Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 519.21



Житлухин Михаил Валентинович

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ИГРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1.4 — теория вероятностей
и математическая статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва · 2024

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Математический институт им. В. А. Стеклова РАН».

Официальные оппоненты

Колокольцов Василий Никитич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность 01.01.03)

Мазалов Владимир Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры моделирования экономических систем факультета прикладной математики – процессов управления государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (специальность 01.01.11)

Рохлин Дмитрий Борисович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор Института математики, механики и компьютерных наук Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Южный Федеральный Университет», и. о. заведующего кафедрой методов оптимизации и машинного обучения (специальность 01.01.05)

Ведущая организация

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Центральный экономико-математический институт РАН»

Защита диссертации состоится «27» марта 2025 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.167.01 при МИАН им. В. А. Стеклова по адресу: Москва, ул. Губкина, д. 8. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `https://mi-ras.ru/dis/ref24/zhitlukhin/dis.pdf`

Автореферат разослан «26» декабря 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.01
доктор физико-математических наук  Ватутин В. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация посвящена *динамическим вероятностным эволюционным играм*. Такой игрой мы будем называть систему взаимодействующих агентов (игроков), которая описывается случайным процессом R_t со значениями в множестве $\Delta^M = \{r \in \mathbb{R}_+^M : r^1 + \ldots + r^M = 1\}$. Этот процесс показывает, насколько «успешны» стратегии игроков — чем координата R_t^m ближе к 1, тем успешнее стратегия игрока m.

Центральным объектом исследования в работе являются стратегии, называемые *выживающими*, для которых процесс R_t^m остается отделенным от нуля с вероятностью 1 на бесконечном промежутке времени, независимо от того, какие стратегии используют оппоненты. Интерес изучения выживающих стратегий объясняется как тем, что выживание само по себе может являться целью игроков, так и тем, что присутствие игроков, использующих выживающие стратегии, часто позволяет предсказать, как будет развиваться игра в пределе по времени $t \to \infty$.

Основная часть работы касается вопросов существования выживающих стратегий и их свойств, а также конструктивного построения таких стратегий в конкретных моделях, возникающих в задачах финансовой математики, где процесс R_t представляет динамику *относительного капитала* игроков.

Это направление исследований возникло в экономической литературе с целью объяснить, как стратегии экономических агентов влияют на динамику рынка на длинном горизонте времени. Первые математические работы в этой области появились в 1990-х – начале 2000-х годов и, в основном, касались вопроса справедливости *гипотезы рыночного отбора*, согласно которой агенты, стремящиеся максимизировать свою прибыль и обладающие наиболее полной и правильной информацией, вытесняют агентов, которые такой информацией не обладают (см. статьи Де Лонга и др.[1], Блюма и Исли[2], Сандрони[3]). В математических моделях оказывается, что гипотеза рыночного отбора не всегда верна и ее справедливость зависит от структуры модели[4].

Упомянутые работы основывались на стандартном предположении о рациональности агентов, означающем, что их действия определяются из решения задачи максимизации полезности, при этом разные агенты могут иметь

[1] *De Long J. B.* [et al.]. The survival of noise traders in financial markets // Journal of Business. 1991. Vol. 4, no. 1. P. 1–19.

[2] *Blume L., Easley D.* Evolution and market behavior // Journal of Economic Theory. 1992. Vol. 58, no. 1. P. 9–40.

[3] *Sandroni A.* Do markets favor agents able to make accurate predictions? // Econometrica. 2000. Vol. 68, no. 6. P. 1303–1341.

[4] *Blume L., Easley D.* If you're so smart, why aren't you rich? Belief selection in complete and incomplete markets // Econometrica. 2006. Vol. 74, no. 4. P. 929–966.

разные функции полезности и обладать разными представлениями о вероятностях случайных событий. Однако многочисленные исследования показывают, что действия людей часто оказываются нерациональными. Кроме того, даже если считать, что они рациональны, то для количественного анализа модели требуется знать индивидуальные характеристики агентов (функции полезности, субъективные вероятности), которые обычно трудно оценить.

В начале 2000-х годов в этом направлении появились работы, в которых были сделаны попытки отказаться от условия рациональности и изучить модели, где игроки могут выбирать стратегии произвольными образом (см. статьи Амира, Евстигнеева, Хенса, Шенк-Хоппе[5,6]). Настоящая диссертация продолжает теоретические исследования по этой тематике.

Казалось бы, если рассматривать произвольные стратегии игроков, то и поведение модели будет произвольным. Однако «сила рыночного отбора» способствует тому, что с течением времени на структуру рынка будут влиять только те агенты, которые используют выживающие стратегии (если они существуют), что и дает возможность предсказать, как будут изменяться различные наблюдаемые характеристики модели. Обзор результатов в этом направлении можно найти в статье Евстигнеева, Хенса и Шенк-Хоппе[7].

Математическая сущность рассматриваемых вопросов состоит в следующем. Пусть имеется случайный процесс или случайная последовательность $r_t(\omega, p, q)$, где ω — случайный исход, а p и q — параметры. По своему смыслу, p — это «наша» стратегия, а q — совокупность стратегий оппонентов. Далее параметры p и q, как правило, будут случайными процессами, а в качестве r_t, в основном, будет выступать процесс $\ln R_t^m$, где R_t — упомянутый выше процесс относительного капитала игрока m.

Для нахождения выживающей стратегии зададимся вопросом, существует ли такое p, что для любого q процесс r_t имеет конечный нижний предел с вероятностью 1 при $t \to \infty$? Ответ, конечно же, зависит от структуры r_t. Однако вопрос такого асимптотического характера можно свести к изучению локальных свойств процесса, что заметно упрощает задачу. А именно, если найдется p, что для любого q процесс r_t является ограниченным субмартингалом (или «не слишком сильно» отклоняется от некоторого ограниченного субмартингала), то положительный ответ на вопрос будет следовать из известной теоремы Дуба о сходимости[8]. Это позволяет искать значение p из некоторого минимаксного условия, ограничивающего снизу подходящим об-

[5] *Amir R.* [et al.]. Market selection and survival of investment strategies // Journal of Mathematical Economics. 2005. Vol. 41, no. 1/2. P. 105–122.

[6] *Evstigneev I. V.*, *Hens T.*, *Schenk-Hoppé K. R.* Market selection of financial trading strategies: global stability // Mathematical Finance. 2002. Vol. 12, no. 4. P. 329–339.

[7] *Evstigneev I.*, *Hens T.*, *Schenk-Hoppé K. R.* Evolutionary behavioral finance // The Handbook of Post Crisis Financial Modelling / ed. by E. Haven [et al.]. Palgrave Macmillan UK, 2016. P. 214–234.

[8] *Дуб Д. Л.* Вероятностные процессы / пер. с англ. Р. Л. Добрушина, А. М. Яглома. Издательство иностранной литературы, 1956. Гл. VII, § 4, теорема 4.1s.

разом коэффициент сноса r_t. Если искомое p существует, то оно и будет задавать выживающую стратегию. Ее свойства затем выводятся из сходимости субмартингала и его компенсатора. Таким образом, возникает следующая задача: существует ли такое p (и, если да, то как его найти?), что заданное параметрическое семейство процессов $\{r_t(p,q)\}_q$ является семейством субмартингалов?

Теория мартингалов оказывается очень удобным инструментом в изучаемых нами играх, как, в общем-то, и в других задачах финансовой математики (получить представление о глубине мартингального подхода можно из монографий Ширяева[9] и Мушиелы и Рутковски[10]). Пока, правда, продвинутые мартингальные методы еще не нашли должного применения в вопросах, относящихся к динамическим вероятностным эволюционным играм. Настоящая диссертация призвана частично заполнить этот пробел. В ней будут развиты как методы общего характера, так и исследованы их применения к конкретным моделям.

Упомянем еще одно направление в финансовой математике, тесно связанное с темой диссертации, — теорию *асимптотически оптимальных стратегий* (или *стратегий оптимального роста*). Ими называют стратегии, которые обеспечивают наибольшую скорость роста капитала при времени $t \to \infty$. Этот раздел хорошо изучен для моделей с *экзогенными* ценами активов, т. е. когда цены задаются случайными процессами, не зависящими от действий агентов. Первые работы здесь появились в 1950–1960-х гг. (статьи Келли[11] и Бреймана[12]), и затем эта область привлекла внимание большого числа специалистов в теории случайных процессов. Основные результаты можно найти в монографиях Платена и Хита[13] и Каратзаса и Кардараса[14]. Развиваемая нами теория представляет собой обобщение теории асимптотически оптимальных стратегий на модели с *эндогенными* ценами, но при этом случаю экзогенных цен в диссертации тоже уделяется внимание.

Цель работы

Цель работы состоит в развитии теории динамических вероятностных эволюционных игр и близких к ней областей с помощью методов теории мартингалов, а также в исследовании конкретных моделей таких игр, возникающих в финансовой математике.

---

[9] *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. МЦНМО, 2016.

[10] *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, 2004.

[11] *Kelly Jr. J. L.* A new interpretation of information rate // Bell System Technical Journal. 1956. Vol. 35, no. 4. P. 917–926.

[12] *Breiman L.* Optimal gambling systems for favorable games // Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 1. 1961. P. 63–68.

[13] *Platen E., Heath D.* A Benchmark Approach to Quantitative Finance. Springer, 2006.

[14] *Karatzas I., Kardaras C.* Portfolio Theory and Arbitrage: A Course in Mathematical Finance. American Mathematical Society, 2021.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

— Предложены общие понятия динамической вероятностной эволюционной игры и выживающей стратегии. Введено понятие стратегии относительного роста, которая, в частности, всегда является выживающей. Получены достаточные условия их существования.

— Проведено детальное исследование базовой модели динамической вероятностной эволюционной игры с дискретным временем (модели AESH — Амира—Евстигнеева—Шенк-Хоппе). В ней доказаны новые свойства выживающих стратегий, получены необходимые и достаточные условия выживаемости, построено диффузионное приближение модели.

— Доказано существование (с описанием явной конструкции) стратегий относительного роста в обобщениях модели AESH на игры с разными типами активов и ограничениями, а также совокупными выплатами, зависящими от стратегий игроков, и на модели с непрерывным временем. Доказано, что присутствие игроков с такими стратегиями определяет динамические характеристики игры в пределе по времени.

— Доказано существование асимптотически оптимальных стратегий в стохастических системах фон Неймана—Гейла, возникающих в моделях рынков с экзогенными ценами. Доказан критерий риск-допустимого хеджирования контрактов в таких моделях.

— Сформулировано понятие популяционной выживающей стратегии, являющееся более слабой версией понятия выживающей стратегии. Доказано существование таких стратегий в двух моделях динамических вероятностных эволюционных игр с дискретным и непрерывным временем.

Методы исследования

Центральное место в математическом аппарате работы занимают методы теории мартингалов, в особенности теоремы о сходимости мартингалов и мартингальные разложения. Обширно применяются различного рода вероятностные и информационные неравенства. Кроме того, используются методы теории стохастических дифференциальных уравнений, теории случайных множеств, стохастической оптимизации и предельных теорем для случайных процессов.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, восьми глав и списка литературы. Общий объем — 252 страницы. Список литературы содержит 121 наименование.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть применены для исследования асимптотической динамики вероятностных игр. Модели, изученные в работе, могут быть потенциально востребованы в практических применениях, связанных с финансовой математикой, в особенности в вопросах выбора долгосрочных инвестиционных стратегий.

Избранные разделы диссертации могут быть включены в курсы лекций для студентов и аспирантов, специализирующихся в области теории вероятностей, случайных процессов и их приложений в экономике.

Апробация работы

В период с 2013 г. по 2024 г. соискатель выступал с докладами по результатам диссертации на 16 научных конференциях, в том числе на 8 конференциях за рубежом (три во Франции, две в Японии и по одной в Австралии, Китае и США) и 4 международных конференциях в России. Полный список конференций приведен во введении к диссертации.

Кроме того, соискатель выступал с докладами на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2018 г.), Общеинститутском семинаре МИАН «Математика и ее приложения» (2023 г.), Семинаре ЦЭМИ РАН «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» (2022, 2024 гг.), Семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики МИАН (2024 г.).

Публикации

Список работ автора приведен в конце автореферата. Основные результаты диссертации изложены в 14 научных статьях, опубликованных в рецензируемых научных журналах, включенных в базы цитирования Web of Science и Scopus (наименования 1–5, 7–12, 14, 16, 17 в списке). Также по теме диссертации у автора имеются две работы, являющиеся тезисами докладов на международных конференциях, опубликованными в рецензируемом научном журнале (работы 13, 15) и одна работа, опубликованная в рецензируемом сборнике трудов международной конференции (работа 6).

Шесть работ выполнены в соавторстве. Все результаты из них, выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава носит вводный характер. Ее цель — дать определение основных понятий, используемых в работе, а также установить некоторые общие свойства динамических вероятностных эволюционных игр.

Определение. *Динамической вероятностной эволюционной игрой* будем называть совокупность $\mathscr{G} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}, \mathcal{I}, (\mathcal{S}_m)_{m=1}^M, R, \mathcal{A})$, где

— $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство;

— $\mathcal{I}$ — множество начальных условия игры;

— $\mathcal{S}^m$ — множество стратегий игрока $m \in \{1, \ldots, M\}$;

— R — отображение из подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}^1 \times \ldots \times \mathcal{S}^M$ в множество случайных процессов на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ с параметром $t \geqslant 0$, принимающих значения в множестве $\Delta^M = \{r \in \mathbb{R}_+^M : r^1 + \ldots + r^M = 1\}$.

Профилем стратегий в игре $\mathcal{G}$ называется набор $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^M) \in \mathcal{S}^1 \times \ldots \times \mathcal{S}^M$. Пара из начального условия $i_0 \in \mathcal{I}$ и профиля стратегий Λ называется *допустимой*, если $(i_0, \Lambda) \in \mathcal{A}$. Процесс $R_t(i_0, \Lambda) = [R(i_0, \Lambda)]_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, называется *процессом относительного капитала игроков*, а его компонента $R_t^m(i_0, \Lambda)$ — процессом относительного капитала игрока m. (При рассмотрении игр с дискретным временем вместо случайных процессов речь будет идти о случайных последовательностях.)

Динамическая вероятностная эволюционная игра описывает изменение относительного капитала игроков в зависимости от выбранных ими стратегий и заданных начальных условий (термин *капитал* весьма условен; он используется потому, что изучаемые далее приложения относятся к финансовой математике). Такие игры представляют собой системы агентов, соперничающих за обладание капиталом, и в силу аналогий с понятиями из моделей популяционной динамики мы называем их *эволюционными*. Мы называем их *динамическими* и *вероятностными*, чтобы подчеркнуть отличие от классических моделей эволюционной теории игр, касающихся вопросов устойчивых состояний и имеющих дело с неслучайными играми.

Определение. Стратегия $\lambda^m \in \mathcal{S}^m$ называется *выживающей стратегией* игрока m, если $\liminf_{t\to\infty} R_t^m(i_0, \Lambda) > 0$ п. н. для любой пары $(i_0, \Lambda) \in \mathcal{A}$, в которой профиль $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^M)$ содержит данную стратегию.

Определение. Стратегия $\lambda^m \in \mathcal{S}^m$ называется *стратегией относительного роста* игрока m, если для любой пары $(i_0, \Lambda) \in \mathcal{A}$, в которой профиль $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^M)$ содержит данную стратегию, процесс $R_t^m(i_0, \Lambda)$ является положительным, а процесс $\ln R_t^m(i_0, \Lambda)$ является субмартингалом относительно некоторой фильтрации $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$, входящем в определение игры $\mathscr{G}$.

Из теоремы Дуба о сходимости субмартингалов следует, что любая стратегия относительного роста является выживающей. Первую, как правило, проще искать, так как условие субмартингальности сводится к локальному свойству процесса $\ln R_t^m$ — неотрицательности его коэффициента сноса.

В диссертации, в основном, изучаются игры, обладающие симметрией (несимметричные игры рассматриваются только в главе 8). В таких играх указание номера игрока в двух предыдущих определениях можно опустить.

Главным результатом первой главы является теорема о существовании стратегий относительного роста в *последовательных* играх.

Определение. Будем называть динамическую вероятностную эволюционную игру $\mathscr{G}$ *последовательной*, если выполнены следующие условия.

a) На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ задана фильтрация $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0}^{\infty}$ с дискретным временем.

b) Для каждого $m = 1, \ldots, M$ задана последовательность измеримых пространств $(H_t^m, \mathcal{H}_t^m)$, $t \geqslant 1$.

c) Для каждого $m = 1, \ldots, M$ множество $\mathcal{S}^m$ состоит из всех последовательностей функций $\lambda^m = (\lambda_t^m)_{t=1}^{\infty}$, где $\lambda_t^m = \lambda_t^m(i_0, \omega, h_1, \ldots, h_{t-1})$ определены на $\mathcal{I} \times \Omega \times H_1 \times \ldots H_{t-1}$, принимают значения в H_t^m и для каждого $i_0 \in \mathcal{I}$ являются $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{t-1}$-измеримыми по переменным $(\omega, h_1, \ldots, h_{t-1})$, где $H_s = H_s^1 \times \ldots \times H_s^M$ и $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_s^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_s^M$.

d) $\mathcal{A} = \mathcal{I} \times \mathcal{S}^1 \times \ldots \times \mathcal{S}^M$.

e) Отображение R представимо в виде

$$[R(i_0, \Lambda)]_t(\omega) = R_t(i_0, \omega, h_1(\omega), \ldots, h_t(\omega)),$$

где $R_t \colon \mathcal{I} \times \Omega \times H_1 \times \ldots \times H_t \to \Delta^M$ являются $\mathscr{F}_t \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_t$-измеримыми функциями для каждого $i_0 \in \mathcal{I}$, а последовательность $h = (h_t)_{t=1}^{\infty}$ состоит из случайных элементов $h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^M)$, компоненты которых для заданного начального условия i_0 и профиля стратегий Λ определяются рекуррентным соотношением

$$h_t^m(\omega) = \lambda_t^m(i_0, \omega, h_1(\omega), \ldots, h_{t-1}(\omega)).$$

Последовательности $h^m = (h_t^m)_{t=1}^{\infty}$ называются *реализациями* стратегий игроков, а набор $(i_0, h_1, \ldots, h_t)$ — *историей игры* до момента t.

Интерпретация понятия последовательной игры заключается в том, что действия игрока в момент времени $t-1$ описываются функцией λ_t, которая учитывает информацию, содержащуюся в σ-алгебре $\mathscr{F}_{t-1}$, а также начальное условие и действия всех игроков до этого момента.

Теорема. *Предположим, что в последовательной игре $\mathscr{G}$ множества*

H_t^m являются выпуклыми компактами в пространстве $\mathbb{R}^N$ произвольной размерности N, а $\mathcal{H}_t^m$ — борелевские σ-алгебры на них.

Пусть функция $R_0^1(\omega, i_0)$ строго положительна, и для каждого $t \geqslant 1$ существует функция $L_t(i_0, \omega, h_1, \ldots, h_t)\colon \mathcal{I} \times \Omega \times H_1 \times \ldots \times H_t \to \mathbb{R}$, являющаяся $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_t$-измеримой для каждого $i_0 \in \mathcal{I}$ и удовлетворяющая следующим условиям для всех $i_0 \in \mathcal{I}$ и $h_1 \in H_1, \ldots, h_t \in H_t$.

a) Выполнено неравенство (п. н.)

$$\mathrm{E}(\ln R_t^1(i_0, h_1, \ldots, h_t) \mid \mathscr{F}_{t-1}) \geqslant \ln R_{t-1}^1(i_0, h_1, \ldots, h_{t-1}) + L_t(i_0, h_1, \ldots, h_t).$$

b) Для любых $\omega \in \Omega$ и $h_t^2 \in H_t^2, \ldots, h_t^M \in H_t^M$ найдется элемент $h_t^1 \in H_t^1$ такой, что $L_t(i_0, \omega, h_1, \ldots, h_t) \geqslant 0$.

c) Для любого $\omega \in \Omega$ функция $l(h_t^1, \ldots, h_t^M) = L_t(i_0, \omega, h_1, \ldots, h_t)$, где $h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^M)$, является непрерывной, а также квазивогнутой по переменной h_t^1 и квазивыпуклой по переменным $h_t^2, \ldots, h_t^M$.

Тогда у игрока 1 имеется стратегия относительного роста.

Эта теорема, однако, не дает явной конструкции, поэтому для нахождения стратегий относительного роста и выживающих стратегий в рассматриваемых далее конкретных моделях применяются другие идеи.

Во второй главе изучается модель динамической вероятностной эволюционной игры, предложенная в работе Амира, Евстигнеева и Шенк-Хоппе[15] (*модель AESH*). Ее можно описать следующим образом.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ с дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0}^{\infty}$ задана согласованная последовательность случайных векторов $X = (X_t)_{t=1}^{\infty}$ со значениями в $\mathbb{R}_+^N$. Векторы X_t представляют выплаты N активов в моменты времени $t = 1, 2, \ldots$, которые распределяются между M игроками. Стратегия игрока задается последовательностью $\lambda = (\lambda_t)_{t=1}^{\infty}$, где $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^N)$ — $\mathscr{F}_{t-1}$-измеримый случайный вектор в множестве Δ^N, показывающий, в каких пропорциях игрок вкладывает свой капитал в активы в момент времени $t-1$ (рассмотрение стратегий, не зависящих от истории игры, здесь не умаляет общности рассуждений).

Для заданного профиля стратегий $\Lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^M)$ и вектора начального капитала $W_0 \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^M$ (int обозначает внутренность множества) капитал игроков определяется последовательностью случайных векторов $W = (W_t)_{t=0}^{\infty}$, где $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^M)$ имеет компоненты

$$W_t^m = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{mn} W_{t-1}^m}{\sum_{k=1}^{M} \lambda_t^{kn} W_{t-1}^k} X_t^n. \tag{1}$$

[15] *Amir R., Evstigneev I. V., Schenk-Hoppé K. R.* Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games // Annals of Finance. 2013. Vol. 9, no. 2. P. 121–144.

Относительный капитал игрока m полагается равным $R_t^m = W_t^m / \sum_{k=1}^M W_t^k$.

Согласно формуле (1), игрок получает часть выплаты, пропорциональную доле его вложений в каждый актив в предыдущий момент времени. В диссертации дается интерпретация этой модели как рынка из N короткоживущих активов, на котором цены активов устанавливаются из равенства спроса и предложения. Также показывается, что эта модель является частным случаем общего определения динамической вероятностной эволюционной игры.

Первая группа основных результатов главы состоит в улучшении ранее известных теорем о существовании и единственности выживающих стратегий. Обозначим $\widetilde{X}_t^n = X_t^n / \sum_{k=1}^N X_t^k$ и $\mu_t^n = \mathrm{E}(\widetilde{X}_t^n \mid \mathscr{F}_{t-1})$ (относительные выплаты активов и их условные ожидания) и введем последовательность случайных векторов $\mu_t = (\mu_t^1, \ldots, \mu_t^N)$, $t \geqslant 1$. Будем считать, что $\mu_t^n > 0$ п. н. для всех t и n. Пусть $\bar{\lambda}_t = \sum_{m=1}^M \lambda_t^m R_{t-1}^m$ представляет *репрезентативную стратегию* игроков. Для случайного вектора ξ запись $\|\xi\|$ будет обозначать случайную евклидову норму (т. е. случайную величину $\|\xi(\omega)\|$).

Теорема. *1. Пусть стратегия λ имеет строго положительные компоненты (т. е. $\lambda_t^n > 0$ п. н. для всех $t \geqslant 1$, $n = 1, \ldots, N$). Тогда она является выживающей, если выполнено условие*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_t^n \ln \frac{\mu_t^n}{\lambda_t^n} < \infty \text{ п. н.} \tag{2}$$

Если к тому же существует такая константа $\varepsilon > 0$, что $\mu_t^n \geqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 1$, $n = 1, \ldots, N$, то для того, чтобы λ была выживающей стратегией, достаточно выполнения условия

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\mu_t - \lambda_t\|^2 < \infty \text{ п. н.} \tag{3}$$

2. Пусть хотя бы один игрок использует стратегию λ, удовлетворяющую неравенству (2). *Тогда*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \|\mu_t - \bar{\lambda}_t\|^2 < \infty \text{ п. н.} \tag{4}$$

В частности, $\lim_{t\to\infty}(\mu_t - \bar{\lambda}_t) = 0$ п. н.

3. Для любой выживающей стратегии λ выполнено неравенство (3). *При этом, если $\mu_t^n \geqslant \varepsilon > 0$ п. н. для всех $t \geqslant 1$ и $n = 1, \ldots, N$, то условие* (3) *является необходимым и достаточным для того, чтобы стратегия λ со строго положительными компонентами являлась выживающей.*

Следствие. *Стратегия* $\widehat{\lambda}$ *с компонентами* $\widehat{\lambda}_t^n = \mu_t^n$ *является единственной стратегией относительного роста. Если хотя бы один игрок использует такую стратегию, то выполнено неравенство* (4).

Далее в главе рассматривается игра двух игроков без предположения, что хотя бы один из них использует выживающую стратегию. Будем говорить, что в конкретном профиле стратегий игрок m *асимптотически доминирует*, если $\lim_{t\to\infty} R_t^m = 1$ п. н., и *асимптотически не исчезает*, если $\limsup_{t\to\infty} R_t^m > 0$ п. н. Слово «асимптотически» далее для краткости будет опускаться.

Теорема. *Предположим, что последовательность* X_t *состоит из независимых одинаково распределенных векторов, компоненты которых линейно независимы,* $\mathrm{P}(X_t^n > 0) > 0$ *для всех* n*, а игроки используют константные стратегии* $\lambda^1, \lambda^2 \in \operatorname{int}\Delta^N$*, причем* $\lambda^1 \neq \lambda^2$*. Тогда игрок 1 не исчезает, если* $\mathrm{E}\ln(\sum_{n=1}^N \lambda^{1n}\widetilde{X}_t^n/\lambda^{2n}) > 0$*, и доминирует, если* $\sum_{n=1}^N \lambda^{2n}\mu^n/\lambda^{1n} \leqslant 1$.

Вторая группа основных результатов второй главы посвящена времени достижения «большого» уровня капитала стратегией $\widehat{\lambda}$ и представляет аналог известного результата Бреймана[16] для стратегии Келли: оказывается, что $\widehat{\lambda}$ достигает уровня капитала $l \to \infty$ в среднем не медленнее, чем любая другая стратегия.

Пусть τ_l^m обозначает первый момент времени, когда капитал игрока m достигает уровня $l > 0$, т. е. $\tau_l^m = \min\{t \geqslant 0 : W_t^m \geqslant l\}$, где $\min\emptyset = \infty$. Будем предполагать, что последовательность векторов выплат X имеет вид

$$X_1^n = \rho_1\widetilde{X}_1^n x_0, \qquad X_t^n = \rho_t\widetilde{X}_t^n\sum_{i=1}^N X_{t-1}^n, \quad t \geqslant 2,$$

где $\rho_t > 0$ — согласованная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\widetilde{X}_t = (\widetilde{X}_t^1, \ldots, \widetilde{X}_t^N)$ — согласованная последовательность случайных векторов в Δ^N, и $x_0 > 0$ — константа. (Последовательности ρ_t и $\widetilde{X}_t$ имеют простой смысл: ρ_t выражает скорость роста совокупной выплаты, а $\widetilde{X}_t$ — вектор относительных выплат активов.)

Теорема. *Предположим, что* $\mathrm{E}(\ln\rho_t)^2 < \infty$, $\mathrm{E}\ln\rho_t > 0$*, и существует константа* $\varepsilon > 0$ *такая, что* $\mathrm{E}(\widetilde{X}_t^n \mid \mathscr{F}_{t-1}) \geqslant \varepsilon$ *для всех* n *и* t*. Пусть игрок 1 использует стратегию* $\widehat{\lambda}$*. Тогда* $\mathrm{E}\,\tau_l^1 < \infty$ *для любого* $l > 0$*, причем для любого игрока* $m \in \{2, \ldots, M\}$ *выполнено неравенство*

$$\limsup_{l\to\infty} \frac{\mathrm{E}\,\tau_l^1}{\mathrm{E}\,\tau_l^m} \leqslant 1. \tag{5}$$

[16] *Breiman L.* Указ. соч.

При дополнительных предположениях доказывается также более сильная версия неравенства (5), где в правой части стоит константа меньше 1.

В третьей главе строится диффузионное приближение модели AESH, когда векторы выплат независимы и одинаково распределены, а игроков всего два и они используют стратегии, близкие к $\widehat{\lambda}$. С помощью этого приближения удается получить более точные условия асимптотического доминирования или исчезания игроков и описать динамику относительного капитала.

Рассматривается серия игр, индексированных параметром $\delta > 0$, в которых векторы выплат и стратегии игроков удовлетворяют соотношениям (с индексами $n, k = 1, \dots, N$ и $m = 1, 2$)

$$\mathrm{E}\, X_t^n = \mu^n, \qquad \operatorname{cov}(X_t^n, X_t^k) = \sigma^{nk}, \qquad \lambda^{\delta,mn} = \mu^n + b^{mn}\sqrt{\delta} + d^{mn}(\delta),$$

где параметры μ^n, σ^{nk}, b^{mn} фиксированы, а $d^{mn}(\delta) = o(\sqrt{\delta})$ при $\delta \to 0$. Предполагается, что компоненты векторов X_t линейно независимы. Без ограничения общности можно считать, что $W_0^1 + W_0^2 = 1$ и $\sum_{n=1}^N X_t^n = 1$. Тогда $W_t^1 + W_t^2 = 1$, и абсолютный капитал игроков совпадает с относительным.

Пусть W_t^δ — кусочно-постоянное вложение последовательности W_t^1 с фиксированным начальным условием W_0 в непрерывное время с шагом δ. Первый результат главы показывает, что в пределе при $\delta \to 0$ (в смысле слабой сходимости мер на пространстве Скорохода) получается процесс

$$dW_t = f(W_t)dt + g(W_t)dB_t, \tag{6}$$

где $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ — стандартное броуновское движение, а коэффициенты сноса и диффузии имеют вид

$$f(x) = x(1-x)\left(b^1 \mathcal{M}(b^2 - b^1)^T + r(b^1 - b^2)\mathcal{M}(b^2 - b^1)^T\right), \quad g(x) = x(1-x)v$$

с константой $v = \sqrt{(b^1 - b^2)\mathcal{S}(b^1 - b^2)^T}$ и матрицами

$$\mathcal{M} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\mu^1}, \dots, \frac{1}{\mu^N}\right), \qquad \mathcal{S} = \left(\frac{\sigma^{nk}}{\mu^n \mu^k}\right)_{n,k=1}^N.$$

Теорема. *Для любого $W_0 \in (0,1)$ уравнение (6) имеет единственное сильное решение W, принимающее значения в интервале $(0,1)$, и $W^\delta \to W$ по распределению при $\delta \to 0$.*

Затем доказывается теорема о предельном поведении процесса W. Определим коэффициенты

$$\theta_1 = b^1 \mathcal{M}(b^2 - b^1)^T + \frac{v^2}{2}, \qquad \theta_0 = \theta_1 + (b^1 - b^2)(\mathcal{M} - \mathcal{S})(b^1 - b^2)^T.$$

Теорема. *Пусть стратегии игроков различны ($b^1 \neq b^2$). Тогда справедливы следующие утверждения.*

a) Всегда выполнено неравенство $\theta_0 \geqslant \theta_1$.

b) Если $\theta_1 > 0$, то $\lim_{t\to\infty} W_t = 1$ п. н.

c) Если $\theta_1 \leqslant 0 \leqslant \theta_0$, то $\liminf_{t\to\infty} W_t = 0$, $\limsup_{t\to\infty} W_t = 1$ п. н., а процесс W является возвратным и имеет инвариантное распределение $F(dx) = \rho(x)dx$ с плотностью

$$\rho(x) = x^{\frac{2\theta_0}{v^2}-1}(1-x)^{-\frac{2\theta_1}{v^2}-1}, \qquad x \in (0,1).$$

Более того, если $\theta_1 < 0 < \theta_0$, то W является положительно возвратным процессом, $F([0,1]) = B(\frac{2\theta_0}{v^2}, -\frac{2\theta_1}{v^2}) < \infty$, и $W_t \to F/F([0,1])$ по распределению при $t \to \infty$ (B обозначает бета-функцию). Если $\theta_0 = 0$ или $\theta_1 = 0$, то процесс W является нулевым возвратным.

d) Если $\theta_0 < 0$, то $\lim_{t\to\infty} W_t = 0$.

В работе также рассматривается обобщение уравнения (6) на модель со сменой режимов: предполагается, что когда некоторая эргодическая марковская цепь ζ_t с непрерывным временем находится в состоянии $i \in \{1, \ldots, K\}$, то игра задается уравнением (6) с вектором математических ожиданий выплат $\mu(i) \in \mathbb{R}^N$, ковариационной матрицей $\sigma(i) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и стратегиями игроков $b^1(i)$, $b^2(i)$. Для такой модели получены условия, когда один из игроков асимптотически доминирует, или оба игрока асимптотически не исчезают, аналогичные условиям в предыдущей теореме, но выраженные через усреднение коэффициентов θ_0 и θ_1 по стационарному распределению цепи ζ.

В конце главы обсуждается диффузионное приближение игры с тремя и более игроками, хотя соответствующие результаты получаются менее точными по сравнению со случаем двух игроков.

Четвертая глава посвящена связи динамических вероятностных эволюционных игр и асимптотически оптимальных стратегий на рынках с экзогенными ценами. Под таким рынком понимается модель, в которой цены N активов задаются положительными случайными последовательностями $S^n = (S^n_t)_{t\geqslant 0}$, не зависящими от действия рыночных агентов, и, если агент следует стратегии, распределяющей капитал в пропорциях $\beta_t = (\beta^1_t, \ldots, \beta^N_t)$ между активами, то его капитал W_t определяется соотношением

$$W_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta^n_t W_{t-1}}{S^n_{t-1}} S^n_t. \tag{7}$$

Дробь под знаком суммы равна количеству единиц актива n, купленных в момент $t-1$. Умножая ее на S^n_t, получаем стоимость позиции в активе n в

момент t, и тогда сама сумма равна стоимости всего портфеля активов.

В главе рассматривается модель, в которой имеется N_1+N_2 активов двух типов: активы первого типа такие же, как в главе 2 — их выплаты X_t^n распределяются между игроками пропорционально, а активы второго типа имеют экзогенные цены S_t^n. Последовательности X_t, S_t заданы на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ и согласованы с фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Положим $Y_t^n = S_t^n/S_{t-1}^n$ для активов второго типа.

Стратегия игрока задается последовательностью вектор-функций $\lambda_t = (\alpha_t, \beta_t)$, $t \geqslant 1$, где α_t принимает значения в $\mathbb{R}_+^{N_1}$, а β_t — в $\mathbb{R}^{N_2}$, причем $\sum_{n=1}^{N_1} \alpha_t^n \leqslant 1$ и $\sum_{n=1}^{N_1} \alpha_t^n + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_t^n = 1$ (последнее равенство выражает тот факт, что λ_t — вектор пропорций). Компоненты стратегий, вообще говоря, могут зависеть от истории игры. Однако показывается, что для нахождения выживающих стратегий и стратегий относительного роста в классе всех стратегий достаточно найти их в классе стратегий вида $\lambda_t(\omega, w)$, где переменная w представляет зависимость от совокупного капитала игроков $\bar{W}_{t-1} = W_t^1 + \ldots + W_t^M$. Таким образом, можно считать, что λ_t является $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримой функцией.

Уравнение динамики капитала игрока m в рассматриваемой модели имеет вид (ср. с (1) и (7))

$$W_t^m = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{\alpha_t^{mn} W_{t-1}^m}{\sum_{k=1}^M \alpha_t^{kn} W_{t-1}^k} X_t^n + \sum_{n=1}^{N_2} \beta_t^{mn} W_{t-1}^m \frac{S_t^n}{S_{t-1}^n}, \tag{8}$$

где $\alpha_t^{mn}(\omega) = \alpha_t^{mn}(w, \bar{W}_{t-1}(\omega))$, $\beta_t^{mn}(\omega) = \beta_t^{mn}(w, \bar{W}_{t-1}(\omega))$ и последовательности $W_t^m(\omega)$ определяются рекуррентно.

В игре могут присутствовать ограничения на стратегии, которые задаются $\mathscr{F}_{t-1}$-измеримыми случайными множествами $C_t(\omega) \subseteq \mathbb{R}_+^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$: стратегии должны быть такими, что $\lambda_t(\omega, w) \in C_t(\omega)$ для всех t, ω, w.

Предполагается, что множества C_t удовлетворяют следующим условиям для всех $t \geqslant 1$ и $\omega \in \Omega$ (далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение).

a) Существуют случайные множества $A_t \subseteq \mathbb{R}_+^{N_1}$ и $B_t \subseteq \mathbb{R}^{N_2}$ такие, что

$$C_t(\omega) = \{(u\alpha, (1-u)\beta) \mid \alpha \in A_t(\omega),\ \beta \in B_t(\omega),\ u \in [0,1]\},$$

причем A_t, B_t являются $\mathscr{F}_{t-1}$-измеримыми, непустыми, выпуклыми, замкнутыми, а также $\langle e, \alpha\rangle = 1$, $\langle e, \beta\rangle = 1$ для любых $\alpha \in A_t$, $\beta \in B_t$.

b) Найдется вектор $\alpha \in A_t(\omega)$, все компоненты которого положительны.

c) $\mathrm{P}_{t-1}(\langle \beta, Y_t\rangle \geqslant 0)(\omega) = 1$ для любых $\beta \in B_t(\omega)$.

d) $B_t^p(\omega) \subseteq B_t(\omega)$, где B_t^p — проекция B_t на ортогональное дополнение к пространству $\mathcal{N}_t = \{\beta \in \mathbb{R}^{N_2} : \langle e, \beta\rangle = 0,\ \mathrm{P}_{t-1}(\langle \beta, Y_t\rangle = 0)(\omega) = 1\}$ (пространство *портфелей нулевой ценности*).

e) Не существует векторов $\zeta \in \mathcal{Z}_t(\omega)$ и $\beta \in B_t(\omega)$ со свойством $\beta + u\zeta \in B_t(\omega)$ для любого числа $u > 0$ (*отсутствие неограниченного арбитража*).

Первая теорема главы касается конструкции стратегии относительного роста. Пусть далее E_{t-1} обозначает математическое ожидание при условии σ-алгебры $\mathscr{F}_{t-1}$; множества A_t^0 и B_t^0 обозначают выпуклые оболочки нуля и множеств A_t, B_t; наконец, если $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор, то положим $\ln x = (\ln x^1, \ldots, \ln x^n)$.

Теорема. *1. Для всех $t \geqslant 1$ справедливы следующие утверждения.*

a) Для $i = 1, 2, \ldots$ определим функции $g_i(x) = 1/i + i \arctan(x/i)$, где $x \in \mathbb{R}_+$. Тогда для всех i, ω, w множества $M_{t,i}(\omega, w)$, заданные формулой

$$M_{t,i} = \operatorname*{arg\,max}_{\beta \in B_t^0} \bigl\{ \mathrm{E}_{t-1} \ln g_i(\langle e,\, X_t \rangle + w \langle \beta,\, Y_t \rangle) - \langle e,\, \beta \rangle \bigr\},$$

не пусты и $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримы.

b) Существуют $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримые функции $\widehat{\beta}_t$, $(\beta_{t,i})_{i=1}^{\infty}$ и неубывающая последовательность $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримых индексов $(i_j)_{j=1}^{\infty}$ такие, что $\beta_{t,i} \in M_{t,i}$ и $\widehat{\beta}_t = \lim\limits_{j \to \infty} \beta_{t,i_j}$.

c) Для найденной функции $\widehat{\beta}_t$ определим множество $\widehat{A}_t(\omega, w) = \{\alpha \in A_t^0(\omega) : \langle e,\, \alpha \rangle + \langle e,\, \widehat{\beta}_t(\omega, w) \rangle = 1\}$. Тогда существует $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримая функция $\widehat{\alpha}_t$ такая, что

$$\widehat{\alpha}_t \in \operatorname*{arg\,max}_{\alpha \in \widehat{A}_t} \left\{ \mathrm{E}_{t-1} \frac{\langle \ln \alpha,\, X_t \rangle}{\langle e,\, X_t \rangle + w \langle \widehat{\beta}_t,\, Y_t \rangle} \right\}.$$

2. Любая стратегия $\widehat{\lambda} = (\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$, определенная указанным выше способом, является стратегией относительного роста.

Приводимая конструкция выглядит громоздкой, однако в работе приводятся частные случаи, в которых она становится проще (основная трудность вызвана тем, что логарифм капитала может быть неинтегрируем, из-за чего приходится рассматривать его усечение с помощью функций g_i).

Вторая теорема касается сходимости компоненты $\bar{\alpha}_t = \sum_{m=1}^{M} \alpha_t^m R_{t-1}^m$ репрезентативной стратегии $\bar{\lambda}_t = (\bar{\alpha}_t, \bar{\beta}_t)$ к $\widehat{\alpha}_t$.

Теорема. *Предположим, что в модели отсутствуют ограничения на активы первого типа, т. е. $A_t = \Delta^{N_1}$. Пусть игрок 1 использует стратегию $\widehat{\lambda}$. Тогда выполнено неравенство $\sum_{t=1}^{\infty} \|\alpha_t^1 - \bar{\alpha}_t\|^2 < \infty$ п. н.*

В главе показывается, что если определить цены активов первого типа P_t^n из условия равенства спроса и предложения, то они выражаются через компоненты репрезентативной стратегии: $\mathrm{P}_t^n = \bar{\alpha}_t^n \bar{W}_t$. Таким образом, вторая теорема позволяет предсказать асимптотическую динамику цен.

В пятой главе, используя теорию динамических систем фон Неймана—Гейла, более детально изучаются асимптотически оптимальные стратегии в моделях с экзогенными ценами, а также рассматривается задача хеджирования контрактов, которая решается схожими методами.

Модель фон Неймана[17], впоследствии обобщенная Гейлом[18], является одной из первых математических моделей роста экономики. Результаты в диссертации продолжают исследования середины 2000-х гг., в которых было замечено, что стохастическая версия модели фон Неймана—Гейла может применяться для моделирования финансовых рынков[19].

Дадим общие определения, ориентируясь на применения к моделям рынков акций. Будем считать заданным вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ с дискретной фильтрацией $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0}^{\infty}$.

Определение. *Стохастическая система фон Неймана—Гейла* состоит из последовательности $\mathscr{F}_t$-измеримых случайных конусов $X_t(\omega) \subseteq \mathbb{R}^N$, $t \geqslant 0$, и последовательности $\mathscr{F}_t$-измеримых случайных конусов $Z_t(\omega) \subseteq X_{t-1}(\omega) \times X_t(\omega)$, $t \geqslant 1$. Конус X_t называется *пространством состояний* в момент времени t, а конус Z_t — *переходным множеством* из X_{t-1} в X_t.

Последовательность $\mathscr{F}_t$-измеримых случайных векторов $x = (x_t)_{t=0}^{\infty}$ называется *траекторией системы*, если $(x_{t-1}, x_t) \in Z_t$ п. н. для всех $t \geqslant 1$.

Элементы траектории x_t можно интерпретировать как портфели активов, которые агент может приобрести в момент времени t. Конусы Z_t показывают, когда портфель x_{t-1} может быть преобразован в портфель x_t путем покупки и продажи активов. Конусы X_t представляют портфельные ограничения. Отметим, что, в отличие от экономических моделей, где координаты векторов x_t неотрицательны (они представляют наборы экономических благ, необходимых для реализации производственных процессов), в финансовых моделях допускается, что x_t может иметь отрицательные координаты, что соответствует «коротким» продажам. Это обстоятельство не позволяет так просто перенести ранее известные результаты на модели финансовых рынков и требует развития новых идей.

Определение. Траектория x называется *асимптотически оптимальной*, если для любой другой траектории y существует такой супермартингал $\xi = (\xi_t)_{t=0}^{\infty}$, что $\|y_t\|/\|x_t\| \leqslant \xi_t$ п. н. для всех $t \geqslant 0$.

Из определения асимптотической оптимальности и теоремы Дуба о схо-

[17] *Neumann J. von.* Über ein ökonomsiches Gleichungssystem und eine Verallgemeinering des Browerschen Fixpunktsatzes // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Bd. 8. 1937. S. 73–83.

[18] *Gale D.* The closed linear model of production // Linear Inequalities and Related Systems / ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. Princeton University Press, 1956. P. 285–303.

[19] *Dempster M.*, *Evstigneev I. V.*, *Taksar M.* Asset pricing and hedging in financial markets with transaction costs: an approach based on the von Neumann–Gale model // Annals of Finance. 2006. Vol. 2. P. 327–355.

димости вытекает свойство, являющееся аналогом выживаемости в предыдущих главах: если x является асимптотически оптимальной траекторией, то $\liminf_{t\to\infty} \|x_t\|/\|y_t\| > 0$ п. н. для любой другой траектории y.

В главе сначала приводятся общие результаты[20] о существовании асимптотически оптимальных траекторий при дополнительных предположениях на структуру конусов X_t и Z_t, среди которых наиболее существенным является ограничение на раствор конуса Z_t ($\|y\| \leqslant K_t\|x\|$ для всех $(x, y) \in Z_t$ с некоторой константой K_t). Затем вводится модель рынка активов, и в ней доказывается существование асимптотически оптимальных траекторий. Опишем эту модель и сформулируем соответствующую теорему.

Пусть определены следующие случайные величины: цены активов $S_t^n > 0$, $t \geqslant 0$, ставки транзакционных издержек $\tau_t^n \in [0, 1)$, $t \geqslant 1$, ставки дивидендной доходности $D_t^n \geqslant 0$, $t \geqslant 1$. Будем использовать обозначение $Y_t^n = S_t^n/S_{t-1}^n$ для доходностей активов. Считается, что если агент вложил сумму денег x_{t-1}^n в актив n в момент времени $t-1$, то в следующий момент стоимость его вложений в этот актив составит $Y_t^n x_{t-1}^n$, а также он получит дивиденды в размере $D_t^n x_{t-1}^n$.

В качестве пространств состояний системы возьмем неслучайные конусы $X_t = \{x \in \mathbb{R}^N : c_t|x^-| \leqslant |x^+|\}$, где константы $c_t > 1$ задают ограничения на «финансовый рычаг» (*левериджс*), а $|\cdot|$ — норма в ℓ^1. Пусть переходные конусы выражают условие *самофинансируемости* (отсутствия притока капитала извне): $Z_t = \{(x, y) \in X_{t-1} \times X_t : \psi_t(\omega, x, y) \geqslant 0\}$, где функция ψ интерпретируется как прибыль от преобразования портфеля x в портфель y с учетом дивидендов и транзакционных издержек и задается формулой

$$\psi_t(\omega, x, y) = \sum_{n=1}^{N} (1 - \tau_t^n(\omega))(Y_t^n(\omega)x^n - y^n)^+ - \sum_{n=1}^{N} (1 + \tau_t^n(\omega))(Y_t^n(\omega)x^n - y^n)^- + \langle x,\, D_t(\omega)\rangle.$$

Теорема. *Для существования асимптотически оптимальных траекторий в описанной модели достаточно выполнения следующих условий.*

a) Найдутся константы $0 \leqslant \underline{Y} \leqslant \bar{Y}$, $0 \leqslant \bar{\tau}$ и $0 \leqslant \underline{D} \leqslant \bar{D}$ такие, что для всех $t \geqslant 1$ и $n = 1, \ldots, N$ п. н. выполнены соотношения $Y_t^n \in [\underline{Y}, \bar{Y}]$, $\tau_t^n \in [0, \bar{\tau}]$, $D_t^n \in [\underline{D}, \bar{D}]$.

b) Для каждого $t \geqslant 0$ константа c_t из определения конуса X_t удовлетворяет неравенству

$$c_t > \frac{(1 + \bar{\tau})\bar{Y} + \bar{D}}{(1 - \bar{\tau})\underline{Y} + \underline{D}}.$$

[20] Эти результаты опубликованы в работах соискателя и соавторов (наименования 1, 2 из списка работ), но принадлежат, главным образом, соавторам; на защиту не выносятся.

Во второй части главы рассматривается задача *хеджирования*, т. е. нахождения стратегии, обеспечивающей возможность осуществить выплаты по некоторому контракту. Хотя хеджирование и не имеет непосредственного отношения к асимптотической оптимальности, мы рассматриваем эту задачу ввиду того, что она может быть решена с помощью аналогичных методов.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ с дискретной фильтрацией $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t=0}^T$ задана последовательность конусов $\mathcal{Z}_t \subseteq L_t^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $t = 0, \ldots, T$, которые выражают портфельные ограничения и условие самофинансируемости (L_t^1 обозначает пространство случайных векторов с $\mathscr{F}_t$-измеримыми и интегрируемыми компонентами).

Введем понятие торговой стратегии, аналогичное понятию траектории системы фон Неймана—Гейла.

Определение. *Торговой стратегией* называется последовательность пар $z = (z_t)_{t=0}^T$, где $z_t = (x_t, y_t) \in \mathcal{Z}_t$. *Контрактом* называется последовательность $\gamma = (\gamma_t)_{t=0}^T$ случайных векторов $\gamma_t \in L_t^1(\mathbb{R}^N)$.

Случайный вектор x_t, входящий в определение стратегии, представляет портфель активов, которым агент располагает до начала торгов в момент времени t. Вектор y_t — это новый портфель, полученный в ходе торгов. В определении контракта вектор γ_t представляет собой набор активов, который необходимо выплатить в момент t. Если γ_t имеет отрицательные компоненты, то соответствующее количество активов будет получено.

Пусть для всех $t = 0, \ldots, T$ заданы некоторые конусы $\mathcal{A}_t \subseteq L_t^1(\mathbb{R}^N)$, которые будем называть конусами *риск-допустимых портфелей*.

Определение. Стратегия $z = (z_t)_{t=0}^T$ *хеджирует* контракт $\gamma = (\gamma_t)_{t=0}^T$ с допустимым риском, если $y_{t-1} - x_t - \gamma_t \in \mathcal{A}_t$ для всех $t = 0, \ldots, T$, где $y_{-1} = 0$. Контракт называется *хеджируемым* (с допустимым риском), если существует стратегия, хеджирующая его.

В качестве простого примера конуса риск-допустимых портфелей можно взять $L_t^1(\mathbb{R}_+^N)$, т. е. хеджирующая стратегия должна обеспечивать выплаты по контракту с вероятностью 1 ($y_{t-1} - x_t \geqslant \gamma_t$ п. н.). В работе приводится также другой пример, в котором стратегия может не обеспечивать выплаты с вероятностью 1, но конусы $\mathcal{A}_t$ имеют параметр, который позволяет управлять степенью допустимого риска. При рассмотрении этого примера вводится понятие *монотонного отношения Шарпа* (модификация *отношения Шарпа* — хорошо известного в финансовой математике показателя эффективности инвестиционных стратегий), которое представляет самостоятельный интерес.

Основной результат второй части главы состоит в описании множества хеджируемых контрактов в терминах *согласованных систем цен*. Введем обозначение $\mathcal{A}_t^+ = \mathcal{A}_t \setminus (-\mathcal{A}_t)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{A}_t^+ \neq \emptyset$ для всех t, а также для каждого t существует вектор $p_t \in L_t^\infty(\mathbb{R}^N)$ такой, что $\mathrm{E}\langle a, p_t\rangle > 0$ для всех $a \in \mathcal{A}_t^+$.

Определение. *Согласованной системой цен* называется последовательность $p = (p_t)_{t=0}^T$ случайных векторов $p_t \in L_t^\infty(\mathbb{R}^N)$ со свойствами

$$\mathrm{E}\langle x,\, p_t\rangle \geqslant \mathrm{E}\langle y,\, p_{t+1}\rangle \text{ для любых } (x,y) \in \mathcal{Z}_t,\ t = 0,\dots,T,$$
$$\mathrm{E}\langle a,\, p_t\rangle > 0 \text{ для любого } a \in \mathcal{A}_t^+,\ t = 0,\dots,T,$$

где в первом равенстве полагается $p_{T+1} = 0$.

Определение. Модель, задаваемая конусами $\mathcal{Z}_t$ и $\mathcal{A}_t$, обладает *свойством хеджирования (H)*, если существует хотя бы одна согласованная система цен, а любой контракт является хеджируемым тогда и только тогда, когда $\sum_{t=0}^T \mathrm{E}\langle \gamma_t,\, p_t\rangle \leqslant 0$ для любой согласованной системы цен, т. е. стоимость контракта в такой системе цен неположительна.

Теорема. *Предположим, что в рассматриваемой модели конусы $\mathcal{Z}_t$ и $\mathcal{A}_t$ замкнуты относительно L^1-ограниченной сходимости с вероятностью 1. Пусть также найдется константа $m \in [0,1)$ и случайные векторы $s_t^1, s_t^2 \in L_t^\infty(\mathbb{R}^N)$ с компонентами $s_t^{i,n} \in [\underline{s}, \bar{s}]$, где $\underline{s}, \bar{s} > 0$ — константы, что для всех $(x_t, y_t) \in Z_t$ и $a_t \in \mathcal{A}_t$, $t = 0,\dots,T$, выполнены следующие условия:*

a) $\mathrm{E}\langle x_t,\, s_t^1\rangle \geqslant \mathrm{E}\langle y_t,\, s_t^2\rangle$;

b) $m\,\mathrm{E}\langle y_t^+,\, s_t^2\rangle \geqslant \mathrm{E}\langle y_t^-,\, s_t^2\rangle$;

c) $m\,\mathrm{E}\langle x_t^+,\, s_t^1\rangle \geqslant \mathrm{E}\langle x_t^-,\, s_t^1\rangle$;

d) $\mathrm{E}\langle a_t,\, s_t^1\rangle \geqslant 0$.

Тогда модель обладает свойством (H).

Шестая глава посвящена играм, подобным тем, что рассматривались в главе 2, но в которых выплаты активов зависят от стратегий игроков. Эти модели позволяют, например, изучать динамику игр, где более популярные активы приносят бóльшие выплаты (или, наоборот, меньшие). Основные результаты состоят в построении стратегий относительного роста в случаях, когда величины выплат активов или вероятности выплат являются аффинными функциями от репрезентативной стратегии всех игроков.

В общем виде выплаты задаются последовательностью $X = (X_t)_{t=1}^\infty$, состоящей из $\mathscr{F}_t \otimes \mathcal{B}(\Delta^N)$-измеримых функций $X_t(\omega, l)$ со значениями в $\mathbb{R}_+^N$, где аргумент l соответствует текущему значению вектора репрезентативной стратегии. Стратегиями игроков являются предсказуемые последовательности случайных векторов $\lambda = (\lambda_t)_{t=1}^\infty$ со значениями в Δ^N (как и в главе 2, рассмотрение стратегий, не зависящих от истории игры, не умаляет общности результатов).

Для заданного профиля стратегий $\Lambda = (\lambda^1,\dots,\lambda^M)$ и вектора начального капитала $W_0 = (W_0^1,\dots,W_0^M) \in \operatorname{int}\mathbb{R}_+^N$ капитал игроков определяется

согласованной последовательностью векторов $W = (W_t)_{t=0}^{\infty}$ с компонентами

$$W_t^m = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^{mn} W_{t-1}^m}{\sum_{k=1}^{M} \lambda_t^{kn} W_{t-1}^k} X_t^n(\bar{\lambda}_t), \tag{9}$$

где вектор $\bar{\lambda}_t = \sum_{m=1}^{M} \lambda_t^m R_{t-1}^m$ обозначает репрезентативную стратегия, а $R_t^m = W_t^m / \sum_{k=1}^{M} W_t^k$ — относительный капитал игрока m. Уравнение (9) совпадает с уравнением динамики капитала из главы 2 (см. (1)), с той лишь разницей, что теперь выплаты зависят от $\bar{\lambda}_t$.

Чтобы избежать вырожденной динамики, будем предполагать, что для всех $n = 1, \ldots, N$, $t \geqslant 1$ и любого вектора $l \in \operatorname{int} \Delta^N$ выполнено условие $\mathrm{P}(X_t^n(l) > 0 \mid \mathscr{F}_{t-1}) > 0$.

В первой части главы рассматриваются функции выплат вида

$$X_t^n(\omega, l) = a_t^n(\omega) + b_t^n(\omega) l^n,$$

где величины $a_t^n \geqslant 0$ и $b_t^n \geqslant 0$ являются $\mathscr{F}_t$-измеримыми и удовлетворяют неравенству $a_t^n + b_t^n > 0$ п. н. Для построения стратегии относительного роста введем последовательность $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\Delta^N)$-измеримых функций $L_t(\omega, l) = (L_t^1(\omega, l), \ldots, L_t^N(\omega, l))$, $t \geqslant 1$, с компонентами

$$L_t^n(l) = \mathrm{E}_{t-1} \frac{a_t^n + b_t^n l^n}{\sum_{k=1}^{N} (a_t^k + b_t^k l^k)},$$

где E_{t-1} обозначает математическое ожидание при условии σ-алгебры $\mathscr{F}_{t-1}$. Пусть $\bar{X}_t(l) = \sum_{n=1}^{N} X_t^n(l)$ обозначает совокупную выплату активов.

Теорема. *1. Найдется стратегия $\widehat{\lambda}$ такая, что для всех $t \geqslant 1$ с вероятностью 1 выполнены соотношения*

$$\bar{X}_t(\widehat{\lambda}_t) > 0, \tag{10}$$

$$\mathrm{E}_{t-1} \frac{b_t^n}{\bar{X}_t(\widehat{\lambda}_t)} \leqslant 1 \text{ для всех } n = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

$$L_t(\widehat{\lambda}_t) = \widehat{\lambda}_t. \tag{12}$$

2. Стратегия, удовлетворяющая условиям (10)–(12)*, является стратегией относительного роста.*

Как следует из (12), стратегию относительного роста можно найти в виде неподвижной точки функции L_t. Условия (10), (11) носят технический характер и нужны для выбора «хорошей» неподвижной точки.

Следующая теорема показывает, что при дополнительных предположениях имеет место сходимость репрезентативной стратегии к стратегии $\widehat{\lambda}$, что

дает возможность асимптотически предсказывать выплаты активов, пользуясь тем, что они функционально зависят от репрезентативной стратегии.

Теорема. *Пусть стратегия $\widehat{\lambda}$ удовлетворяет условиям* (10) *и* (12)*, а также следующей более сильной форме условия* (11)*: найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $t \geqslant 1$ и $n = 1, \ldots, N$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{E}_{t-1} \frac{b_t^n}{\bar{X}_t(\widehat{\lambda}_t)} \leqslant 1 - \varepsilon. \tag{13}$$

Тогда, если какой-то игрок использует $\widehat{\lambda}$, то $\sum_{t=1}^{\infty} \|\widehat{\lambda}_t - \bar{\lambda}_t\|^2 < \infty$ п. н.

Во второй части главы рассматривается модель, в которой функции выплат $X_t^n(l)$ принимают значения в множестве $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $e_1, \ldots, e_N$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^N$ (т. е. активы производят взаимоисключающие выплаты единичной величины), причем условные вероятности выплат $Q_t^n(\omega, l) = \mathrm{P}(X_t^n(l) = 1 \mid \mathscr{F}_{t-1})(\omega)$ являются аффинными:

$$Q_t(\omega, l) = a_t^n(\omega) + b_t^n(\omega) l^n,$$

где a_t^n, b_t^n — $\mathscr{F}_{t-1}$-измеримые случайные величины. Для того, чтобы Q_t^n образовывали распределение вероятностей, должны быть выполнены условия $Q_t^n(l) \geqslant 0$ и $\sum_{n=1}^N Q_t^n(l) = 1$ для всех $l \in \Delta^N$. Отсюда нетрудно получить, что коэффициенты b_t^n, $n = 1, \ldots, N$, должны быть равны.

Доказывается теорема, которая дает достаточное условие существования стратегии относительного роста и ее явную конструкцию.

Теорема. *Предположим, что $b_t \leqslant \min_n a_t^n$ для всех $t \geqslant 1$. Тогда стратегия $\widehat{\lambda}_t^n = a_t^n/(1 - b_t)$ является стратегией относительного роста в рассматриваемой игре.*

Если дополнительно выполнено условие $\limsup_{t\to\infty} (b_t - \min_n a_t^n) < 0$, то в любом профиле стратегий, где хотя бы один игрок использует стратегию $\widehat{\lambda}$, выполнено неравенство $\sum_{t=1}^{\infty} \|\widehat{\lambda}_t - \bar{\lambda}_t\|^2 < \infty$ п. н.

Нетрудно видеть, что $\widehat{\lambda}_t$ является неподвижной точкой функции Q_t. Заметим, что условие $b_t \leqslant \min_n a_t^n$ выполнено, если все коэффициенты b_t неположительны, т. е. вероятность исходов не увеличивается при росте их популярности. При $b_t > 0$ это условие гарантирует существование выживающей стратегии лишь в некоторой области значений коэффициентов a_t^n и b_t.

Далее в главе рассматривается случай, когда коэффициенты a_t^n и b_t постоянны, а стратегии игроков задаются константными векторами $\lambda \in \Delta^N$. Тогда стратегия $\widehat{\lambda}$ тоже константна, и справедлив результат, что в любом профиле стратегий выживают только игроки, использующую эту стратегию.

В последней части главы кратко обсуждается модель, в которой всего два актива, но зависимость $X_t(l)$ от l произвольна. Используя ту же идею,

что и в доказательстве теоремы в главе 1, находятся достаточные условия существования стратегий относительного роста.

В седьмой главе изучается игра с непрерывным временем, являющаяся аналогом модели из главы 4, в которой имеется один актив с постоянной экзогенной ценой («безрисковый актив») и N активов с эндогенными ценами.

Будем предполагать, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ задан случайный процесс $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ со значениями в $\mathbb{R}^N_+$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$, не убывающий, непрерывный справа по каждой координате и имеющий начальное значение $A_0 = 0$. Этот процесс представляет *накопленные* выплаты активов с эндогенными ценами.

Чтобы определить стратегии игроков, которые здесь могут зависеть от траектории процесса капитала, введем фильтрованное измеримое пространство $(D, \mathcal{D}, (\mathcal{D}_t)_{t\geqslant 0})$, состоящее из множества D функций $w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^M_+$, являющихся непрерывными справа и имеющих пределы слева в каждой точке, а также канонической σ-алгебры $\mathcal{D}$ и фильтрации $\mathcal{D}_t$ на нем. Функции $w \in D$ — это возможные траектории процесса капитала M игроков.

Положим $E = \Omega \times D$, $\mathscr{E}_t = \mathscr{F}_t \otimes \mathcal{D}_t$, $\mathscr{E} = \bigvee_{t\geqslant 0} \mathscr{E}_t$. Символом $\mathcal{P}^E$ будем обозначать предсказуемую σ-алгебру на $E\times\mathbb{R}_+$, т. е. σ-алгебру, порожденную $\mathscr{E}$-измеримыми функциями $\xi(\omega, w, t)\colon E\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, которые непрерывны по t для любых (ω, w) и $\mathscr{E}_t$-измеримы для любого t. Для краткости эти функции записываются как $\xi_t(\omega, w)$ или $\xi_t(w)$.

Стратегией игрока является $\mathcal{P}^E$-измеримая функция $L_t(\omega, w)$ со значениями в $\mathbb{R}^N_+$, которая не убывает и непрерывна справа по t, причем $L_0(\omega, w) = 0$. Компонента L^n_t выражает накопленную величину капитала, вложенного в актив n с эндогенной ценой до момента времени t. Капитал, не вложенный в активы с эндогенными ценами, хранится в безрисковом активе.

Пусть μ обозначает меру скачков процесса выплат A, а ν — ее компенсатор, и $A^c_t = A_t - \sum_{s\leqslant t} \Delta A_s$ обозначает непрерывную часть A. Определим предсказуемый процесс *операционного времени* $G_t = |A^c_t| + (|x| \wedge 1) * \nu_t$, где $|\cdot|$ — норма вектора в ℓ^1, а знак $*$ — интеграл по случайной мере.

Динамика капитала игроков в модели задается уравнением

$$dW^m_t = \sum_{n=1}^N \frac{\ell^{mn}_t}{\sum_{k=1}^N \ell^{kn}_t} dA^n_t - \sum_{n=1}^N dL^{mn}_t, \tag{14}$$

где $L^m_t(\omega) = L^m_t(\omega, W(\omega))$, а ℓ обозначает $\mathbb{R}^{MN}_+$-значный предсказуемый процесс производных Лебега $\ell^{mn}_t = dL^{mn}_t/dG_t$.

Интерпретация такой модели состоит в том, что выплаты активов с эндогенными ценами распределяются между игроками пропорционально текущим *интенсивностям* ℓ^{kn}_t вложений в активы. Это уравнение — непрерывный аналог уравнения (8), которое в случае одного актива с эндогенной

ценой $S_t \equiv 1$ можно переписать в виде

$$\Delta W_t^m = -\sum_{n=1}^{N} \Delta L_t^{mn} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta L_t^{mn}}{\sum_{k=1}^{M} \Delta L_t^{kn}} \Delta A_t^n,$$

где L_t^{mn} задает накопленную ставку игрока m на актив n, а A_t^n — накопленную выплату актива n (т. е. $L_t^{mn} = \sum_{s=1}^{t} \lambda_s^{mn} W_{s-1}^m$ и $A_t^n = \sum_{s=1}^{t} X_s^n$ в обозначениях главы 4).

Решением уравнения (14), если оно существует, является согласованный процесс ограниченной вариации $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ со значениями в $\mathbb{R}_+^M$, у которого траектории непрерывны справа и имеют пределы слева, а их компоненты задают капитал игроков. Относительный капитал отсюда выражается как $R_t^m = W_t^m / \sum_{m=1}^{M} W_t^m$.

Вопрос корректности определения модели здесь не прост. Будем называть пару (W_0, Λ), состоящую из вектора начального капитала и профиля стратегий, *допустимой*, если уравнение (14) имеет единственное решение с заданным начальным условием, и это решение обладает тем свойством, что если $W_t^m(\omega) = 0$ или $W_{t-}^m(\omega) = 0$, то $L_s^m(\omega) = L_{t-}^m(\omega)$ и $W_s^m(\omega) = 0$ для всех $s \geqslant t$. В диссертации приводятся достаточные условия на стратегии, при выполнении которых профиль стратегий является допустимым при любом начальном капитале. Показывается, что стратегия относительного роста, которую мы строим, им удовлетворяет.

Чтобы описать конструкцию стратегии относительного роста, положим $\bar{\nu}_t(\omega) = \nu(\omega, \{t\} \times \mathbb{R}_+^N)$ (условная вероятность скачка процесса A при условии σ-алгебры $\mathscr{F}_{t-}$) и разобьем множество $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times (0, \infty)$ на три подмножества $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, принадлежащих σ-алгебре $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$:

$$\Gamma_0 = \{(\omega, t, c) : \bar{\nu}_t(\omega) = 0\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{(\omega, t, c) : 0 < \bar{\nu}_t(\omega) < 1, \text{ или } \bar{\nu}_t(\omega) = 1 \text{ и } \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{c}{|x|} \nu_{\{t\}}(\omega, dx) > 1\right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{(\omega, t, c) : \bar{\nu}_t(\omega) = 1 \text{ и } \int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{c}{|x|} \nu_{\{t\}}(\omega, dx) \leqslant 1\right\}.$$

Аргумент c в тройке (ω, t, c) соответствует пределу слева процесса совокупного капитала в момент t. Эти множества различаются характером скачков процесса выплат; в диссертации дается более подробное объяснение их структуры. Далее показывается, что для любых $(\omega, t, c) \in \Gamma_1$ уравнение

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \frac{c}{z + |x|} \nu_{\{t\}}(\omega, dx) = 1 - \frac{c}{z}\big(1 - \bar{\nu}_t(\omega)\big)$$

имеет единственное решение $z^*(\omega, t, c) \in (0, c)$. Пусть $\zeta_t(\omega, c) = c\, \mathrm{I}_{\Gamma_0} + z^*\, \mathrm{I}_{\Gamma_1}$.

Известно, что непрерывная часть процесса выплат A^c_t и компенсатор ν его меры скачков представимы в виде $A^c_t(\omega) = \int_0^t b_s dG_s(\omega)$, $\nu(\omega, dt, dx) = K_{\omega,t}(dx)dG_t(\omega)$, где $b = (b_t)_{t\geqslant 0}$ — предсказуемый процесс со значениями в $\mathbb{R}^N_+$, а $K_{\omega,t}(dx)$ — переходное ядро из $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ в $(\mathbb{R}^N_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N_+))$; см. гл. II в монографии Жакода и Ширяева[21].

Определим $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-измеримую функцию $\widehat{\lambda}(\omega, t, c)$ со значениями в $\mathbb{R}^N_+$, которая будет играть роль интенсивности потока ставок на актив n:

$$\widehat{\lambda}_t(0) = 0, \qquad \widehat{\lambda}_t(c) = \frac{b_t}{c} + \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{x}{\zeta_t(c) + |x|} K_t(dx) \quad \text{для} \quad c > 0$$

(аргумент ω для краткости опущен). Наконец, определим стратегию для игрока m по формуле

$$\widehat{L}^m_t(w) = \int_0^t w^m_{s-} \widehat{\lambda}_s\big(|w_{s-}|\big) dG_s.$$

Теорема. *Стратегия $\widehat{L}$ является стратегией относительного роста.*

Доказывается также результат о стремлении интенсивности вложений в активы репрезентативной стратегии к процессу $\widehat{\lambda}_t$. В качестве примера в главе показывается, как игра с дискретным временем вкладывается в такую модель, и приводится пример, где процесс накопленных выплат A_t задается неубывающим процессом Леви.

В восьмой главе изучаются две модели игр с *долгоживущими* активами — в дискретном и непрерывном времени. Долгоживущие активы характеризуются тем, что игроки могут покупать и продавать их в любой момент времени, получая выплаты в период владения.

Игра с дискретным временем задается следующим образом. Пусть актив n в момент $t \geqslant 1$ выплачивает дивиденды в размере D^n_t денежных единиц на единицу актива и имеет цену S^n_t. Дивиденды могут зависеть от репрезентативной стратегии: будем считать, что $D^n_t = D^n_t(\omega, l)$ является $\mathscr{F}_t \otimes \mathcal{B}(\Delta^N)$-измеримой функцией, причем $\mathrm{P}(D^n_t(l) > 0 \mid \mathscr{F}_{t-1}) > 0$, $\sum_{n=1}^N D^n_t(l) > 0$.

Действия игрока m описываются стратегией $\lambda^m = (\lambda^m_t)_{t=1}^\infty$, состоящей из $\mathscr{F}_{t-1}$-измеримых векторов λ^m_t со значениями в Δ^N (где λ^{mn}_t — пропорция капитала, вложенная в актив n), и коэффициентом потребления $c^m \in (0, 1)$. Уравнение динамики капитала имеет вид

$$W^m_t = (1 - c^m) \sum_{n=1}^N \frac{\lambda^{mn}_t W^m_{t-1}}{S^n_{t-1}} (S^n_t + D^n_t(\bar{\lambda}_t)). \tag{15}$$

[21] *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов / пер. с англ. С. Е. Кузнецова. Физматлит, 1994.

Пусть объем предложения (количество акций в обращении) каждого актива постоянен и равен $v^n > 0$. Тогда, чтобы спрос был равен предложению, должно выполняться равенство

$$v^n = \frac{1}{S_t^n} \sum_{m=1}^{M} \lambda_{t+1}^{mn} W_t^m. \tag{16}$$

Доказывается, что уравнения (15)–(16) однозначно определяют последовательности W_t и S_t в предположении, что хотя бы один игрок использует стратегию с положительными компонентами.

Выживающая стратегия, как обычно, определяется тем, что в любом профиле стратегий $\liminf_{t\to\infty} R_t^m > 0$, где $R_t^m = W_t^m / \sum_{k=1}^{M} W_t^k$ — относительный капитал. Известно[22], что выживающая стратегия существует, если дивиденды D_t не зависят от $\bar{\lambda}_t$. При наличии зависимости, но в случае независимых и одинаково распределенных функций D_t, существует *эволюционно устойчивая* стратегия[23] (более слабое свойство, чем выживаемость), однако вопрос о существовании выживающих стратегий остается открытым. Цель этой главы состоит в том, чтобы ввести ослабленное свойство выживаемости, применимое в случае произвольных дивидендов, — понятие *популяционных* выживающих стратегий — и доказать их существование.

Это понятие относится к ситуации, когда доля игроков, использующих такую стратегию, стремится к 1 (поэтому она называется популяционной), а доля игроков с другими стратегиями бесконечно мала. Популяционная стратегия называется выживающей, если игрок, использующий ее, имеет наибольшую асимптотическую скорость роста капитала среди всех игроков.

Для рассмотрения популяционных стратегий нужно перейти к пределу модели, в котором начальный капитал одного игрока (скажем, первого) и количество акций в обращении стремятся к бесконечности, а капитал остальных игроков остается фиксированным. Игроки $2, \dots, M$ называются *малыми*, их стратегии не влияют на цены активов. Стратегия и коэффициент потребления игрока 1 называются *популяционными*.

В работе показывается, как осуществить такой предельный переход, в результате чего капитал малого игрока, использующего стратегию λ с коэффициентом потребления $c \in (0,1)$, при популяционной стратегии $\bar{\lambda}$ и популяционном коэффициенте потребления $\bar{c} \in (0,1)$ задается последовательностью

$$W_t = (1-c) W_{t-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^n}{S_{t-1}^n} (S_t^n + D_t^n(\bar{\lambda}_t)),$$

[22] *Amir R.* [et al.]. Evolutionary finance and dynamic games // Mathematics and Financial Economics. 2011. Vol. 5. P. 161–184.

[23] *Amir R.* [et al.]. Evolution in pecunia // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2021. Vol. 118, no. 26. e2016514118.

где цены активов имеют вид

$$S_t^n = \bar{\lambda}_{t+1}^n \frac{1-\bar{c}}{\bar{c}} \bar{D}_t(\bar{\lambda}_t).$$

Чтобы подчеркнуть зависимость последовательности W от стратегий и коэффициентов потребления, используется обозначение $W_t(\bar{\lambda}, \bar{c}; \lambda, c)$.

Определение. Популяционная стратегия $\bar{\lambda}$ называется *выживающей* для уровня потребления $\bar{c} \in (0,1)$, если для любой стратегии λ и коэффициента потребления $c \in [\bar{c}, 1)$ выполнено неравенство

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{W_t(\bar{\lambda}, \bar{c}; \lambda, c)}{W_t(\bar{\lambda}, \bar{c}; \bar{\lambda}, \bar{c})} > 0 \text{ п. н.}$$

Показывается, что определение популяционной выживающей стратегии можно свести к общему определению выживающей стратегии в подходящей несимметричной динамической вероятностной эволюционной игре.

Следующая теорема представляет первый основной результат главы.

Теорема. *Предположим, что для некоторого $\bar{c} > 0$ существует предсказуемая последовательность случайных векторов $\widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_t)_{t\geqslant 1}$ со значениями в Δ^N такая, что для всех $t \geqslant 0$*

$$\widehat{\lambda}_{t+1}^n = \bar{c}\,\mathrm{E}\left(\sum_{s=1}^{\infty} (1-\bar{c})^{s-1} \widetilde{D}_{t+s}^n(\widehat{\lambda}_{t+s}) \,\middle|\, \mathscr{F}_t \right) \text{ п. н.}, \tag{17}$$

где $\widetilde{D}_t^n(l) = D_t^n(l) / \sum_{k=1}^N D_t^k(l)$ — относительные дивиденды. Тогда $\widehat{\lambda}$ является популяционной выживающей стратегией для популяционного коэффициента потребления $\bar{c}$.

В работе также приводится условие на функции D_t, при котором уравнение (17) имеет единственное решение. Это условие выполняется, например, когда функции $D_t(l)$ аффинным образом зависят от l.

Во второй части главы изучается аналогичная модель с непрерывным временем. Пусть $\mathcal{S}^c(\Delta^N)$ и $\mathcal{S}^c(\mathbb{R}_+^N)$ обозначают пространства непрерывных семимартингалов, принимающих значения в Δ^N или $\mathbb{R}_+^N$, соответственно. Предположим, что задано отображение $D(\lambda)$ из $\mathcal{S}^c(\Delta^N)$ в $\mathcal{S}^c(\mathbb{R}_+^N)$ такое, что для любого $\lambda \in \mathcal{S}^c(\Delta^N)$ семимартингал $D_t(\lambda)$ удовлетворяет условиям $\mathrm{P}(D_s^n(\lambda) > 0 \text{ для некоторого } s \geqslant t \mid \mathscr{F}_t) > 0$ и $\sum_{n=1}^N D_t^n(\lambda) > 0$.

Динамика процесса капитала малого игрока, использующего стратегию $\lambda \in \mathcal{S}^c(\Delta^N)$ с интенсивностью потребления $c > 0$, при популяционной стратегии $\bar{\lambda} \in \mathcal{S}^c(\Delta^N)$ и популяционной интенсивности потребления $\bar{c} > 0$ задается

непрерывным семимартингалом $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$, удовлетворяющим уравнению

$$dW_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^n W_t}{S_t^n}(dS_t^n + D_t^n(\bar{\lambda}_t)dt) - cW_t dt,$$

где $S_t^n = \bar{c}^{-1}\bar{\lambda}_t^n \bar{D}_t(\bar{\lambda})$ — цены активов. Популяционная выживающая стратегия определяется так же, как в случае дискретного времени.

Теорема. *Предположим, что для некоторого $\bar{c} > 0$ существует процесс $\widehat{\lambda} \in \mathcal{S}^c(\Delta^N)$ такой, что для всех $t \geqslant 0$*

$$\widehat{\lambda}_t^n = \bar{c}\,\mathrm{E}\left(\int_t^\infty e^{-\bar{c}(s-t)}\widetilde{D}_s^n(\widehat{\lambda})ds \;\middle|\; \mathscr{F}_t\right) \text{ п. н.} \tag{18}$$

Тогда $\widehat{\lambda}$ является популяционной выживающей стратегией для популяционной интенсивности потребления $\bar{c}$.

Аналогично дискретному времени, приводится достаточное условие существования решения уравнения (18). Глава завершается примером, в котором процесс $\widetilde{D}_t$ не зависит от репрезентативной стратегии и является мартингалом; в этом случае $\widehat{\lambda}_t = \widetilde{D}_t$.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Babaei E.*, *Evstigneev I. V.*, *Schenk-Hoppé K. R.*, *Zhitlukhin M.* Von Neumann–Gale dynamics and capital growth in financial markets with frictions // Mathematics and Financial Economics. — 2020. — Vol. 14, no. 2. — P. 283–305.
2. *Babaei E.*, *Evstigneev I. V.*, *Schenk-Hoppé K. R.*, *Zhitlukhin M.* Von Neumann–Gale model, market frictions and capital growth // Stochastics. — 2021. — Vol. 93, no. 2. — P. 279–310.
3. *Drokin Y.*, *Zhitlukhin M.* Relative growth optimal strategies in an asset market game // Annals of Finance. — 2020. — Vol. 16. — P. 529–546.
4. *Evstigneev I. V.*, *Tokaeva A. A.*, *Vanaei M. J.*, *Zhitlukhin M. V.* Survival strategies in an evolutionary finance model with endogenous asset payoffs // Annals of Operations Research. — 2023. — `https://doi.org/10.1007/s10479-023-05689-5`.
5. *Evstigneev I. V.*, *Zhitlukhin M. V.* Controlled random fields, von Neumann–Gale dynamics and multimarket hedging with risk // Stochastics. — 2013. — Vol. 85, no. 4. — P. 652–666.
6. *Zhitlukhin M.* A second-order monotone modification of the Sharpe ratio // Recent Advances in Financial Engineering 2014: Proceedings of the TMU Finance Workshop / ed. by M. Kijima, Y. Muromachi, T. Shibata. — World Scientific. 2016. — P. 217–226.
7. *Zhitlukhin M.* Survival investment strategies in a continuous-time market model with competition // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 2021. — Vol. 24, no. 1. — 2150001.
8. *Zhitlukhin M.* A continuous-time asset market game with short-lived assets // Finance and Stochastics. — 2022. — Vol. 26, no. 3. — P. 587–630.
9. *Zhitlukhin M.* Asymptotic minimization of expected time to reach a large wealth level in an asset market game // Stochastics. — 2023. — Vol. 95, no. 1. — P. 67–78.
10. *Zhitlukhin M.* Capital growth and survival strategies in a market with endogenous prices // SIAM Journal on Financial Mathematics. — 2023. — Vol. 14, no. 3. — P. 812–837.
11. *Житлухин М. В.* О максимизации отношения математического ожидания к отклонению случайной величины // Успехи математических наук. — 2017. — Т. 72, № 4. — С. 191—192.
12. *Житлухин М. В.* О стимулирующих ценах в стохастической модели фон Неймана–Гейла для финансового рынка // Теория вероятностей и ее применения. — 2019. — Т. 64, № 4. — С. 692—706.

13. *Житлухин М. В.* Асимптотически оптимальные стратегии в одной модели рынка с конкуренцией // Теория вероятностей и ее применения. — 2020. — Т. 65, № 1. — С. 209—210.

14. *Житлухин М. В.* Диффузионное приближение для одной модели предсказательной игры // Теория вероятностей и ее применения. — 2023. — Т. 68, № 4. — С. 751—768.

15. *Житлухин М. В.* Стратегии оптимального роста в модели рынка с большим количеством агентов // Теория вероятностей и ее применения. — 2023. — Т. 68, № 1. — С. 197—198.

16. *Житлухин М. В.* Стратегии оптимального роста в стохастической модели рынка с эндогенными ценами // Теория вероятностей и ее применения. — 2024. — Т. 69, № 2. — С. 256—271.

17. *Житлухин М. В.*, *Токаева А. А.* Мартингальные методы в задачах о существовании выживающих стратегий // Теория вероятностей и ее применения. — 2024. — Т. 69, № 4. — С. 653—667.

Подписано в печать 26.12.2024
Тираж 80 экз.

Отпечатано в типографии НИУ ВШЭ
129272, Москва, Покровский бульвар, д. 11