ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации Житлухина Михаила Валентиновича
«Динамические вероятностные эволюционные игры и их приложения»,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация посвящена динамическим вероятностным эволюционным играм, которые относятся к области эволюционных финансов (evolutionary finance), использующей идеи биологической эволюционной теории для моделирования стохастической динамики финансовых рынков. В отличии от классической финансовой математики, где цены активов предполагаются экзогенными, здесь цены определяются эндогенно исходя из краткосрочного равновесия между спросом и предложением. С другой стороны, в отличие от равновесия Вальраса, в данная теория избегает использовать функции полезности агентов, которые являются ненаблюдаемыми. Основной упор делается на асимптотическое поведение капиталов стратегий при больших значениях времени, и связанное с этим понятия выживаемости.

Согласно Lo (2017) и обзору Holtfort (2019), идеи эволюционной теории финансов были заложены в работах Alchian (1950) и Hirshleifer (1977). В 1990-х годах появились математические исследования, касающиеся идеи рыночного отбора, в частности, важная работа Blume, Easley (1992). Диссертация развивает идеи, заложенные в работах Evstigneev, Hens, Schenk-Hoppe (2002), Amir et al (2005), которые стимулировали систематическое изучение выживающих стратегий на рынках с эндогенными ценами. Следует отметить, что автор диссертации внес существенный вклад в развитие данной теории, а сама диссертации во многом является итогом этой целенаправленной работы. Актуальность работы связана с важностью понимания механизмов, определяющих долгосрочную динамику рынков, и имеет принципиальное значение для формирования эффективных стратегий и прогнозирования рыночных процессов.

Все основные модели, рассмотренные в диссертации, укладываются в весьма общую схему динамической вероятностной эволюционной игры, введенную автором. Центральное место занимает исследование существования выживающих стратегий (или их аналогов) и их конструктивное описание. Автору удалось детально исследовать эти вопросы для модели Блюма–Исли и ее обобщений (гл. 1), модели Амира, Евстигнеева и Шенк-Хоппе (AESH) (гл. 2) и ее диффузионного приближения (гл. 3), модели AESH с эндогенными и экзогенными ценами (гл. 4), стохастических систем фон Неймана—Гейла с эндогенными ценами, позволяющих рассматривать транзакционные издержки (гл. 5), модели AESH с зависимостью выплат от репрезентативной стратегии всех игроков (гл.6), модели с непрерывным временем (гл.7). Наконец, в гл. 8, для модели с долгоживущими активами, введены и исследованы популяционные выживающие стратегии в дискретном и непрерывном времени. Рассмотрен также ряд сопутствующих вопросов: о времени достижения большого уровня капиталом стратегии относительного роста в модели AESH,

задача хеджирования и монотонное отношение Шарпа в модели с экзогенными ценами. Основные результаты диссертации являются новыми.

Используемый математический аппарат связан в основном с теорией случайных процессов: мартингальные разложения, теоремы о сходимости мартингалов, предельные теоремы для случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения, теория семимартингалов. Используются также вероятностные неравенства и теория случайных множеств.

Перейдем к более подробному описанию содержания диссертационной работы.

В главе 1 вводятся определения динамической вероятностной эволюционной игры, выживающих стратегий и стратегий относительного роста, а также репрезентативной стратегии всех игроков. Динамическая вероятностная эволюционная игра описывает изменение относительного капитала игроков, которое определяется их стратегиями и начальными условиями. Выживающие стратегии гарантируют игроку, что при $t \to \infty$ его относительный капитал асимптотически отделен от нуля с вероятностью 1. Стратегии относительного роста определяются как стратегии, при которой логарифм относительного капитала игрока является субмартингалом. Это условие является более сильным: любая стратегия относительного роста является выживающей (Предложение 1.4).

Рассматривается конкретная модель игры типа Блюма–Исли, в которой игроки делают ставки на несовместные события. Для этой модели стратегии относительного роста указаны в явном виде. Установлено также, что если хотя бы один игрок использует такую стратегию, то репрезентативная стратегия всех игроков асимптотически сближается с ней (Предложение 1.15). Репрезентативная стратегия описывает распределение суммарного относительного капитала между активами. В доказательствах существенную роль играют неравенства Пинскера для расстояния Кульбака—Лейблера и теорема Дуба о сходимости субмартингалов. В последующих главах эта тематика развивается в других моделях.

Получено также достаточное условие существования стратегий относительного роста (Теорема 1.13). Впрочем, ввиду неконструктивного характера данного условия, оно не является основным инструментом для решения конкретных задач, что и отмечено в диссертации.

В главе 2 изучается базовая модель динамической вероятностной эволюционной игры Амира, Евстигнеева и Шенк-Хоппе (AESH). В этой модели предполагается, что (a) рынок находится в состоянии равновесия, т.е. в каждый момент времени объем спроса на каждый актив равен объему предложения, (b) выплаты, производимые активами, распределяются пропорционально долям владения ими. Цены активов в данной модели однозначно определяются из соответствующих уравнений равновесия (эндогенные цены).

В теореме 2.7 установлено, что выживаемость стратегии определяется ее близостью при больших значениях времени к вектору μ_t условных ожиданий относительных выплат активов в смысле расстояния Кульбака—Лейблера, или в смысле квадратического отклонения. Данные условия формулируются в виде сходимости соответствующих рядов. Стратегия μ_t является единственной стратегией относительного роста (Следствие 2.9). Как и в модели типа Блюма–Исли из первой главы, если хотя бы один игрок использует стратегию, удовлетворяющую указанному условию близости

теоремы 2.7, то репрезентативная стратегия всех игроков асимптотически сближается с вектором условных ожиданий относительных выплат. Это позволяет сделать вывод о асимптотическом поведении цен активов.

Далее рассмотрен более простой случай игры с двумя игроками, когда векторы выплат независимы и одинаково распределены. В теореме 2.14 получены достаточные условия для доминирования или неисчезания игрока. Грубо говоря, данные условия основаны на корреляции вектора отношений долей игроков с вектором относительных выплат.

Дальнейшие результаты данной главы касаются времени достижения большого уровня капиталом стратегии относительного роста. В теоремах 2.18 и 2.20 найдены верхние оценки пределов отношения ожидаемого времени достижения большого уровня произвольной стратегией и стратегией относительного роста. Автор отмечает, что "оптимальность" стратегии относительного роста аналогична оптимальности лог-оптимальной стратегии в традиционных моделях рынков с экзогенными ценами, которая установлена Брейманом.

Глава 3 посвящена построению и анализу диффузионного приближения для модели AESH с двумя игроками из главы 2. Основная идея заключается в том, чтобы аппроксимировать дискретную динамику относительного капитала игроков непрерывным процессом, описываемым стохастическим дифференциальным уравнением. Данный подход позволяет использовать аппарат непрерывной теории случайных процессов для изучения асимптотического поведения игры. При этом делаются сильные дополнительные предположения о том, что векторы выплат независимы и одинаково распределены, а игроки используют стратегии, близкие к стратегии относительного роста $\hat{\lambda}$.

Для соответствующей последовательности игр получено предельное стохастическое дифференциальное уравнения. В теореме 3.1 установлено, что это уравнение имеет единственное сильное решение W, которому капитал первого игрока сходится в смысле слабой сходимости мер на пространстве Скорохода. Предельное поведение диффузионного процесса W при больших значениях времени исследовано в теореме 3.4. Данный результат показывает, что возможна как ситуация, когда один из игроков доминирует (а другой исчезает), так и ситуация, когда оба игрока не исчезают, а случайные величины W_t сходятся к некоторому нетривиальному распределению. В теореме 3.7 эти результаты уточнены в случае двух активов.

В рассматриваемой далее в главе 3 модели параметры уже не постоянны, а могут находиться в одном из K режимов, переходы между которыми задаются с помощью эргодической марковской цепи с непрерывным временем. Теорема 3.8 содержит результат аналогичный теореме 3.4, но условия, определяющие предельное поведение процесса W, используют усреднение по предельному распределению режимов. В конце главы рассматривается диффузионное приближение игры с тремя и более игроками. Автор характеризует полученные в теореме 3.13 результаты как достаточно слабые, поскольку ее условия выполняются лишь в некоторых специальных случаях.

В главе 4 рассматривается модель с двумя типами активов: с эндогенными и экзогенными ценами. Активы первого типа подчиняются модели AESH, а активы второго

типа – традиционной модели, в которой действия игроков не влияют на цены. В рассматриваемую модель введены также ограничения на стратегии игроков.

В теореме 4.8 указана конструкция стратегии относительного роста $\hat{\lambda}$. По существу, она является обобщением конструкции лог-оптимального портфеля в традиционной модели рынка. Однако учет эндогенных активов делает это обобщение далеко нетривиальным. Дополнительные сложности привносит возможная неинтегрируемость процесса капитала. Чтобы обойти эту трудность строятся последовательность "усеченных" задач и сходящаяся подпоследовательность их решений.

В теореме 4.10 показано, что если один из игроков использует стратегию относительного роста, то компонента репрезентативной стратегии, относящаяся к эндогенным активам, асимптотически сближается с $\hat{\lambda}$, и что он является единственным выживающим игроком, если реализация репрезентативной стратегии остальных игроков асимптотически отлична от реализации $\hat{\lambda}$. Таким образом, асимптотическое поведение цен эндогенных активов также определяется поведением стратегии относительного роста.

В заключительно части главы рассматривается стратегия с одним экзогенным активом. Здесь приведен интересный пример, когда капитал стратегии относительного роста стремится к нулю (пример 4.25), а также рассмотрена ситуация, когда все игроки используют стратегию $\widehat{\lambda}$. В последнем случае для независимых и одинаково распределенных совокупный капитал игроков в типичной ситуации сходится к $+\infty$ (теорема 4.26).

В главе 5 проводится анализ асимптотически оптимальных стратегий в рамках модели фон Неймана-Гейла (с экзогенными ценами). В финансовой математике эта модель была адаптирована для моделирования транзакционных издержек и портфельных ограничений. Траектории системы x_t интерпретируются как портфели активов, а их возможная динамика определяется последовательностью конусов. Двойственные траектории p_t, принадлежащие последовательности сопряженных конусов, можно интерпретировать как возможные цены активов. Если компоненты портфелей выражаются в терминах стоимости, то векторы p_t приобретают смысл дисконтирующих.

В рассматриваемой главе вводятся понятия быстрой траектории, которая является аналогом лог-оптимальной стратегии в традиционной модели, и асимптотически оптимальной траектории, которое является аналогом выживающей стратегии из предыдущих глав. В предложении 5.5 установлено существование быстрой траектории в стохастической системе фон Неймана—Гейла, а в предложении 5.7 показано, что каждая быстрая траектория является асимптотически оптимальной. Далее рассматривается модель рынка с транзакционными издержками и дивидендами, для которой выполнены условия этих предложений. Это позволяет сформулировать результаты о существовании быстрых и асимптотически оптимальных траекторий в такой модели (теоремы 5.9 и 5.11).

Во второй части главы рассматривается задача хеджирования, которая не связана с анализом асимптотического поведения траекторий. Вводится понятие хеджирования с допустимым риском. Хеджирующая стратегия стартует с нулевого портфеля и обладает следующим свойством: портфель агента, приобретенный в предыдущий момент времени, за вычетом выплаты по контракту, должен в некотором смысле мажорировать портфель, с которым он начинает торги в следующий момент. Свойство хеджирования формулируется

в терминах согласованных систем цен, которые являются аналогом супермартингальных плотностей в классических моделях. В заключительной части главы рассматриваются подходы к определению допустимого риска на основе отношения Шарпа.

В главе 6 в модель AESH вводится зависимость выплат от репрезентативной стратегии $\bar{\lambda}$ всех игроков. Это позволяет учитывать зависимость величины выплат от популярности актива. Для игры с аффинными, относительно компонент $\bar{\lambda}$, выплатами установлено существование стратегии относительного роста $\hat{\lambda}$, как неподвижной точки некоторого отображения L (теорема 6.4). При некоторых технических условиях происходит сближение репрезентативной стратегии $\bar{\lambda}$ и стратегии относительного роста $\hat{\lambda}$ (теорема 6.7). Это дает возможность предсказывать асимптотическое поведение выплат активов, так как они являются функциями $\bar{\lambda}$. Интересно, что применение данного подхода к модели с экзогенными ценами позволяет дать новое описание лог-оптимальных портфелей как неподвижных точек отображения L (предложение 6.8).

В случае. когда условные вероятности выплат являются аффинными функциями репрезентативной стратегии также установлены существование стратегии относительного роста и сходимость к ней репрезентативной стратегии (теорема 6.10). Если коэффициенты указанных аффинных функций постоянны, и стратегии игроков также задаются постоянными векторами, то стратегия относительно роста постоянна и выживают лишь игроки, которые ей следуют (теорема 6.13).

В заключительной части главы для модели с двумя активами получены достаточные условия существования стратегий относительного роста в случае произвольной зависимости выплат от репрезентативной стратегии (теорема 6.18 и следствие 6.19). Они сводятся к проверке (квази)выпуклости функции, определяемой условными математическими ожиданиями относительных выплат.

В главе 7 рассматривается модель с N эндогенными активами и одним безрисковым активом в непрерывном времени. Рассмотренное ранее уравнение динамики капитала W переписано таким образом, чтобы можно было естественным образом перейти от дискретного времени к непрерывному. С этой целью введены процессы кумулятивных ставок игроков L и кумулятивных выплат активов A. Соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение содержит стохастические дифференциалы процессов W, L, A и, как обычно, понимается в интегральном смысле. Доказательство разрешимости данного уравнение, а значит и обоснование корректности рассматриваемой модели, является сложной задачей. Здесь требуется тонкое описание класса допустимых стратегий, которое дано в предложении 7.8, где вводятся, в частности, ограничения на интенсивности v_t вложений в активы. Следует отметить, что автор стремится рассматривать задачу в максимальной общности, допуская скачкообразные процессы на общих фильтрованных пространствах, что требует привлечения технически сложных инструментов стохастического анализа.

Основной результат главы содержится в теореме 7.10, где сформулирован результат о существовании стратегии относительного роста $\hat{L}$ и дано ее конструктивное описание в терминах интенсивности непрерывной части b и компенсатора меры скачков ν процесса кумулятивных выплат.

Как и в предыдущих разделах, справедливо утверждение о сближении репрезентативной стратегия всех игроков со стратегией относительного роста, если ее использует хотя бы один игрок (теорема 7.14). При этом игроки, использующие существенно другие в асимптотическом смысле стратегии, исчезают. В теореме 7.16 получен критерий стремления совокупного капитала игроков к $+\infty$, если все они используют стратегию $\hat{L}$. Здесь важно лишь поведение компенсатора меры скачков на $+\infty$. В конце главы в качестве примеров рассмотрены модели с дискретным временем и пример, в котором процесс кумулятивных выплат задается неубывающим процессом Леви.

В заключительной **главе 8** рассматриваются динамические вероятностные эволюционные игры с долгоживущими активами, как модели рынка акций, выплачивающих дивиденды. В начале главы записана традиционная модель динамики капитала при наличии дивидендов и потребления, а затем введена зависимость дивидендов от репрезентативной стратегии игроков. Вместе с предположением о том, что рынок находится в равновесии, это неявным образом определяет и зависимость цен от репрезентативной стратегии. Корректность модели обоснована в предложении 8.3.

В определение выживающей модели здесь включается фиксированный уровень потребления. При этом капитал выживающей стратегии сравнивается с капиталами стратегий с неменьшими уровнями потребления, так как стратегии с меньшими уровнями потребления получили бы преимущество в смысле роста капитала.

Введение понятия популяционной выживающей стратегии мотивируется тем, что оно, в отличие от понятий выживающих и эволюционно устойчивых стратегий, позволяет исследовать дивиденды общего вида. Идея состоит в том, чтобы устремить капитал игрока 1 к бесконечности и исследовать предельное поведение капитала большого (1-го) игрока, капиталов остальных (малых) игроков, репрезентативной стратегии, и цен рисковых активов (предложение 8.7). В частности, репрезентативная стратегия сближается со стратегией большого игрока, которая называется популяционной. Также получена предельная динамика капитала малого игрока.

Популяционная стратегия названа выживающей, если капитал малых игроков, использующих другие стратегии, не может расти асимптотически быстрее, чем капитал игроков, следующих популяционной стратегии. В теореме 8.12 указано уравнение, решение которого является популяционной выживающей стратегией. В предложении 8.13 указано условие на дивиденды, гарантирующее однозначную разрешимость этого уравнения. Данные результаты проиллюстрированы рядом примеров.

Во второй части главы изучается аналогичная модель с непрерывным временем. Динамика капиталы малых игроков заменяется стохастическим дифференциальным уравнением. Определение популяционной выживающей стратегии аналогично случаю дискретного времени. Уравнение, решение которого является популяционной выживающей стратегией (теорема 8.26), и достаточное условие его однозначной разрешимости (предложение 8.30), аналогичны случаю дискретного времени. Условие неисчезания малого игрока формулируется как некоторое условие близости его стратегии к популяционной (теорема 8.32).

По работе имеются следующие замечания.

1. Полученные в диссертации формулы для выживающих стратегий содержат некоторые вероятностные характеристики, которые (неявно) предполагаются известными. Представляется интересным следующий вопрос (который не обсуждается в диссертации): как или когда инвестор (игрок) может найти выживающую стратегию на основе имеющихся данных. Простейший конкретный вопрос такого рода: в модели Блюма—Исли (гл.1) не будет ли последовательность «частот успехов», построенная по последовательности выплат X_t выживающей стратегией?
2. Развитая теория является асимптотической. Для практических приложений представляет интерес также аналитическое и экспериментальное исследование поведения выживающих стратегий на конечном горизонте.
3. На мой взгляд, чересчур расширительное толкование введенной схемы вероятностной эволюционной игры не вполне правомерно. В сноске на с.14 говорится: «Если бы речь шла, скажем, о приложениях в биологии, вместо капитала игроков можно было бы говорить о численности популяций различных биологических видов». Все же естественная область применимости развиваемой теории связана с финансовыми или экономическими приложениями. Реальных примеров ее приложений в биологии автор не приводит.
4. с.39, 2 строка снизу. Пропущен индекс t у μ.
5. с.88. В формуле (4.3) условное математическое ожидание должно быть внешним по отношению к логарифму.
6. с.91. В формуле (4.4) пропущен верхний индекс n у S_t.
7. с.118. В примере 4.27 говорится, что медленный рост капитала в игре с большими выплатами “можно объяснить тем, что присутствие случайности в выплатах активов не позволяет игрокам платить «слишком дорого» за обладание ими”. Но теореме 4.26, и в самом примере 4.27, наоборот капитал стремится к бесконечности, когда выплаты случайны и ограничен, когда они неслучайны.
8. с.122. Формула (5.3) и следующие три формулы на этой странице: все произведения должны быть скалярными.
9. с.125 внизу. В определении ψ_t: x и y сравниваются покомпонентно. В то же время все выражено в одних единицах: деньгах. Почему для покрытия y^n привлекается только x^n, а не другие активы?
10. с.183. В формуле (7.29) вместо w должно быть W.
11. с.207, 17 строка. В формуле для $X_t^{\tau_n}$ вместо ds должно быть dX_s.

Сделанные замечания не умаляют достоинств диссертационного исследования и не влияют на его общую положительную оценку. Замечания 1 и 2 являются, строго говоря, лишь размышлениями о возможных направлениях развития работы.

Диссертационное исследование М.В. Житлухина выполнено на высоком математическом уровне и содержит ряд важных новых результатов. Считаю, что оно является существенным вкладом в математическую теорию игровых моделей финансовых рынков. Средствами стохастического анализа в работе развита теория динамических

вероятностных эволюционных игр, центральным объектом которой являются выживающие стратегии. Асимптотический анализ стратегий, устойчивых к конкуренции при наличии случайных факторов, представляет значительный интерес.

Все полученные результаты снабжены строгими доказательствами. Они своевременно опубликованы в ведущих высокорейтинговых математических журналах соответствующей тематики, и прошли апробацию на многочисленных конференциях как в России, так и за рубежом. Автореферат точно отражает все основные результаты диссертации.

Считаю, что диссертация М.В. Житлухина «Динамические вероятностные эволюционные игры и их приложения» является крупным научным достижением. Она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор Житлухин Михаил Валентинович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.4 – Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
профессор
Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И, Воровича
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Южный федеральный университет"
и.о. заведующего кафедрой методов оптимизации и машинного обучения

Рохлин Дмитрий Борисович

Подпись проф. Рохлина Д.Б.
удостоверяю
Начальник Цыбенкова О.А.
27.02.2025

Контактные данные:
тел.: +7(908)5032072, e-mail: dbrohlin@sfedu.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.05 - Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:
344090 ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А
Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И, Воровича
Тел.: +7(863)263-31-58; e-mail: dbrohlin@sfedu.ru