наблюдаемые в модели с инерцией.

Для демонстрации кластерной синхронизации, мы рассматриваем бимодальное распределение Гаусса,

$$g(\omega; \mu, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(x+\mu)^2/(2\sigma_1^2)}}{\sigma_1} + \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma_2^2)}}{\sigma_2} \right], \tag{5.65}$$

приводящее к появлению бикластерной структуры. Наш выбор обоснован тем, что для распределения Гаусса мы можем сравнивать наши результаты с ранее полученными в [87] для случая нулевого шума. Здесь мы рассматриваем симметричное бимодальное распределение, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Зафиксируем $\sigma = 0.3$ и $m = 1.0$. На основе предыдущих исследований [86; 87], мы ожидаем, что для достаточно больших значений μ бикластерное состояние возникает посредством бифуркации Андронова-Хопфа (А-Н). В нашем случае появление такого состояния зависит от величины шума D. В терминах кривой Пенроуза, при достаточно большом значении μ_c на кривой имеется точка, где теорема об обратной функции не работает. Это соответствует тому, что имеет место бифуркация А-Н и происходит при условии $dy/dt|_{t=0} = 0$. Чтобы найти критическое значение μ_c, исходя из того, что имеет место бифуркация А-Н, мы исследуем функцию $J(\mu) = dy/dt|_{t=0}$. Критическое значение μ_c соответствует корню уравнения $J(\mu_c) = 0$. Мы видим, что шум постепенно увеличивает критическое значение μ_c (см. Рисунок 5.4(а)), то есть большой шум препятствует образованию бикластерной структуры. В плоскости (μ, D) существует линяя, отделяющая область с только бифуркацией Андронова-

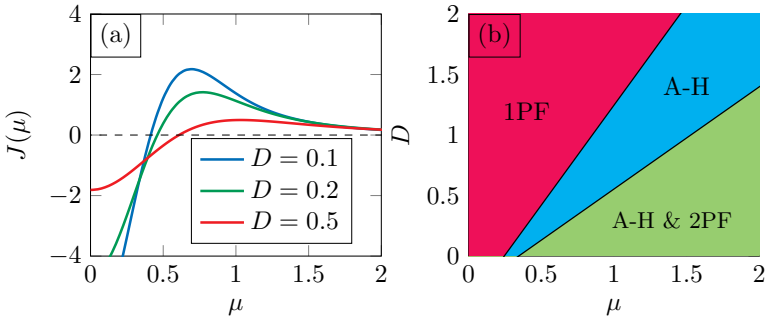


Рисунок 5.4—(a) Функция $J(\mu)$, позволяющая исследовать появление A-H бифуркации (см. пояснение в тексте), (b) карта бифуркаций в модели Курамото с шумом и инерцией в случае бимодального распределения Гаусса с симметричными пиками в точках $\pm\mu$, $\sigma = 0.3$

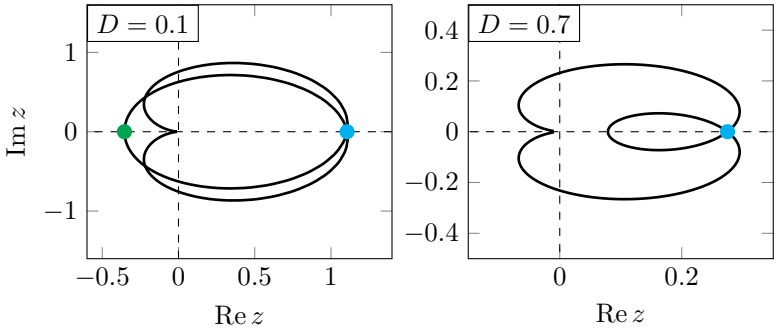


Рисунок 5.5—Исчезновение второй бифуркации раздвоения ($m = 1.0$, используется бимодальное распределение Гаусса с параметрами$\mu = 1.0$, $\sigma = 0.3$). Синяя точка соответствует бифуркации Анндронова-Хопфа, зеленая точка соответствует второй бифуркации раздвоения

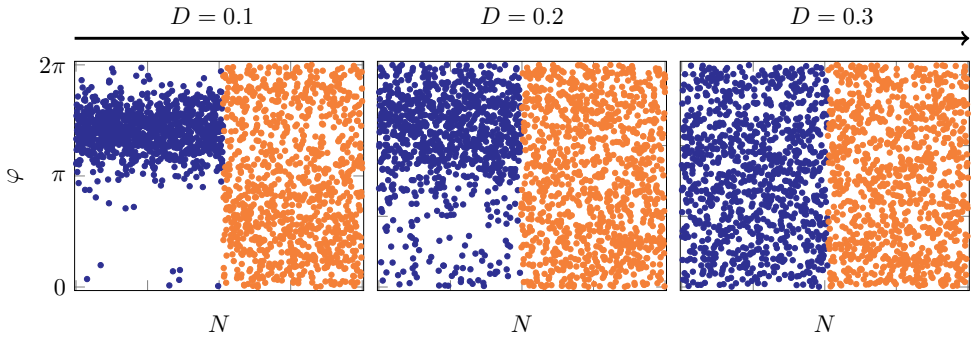


Рисунок 5.6—Разрушение химерного состояния за счет увеличения амплитуды шума D ($N = 2000$, $K = 1.0$, используется бимодальное Гауссово распределение с параметрами $\mu = 1.0$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$, осцилляторы сгруппированы по знаку своих собственных частот)

Хопфа (A-H) от области, где происходит бифуркация раздвоения, соответствующая переходу в синхронизованное состояние (1PF), которая показана на Рисунке 5.4(b).

Также мы знаем, что в дополнение к бифуркации A-H, может иметь место вторая бифуркация раздвоения (2PF). Эта бифуркация также происходит при определенном значении $\mu = \mu_0$ и представляет собой переход от несинхронизованного состояния к кластерам, синхронизованным в противофазе (см. [82]). Шум также влияет на такой переход: достаточно большое значение величины шума может сместить соответствующую точку x_0 кривой Пенроуза с отрицательной полуоси на положительную. Для параметров на Рисунке 5.5 это происходит при $D \approx 0.55$. При $D \approx 0.55$ точка x_0 пересекает линию $\mathrm{Im}\, z = 0$, что приводит к исчезновению

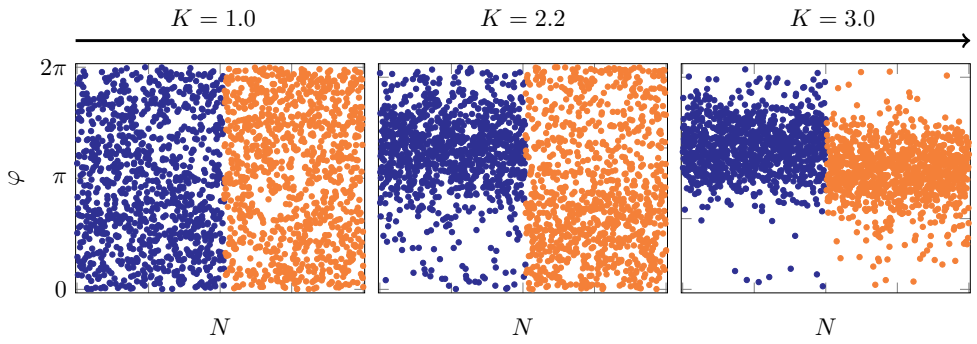


Рисунок 5.7—Бифуркации несинхронизованного состояния в присутствии шума для увеличивающейся константы связи K ($N = 2000$, $D = 0.4$, используется бимодальное Гауссово распределение с параметрами $\mu = 1.0$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$, осцилляторы сгруппированы по знаку своих собственных частот)

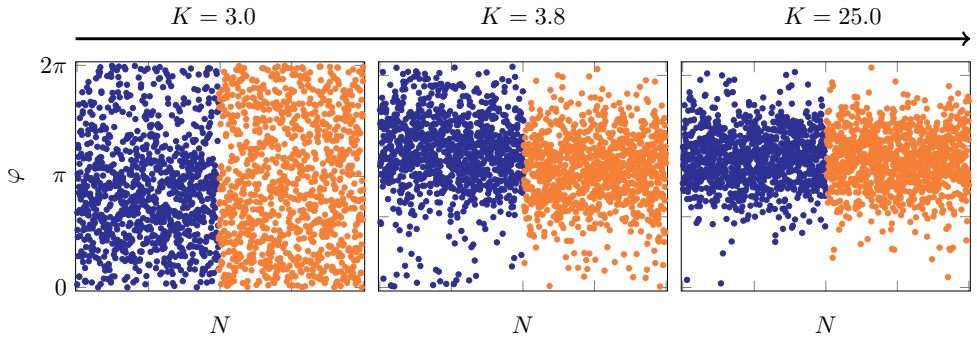


Рисунок 5.8—Бифуркации несинхронизованного состояния в присутствии шума для увеличивающейся константы связи K ($N = 2000$, $D = 0.6$, используется бимодальное Гауссово распределение с параметрами $\mu = 1.0$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$, осцилляторы сгруппированы по знаку своих собственных частот)

второй бифуркации раздвоения. Мы приходим к выводу, что в области, закрашенной красным на Рисунке 5.4, кривые Пенроуза диффеоморфны кривым, показанным на Рисунке 5.2. В области, закрашенной синим, кривые Пенроуза диффеоморфны кривой, показанной на Рисунке 5.5 для $D = 0.7$, тогда как в области, закрашенной зеленым, кривые диффеоморфны кривой с $D = 0.1$ с того же рисунка.

Теперь нарушим симметрию бимодального гауссовского распределения, выбрав различные значения σ_1 и σ_2. Это приводит к появлению химерных состояний, т.е. сосуществованию синхронизированных и несинхронизированных осцилляторов во всей популяции. Опять же, шум оказывает значительное влияние на эти состояния. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, мы выбираем $m = 1$, $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.2$ и $\mu = 1$. Зафиксировав эти параметры, будем варьировать величину шума D от нуля до ненулевых значений. Критические кривые показаны на Рисунке 5.9.

Мы видим, что первая бифуркация (красная точка) происходит при довольно малом значении константы связи, и это соответствует частичной синхронизации популяции, но значительная часть осцилляторов остается несинхронизированной. Вторая бифуркация (синяя точка) происходит при большем значении константы связи, и это соответствует исчезновению химерного состояния: теперь вся популяция синхронизирована.

Шум делает сценарий синхронизации более интересным. При малых значениях шума

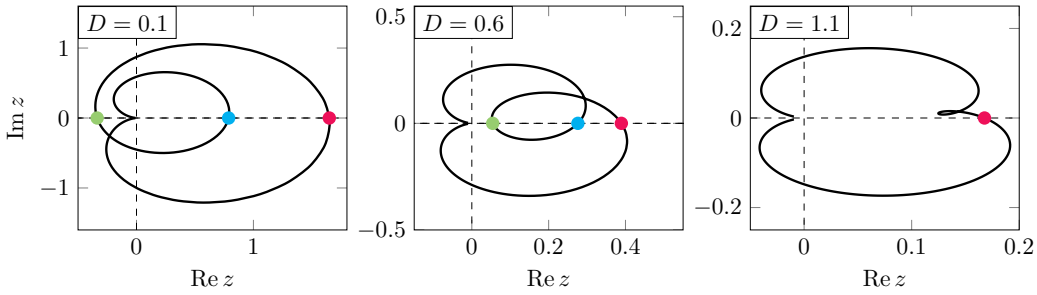


Рисунок 5.9—Разрушение химерного состояния при увеличении амплитуды шума D

качественная картина не меняется, тогда как с определенного значения шума происходит *еще один* переход (средняя картинка на панели, см. Рисунок 5.9). Дальнейшее увеличение величины шума разрушает состояние химеры. Интуиция, основанная на кривых Пенроуза, подтверждается численным моделированием, которое продемонстрировано на Рисунках 5.6, 5.7 и Рисунке 5.8.

Рисунок 5.6 показывает, как шум разрушает химерное состояние. При довольно малых значениях величины шума, $D = 0.1$, химерное состояние существует, но уже небольшое увеличение ($D = 0.2$) шума вызывает распад синхронизированной популяции осцилляторов (средняя картинка). Дальнейшее увеличение величины шума (до $D = 0.3$) полностью разрушает синхронизацию. Обратная картина изображена на Рисунке 5.7. Здесь мы фиксируем умеренное значение величины шума, $D = 0.4$, и наблюдаем устойчивость несинхронизованного состояния для различных значений константы связи K. Из анализа кривых Пенроуза мы находим два критических значения: $K_c^1 \approx 1.60$ (бифуркация от несинхронизованного состояния к химере) и $K_c^2 \approx 2.48$ (от химеры к бикластеру). Шум подавляет синхронизацию, поэтому кластеры кажутся рыхлыми по сравнению со случаем без шума.

Как мы уже упоминали выше, для умеренного значения шума существуют три критические точки, которые определяются как пересечения кривой Пенроуза с действительной осью. Соответствующие переходы показаны на Рисунке 5.8. Наименьшая критическая константа (для нашего выбора параметров это $K_c^1 \approx 2.57$) соответствует бифуркации несинхронизованного состояния в химеру. Однако умеренный шум значительно подавляет синхронизацию (синхронизированная фракция имеет параметр порядка ≈ 0.30, тогда как несинхронизированная имеет ≈ 0.05). Следующая критическая константа ($K_c^2 \approx 3.62$) соответствует бифуркации из химерного состояния в бикластер. Наибольшая критическая константа соответствует слиянию двух кластеров в полностью синхронизованное состояние.

5.4.7 Модель с временной задержкой

Обсудим так же кратко как метод Пенроуза также позволяет продвинуться в анализе модели Курамото с задержкой по времени,

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{2K}{N} \sum_{j=1}^{N} W_{ij} \sin\left(\varphi_j(t-\tau) - \varphi_i\right). \tag{5.66}$$

Для этой системы сразу можем записать непрерывный предел,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{v(t-\tau,\omega,\varphi)f(t,\omega,\varphi)\right\} = 0, \tag{5.67}$$

где функция скорости имеет вид

$$v(t-\tau) = \omega + 2K\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\, \sin(\theta-\varphi) f(t-\tau,\omega,\varphi). \tag{5.68}$$

Повторяя вновь все выкладки, мы получаем следующее уравнение для собственных значений λ оператора линейной стабильности,

$$e^{-\lambda\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{\lambda - i\omega} = \frac{1}{K}. \tag{5.69}$$

Из этого уравнения можно получить уравнения для критической кривой. Рассмотрим функцию

$$G(x+iy) = e^{-z\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{z - i\omega} \tag{5.70}$$

и представим z как $z = x + iy$. Затем запишем

$$G(z) = -ie^{-x\tau - iy\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{(y-\omega) - ix} \tag{5.71}$$

и возьмем предел $x \to 0$ с помощью формулы Сохоцкого-Племеля,

$$\frac{1}{y-\omega-ix} = +i\pi\delta(y-\omega) + \frac{1}{y-\omega}. \tag{5.72}$$

Для удобства положим $y \equiv s$ и находим

$$G(0+is) = \pi e^{-i\tau s} g(s) - ie^{-i\tau s}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{s-\omega}. \tag{5.73}$$

Представляя $\exp(-i\tau s)$ как $\cos(\tau s) - i\sin(\tau s)$, получаем параметрически заданную кривую $G(is) = x(s) + iy(s)$,

$$\begin{aligned} x(s) &= \pi g(s)\cos(\tau s) - \sin(\tau s)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{s-\omega}, \\ y(s) &= -\pi g(s)\sin(\tau s) - \cos(\tau s)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{s-\omega}, \end{aligned} \tag{5.74}$$

где все интегралы понимаются в смысле главного значения. Интеграл в правой части уравнений можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega)}{s-\omega} = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega - s)}{\omega} - \int_0^{+\infty} \frac{d\omega\, g(\omega + s)}{\omega}, \tag{5.75}$$

где мы явно предполагаем четность распределения $g(\omega)$. Наконец,

$$\begin{aligned} x(s) &= \pi g(s)\cos(\tau s) + \sin(\tau s)\int_0^{+\infty} \frac{d\omega\,[g(\omega+s) - g(\omega-s)]}{\omega}, \\ y(s) &= -\pi g(s)\sin(\tau s) + \cos(\tau s)\int_0^{+\infty} \frac{d\omega\,[g(\omega+s) - g(\omega-s)]}{\omega}. \end{aligned} \tag{5.76}$$

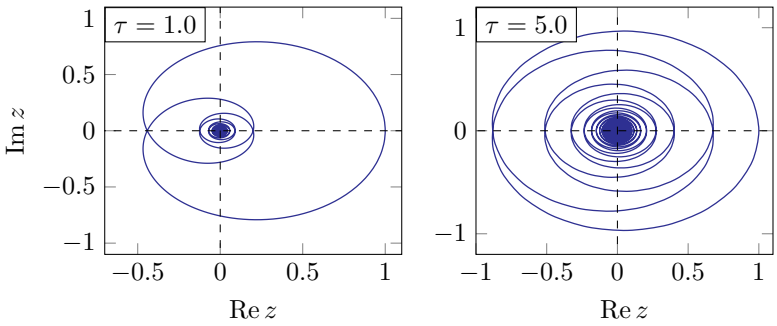


Рисунок 5.10—Кривые Пенроуза для разных значений запаздывания τ, распределение частот $g(\omega)$ есть распределение Коши с центром в нуле и единичной шириной

Анализ приводит к следующему выражению для критической константы связи,

$$\cos(\tau s_c) = \pi g(s_c) K_c. \tag{5.77}$$

Это уравнение подразумевает $|\pi g(s_c) K_c| \leq 1$. Для заданного K_c положение точки s_c определяется условием $\cos(\tau s_c) = 1$. Значит, вместо одной критической константы у нас имеется целое семейство констант, определяемых условием

$$K_c^{-1} = \pi g\left(\frac{2\pi n}{\tau}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.78}$$

Полученный результат для K_c согласуется с расчетами, проведенными другим методом в работе [94]. Кривые Пенроуза в такой задаче имеют необычный вид, они представлены на Рисунке 5.10.

5.5 Гамильтонова модель среднего поля

Сформулированные ранее утверждения о пределе Власова для модели Курамото и её обобщений позволяют перейти к рассмотрению динамики в многочастичной гамильтоновой системе с дальнодействием. Эта система называется гамильтоновой моделью среднего поля (далее HMF модель) и имеет гамильтониан

$$H_{\text{HMF}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} - \frac{K}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} \cos(\varphi_j - \varphi_i), \tag{5.79}$$

где K есть константа связи, p_i есть импульс частицы. В случае $K > 0$ взаимодействие является притяжением, в случае $K < 0$ – отталкиванием. Множитель $1/2$ введен, чтобы учесть двойное суммирование. Эта модель связана с моделью Курамото двояким образом: с одной стороны данная система есть бездиссипативный предел модели Курамото с инерцией, с другой стороны Гиббсовские меры модели Курамото с шумом (без инерции) совпадают с Гиббсовскими мерами HMF модели. Больше всего внимания мы уделим существованию *квази-стационарных состояний* (англ. quasi-stationary states, далее QSS) и описанию синхронизованных состояний в этой модели. По всей видимости, модель впервые была предложена в работах [95; 96] (поэтому её называют часто моделью Кониши-Канеко), а мотивацией послужила система, сходная с моделью Курамото, описанная в [97].

Важно отметить, что HMF модель является простейшим примером системы с дальнодействием, поэтому многие из описанных для этой системы явлений возникают в других гамильтоновых системах с дальнодействием. Под дальнодействием мы имеем в виду следующее свойство. Пусть $V(r)$ есть парное взаимодействие двух частиц, т.е. $r = |\boldsymbol{r}|$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, где $\boldsymbol{r}_{i,j}$ есть радиус-векторы данных частиц. Взаимодействие $V(r)$ называется *дальнодействием* (или дальнодействующим взаимодействием), если

$$\lim_{r\to+\infty} V(r) \propto r^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq d,$$

Легко видеть, что Кулоновское и гравитационное взаимодействия являются дальнодействием в 3D, т.к. для них $\alpha = 1$, также дальнодействием являются диполь-дипольное взаимодействие, для него $\alpha = 3$. HMF модель соответствует "экстремальному" случаю: для неё $\alpha = 0$, т.е. дальнодействие моделируется связью "все-со-всеми". Наиболее полное обсуждение систем с дальнодействием содержится в обзоре [98] и монографии [99; 100].

Наличие дальнодействия приводит к возможности существования квазистационарных состояний (англ. quasi-stationary states, далее QSS). Для ряда дальнодействующих систем удается построить хорошо определенный предел Власова. Соответствующее уравнение Власова сохраняет фазовый объем и не имеет интеграла. Это приводит к тому, что в системе имеется бесконечное число сохраняющихся величин. Существование этих величин ответственно за возникновение QSS, причем такие QSS являются долгоживущими: система пребывает в таких состояниях длительное время и релаксирует (термализуется) к Больцмановской функции распределения за огромное время (расходящееся в термодинамическом пределе).

Лучше всего QSS исследованы для уже упомянутой HMF модели, которая является простейшей для анализа и содержащей все ключевые эффекты. В HMF модели QSS существуют как в случае притягивающего, так и в случае отталкивающего взаимодействия. Более того, между разными QSS существуют фазовые переходы, параметром порядка в которых является все та же мера синхронизации. Для HMF модели существуют математически строгие оценки для времени термализации и результаты численного счета, указывающие на поистине огромное (бесконечное в термодинамическом пределе) время релаксации к Больцмановскому распределению.

5.5.1 Равновесный фазовый переход

В общем случае гамильтониан HMF модели есть

$$H_{\text{HMF}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} - \frac{K}{2N} \sum_{i,j=1}^{N} W_{ij} \cos\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{5.80}$$

где W_{ij} есть матрица смежности графа, на котором задана модель. Не представляет большого труда вычислить каноническую статсумму для HMF модели с притяжением на полном графе, т.е. когда $W_{ij} \equiv 1$, что сделано в [101]. Каноническая статсумма $\mathcal{Z}_{\text{HMF}}$ имеет вид

$$\mathcal{Z}_{\text{HMF}} = \prod_i \int dp_i \int d\varphi_i \, e^{-\beta H_{\text{HMF}}}. \tag{5.81}$$

Перепишем взаимодействие в виде

$$\sum_{i,j}\cos(\varphi_j-\varphi_i)=\sum_{i,j}\boldsymbol{m}_j\cdot\boldsymbol{m}_i=\left(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{m}_j\right)^2, \tag{5.82}$$

где введено обозначение $\boldsymbol{m}_i = (\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)^T$. Введем также *параметр порядка*, $\boldsymbol{M} = \sum_j \boldsymbol{m}_j/N$, тогда статсумма запишется в виде

$$\mathcal{Z}_{\text{HMF}}=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{N/2}\prod_i\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi_i\,\exp\left[+\frac{\beta KN}{2}\boldsymbol{M}^2\right]. \tag{5.83}$$

Применим теперь преобразование Хаббарда-Стратоновича,

$$\exp\left[\frac{\mu x^2}{2}\right]=\frac{1}{\pi}\int d^2y\exp\left(-y^2+\sqrt{2\mu}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\right), \tag{5.84}$$

которое позволяет вычислить интеграл по углам в статсумме и приводит к ответу,

$$\mathcal{Z}=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{N/2}J,\quad J=\frac{N}{2\pi\beta K}\int d^2y\exp\left[-N\left(\frac{y^2}{2\beta K}-\ln(2\pi I_0(y))\right)\right], \tag{5.85}$$

где $I_0(y)$ есть модифицированная функция Бесселя второго рода. Интеграл для J в термодинамическом пределе $N\to\infty$ вычисляется методом перевала. Зная ответ для канонической статсуммы, мы можем записать выражение для плотности свободной энергии как

$$f=-\lim_{N\to\infty}\frac{\ln\mathcal{Z}}{N}=-\frac{1}{2}\ln\frac{2\pi}{\beta}+\frac{K\beta}{2}+\max_y\left\{\frac{y^2}{2\beta K}-\ln(2\pi I_0(y))\right\}. \tag{5.86}$$

Условие на максимум в последнем слагаемом приводит к следующему уравнению,

$$\frac{y}{\beta K}=\frac{I_1(y)}{I_0(y)}. \tag{5.87}$$

Это уравнение структурно совпадает с уравнением самосогласованности в модели Курамото на полном графе при наличии шума, шум в модели Курамото играет роль температуры. Мы уже знаем, что наличие нетривиальных корней у этого уравнения возможно, когда $y \geq 1/2$, откуда находим выражение для критической критической температуры $\beta_c = 2K^{-1}$. Это выражение согласуется с критической константой связи для модели Курамото с шумом и одинаковыми частотами с точностью до множителя 2 в силу другой нормировки константы связи в этой главе. Рассмотрим теперь выражение для внутренней энергии U на одну частицу,

$$U=\frac{H}{N}=\frac{1}{2\beta}-\frac{KM^2}{2}. \tag{5.88}$$

При численном изучении HMF модели обычно полагают $K = 1$, тогда значение плотности энергии $U_c = 0.25$ является критическим: при $U < U_c$ возникает ненулевая намагниченность M и происходит фазовый переход.

Зададимся следующим вопросом: пусть заданы начальные условия для HMF модели в термодинамическом пределе, $N\to\infty$, как быстро в системе возникнет Больцмановская функция

распределения? Этот вопрос удобно переформулировать через рассмотрение параметра порядка. Действительно, начальные условия задают значение параметра порядка в момент времени $t = 0$, а вычисление канонической статсуммы позволяет определить значение параметра порядка, который соответствует Больцмановскому распределению. Значит, поставленный вопрос звучит так: как быстро параметр порядка релаксирует (термализуется) к своему равновесному (в смысле соответствия Больцмановскому распределению) значению? Когда система является интегрируемой, то релаксация наблюдаемых к их равновесным (Больцмановским) значениям оказывается либо очень долгой, либо вообще отсутствует.

Ответ о том как быстро происходит релаксация можно получить посредством численных расчетов. Действительно, не составляет большого труда выполнить расчет траекторий $\varphi_i = \varphi_i(t)$ для большого числа частиц N и по этим траекториям вычислить значение параметра порядка как функцию времени $|\boldsymbol{M}(t)|$. Численные расчеты указывают (см. [102]), что процесс релаксации к равновесному значению занимает очень большое время. Чтобы понять почему имеет место такое поведение, следует обратиться к пределу Власова для HMF модели и изучению квазистационарных состояний, которые в нём возникают.

5.5.2 Квазистационарные состояния

Одной из первых работ, посвященных нетривиальной динамике в системах с дальнодействием и их релаксации к Больцмановскму равновесию, является работа [103], где изучаются гравитирующие системы из большого числа частиц. Ключевым фактом (но в некотором смысле тривиальным) в этих системах оказывается то, что фазовый объем в ходе эволюции сохраняется. В ходе эволюции в фазовом пространстве происходит интенсивное *смешивание*: начальная функция распределения размывается по фазовому пространству. Данный процесс не останавливается и происходит в любой момент времени, однако по прошествии достаточно короткого промежутка времени ($t \sim N^0$, где N число частиц) и на достаточно больших масштабах в фазовом пространстве функция распределения кажется постоянной. Этот процесс смешивания происходит очень быстро (в литературе это явление известно как *резкая релаксация*, англ. violent relaxation). Т.к. на достаточно больших масштабах функция распределения кажется почти стационарной, говорят, что в системе возникают *квазистационарные состояния* (QSS). Для гравитирующих систем они также были впервые описаны в работе [103]. Детальное обсуждение QSS в системах с дальнодействием дано в обзорах [104; 105]. Для HMF модели резкая релаксация обсуждается в [106; 107]

Анализ квазистационарных состояний в HMF модели является предметом интенсивных исследований. Среди первых работ в этом направлении мы отметим работы [108; 109], где изучается модель с отталкиванием и работы [110; 111] для модели с притяжением. Далее, в работе [112] обсуждается связь QSS с интегрируемостью и появлением торов в фазовом пространстве (в духе КАМ-теории). В работах [113; 114] описан фазовый переход между разными QSS, являющийся переходом первого рода, который изучается в [115] и описывается связь QSS с распределениями типа ядро-гало (англ. core-halo distribution). Свойства QSS и релаксация к Больцмановскому распределению изучаются в работе [102; 116—119], а матема-

тически строгое описание QSS дается в работах [120; 121]. Также отметим работы [122—124], где обсуждается нарушение эргодичности в системах с дальнодействием на примере HMF модели и нарушение эквивалентности ансамблей. Наконец, квантовые системы с дальнодействием обладают схожими свойствами, что исследуется в работах [125—127]. Для дальнейшего изложения нам достаточно описать два простейших примера квазистационарных состояний, следуя [108; 109] и [128].

Случай отталкивания

Особенно интересным случаем является модель с отталкиванием. Для этой модели наблюдается следующий эффект: для однородных начальных условий по прошествии некоторого промежутка времени (короткого) формируется бикластерная структура, т.е. частицы концентрируются в двух точках на единичной окружности, при этом суммарный параметр порядка близок к нулю. Данная структура является (квази)периодической: в пространстве (t, φ) через определенные (длительные) промежутки времени бикластерная структура разрушается, а затем снова появляется. Области высокой концентрации части в (t, φ)-пространстве называют *шевронами*. Моменты времени, в которые появляются шевроны, можно оценить аналитически. Также в статье [108] детально исследуется вопрос о релаксации к равновесию в такой системе и указывается, что релаксация происходит за очень большое время. В этом смысле бикластерная структура является QSS.

Ниже мы опишем свойства этой структуры, а пока упомянем что её возникновение связано с эффективной динамикой частиц в двухямном потенциале (каждая из ям соответствует области, где концентрируются частицы). Ключевым для появления такого QSS является наличие двух хорошо различимых масштабов времени в модели. Мы начнем с анализа уравнения Власова для модели с отталкиванием, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{K}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha, u, t)\sin(\theta - \alpha)\right\}\frac{\partial f}{\partial p} = 0. \tag{5.89}$$

Удобно переписать данное уравнение Власова в следующей форме,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p\frac{\partial f}{\partial \theta} - F(\theta, t)\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad F(\theta, t) = \frac{K}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \rho(\alpha, t)\sin(\theta - \alpha), \tag{5.90}$$

где функции f и ρ связаны как

$$\rho(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, f(\theta, p, t), \quad \rho(\theta, t)v(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p f(\theta, p, t). \tag{5.91}$$

Рассмотрим возмущение вблизи состояния с $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$, для этого подставим в уравнение решение в виде $\rho = \rho_0 + \epsilon\delta\rho$, $\epsilon \ll 1$. Возмущение удовлетворяет уравнению Эйлера,

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, \delta\rho(\alpha, t)\sin(\varphi - \alpha). \tag{5.92}$$

Рассмотрим нелинейное возмущение, $v(\varphi, t) = v_0 \sin\varphi \sin\omega t + \epsilon u$, $\epsilon \ll 1$. Обсудим теперь малость ϵ. Величина ω определяет один временной масштаб t_1 и можно показать, что $\omega \sim$

$K^{1/2}$, т.е. $t_1 \sim \omega^{-1} \sim K^{-1/2}$. Второй временной масштаб связан с величиной v_0, которая в свою очередь связана с величиной энергии e на одну частицу как $e \sim v_0^2$, откуда следует $t_2 \sim v_0^{-1} \sim e^{-1/2}$. Тогда отношение двух масштабов $\epsilon \sim t_1/t_2 \sim (e/K)^{1/2}$. Если $e \ll K$, то $\epsilon \ll 1$ и мы имеем два хорошо различимых масштаба. Подставляя это возмущение в уравнение Эйлера и усреднив по быстрому временному масштабу, мы получим уравнение для функции $u(\varphi, t)$. Данная функция $u = u(\varphi, t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{K}{8}\sin 2\varphi, \tag{5.93}$$

где $\tau = \epsilon t$ есть медленный временной масштаб. Используя метод характеристик, приведем это уравнение к следующему виду,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{K}{8}\left(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0\right). \tag{5.94}$$

Теперь проинтегрируем обе части этого уравнения,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0}} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{2}}\int_0^{\tau} d\tau. \tag{5.95}$$

Воспользуемся соотношением $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi_0 - \sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{K}}{2}\int_0^{\tau} d\tau. \tag{5.96}$$

Обозначим $k = \sin\varphi_0$ и введем переменную $\sin\varphi = k\sin\theta$,

$$\int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin\theta^2}} = \tau\sqrt{\frac{K}{2}} \equiv \tau\omega \tag{5.97}$$

Теперь выполним интегрирование в левой части уравнения. Используя определения специальных функций Якоби, мы получаем следующее уравнение на $\theta = \theta(\tau)$,

$$\boldsymbol{F}(\theta, \sin^2\varphi_0) - \boldsymbol{K}(\sin^2\varphi_0) = \tau\omega, \tag{5.98}$$

где мы обозначили полный эллиптический интеграл первого рода как $\boldsymbol{K}(\sin^2\varphi_0)$, а неполный эллиптический интеграл как $\boldsymbol{F}(\theta, \sin^2\varphi_0)$ Выполнив серию замен переменных, мы наконец находим явно функцию $\varphi(\tau)$,

$$\varphi(\tau) = \arcsin\left\{\sin\varphi_0\,\mathrm{sn}\,\left(\tau\omega + K(\sin^2\varphi_0), \sin^2\varphi_0\right)\right\}, \tag{5.99}$$

где sn есть синус Якоби. Известно, что синус Якоби имеет период $T = 4\boldsymbol{K}(\sin^2\varphi_0)$. Наибольший период соответствует гармоническому пределу, когда эллиптический синус переход в обычный. Это происходит когда $\sin\varphi_0 \to 0$. В этом пределе период равен $T = 4\boldsymbol{K}(0) = 2\pi$. Появление первого шеврона соответствует появлению первой каустики характеристики. Каустика появляется, когда время равно четверти периода, т.е.

$$\frac{\tau_0\sqrt{K}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} \to \tau_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2K}}. \tag{5.100}$$

В терминах исходного времени, этому соответствует

$$t_0 = \frac{\tau_0}{\epsilon} = \sqrt{\frac{K}{2e}}\frac{\pi}{\sqrt{2K}} = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}. \tag{5.101}$$

Рассмотрим теперь кратко случай притяжения.

Случай притяжения

В случае притяжения рассмотрение аналогично, см. [128] (раздел 3.6). В такой модели реализуется кластерное состояние, в отличие от бикластерной структуры в модели с отталкиванием. Соответствующее уравнение Бюргерса имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial \varphi} = |\boldsymbol{M}(t)| \sin\varphi, \tag{5.102}$$

где $|\boldsymbol{M}(t)|$ есть значение параметра порядка. Приближенно считая, что $|\boldsymbol{M}(t)| \approx M\,\mathrm{const}$, т.е. полагая что переменная параметра порядка меняется медленно, мы можем вновь применить метод характеристик и выписать

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M\sin\varphi,$$

откуда вновь можно получить оценки на появление шевронов и каустик. Отметим наконец, что наличие слабой диссипации, т.е. первой производной $\gamma\dot{\varphi}$ ($\gamma \ll 1$) в уравнениях движения для HMF модели не приводит к мгновенному исчезновению квазистационарных состояний. К примеру, в модели с притяжением кластерное квазистационарное состояние по-прежнему существует при малых значениях коэффициента диссипации γ. Это утверждение основано на численных симуляциях.

Термализация в системах с дальнодействием

При обсуждении термализации в системах с дальнодействием важную роль играет слабая сходимость эмпирической и непрерывной меры. Типичная оценка на время, в течение которого две меры близки дается выражением

$$|\mu_N(t) - \mu(t)| < C\epsilon(N)e^{\kappa t}, \tag{5.103}$$

где $\mu_N(t)$ есть эмпирическая мера, а $\mu(t)$ есть непрерывная мера, $\kappa > 0$, $C > 0$, $|\cdot|$ обозначает некоторую подходящую норму. Для функции $\epsilon(N)$ можно показать, что $\epsilon(N) \sim N^{-1/2}$, откуда следует что сходимость имеется на временах порядка $\sim \ln N$. Однако, оказывается, что общая картина для систем с дальнодействием отличается. Сходимость сохраняется на временах порядка $\sim N^{\alpha}$, $\alpha > 0$. Конкретно для HMF модели существует оценка $\alpha = 1/8$ (математически точная, получена в [121]) и $\alpha \approx 1.7$ (полученная путем численных симуляций в [102]). Общим сценарием для термализации в системах с дальнодействием является следующий:

1. Очень быстрая релаксация функции распределения к многообразию функций распределения, являющихся стационарным решением уравнения Власова. Этот этап называют *резкой релаксацией* (англ. violent relaxation, далее VR), его характерный масштаб времени t_D мал, причем t_D не зависит от числа частиц N, т.е. $t_D \sim N^0$
2. Медленная эволюция вблизи этого многообразия
3. Достижение Больцмановской функции распределения по прошествии суммарного времени $t_R \sim N^{\alpha}$, $\alpha > 0$

Как уже было отмечено, такая трехэтапная релаксация тесно связана с тем, что уравнение Власова обладает бесконечным набором сохраняющихся величин, которые называют иногда *функционалами Казимира* или *казимирами* (это есть любые выпуклые функционалы функции распределения). QSS формируются на масштабах $t \sim t_D \ll t_R$. Данный сценарий был описан для систем общего типа и доказан для HMF модели в работах [102; 121].

5.6 Промежуточные выводы

Использование графонов для определения термодинамических пределов плотных графов позволяет существенно продвинуться в анализе явления синхронизации в модели Курамото. Применение метода Пенроуза для анализа стабильности устанавливает соответствие между спектральными свойствами графона (графа) и синхронизацией. При этом оказывается, что различные обобщения модели Курамото также могут быть проанализированы с помощью метода Пенроуза.

Решающую роль в применении метода Пенроуза играет поточечная сходимость оператора, порождаемого графоном и спектра матрицы смежности графа. Такая сходимость позволяет получать оценки на критические константы связи даже в случае графов конечных размеров, но с достаточно большим числом вершин. Также важную роль играет плотность графов, поскольку по определению графон есть предел плотного графа. Это накладывает ряд ограничений, поскольку далеко не всегда интересные с точки зрения приложений графы являются плотными. Мы обсудим как обойти это ограничение в заключительной главе.

HMF модель является бездиссипативным пределом модели Курамото. В этой модели также возможна синхронизация фаз, которая является равновесным фазовым переходом. Неравновесная динамика HMF модели может быть также исследована с помощью предела Власова. Неравновесная динамика является очень богатой, т.к. соответствующее HMF модели уравнение Власова обладает бесконечным набором (см. также обсуждение в работах [129; 130]) сохраняющихся величин. Помимо этого в HMF модели имеет место явление резкой релаксации, описанное впервые для гравитирующих систем в работе [103]. После этой быстрой релаксации из-за наличия бесконечного числа сохраняющихся величин в системе могут возникать квазистационарные состояния (QSS), время жизни которых очень велико в пределе $N \to \infty$ (см. [102]).

Вопросы релаксации к Больцмановскому равновесию в HMF модели активно изучаются, этим вопросам посвящены работы [102; 110]. Образование QSS для классической модели HMF интенсивно изучается в течение многих лет, и было получено много интересных результатов. Среди них мы хотели бы выделить кластерные и бикластерные QSS для притягивающей и отталкивающей модели HMF [108], состояния малого перемещающегося кластера [111] и бикластерное состояние для притягивающей модели [113]. Существование этих состояний подчеркивает тот факт, что модель HMF имеет очень богатую динамику вне равновесия.

Глава 6

Квантовые системы

Эта глава посвящена обсуждению квантовых систем, в которых естественным образом возникают ансамбли нелинейных взаимодействующих осцилляторов и фазовая динамика. Мы хотим привести конкретные примеры таких систем и указать какие из них могут быть реализуемы практически. Мы рассмотрим три примера систем, в которых возникает либо модель Курамото в чистом виде, либо различные обобщения модели Курамото. Наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать роль явления синхронизации в данных системах.

Сначала мы рассмотрим схожие между собой примеры: SYK модель с дополнительным Хаббардовским притяжением, где фазовая динамика возникает в случае слабого (в сравнении с SYK взаимодействием) притяжения; системы сверхпроводящих зерен, где фазовая динамика проявляется в результате потери жесткости фаз и массивы контактов Джозефсона. Затем мы обсудим системы поляритонных конденсатов, где фазовая динамика возникает при изучении обобщенных уравнений Гросса-Питаевского посредством фазовой редукции ансамбля осцилляторов Ландау-Стюарта.

6.1 SYK модель с Хаббардовским притяжением

В этом разделе мы описываем SYK-модель комплексных фермионов с дополнительным Хаббардовским притяжением, которую будем называть *SYK+U моделью*. Данная модель была изучена в работе [131]. Наша цель состоит в том, чтобы показать соответствие между этой моделью и HMF моделью в режиме, когда Хаббардовское взаимодействие мало в сравнении с отталкиванием фермионов, обусловленным SYK-взаимодействием, а затем обсудить как проявляется синхронизация в такой системе.

Результаты этой главы основаны на работе [IV]

6.1.1 Гамильтониан модели

Мы рассматриваем следующее расширение обычной SYK модели,

$$H_{\text{SYK}} = \frac{1}{2} \sum_{ijkl,\sigma,\sigma'} J_{ij;kl} \left[c^\dagger_{i\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{k\sigma'} c_{l\sigma} + c^\dagger_{l\sigma} c^\dagger_{k\sigma'} c_{j\sigma'} c_{i\sigma} \right], \tag{6.1}$$

т.е. фермионы (не майрановские!) взаимодействуют с друг другом посредством четырехфермионного точечного случайного взаимодействия J_{ijkl}. Мы будем считать, что ненулевые матричные элементы $J_{ij;kl}$ соответствуют полностью различным индексам, а также будем полагать что матричные элементы $J_{ij;kl}$ являются действительными независимыми случайными величинами с Гауссовым распределением следующего вида,

$$\langle J_{ij;kl} \rangle = 0, \quad \langle J^2_{ij;kl} \rangle = \frac{J^2}{(4N)^3}. \tag{6.2}$$

К этому гамильтониану мы добавим Хаббардовское притяжение,

$$H_{\text{Hub}} = -U \sum_i^N c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow} c_{i\uparrow} - \mu \sum_{i,\sigma}^N c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma} = -U \sum_i^N b^\dagger_i b_i - \mu \sum_{i,\sigma}^N c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma}, \quad b^\dagger_i = c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} \tag{6.3}$$

Оба гамильтониана H_{SYK} и H_{Hub} сохраняют число частиц и симметричны к обращению времени. Состояния в этой модели описываются температурой T, числом заполнения фермионов N_f и безразмерным параметром U/J, которые описывает относительную силу притяжения фермионов.

6.1.2 Возможность фазового перехода

В отсутствии SYK-вклада основное состояние модели есть набор локализованных пар фермионов. Энергия основного состояния есть $-U$ на каждую пару фермионов, а кратность вырождения определяется из комбинаторных соображений: нужно распределить заданное число пар по N орбиталям. Возбужденные состояния соответствуют разрушению некоторых пар и созданию орбиталей, где находится по одному фермиону. Данные орбитали имеют нулевую энергию. В отсутствии же Хаббардовского вклада, мы имеем просто комплексную SYK-модель.

Как известно, сверхпроводимость подразумевает наличие ненулевых аномальных средних. Но для гамильтонианов, которые сохраняют число частиц N появление аномальных средних невозможно. Однако в таких системах может возникать *недиагональный дальний порядок* (англ. off-diagonal long-range order, далее ODLRO). Определим операторы $b^\dagger_i \equiv c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\downarrow}$ и рассмотрим одночастичную матрицу плотности $\rho_{ij} = \langle b^\dagger_i b_j \rangle$. Эта матрица имеет размер $N \times N$, а все её элементы неотрицательны. Её след есть полное число пар, т.е. $N_f/2$, причем рассматривается случай $N_f = N$. Говорят, что для системы с матрицей плотности ρ_{ij} реализуется ODLRO, если её наибольшее собственное значение λ_0 ведет себя как $\lambda_0 \sim \mathcal{O}(N)$. Появление ODLRO удобно описывать, вводя величины

$$\Delta_i = \langle c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} \rangle, \quad \overline{\Delta}_i = \langle c^\dagger_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} \rangle, \tag{6.4}$$

тогда $\rho_{ij} \propto \overline{\Delta}_i \Delta_j$. Фазовая диаграмма системы может быть получена путем диагонализации матрицы ρ_{ij}, что подразумевает точную диагонализацию матрицы размера $2^{2N} \times 2^{2N}$, которая соответствует гамильтониану модели. Точная диагонализация указывает на наличие фазового перехода: при определенном соотношении между U и J ODLRO исчезает, т.е. сверхпроводимость разрушается. Однако точная диагонализация не позволяет тщательно исследовать область, где отношение U/J мало. В этой области надо строить эффективную теорию, которая обсуждается далее.

6.1.3 Эффективное действие

Для построения эффективного действия SYK+U модели применяется стандартная схема, описанная в [131] (см. Appendix A и Appendix B): делается преобразование Хаббарда-Стратоновича, которое заменяет четырёхфермионное взаимодействие на квадратичное по фермионным полям взаимодействие с дополнительным вспомогательным полем. Для реализации этой стратегии вводятся следующие функции Грина,

$$G(\tau, \tau') = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_{i\sigma}(\tau) c^{\dagger}_{i\sigma}(\tau'), \quad F(\tau, \tau') = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} c_{i\downarrow}(\tau) c_{i\uparrow}(\tau') \tag{6.5}$$

из которых удобно сконструрировать матрицы Намбу,

$$\boldsymbol{G}_{\tau\tau'} = \begin{pmatrix} G_{\tau\tau'} & \overline{F}_{\tau\tau'} \\ F_{\tau\tau'} & -\overline{G}_{\tau'\tau} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\tau\tau'} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\tau\tau'} & \overline{\Xi}_{\tau\tau'} \\ \overline{\Xi}_{\tau\tau'} & -\Sigma_{\tau'\tau}, \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

где индексы обозначают зависимость от времени. Далее проводится усреднение по беспорядку J_{ijkl} с помощью репличного трюка, причем выбирается диагональный по репликам анзац. Подстановка введенных выше функций Грина с последующем расцеплением взаимодействия в Куперовском канале позволяет выписать окончательный вид эффективного действия,

$$S = \sum_{i=1}^{N} \int d\tau \left[\frac{|\Delta_i|^2}{U} - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln \left(\partial_\tau + \mu + \hat{\Sigma} + \hat{\Delta}_i \right) \right] - \\ - N \int \int d\tau \, d\tau' \left[\Sigma_{\tau\tau'} G_{\tau'\tau} + \frac{J^2}{64} \left(\overline{F}^2_{\tau\tau'} F^2_{\tau\tau'} + G^4_{\tau\tau'} \right) \right], \tag{6.7}$$

где $\hat{\Sigma}$ есть матрица, определенная выше и обозначено $\hat{\Delta}_i = \Delta_i \sigma^+ + \overline{\Delta}_i \sigma^-$, а матрицы $\sigma^{\pm}$ есть

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В этом эффективном действии величина Δ_i зависит от евклидова времени τ и индекса i. Чтобы получить систему уравнений на функции Грина, рассматривается перевальный анзац, когда $N \to \infty$, а величина Δ_i считается независимой ни от времени, ни от индекса i.

Вариация полученного эффективного действия вместе с перевальным анзацем дает систему уравнений на функции Грина и величину $|\Delta|$, причем данное уравнение структурно похоже на стандартное щелевое уравнение в БКШ-теории. В нормальной фазе $|\Delta| = 0$ и

функции Грина ведут себя как функции Грина SYK-модели. В случае $|\Delta| neq 0$ функции Грина демонстрируют экспоненциальное затухание, причем характерным масштабом затухания является величина $\tau_\Delta \sim |\Delta|^{-1}$. Анализ решений системы уравнений для функций Грина позволяет найти поведение щели $|\Delta|$ в разных режимах,

$$|\Delta| = \begin{cases} Je^{-J\sqrt{\pi}/(8\sqrt{2}U)}, & U \ll J, \\ U/2, & J \ll U. \end{cases} \tag{6.8}$$

Важной особенностью перевального анзаца является то, что такой анзац не фиксирует фазу комплексной величины $\Delta_i = |\Delta_i| \exp(i\varphi_i)$, т.е. модуль $|\Delta_i|$ полагается константой $|\Delta|$, в то время как фазы φ_i остаются свободными. Это означает, что фазы φ_i играют роль мягких мод и могут разрушать сверхпроводящее состояние даже при $|\Delta| \neq 0$. Именно эту особенность мы обсуждаем далее.

Взаимодействие мягких мод φ_i может быть вычислено из куперовской восприимчивости как

$$g_{ij} = |\Delta|^2 \frac{\partial E_0}{\partial \overline{\Delta}_i \partial \Delta_j}, \tag{6.9}$$

где E_0 есть энергия основного состояния. Куперовская восприимчивость есть попросту отклик E_0 на сдвиг $\overline{\Delta}_i c_{i\uparrow} c_{i\downarrow} + \Delta_j c^\dagger_{j\uparrow} c^\dagger_{j\downarrow}$ в гамильтониане. В первом порядке по теории возмущений, взаимодействие между фазами φ_i имеет вид

$$g \cos(\varphi_j - \varphi_i), \quad g = \langle g_{ij} \rangle \sim \frac{|\Delta|^2}{J}, \tag{6.10}$$

где угловые скобки означают усреднение по всем сайтам. Пока константа взаимодействия g не станет достаточно большой, моды φ_i остаются не синхронизованы и сверхпроводимость не возникает, несмотря на наличие щели. Такое состояние обычно называют *псевдощелевой фазой*. В теории сверхпроводимость такое поведение известно также как *сценарий пред-сформированных пар* (англ. preformed-pair scenario), когда щель в спектре возникает, а сверхпроводимость так и не появляется из-за отсутствия синхронизации фаз Куперовских пар.

6.1.4 Динамика в псевдощелевой фазе

Нас интересует режим, когда куперовские пары сформировались за счет Хаббардовского взаимодействия, но фазы φ_i куперовских пар не синхронизованы, поэтому сверхпроводящее состояние не возникает. Данное псевдощелевое состояние описывается следующим гамильтонианом,

$$H_{\text{SYK+U}} = H_{\text{HMF}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} - \frac{g}{N} \sum_{i<j}^{N} \cos(\varphi_j - \varphi_i), \tag{6.11}$$

где $g > 0$ константа взаимодействия, p_i есть импульс куперовской пары и мы подчеркнули то обстоятельство, что этот гамильтониан совпадает с гамильтонианом HMF модели. Также важно отметить, что константа взаимодействия g имеет квантовую природу, то есть речь идет о существенно квантовых эффектах. Выражение для константы взаимодействия g имеет вид

$$g = CJ \exp\left(-\frac{\pi J}{U}\right) > 0, \quad C \sim \mathcal{O}(1). \tag{6.12}$$

В гамильтониане (6.11) "масса" m куперовской пары связана с восприимчивостью основного состояния энергии E_{GS} к локальному химическому потенциалу. В пределе $N \to \infty$ масса m дается выражением (см. [132])

$$m \sim \frac{\partial^2 E_{\mathrm{GS}}}{\partial \mu^2} \sim \frac{1}{J} \tag{6.13}$$

Как мы знаем, в HMF модели имеется фазовый переход. В контексте SYK+U модели этот переход является квантовым и проанализирован в работе [131] в приближении среднего поля. Фазовый переход происходит при $g > g_c$ с $g_c = (2m)^{-1}$ и описывает переход из псевдощелевой фазы в сверхпроводящую фазу. Из-за связи "все-со-всеми" метод среднего поля дает точный ответ в пределе $N \to \infty$. В терминах мягких мод φ_i, в псевдощелевой фазе мы имеем дело с несинхронизированным состоянием, тогда как в сверхпроводящей фазе мы имеем дело с синхронизированным.

Ранее мы показывали, что в классической HMF модели возможно возникновение квазистационарных состояний, которые обладают частичной синхронизацией. Теперь мы имеем дело с квантовой моделью. Однако, несмотря на квантовость, мы покажем что также будем наблюдать частично синхронизированное состояние в псевдощелевой фазе. Как мы опишем ниже, это вызвано тем фактом, что классические QSS выживают на квантовом уровне, и поэтому может возникнуть частичная фазовая когерентность.

6.1.5 Квазистационарные состояния в квантовой задаче

Мы хотим установить как квантовые эффекты влияют на равновесные и неравновесные свойства HMF модели с целью проинтепретировать эти эффекты в контексте SYK+U модели. Квантовая модель HMF имеет следующий гамильтониан

$$H_{\mathrm{HMF}} = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)^2 - \frac{g}{N} \sum_{i<j}^{N} \cos\left(\varphi_j - \varphi_i\right), \tag{6.14}$$

где положено $\hbar = 1$, т.е. мы обезразмерили постоянную Планка. Гамильтониан описывает N взаимодействующих частиц с массой m на единичной окружности. В случае $g > 0$ мы имеем дело с притягивающим взаимодействием, тогда как в случае $g < 0$ мы получаем отталкивающее взаимодействие. Следуя [133], мы вводим перемасштабированную постоянную Планка $\chi = 1/\sqrt{m|g|}$ и перемасштабированное время, $\tau = t/\sqrt{m|g|}$. Восстанавливая размерность постоянной Планка и подсчитывая степени $\hbar$, легко увидеть, что $\chi \propto \hbar$, поэтому $\chi \to 0$ соответствует классическому пределу. Как мы уже знаем, классическая равновесная модель HMF с $g > 0$ имеет непрерывный фазовый переход по константе связи g, а параметром порядка является величина

$$M = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j}, \tag{6.15}$$

аналогичная мере синхронизации в модели Курамото или же намагниченности в спиновых моделях. Этот непрерывный фазовый переход соответствует переходу между ненамагниченной (несинхронизованной) фазой с $|M| = 0$ и намагниченной (синхронизованной) фазой с $|M| \neq 0$.

В термодинамическом пределе $N \to \infty$ квантовая HMF модель в пределе нулевой температуры может быть описана обобщенным уравнением Гросса-Питаевского (англ. generalized Gross-Pitaevskii equation, далее GGPE), что было показано в работах [133; 134],

$$\begin{aligned} i\chi\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} &= -\frac{\chi^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} - \mathrm{sgn}(g)\Phi(\varphi,\tau)\Psi, \\ \Phi(\varphi,\tau) &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi' \cos\left(\varphi-\varphi'\right)|\Psi(\varphi,\tau)|^2, \end{aligned} \tag{6.16}$$

здесь Ψ есть волновая функция конденсата, параметр порядка имеет вид

$$M(\varphi) = \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta\, \cos(\varphi-\theta)\rho(\theta,\tau), \tag{6.17}$$

а угол $\varphi = \varphi(\tau)$ соответствует направлению намагниченности. Данное обобщенное уравнение Гросса-Питаевского (6.16) можно в виде системы квантовых уравнений Эйлера, обозначив $\Psi = \sqrt{\rho}e^{iS/\chi}$ и $v = \partial S/\partial\varphi$,

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v) = 0, \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} + v\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial Q}{\partial\varphi},\ Q \equiv \frac{\chi^2}{2\sqrt{\rho}}\frac{\partial^2\sqrt{\rho}}{\partial\varphi^2}. \tag{6.19}$$

Величина Q есть так называемый квантовый потенциал, первоначально введенный Маделунгом, а затем использованный Бомом в его формулировке квантовой механики [135; 136].

Из квантовых уравнений Эйлера термодинамический предел классической модели HMF можно получить, положив $Q = 0$ (ср. с классическими уравнениями Эйлера в [108]). Первое исследование того, как наличие квантового потенциала Q влияет на существование QSS, было выполнено в работе [133] и позднее рассмотрено в статье [134]. Для притягивающего взаимодействия линейный анализ устойчивости однородного решения, $\rho_0 = (2\pi)^{-1}$, дает следующее уравнение для возмущения $\delta\rho = \delta\rho(\varphi,\tau)$,

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial\tau^2} = -\rho_0\frac{\partial^2\delta\Phi}{\partial\varphi^2} - \frac{\chi^2}{4}\frac{\partial^4\delta\rho}{\partial\varphi^4},\ \delta\Phi = \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta'\, \cos\left(\varphi-\theta'\right)\delta\rho(\theta',\tau), \tag{6.20}$$

где затем мы раскладываем возмущение в ряд Фурье

$$\delta\rho(\varphi,\tau) = \sum_k \delta\rho_k \exp\left(i\omega_k\tau - ik\varphi\right),$$

и находим, что однородное решение ρ_0 устойчиво, если $\chi > \chi_c = \sqrt{2}$. Ожидаемо, что этот результат совпадает с $g_c = (2m)^{-1}$ (в терминах g однородное решение ρ_0 устойчиво при $g < g_c$). Это означает, что имеется квантовый фазовый переход по константе связи g, что приводит к образованию пространственно неоднородного конденсата мягких мод, т.е. синхронизированного состояния с $|M| \neq 0$. Явное выражение для неоднородного решения может быть получено путем самосогласованного решения уравнения Матье [137]. Аккуратное рассмотрение показывает, что существует не одно неоднородное решение, являющееся конденсатом, а целая башня конденсатов, характеризующаяся числом узлов волновой функции конденсата (т.е.

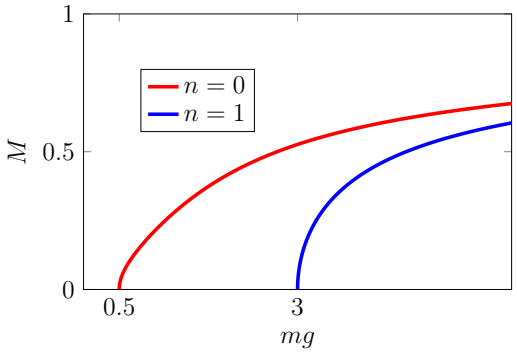


Рисунок 6.1—Равновесная фазовая диаграмма SYK+U модели в пределе $U/J \ll 1$ полученная посредством самосогласованного решения уравнения Матье (n обозначает число нулей волновой функции конденсата фаз)

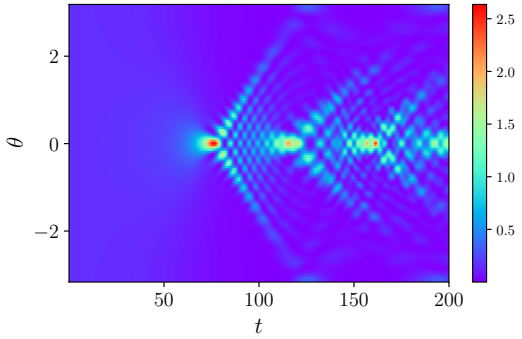


Рисунок 6.2—График плотности конденсата фаз $\rho = \rho(\tau, \theta)$, отвечающий квантовому квазистационарному состоянию в HMF модели с $\chi = 0.1$

по сути числом нулей функций Матье на отрезке длиной в период), где каждая волновая функция соответствует решению уравнения Матье. Наличие квантового потенциала имеет решающее значение, поскольку он улучшает стабильность несинхронизованного состояния. В этом прослеживается аналогия с добавлением шума в классической модели Курамото, где шум также улучшает стабильность такого состояния.

Зададимся теперь вопросом как наличие квантовых эффект влияет на возможность существования квазистационарных состояний. Рассмотрим для начала случай отталкивания. Тогда, как мы описывали ранее, в классической модели возникает квазистационарное состояние в виде бикластера, изученное в работах [108; 109]. Бикластер сохраняется в квантовой отталкивающей модели HMF для малых значений χ, что было показано в [134]. В квантовой задаче при малых χ все также существуют два сильно различных временных масштаба, что также приводит к возникновению бикластера. Этими временными масштабами являются аналог плазменной частоты (медленное время) и энергии на частицу (быстрое время). Этот результат был получен в работе [134]. В случае притяжения возникает квазистационарное состояние в виде кластера, которое однако вновь тяжело исследовать аналитически. В случае малых, но ненулевых значений χ для притягивающего взаимодействия возникает также квазистационарное состояние. Это состояние является квантовым аналогом кластерного квазистационарного состояния в классической модели HMF (см. Рисунок 6.2).

Мы также можем рассматривать квантовую модель HMF в терминах уравнения Вигнера,

которое играет роль квантового уравнения Власова [133]. Этот подход важен, поскольку GGPE соответствует случаю нулевой температуры, тогда как с помощью квантового уравнения Власова, по-видимому, можно проанализировать и случай конечной температуры. Чтобы вывести это уравнение, мы выпишем квантовое уравнение Лиувилля для матрицы плотности и построим функцию Вигнера,

$$f(\theta,\, p,\, \tau) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{2\pi\chi} e^{-ip\varphi/\chi} \rho\left(\theta + \frac{\varphi}{2},\, \theta - \frac{\varphi}{2},\, \tau\right). \tag{6.21}$$

где ρ матрица плотности. После простых манипуляций запишем уравнение Вигнера для квантовой модели HMF,

$$\begin{aligned} i\chi \frac{\partial f(\theta,\, p,\, \tau)}{\partial \tau} = -i\chi p \frac{\partial f(\theta,\, p,\, \tau)}{\partial \theta} + \\ + \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dk f(\alpha,\, k,\, \tau) \left[\cos\left(\theta - \alpha - \frac{i\chi}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) - \right.\right. \\ \left.\left. - \cos\left(\theta - \alpha + \frac{i\chi}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right) \right] \right\} f(\theta,\, p,\, \tau). \end{aligned} \tag{6.22}$$

где $f = f(\theta,\, p,\, \tau)$ есть функция Вигнера, а уравнение записано для притягивающего взаимодействия. Линеаризация вокруг пространственно однородного решения $f_0(p)$ дает известный результат для устойчивости однородных решений, $\chi > \chi_c$. Как и должно быть, классическое уравнение Власова может быть получено путем взятия предела $\chi \to 0$. Стоит отметить, что описание в терминах квантового уравнения Власова возможно позволяет исследовать более тонкие аспекты динамики. Также следует отметить, что мы можем связать GGPE с квантовым уравнением Власова, интегрируя функцию Вигнера по импульсам. Подводя итог, мы можем указать на существование следующих явлений в псевдощелевой фазе SYK+U, используя ее связь с моделью HMF:

Квантовые QSS. Пусть в псевдощелевой фазе заданы начальные условия $\theta_i(t = 0)$, $\dot{\theta}_i(t = 0)$. Мы исследуем вопрос о том, как данные начальные условия эволюционируют согласно динамике в квантовой HMF модели. Такая постановка аналогична изучению "квенчей" в модели БКШ (когда начальное состояние системы приготовлено заранее и рассматривается его эволюция при мгновенном изменении параметров системы). В ходе эволюции происходит интерференция состояний в Фоковском пространстве (см. например работу [138]). При достаточно слабых квантовых эффектах возникают QSS, имеющие частичную синхронизацию куперовских пар. Помимо описанного выше кластерного QSS, более экзотические состояния также могут иметь место. Данное наблюдение ставит вопрос о связи между резкой релаксацией и смешиванием в фазовом пространстве классической системы и аналогичными эффектами в Фоковском пространстве квантовой системы.

Фазовые переходы в зависимости от начальных условий. Типичное пространство параметров классической модели HMF состоит из константы связи g и начальной намагниченностью M_0. Легко показать, что значение константы связи напрямую связано с плотностью внутренней энергии, т.е. энергии на одну частицу E. Например, в случае так называемых начальных условий типа "водяной мешок", где фазы выбираются случайным образом из интервала $[-\theta_0, +\theta_0]$, а импульсы также выбираются случайным образом из интервала $[-p_0, +p_0]$

(т.е. начальным условием для функции распределения является равномерное распределение на области $[-\theta_0, +\theta_0] \times [-p_0, +p_0]$) можно показать, что энергия на частицу и начальная намагниченность определяются следующими выражениями,

$$M_0 = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}, \quad E = \frac{p_0^2}{6} + \frac{1 - M_0^2}{2}.$$

Исследуя стационарные решения соответствующего уравнения Власова, можно увидеть линию в плоскости (E, M_0), которая разделяет решения с нулевой и ненулевой намагниченностью. Этот переход является фазовым переходом первого рода. Сравнивая с SYK+U, мы приходим к выводу, что в пределе $U/J \ll 1$ должен иметь место аналогичный фазовый переход. Однако для того, чтобы идентифицировать такой переход, следует аккуратно исследовать уравнение Вигнера и это является открытой задачей.

Высшие конденсаты. Квантовая HMF обладает еще одним примечательным свойством. Стационарные равновесные решения обобщенного уравнения Гросс-Питаевского для HMF модели были исследованы в работе [137]. В этом исследовании показано, что в квантовой HMF существует башня конденсатов, характеризующихся различными функциями Матье. Эти конденсаты проявляются как солитоны уравнения Матье, где амплитуда взаимодействия вычисляется самосогласованным образом. Это означает, что в модели SYK+U мы имеем башню конденсатов в сверхпроводящей фазе (см. пример диаграммы на Рисунке 6.1).

Наконец, как мы уже упоминали ранее, перемешивание в фазовом пространстве можно исследовать в рамках функции Вигнера, что соответствует полуклассическому пределу. В [108] было отмечено, что возникновение бикластера связано с так называемыми шевронами, которые соответствуют особенностям в (φ, t)-пространстве. Такие особенности рассматриваются теорией катастроф, которая использует ADE-классификацию для паттернов особенностей. На квантовом уровне ADE-классификация все еще имеет место, и каждая катастрофа характеризуется собственной производящей функцией, которая была подробно рассмотрена в [139]. Для квантовой модели HMF мы имеем дело с катастрофой типа сборки, которая генерируется функцией Пирси, что указано в [134].

6.2 Массивы контактов Джозефсона

В предыдущем разделе мы обсуждали возникновение сверхпроводящего состояния в SYK+U модели и видели, что синхронизация фаз куперовских пар играет важную роль в возникновении сверхпроводимости. Данная система весьма экзотична, поэтому интересно задаться вопросом могут ли происходить аналогичные явления в более простых системах. Ответом на этот вопрос служат системы сверхпроводящих зёрен и массивы контактов Джозефсона. Параметром порядка в теории сверхпроводимости является комплексная величина $\Delta \exp(i\varphi)$. Имеется два сценария разрушения сверхпроводимости: исчезновение щели Δ и потеря жесткости фаз φ. Первый сценарий часто называют *фермионным*, а второй — *бозонным*. В обзоре [140] описываются оба сценария. Для реализации второго сценария важно наличие хорошо локализованных пар, что обсуждается в работе [141]. Бозонный сценарий приводит к фазовой динамике, которая с рядом приближений может быть описана моделью Курамото.

6.2.1 Гранулированные сверхпроводники

Простейшим реалистичным примером системы, где важную роль играет жесткость фаз являются так называемые гранулированные сверхпроводники (системы сверхпроводящих зерен). Одно из первых исследований, посвященных этой системе было проведено в работе [142]. Построение эффективного действия для системы приводит к следующему гамильтониану,

$$H_{\text{grains}} = -\sum_{i,j} \frac{B_{ij}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_i^2} + \sum_{i,j} J_{ij} \left[1 - \cos\left(\varphi_i - \varphi_j\right)\right], \tag{6.23}$$

который является ничем иным как обобщением HMF на случай графа, отличного от полного. В уравнении (6.23) величина B_{ij} описывает емкостной (зарядовый) вклад в энергию, а J_{ij} есть Джозефсоновское взаимодействие между зернами. В статье [142] полагается, что в J_{ij} вносят вклад только ближайшие соседи. Среднеполевой анализ данной модели указывает на существование фазового перехода, который происходит, когда емкостной вклад становится больше Джозефсоновского взаимодействия. Данный фазовый переход описывает переход из сверхпроводящего состояния в изолирующее, где сверхпроводимость отсутствует. Другими словами, когда взаимодействие J_{ij} становится больше, чем емкостной вклад, в системе возникает синхронизация фаз φ_i и происходит переход в сверхпроводящее состояние. Более аккуратное описание этого перехода дано в работах [143; 144], где используется функциональный подход для анализа положения точки фазового перехода.

Следующим этапом исследований в этом направлении стал учет диссипативных эффектов с помощью идей модели Кайлдеры-Леггета (т.е. по сути с помощью функционала влияния Фейнмана-Вернона), сделанный в [145]. Учёт диссипативных эффектов в такой форме приводит к нелокальным слагаемым в действии. В евклидовом времени это действие имеет вид

$$\frac{S}{\hbar} = \int_0^{\beta\hbar} \frac{d\tau}{\hbar} \left\{ \frac{C\hbar^2}{8e^2} \sum_i \dot{\varphi}_i^2 - \sum_{i,j} J_{ij} \cos\left(\varphi_j - \varphi_i\right) \right\} + \\ + 2 \sum_{i,j} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^{\beta\hbar} d\tau' G(\tau - \tau') \sin^2 \left(\frac{\varphi_i(\tau) - \varphi_j(\tau)}{2} \frac{\varphi_i(\tau') - \varphi_j(\tau')}{2} \right), \tag{6.24}$$

где $G(\tau - \tau')$ есть нелокальное ядро.

Среди первых работы, посвященных обсуждению диссипативных эффектов мы отметим [146; 147], где обсуждаются эффекты диссипации, связанные с туннелированием квазичастиц, а так же работы [148—150], где дается детальное описание эффектов диссипации. Первые экспериментальные работы, посвященные изучению описанных выше переходов были получены в работах [151—153]. Отметим также работы [154; 155], посвященные изучению двумерных систем сверхпроводящих зерен, помещенных на поверхность металла или графена. Для этих систем показано наличие Джозефсоновской связи, а в работе [156] данная система реализована экспериментально. В данных системах Джозефсоновское взаимодействие зависит от расстояния между зёрнами r_{ij} как $J_{ij} \sim r_{ij}^{-2}$.

Модель Курамото с инерцией и шумом может возникать в таких системах как эффективная теория в квазиклассическом пределе (см. [157], Главы 2 и 4, посвященные обсуждению такого

предела). Уравнения описывают эволюцию фаз $\varphi_i(t)$ сверхпроводящих зёрен и имеют вид

$$E_c\ddot{\varphi}_i + \gamma\dot{\varphi}_i = \sum_{j=1}^{N} J_{ij}\sin(\varphi_j - \varphi_i) + \eta_i(t), \tag{6.25}$$

где E_c и γ есть коэффициенты, связанные с ёмкостью и омической диссипацией в системе соответственно, J_{ij} есть Джозефсоновская связь между зёрнами, $\eta_i(t)$ учитывает все возможные шумы.

6.2.2 Системы контактов Джозефсона

Еще в работах [35; 54] было показано, что модель Курамото на полном графе естественным образом возникает при изучении системы контактов Джозефсона, соединенных последовательно. По существу, системы сверхпроводящих зерен и системы контактов Джозефсона практически идентичны.

Аккуратный учет всех упомянутых выше эффектов приводит к следующему уравнению, которое динамику фазы в контакте Джозефсона (см. [157], Глава 2),

$$\frac{C\hbar}{2e}\ddot{\varphi} + \frac{I_{\text{qp}}\hbar}{2e}\dot{\varphi} + \int dt' Z(t-t')\frac{\hbar\dot{\varphi}(t')}{2e} + I_c\sin\varphi = I_0 + \xi_s(t) + \xi_t(t), \tag{6.26}$$

где $Z(t-t')$ есть импеданс (определенный как Фурье-образ величины $Z(\omega)$); I_{qp} вклад в ток, связанный с туннелированием квазичастиц; I_c есть критический ток; I_0 полный ток, а величины $\xi_s(t)$ и $\xi_t(t)$ учитывают дробовой и туннельный вклады в шум. В соответствии с флуктуационно-диссипативной теоремой, эти шумы имеют нелокальные корреляторы, однако в квазиклассическом пределе, когда $\hbar\omega \ll T$, они устроены как обычные корреляторы белого шума. Если импеданс чисто омический, то и величина $Z(\omega)$ есть просто $Z(\omega) = R$, откуда получается так называемая RSCJ-модель, описывающая динамику фазы как

$$\frac{\hbar C}{2e}\ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR}\dot{\varphi} + I_c\sin\varphi = I_0 + \eta(t), \tag{6.27}$$

где $\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2T\delta(t-t')/R$, T есть температура.

Различные реализации модели Курамото путем соединения Джозефсоновских контактов рассматриваются в работах [158—160]. Типично рассматривают массив контактов, соединенный с RLC-нагрузкой, который описывается системой уравнений

$$\frac{\hbar}{2eR}\dot{\varphi}_i + I_c\sin\varphi_i = I - \frac{dQ}{dt}, \quad L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \frac{\hbar}{2e}\sum_{i=1}^{N}\dot{\varphi}_i, \tag{6.28}$$

где N есть число контактов, каждый контакт описывается в рамках RSJ-модели, а R, L и C есть параметры нагрузки. Посредством перемашстабирования параметров и замен переменных система (6.28) может быть сведена к модели Курамото.

6.3 Конденсаты поляритонов

В этом разделе мы обсуждаем связь конденсатов поляритонов с ансамблями нелинейных осцилляторов и явлением синхронизации в них. Наша цель состоит в том, чтобы продемон-

стрировать как описанные в прошлых разделах результаты для модели Курамото могут быть применены к описанию синхронизации конденсатов.

Неравновесные Бозе-конденсаты могут быть описаны разными способами, начиная от формализма Келдыша-Швингера, заканчивая квантовыми уравнениями Ланжевена. Для описания конденсатов поляритонов удобно использовать обобщенное уравнение Гросса-Питаевского вида (см. [161] в качестве примера)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}) + U|\Psi|^2\right]\Psi + i\left(g - \Gamma|\Psi|^2\right)\Psi, \tag{6.29}$$

где комплексные члены могут быть получены из микроскопической теории, а феноменологически они описывают процессы накачки и диссипации в конденсате. Параметр g характеризуется разностью двух величин, $g = \gamma - \kappa > 0$, где γ есть накачка (связанна с резервуаром горячих экситонов), а κ описывает диссипативные процессы (связанные с фотонами). Значение $g = 0$ соответствует пороговому, ниже которого конденсат поляритонов не наблюдается экспериментально. Коэффициент Γ описывает насыщение конденсата. Накачка g и диссипация Γ могут уравновесить друг друга, тогда возникает стационарное состояние конденсата с плотностью $n_0 = g/\Gamma$. Рассматривают также модификации уравнения (6.29), где к уравнению для волновой функции конденсата добавляется уравнение для динамики резервуара экситонов.

6.3.1 Простейший случай

В качестве простейшего примера мы рассмотрим два поляритонных конденсата, взаимодействующих с друг другом. Положим также $\hbar = 1$. Волновая функция конденсата как целого может быть представлена в виде

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = c_1(t)\psi_1(\boldsymbol{x}) + c_2(t)\psi_2(\boldsymbol{x}), \tag{6.30}$$

где $\psi_{1,2}(\boldsymbol{x})$ есть, а $c_{1,2}(t)$ комплексные величины. Величины $c_{1,2}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} i\dot{c}_1 &= \epsilon_1 c_1 - Jc_2 + U_1|c_1|^2 c_1 + i\left(g_1 - \Gamma_1|c_1|^2\right)c_1, \\ i\dot{c}_2 &= \epsilon_2 c_2 - Jc_1 + U_2|c_2|^2 c_2 + i\left(g_2 - \Gamma_2|c_2|^2\right)c_2. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Здесь обозначено

$$U_{1,2} = U\int dx\,|\psi_{1,2}(x)|^4, \quad g_{1,2} = g\int dx\,|\psi_{1,2}(x)|^2, \quad \Gamma_{1,2} = \Gamma\int dx\,|\psi_{1,2}|^4, \tag{6.32}$$

величина J описывает туннелирование,

$$J = J_{21} = J_{12} = -\int dx\,\psi_1(x)\left\{-\frac{\Delta}{2m} + V(x)\right\}\psi_2(x), \tag{6.33}$$

и мы считаем что это симметричная величина. Величины $\epsilon_{1,2}$ описывают энергию основного состояния каждого из конденсатов. Для простоты мы также положим $U_1 = U_2 = U$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. В отсутствии туннелирования, $J = 0$, каждое из уравнений описывает динамику амплитуды конденсата в ловушке и у уравнений есть решения вида

$$c_{1,2} = \sqrt{n^0_{1,2}}\exp\{-i\left(\omega_{1,2}t + \theta_{1,2}\right)\},$$

где $n^0_{1,2} = g_{1,2}/\Gamma$, $\theta_{1,2} = \text{const}$ (необязательно совпадают). Учтём теперь наличие туннелирования. Подставим в уравнения анзац

$$c_{1,2} = \sqrt{n_{1,2}(t)}\exp\{i\varphi_{1,2}(t)\} \tag{6.34}$$

Тогда мы получим систему уравнений на плотности $n_{1,2}(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= 2\left(g_1 - \Gamma n_1\right)n_1 - 2J\sqrt{n_1 n_2}\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),\\ \dot{n}_2 &= 2\left(g_2 - \Gamma n_2\right)n_2 + 2J\sqrt{n_1 n_2}\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),\end{aligned} \tag{6.35}$$

и систему уравнений на фазы $\varphi_{1,2}(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \epsilon_1 + Un_1 - J\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right),\\ \dot{\varphi}_2 &= \epsilon_2 + Un_2 - J\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).\end{aligned} \tag{6.36}$$

В уравнениях (6.35) первые слагаемые обращаются в ноль, если накачка и диссипация уравновешены. Для дальнейшего обсуждения удобно ввести замены переменных

$$\rho(t) = \frac{n_1(t) + n_2(t)}{2}, \quad q(t) = \frac{n_1(t) - n_2(t)}{2}, \tag{6.37}$$

и также ввести новые константы, $g_0 = (g_1 + g_2)/2$, $\delta g = (g_1 - g_2)/2$. Помимо этого, введем разность фаз $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ и величину $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$. В терминах новых переменных $\rho(t)$ и $q(t)$, уравнения движения принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= 2\rho g_0 + 2q\delta g - 2\Gamma\left(\rho^2 + q^2\right),\\ \dot{q} &= 2\rho\delta g + 2g_0 q - 4\Gamma\rho q - 2J\sqrt{\rho^2 - q^2}\sin\theta,\\ \dot{\theta} &= \Delta\epsilon + 2Uq - \frac{2qJ}{\sqrt{\rho^2 - q^2}}\cos\theta\end{aligned} \tag{6.38}$$

Пусть $\rho \gg q$, также будем считать что накачка слабо отличается, т.е. $\delta g \ll g_0$, и положим $U\rho \gg J$. С учетом сделанных приближений, мы получим следующее уравнение для динамики разности фаз,

$$\ddot{\theta} + 2g_0\dot{\theta} + \frac{4g_0 UJ}{\Gamma}\sin\theta = 2g_0\left(\Delta\epsilon + \frac{2U\delta g}{\Gamma}\right). \tag{6.39}$$

В этом уравнении введем безразмерное время, $\tau = t\Gamma/(2UJ)$, затем рассмотрим сильно диссипативный режим (коэффициент перед второй производной мал, что соответствует режиму $g_0 \gg UJ/\Gamma$). Этот режим описывается уже знакомым нам уравнением Адлера,

$$\dot{\theta} = \lambda - \sin\theta, \quad \lambda = \frac{\Gamma\Delta\epsilon}{2JU} + \frac{\delta g}{J}. \tag{6.40}$$

Все описанные ранее эффекты имеют место: переменная θ испытывает захват фазы, если $\lambda \leq 1$ и эта область параметров есть язык Арнольда.

6.3.2 Баллистическая связь

В предыдущем примере связь двух конденсатов носила туннельный характер, т.е. взаимодействие происходило за счёт перекрытия волновых функций. Существует также баллистический тип связи, который был рассмотрен в работе [162]. Этот тип связи интересен тем, что в отличие от туннельной связи расстояние между конденсатами может быть большим (в эксперименте рассматривается расстояние порядка 100 микрометров). Баллистическая связь приводит к тому, что во взаимодействии конденсатов появляется запаздывание.

В работе [162] авторы также рассматривают систему двух взаимодействующих поляритонных конденсатов. Уравнения для функций $c_{1,2}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} i\dot{c}_1 &= \epsilon_1 c_1 - J c_2(t-\tau) + U_1|c_1|^2 c_1 + i\left(g_1 - \Gamma_1|c_1|^2\right) c_1, \\ i\dot{c}_2 &= \epsilon_2 c_2 - J c_1(t-\tau) + U_2|c_2|^2 c_2 + i\left(g_2 - \Gamma_2|c_2|^2\right) c_2, \end{aligned} \tag{6.41}$$

где τ время запаздывания, зависящее от параметров эксперимента. Выражение для константы связи J может быть представлено в виде

$$J(d) = J_0 \left| H_0^{(1)}(k_0 d) \right|,$$

где J_0 есть константа, определяемая из эксперимента, d есть расстояние между конденсатами (в работе [162] рассматриваются величины $d \sim 20$ мкм), k_0 есть волновой вектор (определяется параметрами эксперимента), а $H_0^{(1)}$ функция Ганкеля. Полученная система описывает два взаимодействующих осциллятора Ландау-Стюарта, только теперь взаимодействие имеет задержку по времени. Такие системы хорошо изучены, например см. работу [163]. Путем фазовой редукции, такую систему можно вновь свести к модификации уравнения Адлера с задержкой по времени, которое обсуждается в работе [164].

6.3.3 Массивы поляритонных конденсатов

Рассмотрим теперь массив из N поляритонных конденсатов. Волновую функцию конденсата как целого можно представить в виде

$$\Psi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\psi_i(\boldsymbol{x}), \tag{6.42}$$

что при подстановка в уравнение Гросса-Питаевского дает

$$i\dot{c}_i = \left\{U|c_j|^2 + i\left(g - \Gamma|c_j|^2\right)\right\} c_j - \sum_{k=1}^{N} J_{ik} c_k.$$

Эту систему удобно записать как

$$\dot{c}_i = g c_i - (iU + \Gamma)\,|c_i|^2 c_i + i\sum_{k=1}^{N} J_{ik} c_k. \tag{6.43}$$

Система (6.43) описывает ансамбль взаимодействующих L-S осцилляторов, при этом все осцилляторы имеют одинаковые параметры и устойчивый предельный цикл возможен, если

$g > 0$ и $\Gamma > 0$. Подставим анзац $c_j(t) = \rho_j(t)\exp\{i\varphi_j(t)\}$, $\rho_j \equiv \sqrt{n_j}$, и выпишем систему уравнений на фазы и плотности,

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i &= g - U\rho_i^2 + J_0\sum_{k=1}^{N} W_{ik}\rho_k\rho_i^{-1}\cos\left(\varphi_k - \varphi_i - \varphi_0\right)\\ \dot{\rho}_i &= (g - \Gamma\rho_i^2)\rho_i - J_0\sum_{k=1}^{N} W_{ik}\sin\left(\varphi_k - \varphi_i - \varphi_0\right),\end{aligned} \tag{6.44}$$

где мы учли выражение для матрицы связей J_{ik}, полученное в работах [165—167] на основе экспериментальных данных и теоретического анализа,

$$J_{ik} = J_0 e^{i\varphi_0}\left|H_1^{(0)}(k_0 d_{ik})\right| = J_0 e^{i\varphi_0} W_{ik}, \tag{6.45}$$

где d_{ik} есть евклидово расстояние между i-ым и k-ым конденсатами; величины J_0, φ_0 и k_0 определяются из эксперимента. Фазовая редукция в системе (6.44) приводит к модели Курамото вида

$$\dot{\varphi}_i = (g - Un_0) + J_0\sum_{k=1}^{N} W_{ik}\cos\left(\varphi_k - \varphi_i - \varphi_0\right), \tag{6.46}$$

где $n_0 = g/\Gamma$. Константа φ_0 может быть изменена экспериментально, поэтому без ограничения общности можно положить $\varphi_0 = -\pi/2$ и получить взаимодействие фаз в виде синуса разности. Если взаимодействие между конденсатами имеет баллистический, а не туннельный характер, то это проявляется в наличии запаздывания в переменной $\varphi_k(t)$, т.е. в уравнении (6.46) следует заменить $\varphi_k(t)$ на $\varphi_k(t-\tau)$, где τ есть время запаздывания.

Экспериментально можно реализовать различные архитектуры связей J_{ij}, а следовательно получать модель на разных графах. Одним из релевантных вопросов в изучении динамических эффектов в поляритонных конденсатов является вопрос о том как быстро происходит синхронизация. Ранее мы уже подчеркивали о том, что на самом деле полная синхронизация происходит асимптотически, поэтому можно либо оценить характерный временной масштаб этого процесса, либо говорить о времени первого достижения параметром порядка фиксированного значения. Для построения предела Власова таких моделей необходим множитель N^{-1} перед матрицей связей (так можно применять идею графонов). По всей видимости, данный множитель также можно реализовать экспериментально, однако можно ввести его искусственно с целью получить оценки на критическую константу связи, необходимую для синхронизации.

В зависимости от параметров эксперимента, описание динамики комплексных величин $c_i(t)$ может быть различным. Детально разные режимы эволюции величин $c_i(t)$ описаны в работе [168]. Модель Курамото может возникать при описании массивов поляритонных конденсатов не только посредством фазовой редукции ансамбля осцилляторов Ландау-Стюарта, но и за счет выбора параметров эксперимента, что соответствует очень большим параметрам g, Γ в уравнении (6.44) (в сравнении со взаимодействием).

Также отметим следующий факт. Уже на примере двух поляритонных конденсатов мы видели, что динамика фаз описывается уравнением второго порядка для разности фаз.

Это говорит о том, что обобщение модели Курамото с инерцией имеет место при описании массивов поляритонных конденсатов. В свою очередь, подходящим выбором параметров эксперимента можно добиться малой диссипации и получить в качестве эффективного описания HMF модель. Это открывает потенциальную экспериментальную возможность для изучения квазистационарных состояний и релаксации к равновесию в системах поляритонных конденсатов.

6.3.4 Синхронизация цепочки поляритонов

Рассмотрим в заключение синхронизацию поляритонных конденсатов в одномерной цепочке, изученную в [169]. Разумным приближением в этой задаче является взаимодействие только ближайших соседей. Считая что фаза $\varphi_i(t)$ слабо меняется при переходе от одного поляритона к другому, мы можем разложить тригонометрические функции по малости их аргументов и перейти к непрерывному пределу. Технически, это сводится к замене $\varphi_i(t) \to \varphi(t,x)$, где $\varphi(t,x)$ есть поле, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega(x) + \frac{UJ}{\Gamma}\Delta\varphi + J\left(\nabla\varphi\right)^2. \tag{6.47}$$

Сделав преобразование Кола-Хопфа (калибровочное преобразование), $\Phi(x,t) = e^{2\Gamma\varphi(x,t)/U}$, мы сведем это уравнение к уравнению Шредингера в евклидовом времени,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{UJ}{\Gamma}\Delta\varphi + \frac{2\Gamma\omega(x)}{U}\Phi. \tag{6.48}$$

Представим функцию $\Phi(x,t)$ как $\Phi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)e^{-\omega_n t}$. Тем самым, мы получаем задачу на собственные значения,

$$\left\{-\frac{UJ}{\Gamma}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\Gamma\omega(x)}{U}\right\}\psi_n(x) = \omega_n\psi_n$$

Таким образом устанавливается связь между явлением синхронизации и локализацией в случайном потенциале. Важно отметить, что аналогичное соответствие описано в работах [170—172], где обсуждается возникновение KPZ-уравнения с вмороженным беспорядком (англ. columnar KPZ) для регулярных решеток нелинейных осцилляторов Ван дер Поля. В контексте этого обсуждения упомянем также работу [173]. В данной работе изучается синхронизация в модели Курамото на регулярных решетках и демонстрируется, что в термодинамическом пределе $N \to \infty$ полная синхронизация не происходит для *любой* размерности решетки при любой фиксированной (но большой) константе связи.

6.4 Промежуточные выводы

Фазовая динамика естественным образом возникает как минимум в двух типах систем, которые могут быть реализованы экспериментально: массивы контактов Джозефсона (или же системы сверхпроводящих зерен) и массивы поляритонных конденсатов.

В системах сверхпроводящих зерен фазовая динамика возникает за счёт потери жесткости фаз. При описании этой фазовой динамики важную роль играют диссипативные эффекты, которые обычно учитываются в рамках подхода Калдейры-Леггета. Потеря синхронизации фаз в таких системах описывает разрушение сверхпроводящего состояния. В массивах Джозефсоновских контактов имеют место аналогичные эффекты. Модель Курамото в таких системах возникает как эффективная теория в квазиклассическом пределе и описывает динамику фаз.

В системах поляритонных конденсатов фазовая динамика возникает из-за наличия хорошо локализованных в пространстве конденсатов, т.е. за счёт разделения волновой функции на "пространственную" и "временную" части. Эта "временная" часть описывается комплексными функциями времени. В простейшем случае динамика сводится к ансамблю взаимодействующих L-S осцилляторов, причем у каждого из осцилляторов имеется стабильный предельный цикл, а выбор подходящих экспериментальных параметров делают сценарий с фазовой редукцией естественным. Конденсаты могут взаимодействовать либо туннельным образом (за счёт перекрытия пространственных частей волновых функций), либо баллистическим образом, что приводит к наличию запаздывания во взаимодействии. В самом общем случае после фазовой редукции возникает модель Курамото с временной задержкой и сдвигом фаз во взаимодействии.

Наконец отметим следующий факт. Как уже неоднократно подчеркивалось ранее, синхронизация по определению подразумевает наличие диссипации и накачки в нелинейной системе, поскольку именно это необходимо для появления устойчиво предельного цикла. Это требование можно технически обойти, оперируя с гамильтоновой системой в терминах переменных действие-угол, где угол начинает играть роль фазы (например, см. работу [174]). Аналог этого обстоятельства используется в [175], где изучается синхронизация в квантовой консервативной системе.

Глава 7

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Для модели Курамото на полном графе с одинаковыми частотами в термодинамическом пределе предложена статистическая интерпретация градиентного потока на диске Пуанкаре. Указано, что данный поток описывает изменение расхождения Кульбака-Лейблера между начальным распределением фаз на окружности и свернутым распределением Коши. Показано, что диск Пуанкаре возникает как статистическое многообразие свернутых распределений Коши.
2. Для модели Курамото на графах, являющихся обобщением графа звезды, изучена синхронизация и показано наличие гистерезиса, связанного с корреляцией между валентностью вершин графа и собственными частотами.
3. Для модели Курамото на графе звезде с шумом показано как шум влияет на гистерезис, фазовая диаграмма исследована аналитически и численно. Продемонстрировано, что шум может подавляет гистерезис, показано наличие трикритической точки в такой модели.
4. Для модели с инерцией и шумом на произвольном взвешенном неориентированном графе показано, что метод Пенроуза сохраняет свою применимость. Получено явное аналитическое выражение для критической константы связи в случае полного графа, изучено влияние шума на образование паттернов в модели на полном графе.
5. Для SYK модели с дополнительным Хаббардовским притяжением показано, что в псевдощелевой фазе эффективная теория совпадает с гамильтоновой моделью среднего поля (или бездиссипативной моделью Курамото с инерцией), продемонстрировано существование квазистационарных состояний с частичной синхронизации в квазиклассическом пределе.

Ниже мы обсуждаем как некоторые из полученных результатов могут расширены, формулируя открытые вопросы и указывая явно дальнейшее направление исследований. Помимо этого, мы обсуждаем возможную пратическую значимость полученных результатов для построения нейроморфных архитектур.

7.1 Низкоразмерная динамика модели Курамото

В данном исследовании мы дали статистическую интерпретацию низкоразмерной динамике в модели Курамото, указав что многообразие Отт-Антонсена является статистическим многообразием, а градиентный поток является потоком расхождения Кульбака-Лейблера. Эта статистическая интерпретация может быть полезна для задач физически-информированного машинного обучения, когда для построения нейросети явно учитываются некоторые законы сохранения и ограничения на динамику (см. работы [176; 177], где обсуждается данный подход).

Помимо этого, статистическая интерпретация низкоразмерной динамики может быть связана с механизмом внимания (англ. self-attention) в архитектуре трансформеров. В работах [178; 179] объясняется как механизм внимания связан с динамикой многочастичной динамической системы на многомерной сфере, а также подчеркивается, что модель Курамото является простейшим примером такой системы.

Полученные в этом исследовании результаты для низкоразмерной динамики могут быть расширены посредством рассмотрения её геометрических аспектов. Мы уже отмечали, что в описании динамики естественным образом возникают функции Буземана, которые могут быть представления как регуляризации геодезических на диске Пуанкаре. Развитие в этом направлении должно помочь ответить на вопрос существует ли в модели Курамото соответствие граница/объем. Помимо этого, важным направлением исследований представляется поиски связи с конформной теорией поля, основанные на связи динамики Курамото с группой Вирасоро. Геометрические аспекты и потенциальная связь с конформной теорией поля будет изучена в будущем.

7.2 Обобщение модели Курамото с шумом

В этой работе мы рассмотрели вопрос о возникновении синхронизованного состояния в модели при наличии шума и проанализировали как шум может влиять на гистерезис в модели на графе-звезде и на гистерезис в модели на полном графе при наличии инерции. Существует еще одно явление, которое имеет место в модели Курамото с шумом, заданной на некотором сложном графе (т.е. графе с нетривиальной структурой).

Поскольку динамика модели является градиентной, т.е. может быть представлена в виде

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial V(\varphi_i)}{\partial \varphi_i} + \eta_i(t),$$

где $\eta_i(t)$ есть белый шум, а потенциал $V(\varphi_i)$ содержит информацию о структуре графа и о распределении собственных частот, то сложная структура графа приводит к тому, что форма потенциала становится нетривиальной. При наличии нетривиальной формы потенциала, естественным образом возникает вопрос о возможности появления метастабильных состояний. Если потенциал обладает большим количеством локальных минимумов, то в ходе временной эволюции эти локальные минимумы будут препятствовать релаксации к глобальному

минимуму. В случае регулярных решеток вопрос уже был частично изучен в работе [180]. Также наличие шума автоматически приводит к вопросу об исследовании больших уклонений в системе. Для модели Курамото этот вопрос частично обсуждался в работах [181; 182]. Вопросы о возникновении метастабильности и больших уклонений являются направлением будущих исследований.

7.3 Термодинамический предел на графах

Результаты, полученные для модели Курамото на произвольном взвешенном неориентированном графе, были основаны на предположении о том, что данный граф является плотным. Это предположение было необходимо, чтобы использовать предел графа в виде графона. Для последовательностей разреженных графов графоны плохо определены, требуется использовать сходимость Бенжамини-Шрама и строить термодинамический предел более аккуратно. В случае графов промежуточной плотности ни графоны, ни сходимость Бенжамини-Шрама не могут быть использованы в полной мере. Построение термодинамических пределов в таком случае требует использования так называемых P-операторов, введенных в работе [183].

Для модели Курамото мы неоднократно подчеркивали важность архитектуры графа, на котором задана модель и указывали, что даже знание группы автоморфизмов данного графа может помочь в изучении возможных паттернов (кластерная синхронизация, химеры и т.д.). Таким образом, с необходимостью возникает вопрос о том как симметрии графа связаны с симметриями графона. Данный аспект исследован в работе [184], где подчеркивается что симметрии графона содержат автоморфизмы графа, однако имеются также дополнительные (побочные) симметрии. Изучение связи паттернов в модели Курамото с симметриями графона является предметом дальнейшего исследования.

Вопрос о построении термодинамического предела модели Курамото и её обобщений на разреженных графах и графах промежуточной плотности является открытым и привлекает много внимания, например в работе [185] в качестве предельного объекта были использованы графопы. Данный вопрос будет исследован в рамках следующего проекта.

7.4 Связь локализации и синхронизации

Существует вероятность того, что локализация связана с синхронизацией даже в отсутствии регулярных решеток, которые важны для построения непрерывного предела, т.е. для возникновения операторов Лапласа и оператора градиента. В контексте теории гамильтоновых систем языки Арнольда известны как области резонансного захвата. Существует преобразование, переводящее одномерную гамильтонову систему с (квази)периодическим потенциалом в динамическую систему на торе, которое называется *преобразованием Пруфера* [186] и является ничем иным как проективизацией системы уравнений на плоскости на единичную окружность.

Для гамильтоновых систем с (квази)периодическим потенциалом данное преобразование устанавливает соответствие между зонами фазового захвата (языками Арнольда) и областями стабильности и нестабильности решения уравнения Хилла (т.е. уравнения второго порядка с (квази)периодическими коэффициентами), см. [187—190]. В свою очередь уравнение Хилла является ничем иным как уравнением Шрёдингера, а в случае периодического потенциала спектр этого уравнения Шрёдингера образует зонную структуру (англ. band-gap structure). Проделывая обратное преобразование, динамическую систему на торе, которая описывает синхронизацию и имеет беспорядок в виде распределения частот, можно отобразить в уравнение Хилла с беспорядком в потенциале. Данная связь требует отдельного аккуратного обсуждения, но заслуживает упоминания в силу своей исключительной важности.

7.5 Нейроморфные архитектуры

Феномен синхронизации в биологических нейронных сетях изучен как экспериментально, так и теоретических. Несмотря на то, что фундаментального и глубокого понимания значимости синхронизации нейронов нет, эмпирические данные указывают, что именно синхронизация нейронов (или как минимум групп нейронов) ответственна за появление ритмов в головном мозге человека и возможно связана с высшей нервной деятельностью. Одной из интерпретаций явления синхронизации в биологических нейронных сетях являются так называемые *осцилляторные нейронные сети*. Фундаментальной особенностью биологических нейронных сетей является тот факт, что информация хранится и обрабатывается в одном и том же месте в пространстве, в то время как в традиционной (фон Неймановской) архитектуре информация хранится и обрабатываются в пространственно разделенных областях. Это разделение влечет за собой дополнительные затраты энергии на перенос информации из места хранения в место обработки.

Нейроморфные архитектуры призваны устранить этот недостаток. Любая неройморфная архитектура состоит из двух ключевых компонентов: имитации нейрона и синапса (связи нейронов). Техническая реализация этих компонент может быть различной, но в основе лежит эмпирический набор свойств: наличие нелинейностей, достаточное большое число изменяемых параметров, достаточная воспроизводимость отклика на разные классы входных сигналов. Наиболее значимые на сегодняшний день принципы создания нейроморфной архитектуры основаны на спинтронике, чему посвящены обзоры [191—194]. В работе [195] реализованы нейроморфные вычисления на основе ансамблей осцилляторов со спиновым кручением, причем синхронизация осцилляторов играет ключевую роль. Это объясняется тем фактом, что динамика в осцилляторе со спиновым кручением может быть описана в терминах L-S осциллятора, см. статью [196].

Еще одной нетрадиционной вычислительной архитектурой являются резервуарные вычисления. В их основе лежит использование степеней свободы нелинейной динамической системы для обработки входных сигналов. За счет существенной нелинейности входной сигнал может быть обработан таким образом, чтобы получить желаемых выходной сигнал, т.е. обучить

систему. Техническая реализация может быть различной, например в [197] резервуар представляет собой просто наночастицы, помещенные на подложку. При протекании тока через устройство возникают случайными образом контакты между наночастицами и нелинейная динамика тока. Описанная система может быть использована для резервуарных вычислений вблизи порога перколяции. Абсолютно аналогичная идея может быть применена для модели Курамото. В работе [198] дается математически строгое обоснование возможности применения модели Курамото для резервуарных вычислений. Аналогом порога перколяции в этой системе является переход в синхронизованное состояние, т.е. модель Курамото работает как резервуар вблизи критической константы связи.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Александру Сергеевичу Горскому за поддержку на всем протяжении магистратуры и аспирантуры, за возможность заниматься наукой с уверенностью в правильности сделанного выбора. Особую благодарность автор выражает своему учителю физики Валерию Викторовичу Горбенко, который положил начало длинному пути изучения физики и математики, начавшемуся за школьной партой больше десяти лет назад. Автор бесконечно благодарен своим родителям, маме и бабушке, за помощь, понимание и поддержку на всем жизненном пути.

Автор благодарен Эмилю Тофик-оглы Ахмедову и Валентину Ивановичу Захарову за возможность сделать первые шаги в теоретической физике, за яркие научные дискуссии и первые в жизни автора научные мероприятия. Автор благодарен также Тагиру Абдулхамидовичу Аушеву и фонду “Идея”, без участия которых данная работа не могла состояться.

Автор выражает благодарность своим друзьям и коллегам, Ефимову Евгению, Игорю Цюцюрупе, Борису Еремину, Даниилу Менскому, Елизавете Матайбаевой, Анемподистову Прокопию, Губареву Кириллу, Трунинym Дмитрию и Елизавете, Базарову Кириллу, Казарновскому Кириллу, Астрахенцеву Льву, Дьяконову Дмитрию, Тютякиной Анастасии, Шарипову Рустаму и многим другим, с кем бывал на семинарах, с кем учился бок о бок и с кем бывал на конференциях. Без их участия жизнь и наука не были бы столь насыщенными и яркими.

Приложение А

Решение уравнения Адлера

Рассмотрим уравнение Адлера,

$$\dot{\varphi} = \Delta\omega - K\sin\varphi. \tag{A.1}$$

Пусть $|\Delta\omega| > K > 0$. Уравнение (A.1) можно представить как

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\omega - K\sin\varphi} = \int_0^t dt, \tag{A.2}$$

где $\varphi_0 = \varphi(0)$ есть начальное условие. Удобно ввести переменную $\alpha = \varphi - \pi/2$, тогда

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\Delta\omega - K\cos\alpha} = \int_0^t dt. \tag{A.3}$$

Проинтегрируем обе части уравнения,

$$\frac{1}{\Omega}\arctan\left(\frac{1}{\nu}\tan\frac{\alpha}{2}\right) = t - C, \tag{A.4}$$

где C есть константа интегрирования и мы обозначили

$$\Omega = \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{(\Delta\omega)^2 - K^2}}{\Delta\omega + K}. \tag{A.5}$$

Получаем выражение для константы C в виде

$$C = -\frac{1}{\Omega}\arctan\left[\frac{1}{\nu}\tan\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\right] \to \tan\frac{\alpha_0}{2} = -\nu\tan\left(\Omega C\right) \tag{A.6}$$

Представим решение (A.4) в следующем виде,

$$\tan\frac{\alpha(t)}{2} = -\nu\tan\left[\Omega(C-t)\right] = \nu\frac{\tan(\Omega t) - \tan(\Omega C)}{1 + \tan(\Omega t)\tan(\Omega C)}, \tag{A.7}$$

затем подставим в это выражение явный вид константы C,

$$\alpha(t) = 2\arctan\frac{\nu^2\tan(\Omega t) + \nu\tan(\alpha_0/2)}{\nu - \tan(\Omega t)\tan(\alpha_0/2)},$$

откуда возвращаясь к переменной $\varphi(t) = \alpha(t) + \pi/2$ получим явное решение уравнения Адлера в режиме проскальзывания фазы,

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{\nu^2\tan(\Omega t) + \nu\tan\left(\dfrac{\varphi_0}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\nu - \tan(\Omega t)\tan\left(\dfrac{\varphi_0}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}. \tag{A.8}$$

Рассмотрим теперь случай захвата фазы, $K > |\Delta\omega| > 0$. Тогда решение для переменной $\alpha(t)$ имеет вид

$$-\frac{1}{\Omega}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\nu}\tan\frac{\alpha}{2}\right) = t - C, \tag{A.9}$$

где обозначено

$$\Omega = \frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{K^2 - (\Delta\omega)^2}}{K + \Delta\omega}. \tag{A.10}$$

Константа интегрирования C определяется из условия

$$\frac{1}{\Omega}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\nu}\tan\frac{\alpha}{2}\right) = C \to \nu\tanh(\Omega C) = \tan\frac{\alpha_0}{2}. \tag{A.11}$$

Запишем решение в виде

$$\tan\frac{\alpha(t)}{2} = \nu\tanh\left(C\Omega - \Omega t\right) = \nu\frac{\tanh(C\Omega) - \tanh(\Omega t)}{1 - \tanh(C\Omega)\tanh(\Omega t)}, \tag{A.12}$$

куда теперь подставим выражение для C,

$$\alpha(t) = 2\arctan\frac{\nu\tan(\alpha_0/2) - \nu^2\tanh(\Omega t)}{\nu - \tan(\alpha_0/2)\tanh(\Omega t)}, \tag{A.13}$$

откуда возвращаясь к переменной $\varphi(t) = \alpha(t) + \pi/2$ получаем

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan\frac{\nu\tan\left(\dfrac{\varphi_0}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - \nu^2\tanh(\Omega t)}{\nu - \tan\left(\dfrac{\varphi_0}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tanh(\Omega t)}. \tag{A.14}$$

Приложение B

Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка

Рассмотрим уравнение Фоккера-Планка вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{(\omega + 2K|r(t)|\sin(\arg r(t) - \varphi))\,\rho(\varphi, \omega, t)\right\} + D\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}. \tag{B.1}$$

Стационарные решения могут быть представлены в виде

$$\rho(\varphi, \omega) = C_1 e^{f(\varphi)} \int_{C_2}^{\varphi} d\theta\, e^{-f(\theta)}, \quad f(\varphi) = \frac{\omega\varphi + 2K|r|\cos(\arg r - \varphi)}{D}. \tag{B.2}$$

Обозначим $A = \omega/D$, $B = 2K|r|/D$ и без ограничения общности положим $\arg r = 0$. Интегрируя решение в пределах от 0 до 2π, мы получим величину $C_1 = \mathcal{N}^{-1}$.

Условие нормировки функции распределения $\rho(\varphi, \omega)$ позволяет выписать следующее выражение для $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{N} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{A\varphi + B\cos\varphi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\psi\, e^{-A\psi - B\cos\psi}. \tag{B.3}$$

Введем новую переменную $\chi = \psi - \varphi$, что позволит переписать выражение в более удобной форме,

$$\mathcal{N} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\chi\, d\varphi\, \exp\left\{-A\chi + 2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\varphi + \frac{\chi}{2}\right)\right\}. \tag{B.4}$$

В этом выражении интегрирование может быть выполнено явно. Выполним интегрирование по φ, что дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \exp\left\{2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\varphi + \frac{\chi}{2}\right)\right\} = 2\pi I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right). \tag{B.5}$$

Теперь рассмотрим интеграл по χ, который можно представить как

$$\int_0^{2\pi} d\chi\, e^{-A\chi} I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right) = \int_0^{\pi} d\chi\, e^{-A\chi} I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right) + \int_{\pi}^{2\pi} d\chi\, e^{-A\chi} I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right). \tag{B.6}$$

Для вычисления первого интеграла введем новую переменную $y = (\pi - \chi)/2$,

$$\int_0^{\pi} d\chi\, e^{-A\chi} I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right) = -\int_{\pi/2}^{0} dy\, e^{-\pi A} e^{2Ay} I_0\left(2B\cos y\right), \tag{B.7}$$

а для вычисления второго интеграла введем переменную $y = (\chi - \pi)/2$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} d\chi\, e^{-A\chi} I_0\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} dy\, e^{-\pi A} e^{-2Ay} I_0\left(2B\cos y\right). \tag{B.8}$$

Комбинируя эти два выражения, мы получаем следующее выражение для константы нормировки

$$\mathcal{N} = 8\pi e^{-\pi A} \int_0^{\pi/2} dy\, \cosh(2Ay) I_0\left(2B\cos y\right). \tag{B.9}$$

Воспользовавшись соотношением

$$\cosh(2Ay) = \cos(2iAy), \tag{B.10}$$

мы получим известный интеграл (см. 6.681.3 в книге [199]),

$$\int_0^{\pi/2} dy\, \cos(2iAy) I_0(2B\cos y) = \frac{\pi}{2} I_{iA}(B) I_{-iA}(B) \tag{B.11}$$

и наконец выпишем явное выражение для $\mathcal{N}$,

$$\boxed{\mathcal{N} = 4\pi^2 e^{-\pi A} I_{-iA}(B) I_{iA}(B).} \tag{B.12}$$

Вычислим теперь интегралы, которые возникают при вычислении параметра порядка. Рассмотрим следующий интеграл,

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos\varphi\, e^{A\varphi + B\cos\varphi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\psi\, e^{-A\psi - B\cos\psi}. \tag{B.13}$$

Вновь сделаем замену переменной, обозначив $\chi = \psi - \varphi$. Тогда интеграл примет вид

$$\mathcal{I} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, d\chi\, \cos\varphi\, e^{-A\chi} \exp\left\{2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}+\varphi\right)\right\}. \tag{B.14}$$

В этом выражении проинтегрируем по φ,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos\varphi \exp\left\{2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}+\varphi\right)\right\} = 2\pi\sin\frac{\chi}{2} I_1\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right). \tag{B.15}$$

Остается выполнить интегрирование по χ, используя метод, примененный для вычисления константы $\mathcal{N}$ с некоторыми отличиями. Комбинируя два интеграла, мы получаем

$$\cos y\left(e^{2Ay} + e^{-2Ay}\right) = 2\cos y\cosh(2Ay) = \cos[(2Ai+1)y] + \cos[(2Ai-1)y]. \tag{B.16}$$

Значит, нам нужно вычислить два вклада,

$$J_{\pm} = 4\pi e^{-\pi A} \int_0^{\pi/2} dy\, \cos[(2Ai \pm 1)y] I_1(2B\cos y). \tag{B.17}$$

Вновь используя интеграл 6.681.3 из книги [199], мы получаем следующие выражения для этих вкладов,

$$\begin{aligned} J_+ &= 2\pi^2 e^{-\pi A} I_{-iA}(B) I_{iA+1}(B), \\ J_- &= 2\pi^2 e^{-\pi A} I_{1-iA}(B) I_{iA}(B). \end{aligned} \tag{B.18}$$

Запишем итоговый ответ,

$$\boxed{\mathcal{I} = J_+ + J_- = 2\pi^2 e^{-\pi A}\left(I_{-iA}(B)I_{iA+1}(B) + I_{1-iA}(B)I_{iA}(B)\right)} \tag{B.19}$$

Остается рассмотреть еще один интеграл, который имеет вид

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\varphi\, e^{A\varphi + B\cos\varphi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} d\psi\, e^{-A\psi - B\cos\psi}. \tag{B.20}$$

Снова сделаем замену $\chi = \psi - \varphi$,

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, d\chi \sin\varphi e^{-A\chi} \exp\left\{2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}+\varphi\right)\right\}. \tag{B.21}$$

Теперь проинтегрируем по φ, откуда получим

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\varphi \exp\left\{2B\sin\frac{\chi}{2}\sin\left(\frac{\chi}{2}+\varphi\right)\right\} = 2\pi\cos\frac{\chi}{2} I_1\left(2B\sin\frac{\chi}{2}\right). \tag{B.22}$$

Интегрирование по переменной χ выполняется аналогично предыдущему случаю, только теперь надо воспользоваться соотношением

$$\sin y\left(e^{2Ay} - e^{-2Ay}\right) = 2\sin y \sinh(2Ay) = i\cos[(2iA+1)y] - i\cos[(2iA-1)y]. \tag{B.23}$$

Снова возникает два вклада, J_+ и J_-. Окончательное выражение для интеграла имеет вид

$$\boxed{\mathcal{J} = 2i\pi^2 e^{-\pi A}\left(I_{-iA}(B)I_{iA+1}(B) - I_{1-iA}(B)I_{iA}(B)\right)} \tag{B.24}$$

Приложение C

Вычисление резольвенты

Для оператора $\boldsymbol{L}_j$, мы имеем следующую спектральную задачу,

$$(\lambda - \boldsymbol{L}_j)\, u = u. \tag{C.1}$$

Применим преобразование Фурье $\mathcal{F}[\bullet]$ к обеим частями уравнения,

$$\left(\lambda - i\zeta - ij\omega + Dj^2\right) \mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[v],\ F[u](\zeta,\omega,x) = \int d\xi\, d\eta\, e^{-i\xi\zeta - i\eta\omega} u(\xi,\eta,x). \tag{C.2}$$

Откуда получаем

$$u = (\lambda - \boldsymbol{L}_j)^{-1}\, u = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[u].$$

Вычислим интеграл в правой части уравнения явно,

$$\begin{aligned}
\int d\zeta\, d\omega\, \frac{e^{+i\xi\zeta + i\omega\eta}}{\lambda - i\zeta - ij\omega + Dj^2} \int d\xi'\, d\eta'\, e^{-i\zeta\xi' - i\eta'\omega} u(\xi',\eta',x) = \\
= \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t - Dj^2 t} \int d\zeta\, d\omega\, e^{+i\xi\zeta + i\omega\eta} e^{+i\zeta t + ij\omega t} \int d\xi'\, d\eta'\, e^{-i\zeta\xi' - i\eta'\omega} u(\xi',\eta',x) = \\
= \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t - Dj^2 t} \int d\xi' \int d\eta' \left\{ \int d\omega\, e^{i\omega(jt + \eta - \eta')} \right\} \left\{ \int d\zeta\, e^{i\zeta(\xi + t - \xi')} \right\} u(\xi',\eta',x) = \\
= \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t - Dj^2 t} u(\xi + t, \eta + jt).
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Это значит, что резольвента оператора $\boldsymbol{L}_j$ определяется следующим выражением

$$(\lambda - \boldsymbol{L}_j)^{-1}\, u = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t - Dj^2 t} u(\xi + t, \eta + jt), & \operatorname{Re}\lambda > 0, \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^0 dt\, e^{-\lambda t - Dj^2 t} u(\xi + t, \eta + jt), & \operatorname{Re}\lambda < 0. \end{cases} \tag{C.4}$$

Вычислив резольвенту, применим теперь этот результат для анализа спектральной задачи. Напомним, что наша спектральная задача имеет следующий вид,

$$(\lambda - \boldsymbol{L}_1)\, u = K\boldsymbol{B}u \to u = K\,(\lambda - \boldsymbol{L})^{-1} \left(1 - e^{-\xi}\right) \hat{g}(\eta) \boldsymbol{W}[u(0,0,\bullet)]. \tag{C.5}$$

Теперь подставим сюда выражение для найденной резольвенты,

$$
\begin{aligned}
(\lambda - \boldsymbol{L}_1)^{-1}\left(1-e^{-\xi}\right)\hat{g}(\eta) &= \int d\zeta\, d\omega \frac{e^{i\xi\zeta+i\eta\omega}}{\lambda - i(\zeta+\omega)+D}\mathcal{F}\left[\left(1-e^{-\xi}\right)\hat{g}(\eta)\right] = \\
&= \int d\zeta\, d\omega\, \frac{e^{i\zeta\xi+i\eta\omega}}{\lambda - i(\zeta+\omega)+D}\int d\xi' d\eta' e^{-i\eta'\omega - i\xi'\zeta}\left(1-e^{-\xi'}\right)\int d\omega' e^{+i\eta'\omega'} g(\omega') = \\
&= \int \frac{d\zeta\, d\omega\, e^{i\zeta\xi+i\eta\omega}}{\lambda - i(\zeta+\omega)+D}\int d\omega' g(\omega')\int d\xi'\left\{\int d\eta'\, e^{i\eta'(\omega'-\omega)}\right\} e^{-i\xi'\zeta}\left(1-e^{-\xi'}\right) = \\
&= \int d\omega\, g(\omega) e^{i\eta\omega}\left(\frac{1}{\lambda - i\omega + D} - \frac{e^{-\xi}}{\lambda + 1 - i\omega + D}\right). \quad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

Список литературы

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. — Cambridge University Press, 2001.
2. Manrubia S.C., Mikhailov A.S. [и др.]. Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems. — World Scientific, 2004.
3. Balanov A., Janson N., Postnov D., Sosnovtseva O. From simple to complex. — Springer, 2009.
4. Кузнецов А., Емельянова Ю., Сатаев И., Тюрюкина Л. Синхронизация в задачах. — Издательский центр «Наука», 2010.
5. Arnold V. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. T. 250. — Springer Science & Business Media, 2012.
6. Arnol'd V.I. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya. — 1961. — T. 25, № 1. — C. 21—86.
7. Buchstaber V., Karpov O., Tertychniy S. Rotation number quantization effect // Theoretical and Mathematical Physics. — 2010. — T. 162. — C. 211—221.
8. Nakao H. Phase reduction approach to synchronisation of nonlinear oscillators // Contemporary Physics. — 2016. — T. 57, № 2. — C. 188—214.
9. Wilson D., Ermentrout B. Greater accuracy and broadened applicability of phase reduction using isostable coordinates // Journal of mathematical biology. — 2018. — T. 76. — C. 37—66.
10. Daviet R., Zelle C.P., Asadollahi A., Diehl S. Kardar-Parisi-Zhang scaling in time-crystalline matter. — 2024. — arXiv: 2412.09677 [cond-mat.stat-mech].
11. Lee T.E., Sadeghpour H. Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // Physical review letters. — 2013. — T. 111, № 23. — C. 234101.
12. Walter S., Nunnenkamp A., Bruder C. Quantum synchronization of a driven self-sustained oscillator // Physical review letters. — 2014. — T. 112, № 9. — C. 094102.
13. Lee T.E., Chan C.-K., Wang S. Entanglement tongue and quantum synchronization of disordered oscillators // Physical Review E. — 2014. — T. 89, № 2. — C. 022913.
14. Ben Arosh L., Cross M., Lifshitz R. Quantum limit cycles and the Rayleigh and van der Pol oscillators // Physical Review Research. — 2021. — T. 3, № 1. — C. 013130.

15. Adler R. A study of locking phenomena in oscillators // Proceedings of the IRE. — 1946. — T. 34, № 6. — C. 351—357.

16. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // International symposium on mathematical problems in theoretical physics. — Springer. 1975. — C. 420—422.

17. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1984.

18. Chiba H. A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2015. — T. 35, № 3. — C. 762—834.

19. Sakaguchi H., Kuramoto Y. A soluble active rotater model showing phase transitions via mutual entertainment // Progress of Theoretical Physics. — 1986. — T. 76, № 3. — C. 576—581.

20. Strogatz S.H., Mirollo R.E. Stability of incoherence in a population of coupled oscillators // Journal of Statistical Physics. — 1991. — T. 63, № 3. — C. 613—635.

21. Kuramoto Y., Nishikawa I. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. Case of a phase transition in oscillator communities // Journal of Statistical Physics. — 1987. — T. 49. — C. 569—605.

22. Strogatz S.H., Mirollo R.E., Matthews P.C. Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized Landau damping // Physical review letters. — 1992. — T. 68, № 18. — C. 2730.

23. Strogatz S.H. Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. — CRC press, 2018.

24. Levi M., Hoppensteadt F.C., Miranker W.L. Dynamics of the Josephson junction // Quarterly of Applied Mathematics. — 1978. — T. 36, № 2. — C. 167—198.

25. Cestnik R., Martens E.A. Integrability of a globally coupled complex Riccati array: Quadratic integrate-and-fire neurons, phase oscillators, and all in between // Physical Review Letters. — 2024. — T. 132, № 5. — C. 057201.

26. Lohe M. Higher-dimensional generalizations of the Watanabe–Strogatz transform for vector models of synchronization // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2018. — T. 51, № 22. — C. 225101.

27. Lohe M. Non-Abelian Kuramoto models and synchronization // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — T. 42, № 39. — C. 395101.

28. Laing C.R. The dynamics of networks of identical theta neurons // The Journal of Mathematical Neuroscience. — 2018. — T. 8, № 1. — C. 4.

29. Montbrió E., Pazó D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons // Physical Review X. — 2015. — T. 5, № 2. — C. 021028.

30. Ott E., Antonsen T.M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2008. — T. 18, № 3. — C. 037113.

31. Engelbrecht J.R., Mirollo R. Is the Ott-Antonsen manifold attracting? // Physical Review Research. — 2020. — T. 2, № 2. — C. 023057.

32. McCullagh P. Conditional inference and Cauchy models // Biometrika. — 1992. — T. 79, № 2. — C. 247—259.

33. Sinha A., Ghosh A. Statistics of synchronization times in Kuramoto oscillators // Europhysics Letters. — 2023. — T. 141, № 5. — C. 53001.

34. Marvel S.A., Mirollo R.E., Strogatz S.H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2009. — T. 19, № 4. — C. 043104.

35. Watanabe S., Strogatz S.H. Integrability of a globally coupled oscillator array // Physical review letters. — 1993. — T. 70, № 16. — C. 2391.

36. Pikovsky A., Rosenblum M. Dynamics of heterogeneous oscillator ensembles in terms of collective variables // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2011. — T. 240, № 9/10. — C. 872—881.

37. Chen B., Engelbrecht J.R., Mirollo R. Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — T. 50, № 35. — C. 355101.

38. Amari S.-I. Information geometry and its applications. T. 194. — Springer, 2016.

39. Nakamura Y. Completely integrable gradient systems on the manifolds of Gaussian and multinomial distributions // Japan journal of industrial and applied mathematics. — 1993. — T. 10, № 2. — C. 179—189.

40. Fujiwara A., Amari S.-i. Gradient systems in view of information geometry // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1995. — T. 80, № 3. — C. 317—327.

41. Umarov S., Tsallis C., Steinberg S. On a q-central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics // Milan journal of mathematics. — 2008. — T. 76, № 1. — C. 307—328.

42. Tirnakli U., Beck C., Tsallis C. Central limit behavior of deterministic dynamical systems // Physical Review E. — 2007. — T. 75, № 4. — C. 040106.

43. Tsallis C., Tirnakli U. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics– Some central concepts and recent applications // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing. 2010.

44. Nielsen F. On Voronoi diagrams on the information-geometric Cauchy manifolds // Entropy. — 2020. — T. 22, № 7. — C. 713.

45. Chen Z., Zou Y., Guan S., Liu Z., Kurths J. Fully solvable lower dimensional dynamics of cartesian product of Kuramoto models // New Journal of Physics. — 2019. — T. 21, № 12. — C. 123019.

46. Wang C., Zou Y., Guan S., Kurths J. Cartesian product of synchronization transitions and hysteresis // New Journal of Physics. — 2017. — Т. 19, № 12. — С. 123036.

47. Jaćimović V., Crnkić A. Collective motions of globally coupled oscillators and some probability distributions on circle // Physics Letters A. — 2017. — Т. 381, № 24. — С. 1989—1994.

48. Vlasov V., Rosenblum M., Pikovsky A. Dynamics of weakly inhomogeneous oscillator populations: perturbation theory on top of Watanabe–Strogatz integrability // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2016. — Т. 49, № 31. — 31LT02.

49. Vlasov V., Zou Y., Pereira T. Explosive synchronization is discontinuous // Physical Review E. — 2015. — Т. 92, № 1. — С. 012904.

50. Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J. Basin of attraction determines hysteresis in explosive synchronization // Physical review letters. — 2014. — Т. 112, № 11. — С. 114102.

51. Xu C., Gao J., Boccaletti S., Zheng Z., Guan S. Synchronization in starlike networks of phase oscillators // Physical Review E. — 2019. — Т. 100, № 1. — С. 012212.

52. D'Souza R.M., Gómez-Gardeñes J., Nagler J., Arenas A. Explosive phenomena in complex networks // Advances in Physics. — 2019. — Т. 68, № 3. — С. 123—223.

53. Ochab J., Góra P. Synchronization of coupled oscillators in a local one-dimensional Kuramoto model // arXiv preprint arXiv:0909.0043. — 2009. — arXiv: 0909.0043 [nlin.AO].

54. Watanabe S., Strogatz S.H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1994. — Т. 74, № 3/4. — С. 197—253.

55. Calamai M., Politi A., Torcini A. Stability of splay states in globally coupled rotators // Physical Review E. — 2009. — Т. 80, № 3. — С. 036209.

56. Radicchi F., Meyer-Ortmanns H. Reentrant synchronization and pattern formation in pacemaker-entrained Kuramoto oscillators // Physical Review E. — 2006. — Т. 74, № 2. — С. 026203.

57. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 380—385.

58. Abrams D.M., Strogatz S.H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2006. — Т. 16, № 01. — С. 21—37.

59. Abrams D.M., Mirollo R., Strogatz S.H., Wiley D.A. Solvable model for chimera states of coupled oscillators // Physical review letters. — 2008. — Т. 101, № 8. — С. 084103.

60. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // Physical review letters. — 2008. — Т. 101, № 26. — С. 264103.

61. Laing C.R. Chimera states in heterogeneous networks // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2009. — Т. 19, № 1. — С. 013113.

62. Medvedev G.S., Mizuhara M.S. Chimeras unfolded // Journal of Statistical Physics. — 2022. — Т. 186, № 3. — С. 46.

63. Cho Y.S., Nishikawa T., Motter A.E. Stable chimeras and independently synchronizable clusters // Physical review letters. — 2017. — T. 119, № 8. — C. 084101.

64. Gong C.C., Toenjes R., Pikovsky A. Coupled Möbius maps as a tool to model Kuramoto phase synchronization // Physical Review E. — 2020. — T. 102, № 2. — C. 022206.

65. Sakaguchi H. Cooperative phenomena in coupled oscillator systems under external fields // Progress of theoretical physics. — 1988. — T. 79, № 1. — C. 39—46.

66. Tönjes R. Synchronization transition in the Kuramoto model with colored noise // Physical Review E. — 2010. — T. 81, № 5. — C. 055201.

67. Bag B.C., Petrosyan K., Hu C.-K. Influence of noise on the synchronization of the stochastic Kuramoto model // Physical Review E. — 2007. — T. 76, № 5. — C. 056210.

68. Stratonovich R.L. Topics in the theory of random noise. T. 2. — CRC Press, 1967.

69. Goldobin D.S., Tyulkina I.V., Klimenko L.S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — T. 28, № 10. — C. 101101.

70. Goldobin D.S., Dolmatova A.V. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // Physical Review Research. — 2019. — T. 1, № 3. — C. 033139.

71. Jabin P.-E. A review of the mean field limits for Vlasov equations // Kinetic and Related models. — 2014. — T. 7, № 4. — C. 661—711.

72. Spohn H. Large scale dynamics of interacting particles. — Springer Science & Business Media, 2012.

73. Lancellotti C. On the Vlasov limit for systems of nonlinearly coupled oscillators without noise // Transport theory and statistical physics. — 2005. — T. 34, № 7. — C. 523—535.

74. Braun W., Hepp K. The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles // Communications in mathematical physics. — 1977. — T. 56, № 2. — C. 101—113.

75. Neunzert H. Mathematical investigations on particle-in-cell methods // Fluid Dyn. Trans. — 1978. — T. 9. — C. 229—254.

76. Dobrushin R.L. Vlasov equations // Functional Analysis and Its Applications. — 1979. — T. 13, № 2. — C. 115—123.

77. Neunzert H. An introduction to the nonlinear Boltzmann-Vlasov equation // Kinetic Theories and the Boltzmann Equation: Lectures given at the 1st 1981 Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) Held at Montecatini, Italy, June 10–18, 1981. — Springer, 2006. — C. 60—110.

78. Lovász L.M. Large Networks and Graph Limits // Colloquium Publications. — 2012.

79. Ruiz L., Chamon L.F., Ribeiro A. Graphon filters: Signal processing in very large graphs // 2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). — IEEE. 2021. — C. 1050—1054.

80. Borgs C., Chayes J.T., Lovász L., Sós V.T., Vesztergombi K. Convergent sequences of dense graphs II. Multiway cuts and statistical physics // Annals of Mathematics. — 2012. — С. 151—219.

81. Glasscock D. What is... a graphon // Notices of the AMS. — 2015. — Т. 62, № 1. — С. 46—48.

82. Chiba H., Medvedev G.S. The mean field analysis of the Kuramoto model on graphs I. the mean field equation and transition point formulas // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2019. — Т. 39, № 1. — С. 131—155.

83. Chiba H., Medvedev G.S. The mean field analysis of the Kuramoto model on graphs II. asymptotic stability of the incoherent state, center manifold reduction, and bifurcations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2019. — Т. 39, № 7. — С. 3897—3921.

84. Penrose O. Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma // The Physics of Fluids. — 1960. — Т. 3, № 2. — С. 258—265.

85. Dietert H. Stability and bifurcation for the Kuramoto model // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 2016. — Т. 105, № 4. — С. 451—489.

86. Chiba H., Medvedev G.S. Stability and bifurcation of mixing in the Kuramoto model with inertia // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2022. — Т. 54, № 2. — С. 1797—1819.

87. Chiba H., Medvedev G.S., Mizuhara M.S. Bifurcations and patterns in the Kuramoto model with inertia // Journal of Nonlinear Science. — 2023. — Т. 33, № 5. — С. 78.

88. Gupta S., Campa A., Ruffo S. Nonequilibrium first-order phase transition in coupled oscillator systems with inertia and noise // Physical Review E. — 2014. — Т. 89, № 2. — С. 022123.

89. Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S. First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems // Physical Review Letters. — 1997. — Т. 78, № 11. — С. 2104.

90. Tanaka H.-A., Lichtenberg A.J., Oishi S. Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1997. — Т. 100, № 3/4. — С. 279—300.

91. Olmi S., Navas A., Boccaletti S., Torcini A. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia // Physical Review E. — 2014. — Т. 90, № 4. — С. 042905.

92. Permyakova E.V., Klimenko L.S., Tyulkina I.V., Goldobin D.S. Four approaches for description of stochastic systems with small and finite inertia // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1945. — IOP Publishing. 2021. — С. 012050.

93. Acebrón J.A., Bonilla L.L., Spigler R. Synchronization in populations of globally coupled oscillators with inertial effects // Physical Review E. — 2000. — Т. 62, № 3. — С. 3437.

94. Yeung M.S., Strogatz S.H. Time delay in the Kuramoto model of coupled oscillators // Physical review letters. — 1999. — Т. 82, № 3. — С. 648.

95. Konishi T., Kaneko K. Clustered motion in symplectic coupled map systems // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1992. — Т. 25, № 23. — С. 6283.

96. Inagaki S., Konishi T. Dynamical stability of a simple model similar to self-gravitating systems // PASJ: Publications of the Astronomical Society of Japan (ISSN 0004-6264), vol. 45, no. 5, p. 733-735. — 1993. — Т. 45. — С. 733—735.

97. Kaneko K. Globally coupled circle maps // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1991. — Т. 54, № 1/2. — С. 5—19.

98. Campa A., Dauxois T., Ruffo S. Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions // Physics Reports. — 2009. — Т. 480, № 3—6. — С. 57—159.

99. Dauxois T., Ruffo S., Arimondo E., Wilkens M. Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long Range Interactions. — Springer, 2002.

100. Campa A., Dauxois T., Fanelli D., Ruffo S. Physics of long-range interacting systems. — OUP Oxford, 2014.

101. Antoni M., Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // Physical Review E. — 1995. — Т. 52, № 3. — С. 2361.

102. Yamaguchi Y.Y., Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Stability criteria of the Vlasov equation and quasi-stationary states of the HMF model // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2004. — Т. 337, № 1/2. — С. 36—66.

103. Lynden-Bell D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1967. — Т. 136. — С. 101.

104. Chavanis P.-H. Kinetic theory of collisionless relaxation for systems with long-range interactions // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2022. — Т. 606. — С. 128089.

105. Chavanis P.-H. Kinetic theory of collisionless relaxation for systems with long-range interactions // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2022. — Т. 606. — С. 128089.

106. Santini A., Giachetti G., Casetti L. Violent relaxation in the Hamiltonian mean field model: II. Non-equilibrium phase diagrams // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2022. — Т. 2022, № 1. — С. 013210.

107. Giachetti G., Casetti L. Violent relaxation in the Hamiltonian mean field model: I. Cold collapse and effective dissipation // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2019. — Т. 2019, № 4. — С. 043201.

108. Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Birth and long-time stabilization of out-of-equilibrium coherent structures // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. — 2002. — Т. 29, № 4. — С. 577—591.

109. Barré J., Bouchet F., Dauxois T., Ruffo S. Out-of-equilibrium states as statistical equilibria of an effective dynamics in a system with long-range interactions // Physical review letters. — 2002. — Т. 89, № 11. — С. 110601.

110. Koyama H., Konishi T., Ruffo S. Clusters die hard: Time-correlated excitation in the Hamiltonian mean field model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2008. — Т. 13, № 5. — С. 868—876.

111. Barré J., Yamaguchi Y.Y. Small traveling clusters in attractive and repulsive Hamiltonian mean-field models // Physical Review E. — 2009. — Т. 79, № 3. — С. 036208.

112. Bachelard R., Chandre C., Fanelli D., Leoncini X., Ruffo S. Abundance of regular orbits and nonequilibrium phase transitions in the thermodynamic limit for long-range systems // Physical Review Letters. — 2008. — Т. 101, № 26. — С. 260603.

113. Antoniazzi A., Fanelli D., Ruffo S., Yamaguchi Y.Y. Nonequilibrium tricritical point in a system with long-range interactions // Physical Review Letters. — 2007. — Т. 99, № 4. — С. 040601.

114. Staniscia F., Chavanis P.-H., De Ninno G. Out-of-equilibrium phase transitions in the Hamiltonian mean-field model: A closer look // Physical Review E. — 2011. — Т. 83, № 5. — С. 051111.

115. Levin Y., Pakter R., Rizzato F.B., Teles T.N., Benetti F.P. Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions // Physics Reports. — 2014. — Т. 535, № 1. — С. 1—60.

116. Miritello G., Pluchino A., Rapisarda A. Central limit behavior in the Kuramoto model at the “Edge of chaos” // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2009. — Т. 388, № 23. — С. 4818—4826.

117. Miritello G., Pluchino A., Rapisarda A. Phase transitions and chaos in long-range models of coupled oscillators // EPL (Europhysics Letters). — 2009. — Т. 85, № 1. — С. 10007.

118. Pluchino A., Rapisarda A. Metastability in the Hamiltonian mean field model and Kuramoto model // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2006. — Т. 365, № 1. — С. 184—189.

119. Pluchino A., Rapisarda A., Tsallis C. A closer look at the indications of q-generalized Central Limit Theorem behavior in quasi-stationary states of the HMF model // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2008. — Т. 387, № 13. — С. 3121—3128.

120. Caglioti E., Maffei C. Time asymptotics for solutions of Vlasov–Poisson equation in a circle // Journal of statistical physics. — 1998. — Т. 92, № 1. — С. 301—323.

121. Caglioti E., Rousset F. Long time estimates in the mean field limit // Archive for rational mechanics and analysis. — 2008. — Т. 190. — С. 517—547.

122. Benetti F.P.d.C., Teles T.N., Pakter R., Levin Y. Ergodicity breaking and parametric resonances in systems with long-range interactions // Physical Review Letters. — 2012. — Т. 108, № 14. — С. 140601.

123. Figueiredo A., Rocha Filho T., Amato M., Oliveira Jr Z., Matsushita R. Truncated Lévy flights and weak ergodicity breaking in the Hamiltonian mean-field model // Physical Review E. — 2014. — Т. 89, № 2. — С. 022106.

124. Dauxois T., Holdsworth P., Ruffo S. Violation of ensemble equivalence in the antiferromagnetic mean-field XY-model // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. — 2000. — Т. 16, № 4. — С. 659—667.

125. Defenu N. Metastability and discrete spectrum of long-range systems // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2021. — Т. 118, № 30. — e2101785118.

126. Defenu N., Donner T., Macrı T. [и др.]. Long-range interacting quantum systems // Reviews of Modern Physics. — 2023. — Т. 95, № 3. — С. 035002.

127. Defenu N., Lerose A., Pappalardi S. Out-of-equilibrium dynamics of quantum many-body systems with long-range interactions // Physics Reports. — 2024. — Т. 1074. — С. 1—92.

128. Chavanis P.-H., Vatteville J., Bouchet F. Dynamics and thermodynamics of a simple model similar to self-gravitating systems: the HMF model // The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. — 2005. — Т. 46. — С. 61—99.

129. Bouchet F., Corvellec M. Invariant measures of the 2D Euler and Vlasov equations // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2010. — Т. 2010, № 08. — P08021.

130. Elskens Y., Escande D.F., Doveil F. Vlasov equation and N-body dynamics: How central is particle dynamics to our understanding of plasmas? // The European Physical Journal D. — 2014. — Т. 68. — С. 1—7.

131. Wang H., Chudnovskiy A., Gorsky A., Kamenev A. Sachdev-Ye-Kitaev superconductivity: Quantum Kuramoto and generalized Richardson models // Physical Review Research. — 2020. — Т. 2, № 3. — С. 033025.

132. Gu Y., Kitaev A., Sachdev S., Tarnopolsky G. Notes on the complex Sachdev-Ye-Kitaev model // Journal of High Energy Physics. — 2020. — Т. 2020, № 2. — С. 1—74.

133. Chavanis P.-H. The quantum HMF model: II. Bosons // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2011. — Т. 2011, № 08. — P08003.

134. Plestid R., Mahon P., O'Dell D. Violent relaxation in quantum fluids with long-range interactions // Physical Review E. — 2018. — Т. 98, № 1. — С. 012112.

135. Bohm D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of"hidden"variables. I // Physical review. — 1952. — Т. 85, № 2. — С. 166.

136. Wyatt R.E. Quantum dynamics with trajectories: introduction to quantum hydrodynamics. Т. 28. — Springer Science & Business Media, 2005.

137. Plestid R., O'Dell D. Balancing long-range interactions and quantum pressure: Solitons in the Hamiltonian mean-field model // Physical Review E. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 022216.

138. Mumford J., Turner E., Sprung D., O'Dell D. Quantum spin dynamics in Fock space following quenches: caustics and vortices // Physical Review Letters. — 2019. — Т. 122, № 17. — С. 170402.

139. Kirkby W., Yee Y., Shi K., O'Dell D. Caustics in quantum many-body dynamics // Physical Review Research. — 2022. — Т. 4, № 1. — С. 013105.

140. Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T.M. Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // Nature Physics. — 2020. — Т. 16, № 7. — С. 734—746.

141. Sacépé B., Dubouchet T., Chapelier C. [и др.]. Localization of preformed Cooper pairs in disordered superconductors // Nature Physics. — 2011. — Т. 7, № 3. — С. 239—244.

142. Efetov K. Phase transitions in granulated superconductors // Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki. — 1980. — Т. 78. — С. 2017—2032.

143. Fazekas P. Reentrant phase transition in granular superconductors // Zeitschrift für Physik B Condensed Matter. — 1982. — Т. 45, № 3. — С. 215—221.

144. Šimánek E. Reentrant phase diagram for granular superconductors // Physical Review B. — 1985. — Т. 32, № 1. — С. 500.

145. Šimánek E., Brown R. Effect of dissipation on the phase transition in granular superconductors // Physical Review B. — 1986. — Т. 34, № 5. — С. 3495.

146. Chakravarty S., Kivelson S., Zimanyi G.T., Halperin B.I. Effect of quasiparticle tunneling on quantum-phase fluctuations and the onset of superconductivity in granular films // Physical Review B. — 1987. — Т. 35, № 13. — С. 7256.

147. Ambegaokar V., Eckern U., Schön G. Quantum dynamics of tunneling between superconductors // Physical Review Letters. — 1982. — Т. 48, № 25. — С. 1745.

148. Bruder C., Fazio R., Schön G. Mesoscopic normal metal-superconductor junction systems: The effective action approach // Physica B: Condensed Matter. — 1994. — Т. 203, № 3/4. — С. 240—246.

149. Feigel'man M., Larkin A. Quantum superconductor–metal transition in a 2D proximity-coupled array // Chemical Physics. — 1998. — Т. 235, № 1. — С. 107—114.

150. Zaikin A.D. Influence of Coulomb and proximity effects on electron tunneling through normal metal-superconductor interfaces // Physica B: Condensed Matter. — 1994. — Т. 203, № 3/4. — С. 255—266.

151. Zant H.S. van der, Elion W.J., Geerligs L.J., Mooij J. Quantum phase transitions in two dimensions: Experiments in Josephson-junction arrays // Physical Review B. — 1996. — Т. 54, № 14. — С. 10081.

152. Van der Zant H., Fritschy F., Elion W., Geerligs L., Mooij J. Field-induced superconductor-to-insulator transitions in Josephson-junction arrays // Physical review letters. — 1992. — Т. 69, № 20. — С. 2971.

153. Delsing P., Chen C., Haviland D., Harada Y., Claeson T. Charge solitons and quantum fluctuations in two-dimensional arrays of small Josephson junctions // Physical Review B. — 1994. — Т. 50, № 6. — С. 3959.

154. Feigel'man M.V., Larkin A.I., Skvortsov M.A. Quantum superconductor–metal transitionin a proximity array // Physics-Uspekhi. — 2001. — Т. 44, 10S. — С. 99.

155. Feigel'man M.V., Skvortsov M.A., Tikhonov K.S. Proximity-induced superconductivity in graphene // JETP letters. — 2008. — Т. 88. — С. 747—751.

156. Han Z., Allain A., Arjmandi-Tash H. [и др.]. Collapse of superconductivity in a hybrid tin–graphene Josephson junction array // Nature Physics. — 2014. — Т. 10, № 5. — С. 380—386.

157. Zaikin A., Golubev D. Dissipative Quantum Mechanics of Nanostructures: Electron Transport, Fluctuations, and Interactions. — Jenny Stanford Publishing, 2019.

158. Daniels B., Dissanayake S., Trees B. Synchronization of coupled rotators: Josephson junction ladders and the locally coupled Kuramoto model // Physical Review E. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 026216.

159. Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S.H. Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model // Physical Review E. — 1998. — Т. 57, № 2. — С. 1563.

160. Vlasov V., Pikovsky A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables // Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — 2013. — Т. 88, № 2. — С. 022908.

161. Wouters M., Carusotto I. Excitations in a nonequilibrium Bose-Einstein condensate of exciton polaritons // Physical review letters. — 2007. — Т. 99, № 14. — С. 140402.

162. Töpfer J.D., Sigurdsson H., Pickup L., Lagoudakis P.G. Time-delay polaritonics // Communications Physics. — 2020. — Т. 3, № 1. — С. 2.

163. D'Huys O., Vicente R., Danckaert J., Fischer I. Amplitude and phase effects on the synchronization of delay-coupled oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2010. — Т. 20, № 4.

164. Munsberg L., Javaloyes J., Gurevich S.V. Topological localized states in the time delayed Adler model: Bifurcation analysis and interaction law // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Т. 30, № 6.

165. Lagoudakis P.G., Berloff N.G. A polariton graph simulator // New Journal of Physics. — 2017. — Т. 19, № 12. — С. 125008.

166. Berloff N.G., Silva M., Kalinin K. [и др.]. Realizing the classical XY Hamiltonian in polariton simulators // Nature materials. — 2017. — Т. 16, № 11. — С. 1120—1126.

167. Harrison S.L., Sigurdsson H., Lagoudakis P.G. Synchronization in optically trapped polariton Stuart-Landau networks // Physical Review B. — 2020. — Т. 101, № 15. — С. 155402.

168. Kalinin K.P., Berloff N.G. Polaritonic network as a paradigm for dynamics of coupled oscillators // Physical Review B. — 2019. — Т. 100, № 24. — С. 245306.

169. Moroney J.P., Eastham P.R. Synchronization in disordered oscillator lattices: Nonequilibrium phase transition for driven-dissipative bosons // Physical Review Research. — 2021. — Т. 3, № 4. — С. 043092.

170. Gutiérrez R., Cuerno R. Nonequilibrium criticality driven by Kardar-Parisi-Zhang fluctuations in the synchronization of oscillator lattices // Physical Review Research. — 2023. — Т. 5, № 2. — С. 023047.

171. Gutiérrez R., Cuerno R. Kardar-Parisi-Zhang universality class in the synchronization of oscillator lattices with time-dependent noise // Physical Review E. — 2024. — Т. 110, № 5. — С. L052201.

172. Gutiérrez R., Cuerno R. Kardar-Parisi-Zhang fluctuations in the synchronization dynamics of limit-cycle oscillators // Physical Review Research. — 2024. — Т. 6, № 3. — С. 033324.

173. Strogatz S.H., Mirollo R.E. Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1988. — Т. 31, № 2. — С. 143—168.

174. Witthaut D., Timme M. Kuramoto dynamics in Hamiltonian systems // Physical Review E. — 2014. — Т. 90, № 3. — С. 032917.

175. Witthaut D., Wimberger S., Burioni R., Timme M. Classical synchronization indicates persistent entanglement in isolated quantum systems // Nature communications. — 2017. — Т. 8, № 1. — С. 14829.

176. Jaćimović V., Kapić Z., Crnkić A. Reinforcement Learning in Hyperbolic Spaces: Models and Experiments. — 2024. — arXiv: 2410.09466 [cs.LG].

177. Jaćimović V. A group-theoretic framework for machine learning in hyperbolic spaces. — 2025. — arXiv: 2501.06934 [cs.LG].

178. Geshkovski B., Letrouit C., Polyanskiy Y., Rigollet P. The emergence of clusters in self-attention dynamics. — 2024. — arXiv: 2305.05465 [cs.LG].

179. Geshkovski B., Letrouit C., Polyanskiy Y., Rigollet P. A mathematical perspective on Transformers. — 2024. — arXiv: 2312.10794 [cs.LG].

180. Berglund N., Medvedev G.S., Simpson G. Metastability in the stochastic nearest-neighbor Kuramoto model of coupled phase oscillators. — 2024. — arXiv: 2412.15136 [math.PR].

181. Ghandehari M., Medvedev G.S. The Large Deviation Principle for W-random spectral measures // Applied and computational harmonic analysis. — 2025. — Т. 77. — С. 101756.

182. Dupuis P., Medvedev G.S. The large deviation principle for interacting dynamical systems on random graphs // Communications in Mathematical Physics. — 2022. — Т. 390, № 2. — С. 545—575.

183. Backhausz Á., Szegedy B. Action convergence of operators and graphs // Canadian Journal of Mathematics. — 2022. — Т. 74, № 1. — С. 72—121.

184. Bick C., Sclosa D. Dynamical systems on graph limits and their symmetries // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2024. — С. 1—36.

185. Gkogkas M.A., Kuehn C. Graphop mean-field limits for Kuramoto-type models // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2022. — Т. 21, № 1. — С. 248—283.

186. Prüfer H. Neue herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger funktionen // Mathematische Annalen. — 1926. — Т. 95, № 1. — С. 499—518.

187. Johnson R., Moser J. The rotation number for almost periodic potentials // Communications in Mathematical Physics. — 1982. — Т. 84, № 3. — С. 403—438.

188. Renne M., Polder D. Some analytical results for the resistively shunted Josephson junction // Revue de physique appliquée. — 1974. — Т. 9, № 1. — С. 25—28.

189. Bondeson A., Ott E., Antonsen Jr T.M. Quasiperiodically forced damped pendula and Schrödinger equations with quasiperiodic potentials: implications of their equivalence // Physical review letters. — 1985. — Т. 55, № 20. — С. 2103.

190. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen Jr T.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1987. — Т. 26, № 1—3. — С. 277—294.

191. Grollier J., Querlioz D., Camsari K. [и др.]. Neuromorphic spintronics // Nature electronics. — 2020. — Т. 3, № 7. — С. 360—370.

192. Zhou J., Chen J. Prospect of spintronics in neuromorphic computing // Advanced Electronic Materials. — 2021. — Т. 7, № 9. — С. 2100465.

193. Locatelli N., Cros V., Grollier J. Spin-torque building blocks // Nature materials. — 2014. — Т. 13, № 1. — С. 11—20.

194. Grollier J., Querlioz D., Stiles M.D. Spintronic nanodevices for bioinspired computing // Proceedings of the IEEE. — 2016. — Т. 104, № 10. — С. 2024—2039.

195. Romera M., Talatchian P., Tsunegi S. [и др.]. Vowel recognition with four coupled spin-torque nano-oscillators // Nature. — 2018. — Т. 563, № 7730. — С. 230—234.

196. Slavin A., Tiberkevich V. Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current // IEEE Transactions on Magnetics. — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 1875—1918.

197. Mallinson J., Heywood Z., Daniels R. [и др.]. Reservoir computing using networks of memristors: effects of topology and heterogeneity // Nanoscale. — 2023. — Т. 15, № 22. — С. 9663—9674.

198. Chiba H., Taniguchi K., Sumi T. Reservoir computing with the Kuramoto model. — 2024. — arXiv: 2407.16172 [math.DS].

199. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of integrals, series, and products. — Academic press, 2014.