**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»**

На правах рукописи

Заиграев Никита Михайлович

# $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория высших спинов в гармоническом суперпространстве

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Иванов Е.А.

Дубна — 2024

# Оглавление

**Введение** **5**

**1 Гармоническое суперпространство и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные теории** **31**

1.1 Суперпространства . . . . . 31

1.2 Гармоническое суперпространство . . . . . 34

1.3 $\mathcal{N} = 2$ теории в гармоническом суперпространстве . . . . . 41

1.3.1 Гипермультиплет . . . . . 41

1.3.2 $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет . . . . . 45

1.3.3 $\mathcal{N} = 2$ супергравитация . . . . . 46

**2 $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория высших спинов** **53**

2.1 $\mathcal{N} = 2$ супергравитация: линеаризация . . . . . 53

2.1.1 Аналитические препотенциалы . . . . . 54

2.1.2 Суперполевое действие . . . . . 57

2.1.3 Компонентная редукция . . . . . 59

2.2 $\mathcal{N} = 2$ теория спина **3** . . . . . 61

2.2.1 Аналитические препотенциалы . . . . . 62

2.2.2 Суперполевое действие . . . . . 67

2.2.3 Компонентная редукция . . . . . 68

2.3 $\mathcal{N} = 2$ теория высших спинов . . . . . 70

2.3.1 Аналитические препотенциалы . . . . . 70

2.3.2 Суперполевое действие . . . . . 72

**3 Суперполевые уравнения движения** **74**

3.1 $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория спина **1** . . . . . 75

3.2 $\mathcal{N} = 2$ высшие спины: аналитические препотенциалы . . . . . 77

3.3 $\mathcal{N} = 2$ высшие спины: препотенциалы Мезинческу . . . . . 79

**4 Кубические взаимодействия $\mathcal{N}=2$ высших спинов с гипермультиплетом 83**

4.1 Принципы построения . . . 83

4.2 Простейшие примеры . . . 85

4.2.1 Взаимодействие со спином **1** . . . 85

4.2.2 Взаимодействие со спином **2** . . . 87

4.2.3 Взаимодействие со спином **3** . . . 91

4.3 Обобщение на произвольные $\mathcal{N}=2$ спины . . . 93

4.4 Компонентная редукция . . . 94

**5 Симметрии гипермультиплета и $\mathcal{N}=2$ суперполевые токи высших спинов 101**

5.1 Глобальные симметрии гипермультиплета . . . 101

5.2 $\mathcal{N}=2$ теорема Нётер . . . 106

5.3 Компонентный состав суперполевых токов . . . 109

5.3.1 Максвелловский суперполевой ток . . . 109

5.3.2 $\mathcal{N}=2$ суперток свободного гипермультиплета . . . 111

5.3.3 $\mathcal{N}=2$ суперполевой ток спина **3** . . . 117

5.3.4 $\mathcal{N}=2$ суперполевой ток спина **s** . . . 121

5.4 Приложение: о структуре $\mathcal{N}=2$ суперполевых токов . . . 122

5.4.1 $\mathcal{N}=2$ суперполевые токи . . . 123

5.4.2 $\mathcal{N}=2$ супертоки . . . 125

**6 $\mathcal{N}=2$ суперконформная теория высших спинов 127**

6.1 $\mathcal{N}=2$ суперконформная симметрия гипермультиплета . . . 128

6.2 Принципы построения суперконформных вершин и суперконформных мультиплетов . . . 132

6.3 $\mathcal{N}=2$ Максвелловский супермультиплет и суперконформная кубическая вершина $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ . . . 133

6.4 $\mathcal{N}=2$ супермультиплет Вейля и суперконформная кубическая вершина $(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ 135

6.5 $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина **3** и кубическая вершина $(\mathbf{3},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ . 141

6.6 Обобщение на произвольный супергравитационный фон . . . 150

6.7 $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина **s** и кубическая вершина $(\mathbf{s},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ . . 151

6.8 О полностью согласованном кубическом взаимодействии $\mathcal{N}=2$ конформных высших спинов с гипермультиплетом . . . 158

6.9 О суперконформных токах гипермультиплета . . . 160

**Заключение** **165**

**A Обозначения и соглашения** **170**

**B Решения уравнений нулевой кривизны** **174**

B.1 $\mathcal{N} = 2$ супергравитация . . . . . 174

B.2 $\mathcal{N} = 2$ теория спина 3 . . . . . 179

# Введение

## Актуальность

Важной проблемой современной теоретической физики является построение *квантовой теории гравитации*. На наблюдаемых масштабах квантовые эффекты гравитации крайне малы и все наблюдаемые гравитационные явления описываются в рамках общей теории относительности Эйнштейна. Тем не менее, такие эффекты играют определяющую роль на ранних этапах эволюции Вселенной и в сильных гравитационных полях, например в окрестностях черных дыр. Теория гравитации является неперенормируемой. Это означает, что теория гравитации не может работать при сколь угодно больших энергиях, а следовательно требует ультрафиолетового дополнения, т.е. включения дополнительных степеней свободы, которые обеспечивают предсказательную силу при любых энергиях.

Ряд теоретических исследований указывает на то, что такое ультрафиолетовое дополнение должно включать бесконечное количество степеней свободы, и наиболее вероятным кандидатом на роль такой теории является *теория струн* [1, 2], спектр которой содержит все возможные спины. Состояния со спином выше 2 в спектре струны являются массивными и тем самым отсутствуют в низкоэнергетическом спектре. Такие степени свободы на языке полей должны соответствовать полям высших спинов. Таким образом, на квантово-полевом уровне теория струн сводится к теории высших спинов, и естественно возникает гипотеза о том, что теория струн является одной из фаз *теории высших спинов* [3, 4], и тем самым приводит к концептуальной и значимой задаче изучения теорий высших спинов.

В результате можно задаться естественными вопросами. Какими бывают теории высших спинов? Как они описываются на полевом языке? Какие возможны взаимодействия в таких теориях? Какие из моделей высших спинов приводят к перенормируемой теории гравитации? Какие есть фазы в таких теориях? Возможны ли аналоги механизма Хиггса? Какова природа массы полей высших спинов?

В спектре теории струн поля высших спинов являются массивными, а значит не определяют низкоэнергетическую физику. Однако в пределе нулевого натяжения струны или в

пределе высоких энергий такие степени свободы уже играют существенную роль [5, 6]. В этом пределе все поля высших спинов становятся безмассовыми и появляется богатая калибровочная группа, что и мотивирует рассматривать безмассовую теорию высших спинов как фундаментальную. Поскольку все безмассовые поля со спином выше чем 1 имеют Лоренц-ковариантное описание только благодаря наличию калибровочной свободы, возникает вопрос о структуре алгебры высших спинов и её реализации во взаимодействующих теориях [7].

Другое важное направление исследований в современной теоретической физике связано с *суперсимметрией*. Суперсимметрия является максимально возможным расширением группы Пуанкаре [8, 9] (при ряде предположений, в частности массивности полей) и дает симметрийный принцип для объединения частиц различного спина в единую теорию, включающую поля материи и калибровочные поля. Важным аргументом в пользу наличия суперсимметрии является отсутствие тахиона в спектре суперструны. Возникает актуальный вопрос: каким образом описывать *суперсимметричные теории высших спинов*?

В суперсимметричных теориях наблюдается ряд удивительных свойств, среди которых выделяются улучшенное ультрафиолетовое поведение [10–12], появление дополнительных скрытых симметрий [13], а также связи с комплексной геометрией [14, 15]. Для анализа этих свойств, построения и исследования суперсимметричных моделей требуется введение нового формализма. Есть две формулировки суперсимметрии: "on-shell" и "off-shell" (на массовой оболочке и вне массовой оболочки, в дальнейшем для них будут использованы обозначения НМО и ВМО) [16, 17]. Вторая является более предпочтительной, поскольку в ней преобразования суперсимметрии не зависят от выбора модели, замыкаются без использования уравнений движения, и различные вычисления можно производить явно суперсимметричным образом. В ВМО-формулировке, помимо физических полей присутствуют и вспомогательные поля, поиск которых в случае расширенной суперсимметрии ($\mathcal{N} \geq 2$) представляет значительные трудности. В частности, отсутствие ВМО-формулировки не позволяет понять ряд удивительных свойств, связанных с расходимостями в $\mathcal{N} = 8$ супергравитации [18]. Удобнее всего работать с ВМО-мультиплетами на языке *суперпространства*. Суперпространство – это расширение пространства Минковского дополнительными грассмановыми координатами. Таким образом возникает актуальная задача суперполевой формулировки теорий высших спинов.

Большой интерес также вызывает и активно развивающаяся гипотеза *AdS/CFT соответствия*, выдвинутая Малдасеной [19]. Она предполагает соответствие между квантовой

гравитацией (теории струн) на фоне $AdS$ и конформными теориями поля, не содержащими гравитации. Согласно гипотезе Клебанова и Полякова [20], подобная дуальность присуща и высшим спинам на фоне пространства AdS, которые соответствуют $O(N)$ моделям, описывающим ряд фазовых переходов второго рода.

Итог этого обсуждения состоит в том, что суперсимметричная теория высших спинов является естественным развитием квантовой теории поля одновременно в двух актуальных направлениях: в объединении различных взаимодействий и построении квантовой теории гравитации.

## Современное состояние исследований

В теории высших спинов ставится множество концептуальных и фундаментальных вопросов, затрагивающих общую структуру классической и квантовой теории поля. Они активно разрабатываются разными научными группами по всему миру (см. недавний обзор [21], педагогическое изложение можно найти в лекциях [22–27]). Первые работы появились еще в 1930-е годы и с тех пор было получено много ярких результатов. При изложении результатов, если не оговорено иное, мы рассматриваем теории в плоском $4D$ пространстве.

### *Свободные теории высших спинов*

Свободные теории высших спинов хорошо известны. Массивные теории были впервые построены в работах Сингха и Хагена [28, 29] в 1974 году, а безмассовые были впервые построены на основе этих результатов в фундаментальных работах Фронсдала [30] (целые спины) и Фанга-Фронсдала [31] (полуцелые спины) в 1978 году. Также известна калибровочная формулировка массивных теорий высших спинов, обобщающая формулировку Штюкельберга для теорий спина 1. Такие формулировки для целых спинов были построены Клишевичем и Зиновьевым в 1997 году [32], а для полуцелых спинов – Мецаевым в 2006 году [33] (см. также работу [34]). Свободная конформная теория высших спинов была построена в работе Фрадкина и Цейтлина по конформной супергравитации [35] в 1985 году. В 2017 году, в работе по $\mathcal{N} = 1$ суперконформным мультиплетам [36] был введен класс полей, обобщающий поля Фрадкина-Цейтлина. Также хорошо известны формулировки безмассовых и массивных высших спинов на фоне пространств AdS и dS. Приведем основные сведения о безмассовых полях высших спинов на плоском пространстве, которые мы будем использовать в дальнейшем.

*Теория Фронсдала*

Поля с целочисленным спином $s \geq 2$ описываются набором из двух действительных спин-тензорных полей (соглашения по обозначениям приведены в приложении A):

$$\left\{\Phi^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}(x), \Phi^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}(x)\right\}, \tag{0.1}$$

определенных с точностью до калибровочной свободы:

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} &\sim \partial^{\alpha\dot{\alpha}} a^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}, \\ \delta\Phi^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} &\sim \partial_{\alpha\dot{\alpha}} a^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Калибровочно-инвариантное действие для такой теории можно построить в форме:

$$S_{(s)} \sim (-1)^s \int d^4x \, \left(\Phi^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} \mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} + \Phi^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \mathcal{R}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\right) \tag{0.3}$$

Тут мы ввели калибровочно-инвариантные спин-тензоры, квадратичные по производным и линейные по полям, такие, что:

$$\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} \sim \Box\Phi_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} + \ldots, \qquad \partial^{\alpha_s\dot{\alpha}_s} \mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} + \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{R}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} = 0. \tag{0.4}$$

Эти требования однозначно определяют кривизны, и обеспечивают калибровочную инвариантность действия. На уравнениях движения, определяемых действием (0.3):

$$\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)} = 0, \qquad \mathcal{R}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} = 0 \tag{0.5}$$

теория содержит 2 степени свободы спиральности $s$ и $-s$.

*Теория Фанга-Фронсдала*

Поля с полуцелым спином $s > 2$ описываются набором комплексных спин-тензорных полей:

$$\left\{\psi_{\alpha(s+1)\dot{\alpha}(s)}(x), \psi_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s)}(x), \psi_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)}(x)\right\} \tag{0.6}$$

и их комплексно-сопряженных:

$$\left\{\bar{\psi}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s+1)}(x), \bar{\psi}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1)}(x), \bar{\psi}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)}(x)\right\}. \tag{0.7}$$

Поля определены с точностью до калибровочной свободы:

$$\begin{aligned} \delta\psi_{\alpha(s+1)\dot{\alpha}(s)} &\sim \partial_{(\alpha(\dot{\alpha}}\xi_{\alpha(s))\dot{\alpha}(s-1))}, \\ \delta\psi_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s)} &\sim \partial^{\alpha}_{(\dot{\alpha}}\xi_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1))}, \\ \delta\psi_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)} &\sim \partial^{\alpha\dot{\alpha}}\xi_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1)}. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Калибровочно инвариантное действие имеет вид:

$$\begin{aligned} S_{(s+\frac{1}{2})} \sim (-1)^s \int d^4x \Big(&\bar{\psi}^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s+1)}\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s+1)} + \bar{\psi}^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1)}\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1)} \\ &+ \bar{\psi}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)}\mathcal{R}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)}\Big). \end{aligned} \tag{0.9}$$

Здесь $\mathcal{R}$ – это калибровочные инварианты первого порядка по производным и линейные по полям, построенные из фермионов,

$$\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s+1)} \sim \partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\psi_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1)} + \ldots, \tag{0.10}$$

и удовлетворяющие тождеству Бьянки:

$$\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s+1)} + \partial^{\alpha}_{(\dot{\alpha}}\mathcal{R}_{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-1))} + \partial_{(\alpha(\dot{\alpha}}\mathcal{R}_{\alpha(s-2))\dot{\alpha}(s-1))} = 0. \tag{0.11}$$

Эти условия однозначно определяют форму кривизн $\mathcal{R}$ и позволяют однозначно построить действие. На уравнениях движения теория описывает 2 степени свободы спиральности $s+\frac{1}{2}$ и $-s-\frac{1}{2}$.

*Конформные высшие спины*

В общем виде такие поля имеют разное количество точечных и неточечных индексов и определены с точностью до калибровочной свободы:

$$\delta\phi_{\alpha(n)\dot{\alpha}(m)} \sim \partial_{(\alpha(\dot{\alpha}}\lambda_{\alpha(n-1))\dot{\alpha}(m-1))}. \tag{0.12}$$

В случае, когда количество точечных и неточечных индексов совпадает (или отличается на

один), приведенные калибровочные преобразования совпадают с калибровочными преобразованиями старших фронсдаловских (или фанг-фронсдаловских) полей.

Для таких полей можно построить две инвариантные напряженности:

$$\hat{C}_{\alpha(n+m)} = \partial^{\beta_1}_{(\alpha_1} \dots \partial^{\beta_m}_{\alpha_m} \phi_{\alpha(n))(\dot\beta_1 \dots \dot\beta_n m)}, \tag{0.13}$$

$$\check{C}_{\alpha(n+m)} = \partial^{\dot\beta_1}_{(\alpha_1} \dots \partial^{\dot\beta_n}_{\alpha_n} \bar\phi_{\alpha(m))\dot\beta_1 \dots \dot\beta_n}, \tag{0.14}$$

а из них калибровочно-инвариантное действие:

$$S = i^{n+m} \int d^4x \, \hat{C}^{\alpha(n+m)} \check{C}_{\alpha(n+m)} + c.c. \tag{0.15}$$

Эти действия, в отличие от действий Фронсдала, в случае $n + m > 2$ содержат старшие производные. Построенные действия являются естественными обобщениями теорий Максвелла (конформный спин 1) и линеаризованного квадрата тензора Вейля (конформный спин 2) на высшие спины.

### *Взаимодействующие теории высших спинов*

Наиболее важной задачей является построение самосогласованной взаимодействующей теории поля, включающей высшие спины $s > 2$. Взаимодействующие теории для безмассовых теорий спина 1 и спина 2 хорошо известны – это теория Янга-Миллса и теория гравитации Эйнштейна. Попытки обобщить эти теории на высшие спины сталкиваются с рядом проблем, обнаруженных и сформулированных в 1984 году Берендсом, Бюргерсом и ван Дамом [37]. Проиллюстрируем природу этих проблем.

Обозначим за $\varphi$ набор полей, для которых мы хотим построить взаимодействующую теорию. Мы знаем для них свободное действие $S_2[\varphi]$, инвариантное относительно абелевых калибровочных преобразований $\delta_0\varphi$. Будем искать действие в общем виде как разложение по константе взаимодействия $g$:

$$S[\varphi] = S_2[\varphi] + gS_3[\varphi] + g^2 S_4[\varphi] + \dots \tag{0.16}$$

Здесь $S_3[\varphi]$ обозначает слагаемые, кубические по полям, $S_4[\varphi]$ четвертого порядка по полям и т.д. Отметим, что при такой процедуре на каждом из следующих этапов необходимо исключать вершины, которые могут быть воспроизведены переопределением полей, так на-

зываемые "фэйковые" взаимодействия[1]. Чтобы добиться калибровочной инвариантности во взаимодействующей теории, необходимо деформировать калибровочный закон преобразований:

$$\delta\varphi = \delta_0\varphi + g\delta_1\varphi + g^2\delta_2\varphi + \dots \tag{0.17}$$

Используя кривизны, построенные из полей Фронсдала и Фанга-Фронсдала [39], можно рассматривать вершины, которые инвариантны относительно абелевых калибровочных преобразований и не требуют неабелевой деформации калибровочных преобразований [40]. Мы такие абелевы вершины не рассматриваем.

Требование инвариантности действия приводит к условиям на калибровочные преобразования и взаимодействующие вершины:

$$\delta S[\varphi] = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \delta_0 S_2[\varphi] = 0, \\ \delta_1 S_2[\varphi] + \delta_0 S_3[\varphi] = 0, \\ \delta_2 S_2[\varphi] + \delta_1 S_3[\varphi] + \delta_0 S_4[\varphi] = 0, \\ \dots \end{cases} \tag{0.18}$$

Эти уравнения в случае спина 1 и спина 2 можно разрешить и воспроизвести теорию Янга-Миллса и гравитацию Эйнштейна, однако включение высших спинов приводит к новым явлениям, которые в известных примерах отсутствуют. Например, в теории, обобщающей теорию Янга-Миллса на случай спина 3, следуя этой процедуре, можно найти кубическую вершину и соответствующею неабелеву деформацию калибровочного преобразования [41]. Однако, полученное таким образом неабелево калибровочное преобразование имеет форму, которая не позволяет продолжить эту процедуру.

На калибровочных преобразованиях есть естественная ассоциативная структура, задаваемая коммутатором:

$$[\delta_\xi, \delta_{\xi'}]\varphi := \left(\delta_\xi\delta_{\xi'} - \delta_{\xi'}\delta_\xi\right)\varphi. \tag{0.19}$$

В известных взаимодействующих калибровочных теориях: теории Янга-Миллса (спин 1) и теории гравитации (спин 2) коммутатор калибровочных преобразований имеет красивую групповую структуру: коммутатор двух калибровочных преобразований дает калибровочное преобразование такого же типа. В случае спина 3 вычисление коммутатора в деформированной теории с необходимостью приводит к преобразованиям нового типа. Это указывает на то, что в теории высших спинов (минимальное) согласованное взаимодействие может быть

[1] Конкретные примеры таких переопределений можно найти, например, в работе [38].

построено, только если рассматривать бесконечномерное расширение калибровочной группы и ввести *поля всех спинов* [37]. Более полный анализ, проведенный в работе Бекаерта, Буланже и Леклерка в 2010 году [42] для неабелевых взаимодействий спина 3, приводит к заключению, что даже добавление всех высших спинов не позволяет разрешить эту проблему.

С другой стороны, попытки такого построения сталкиваются с общими "no-go теоремами" [43], которые при ряде предположений запрещают построение взаимодействующей теории безмассовых высших спинов в плоском пространстве.

Таким образом, для формулировки согласованной взаимодействующей теории высших спинов необходимы новые подходы. Значительный прогресс в этом направлении был достигнут в *теории Васильева*, в которой построена нелинейная система уравнений для высших спинов [44–47] (см. также обзоры [23, 48–51]). Уравнения Васильева являются сложными уравнениями, оперирующими с бесконечным числом полей. Линеаризация этих уравнений на вакууме, который соответствует пространству (A)dS, воспроизводит теорию Фронсдала на фоне (A)dS. Уравнения Васильева допускают суперсимметричное расширение с произвольным числом суперсимметрий. Различные аспекты этих уравнений, такие как спин-локальность, нарушение симметрии и др., активно исследуются [52, 53]. Однако, в настоящее время для уравнений Васильева не известно лагранжево описание и их следствия крайне сложно изучать и связывать с результатами, полученными в лагражевом подходе. Таким образом, остается важная проблема лагранжева описания теорий высших спинов.

В случае *конформных высших спинов* ситуация отличается. Согласованные взаимодействующие конформные теории высших спинов можно построить как эффективные действия для полей/частиц на фоне конформных высших спинов [54, 55]. Вариант ковариантного, независящего от фона действия для конформных высших спинов был предложен в недавней работе [56]. В дальнейших рассуждениях, если не оговорено обратное, мы рассматриваем неконформные теории.

*Кубические вершины*

Несмотря на описанные выше сложности в построении полной лагранжевой теории, на первом шаге можно ограничиться только изучением кубических вершин, которые будут с необходимостью присутствовать во взаимодействующих теориях высших спинов. Структуру

и особенности таких вершин важно понимать при последовательном подходе к теориям высших спинов. Знание таких вершин в лагранжевой формулировке необходимо и для трактовки теории Васильева.

Все кубические вершины общего вида $(s_1, s_2, s_3)$ (для безмассовых полей) проклассифицированы в работах [37, 57–60]. Интересно, что имеются ограничения на количество производных в кубических вершинах:

$$s_1 + s_2 + s_3 - 2\min\{s_1, s_2, s_3\} \leq N(\partial_x) \leq s_1 + s_2 + s_3.$$

Среди этих вершин выделяются вершины вида $(s_1, s_2, s_2)$ с $2s_2 \leq s_1$. Построение таких вершин основывается на использовании сохраняющихся токов, отвечающих глобальным симметриям свободных действий [61,62]. Эти вершины имеют структуру $\mathcal{L}_{int} \sim \varphi \times j$, где $j$ – сохраняющийся ток, билинейный по полям спина $s_2$. Такие вершины в лидирующем порядке не приводят к неабелевой деформации калибровочных преобразований и содержат $s_1$ производных. В простейшем случае взаимодействия спина $s_1 = s$ со скалярным полем $(s_2 = s_3 = 0)$ число производных равно $s$. Такие вершины рассматриваются как простейшие модели взаимодействий высших спинов [63, 64].

Интересна структура взаимодействий высших спинов с гравитацией. В случаях спинов 0 и 1 взаимодействии с гравитацией строится прямолинейной ковариантизацией производных и меры интегрирования. В случае безмассовых полей высших спинов эта конструкция не работает, что находится в соответствии со знаменитой теоремой Вайнберга-Виттена [65, 66], которая утверждает что не существует калибровочно-инвариантного тензора энергии-импульса для таких теорий. Из классификации взаимодействий следует, что в вершине типа $(2, s, s)$ количество производных лежит в промежутке $2s - 2 \leq N(\partial_x) \leq 2s + 2$[2], что также указывает на отсутствие канонического гравитационного взаимодействия с двумя производными[3]. Интересно, что ситуация на фоне (A)dS значительно меняется и взаимодействие с 2 производными существует. Это явление известно как *механимзм Фрадкина-Васильева* [69].

Для конформных высших спинов кубические вершины впервые рассматривались в работе Фрадкина и Линецкого [70]. Простейшие примеры таких вершин со скалярным полем в дальнейшем изучались в работах [71, 72]. Их наиболее интересной особенностью является то, что бесконечный набор высших спинов, взаимодействующих с комплексным скаляром, яв-

[2] В работе [67] было показано, что на плоском фоне неабелева вершина единственна и выключает $2s - 2$ производных.

[3] Отметим, однако, что такие вершины существуют в калибровке светового конуса [68].

ляется согласованным во всех порядках и обладает неабелевой калибровочной симметрией. Это свойство лежит в основе определения взаимодействующей конформной теории высших спинов, см. [71]. Интересен вопрос о возможности построения таких теорий на произвольном гравитационном фоне. Результаты работ [73,74] показывают, что для построения кубических вершин на гравитационном фоне необходимо одновременно рассматривать несколько спинов, например для спина 3 надо добавлять вершину спина 1.

*Вершины за рамками кубического приближения*

При попытке выйти за рамки кубического взаимодействия возникает ряд сложностей, связанных с большим количеством возможных взаимодействующих слагаемых и свободой их переопределения. Более того, для таких вершин возникают проблемы, связанные с нелокальностью [75]. Тем не менее, работа по изучению таких вершин активно ведется, и существует ряд актуальных интересных результатов по построению согласованных вершин четвертого порядка, например, полученных в [76].

***Суперсимметрия***

Симметрии играют огромную роль в классической и квантовой теории поля. Наличие симметрий приводит к законам сохранения, позволяет классифицировать частицы, построить эффективные низкоэнергетических модели и т.д. Понимание фундаментальной роли симметрий и большие успехи, вызванные их применениями в 60-е годы, вызвали большой интерес в среде физиков-теоретиков и возник естественный вопрос, какой наибольшей симметрией может обладать теория поля. Небезосновательно было предполагать, что теории с максимальной симметрией не только интересны сами по себе, но и играют важную роль в физике частиц.

Среди симметрий релятивистской теории поля явно выделяются группа Пуанкаре и группа внутренних симметрий. Первая нетривиально действует и на поля и на координаты, а вторая действует исключительно на поля, "перемешивая" их между собой. Эти 2 типа симметрий коммутируют друг с другом. Можно ли построить теорию, в которой было бы иначе, т.е., чтобы были преобразования, которые не коммутируют ни с группой Пуанкаре, ни с группой внутренней симметрии?

Ответ на этот вопрос был дан в 1967 году Колманом и Мандулой [8], которые продемонстрировали, основываясь на ряде довольно естественных предположений, что наиболее общая группа симметрий взаимодействующей квантовой теории поля, описываемой аналити-

ческой $S$-матрицей, является прямым произведением группы Пуанкаре на группу внутренних симметрий:

$$\text{Poincare} \times \text{Intermal symmetry}.$$

Тем не менее, спустя несколько лет, появились статья Гольфанда и Лихтмана [77] (1971) и статья Волкова Акулова [78] (1972), в которых была открыта алгебра суперсимметрии и нелинейная реализация суперсимметрии. А уже в 1973 Весс и Зумино [79] построили первые суперсимметричные теории. Все это привело к тому, что в 1974 году Хаагом, Лопушанским и Сониусом было сделано обобщение теоремы Колмана-Мандулы [9] для градуированных алгебр Ли, которые до этого не рассматривались. В этой работе было показано, что наиболее общей группой симметрия является:

$$\text{SuperPoincare} \times \text{Intermal symmetry}.$$

Это означает, что максимальным возможным расширением алгебры Пуанкаре является суперсимметрия.

Если мы рассматриваем безмассовые теории с масштабной инвариантностью, то $S$-матрицы не существует – нельзя определить асимптотические состояния рассеяния (см. например [80]). Тогда результаты теорем допускают обобщение и наибольшей группой симметрии таких теорий является

$$\text{SuperConformal} \times \text{Intermal symmetry}.$$

Отметим, что вышеупомянутые теоремы применяются именно к глобальным симметриям теории. В теориях с калибровочной свободой (которую иногда называют "локальной симметрией") калибровочные преобразования не коммутируют с преобразованиями из группы Пуанкаре.

$4D$, $\mathcal{N}$-расширенная алгебра генераторов суперсимметрии определяется алгебраическим соотношениям:

$$\left\{Q^i_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha} j}\right\} = 2\delta^i_j \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} P_m, \quad \{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{[ij]}, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha} i}, \bar{Q}_{\dot{\beta} j}\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{Z}_{[ij]}, \qquad i = 1, 2 \ldots \mathcal{N}. \quad (0.20)$$

Здесь $Q$ – это суперзаряды, $P_m$ – генераторы трансляций а $Z^{[ij]}$ – центральные заряды. В полную $\mathcal{N}$-расширенную алгебру супер-Пуанкаре необходимо еще добавить коммутаторы этих генераторов с группой Лоренца (с трансляциями суперзаряды коммутируют тривиально $[P, Q] = 0$) и коммутационные соотношения группы Пуакаре. Отметим, что центральные

заряды в алгебре суперсимметрии связаны с наличием топологических зарядами в полевой теории [81]. Алгебра суперсимметрии не меняет своей формы при действии группы внешних автоморфизмов $SU(\mathcal{N})$.

Соответствующие коммутационные соотношения суперконформной алгебры $SU(2,2|\mathcal{N})$ имеют вид (в дополнению к соотношениям (0.20)):

$$\left\{S_{\alpha j}, \bar{S}^i_{\dot\alpha}\right\} = 2\delta^i_j \sigma^m_{\alpha\dot\alpha} K_m, \quad \left\{Q^i_\alpha, S^\beta_j\right\} = -\delta^j_i l^{\ \beta)}_{(\alpha} - 4i\delta^\beta_\alpha I^i_j - 2i\delta^\beta_\alpha \delta^i_j D + \frac{2(4-\mathcal{N})}{\mathcal{N}} \delta^\beta_\alpha \delta^i_j R, \ldots \tag{0.21}$$

Здесь $S$ – это генераторы конформной суперсимметрии, $K$ – генераторы специальной конформных преобразований, $l_{(\alpha\beta)}$ – генераторы преобразований Лоренца в спинорных обозначениях, $I$ – генераторы $SU(\mathcal{N})$ симметрии, $D$ – это генераторы дилатаций а $R$ – генераторы $U(1)$ симметрии.

Предметом исследования в данной диссертации будут теории с $\mathcal{N} = 2$ расширенной суперсимметрией.

### *Суперсимметрия: мультиплеты на массовой оболочке и вне массовой оболочки*

Основным свойством любой суперсимметричной теории поля является инвариантность относительно преобразований, удовлетворяющих алгебре суперсимметрии (0.20) (или её суперконформному расширению). Поэтому важным шагом для построения суперсимметричной теории является построение представлений алгебры суперсимметрии, по аналогии с построением представлений алгебры Пуанкаре в несуперсимметричном случае [82]. Существует стандартная процедура построения НМО-представлений алгебры суперсимметрии [16, 17] и суперконформной алгебры [83, 84]. Построенные таким образом представления реализуются на физических степенях свободы и поэтому называются представлениями на массовой оболочке (НМО). Представления суперсимметрии на массовой оболочке дают понимание того, каким образом должны быть устроены физические степени свободы и как они связаны преобразованиями суперсимметрии в свободных теориях. Такие представления показывают, что бозонные и фермионные степени свободы объединяются в мультиплеты, а преобразования суперсимметрии переводят их друг в друга[4].

Однако при построении взаимодействующих теорий и их квантовании возникает ряд важных проблем. Прежде всего, преобразования суперсимметрии явно зависят от конкретной модели (для одного и того же мультиплета на массовой оболочке) и в общем случае нели-

[4]Существуют также нелинейные реализации суперсимметрии, впервые открытые Волковым и Акуловым [78], в которых преобразования суперсимметрии реализуется только на фермионах. Теория Волкова-Акулова описывает голдстино, появляющееся как следствие спонтанного нарушения суперсимметрии.

нейны по полям. Это значительно усложняет задачу построения суперсимметричных теорий. Во-вторых, алгебра суперсимметрии замыкается только на уравнениях движения. Это не позволяет квантовать теории явно суперсимметричным образом. Для того, чтобы преодолеть эти сложности, в суперсимметричные теории вводят *вспомогательные поля*. Для простейших теорий они являются нединамическими и имеют алгебраические уравнения движения (нет кинетического слагаемого в лагранжиане), однако в более сложных теориях они становятся динамическими и удовлетворяют неалгебраическим уравнениям движения. Мультиплеты, включающие вспомогательные поля, называются мультиплетами вне массовой оболочки (ВМО), а введение вспомогательных полей решает сразу 3 проблемы:

1. Преобразования суперсимметрии не зависят от конкретной модели и реализованы линейно.

2. Алгебра суперсимметрии замыкается без использования уравнений движений на всех полях мультиплета.

3. Количество бозонных и фермионных степеней свободы совпадает вне массовой оболочки.

Если вспомогательные поля входят в теорию нединамическим образом (имеют алгебраические уравнения движения), то в такой теории их можно исключить, используя уравнения движения. После их исключения получается НМО-реализация суперсимметрии. Как правило, вспомогательные поля имеют нефизические размерности. Наборы вспомогательных полей для конкретного мультиплета могут быть различными. Хорошо известным примером являются различные версии $\mathcal{N} = 1$ супергравитации: “неминимальная”, “старая минимальная” и “новая минимальная” [85].

Формулировки суперсимметричных теорий вне массовой оболочки являются наиболее удобными в свете причин, изложенных выше. Задача поиска вспомогательных полей является довольно сложной и, возможно, в некоторых случаях даже не имеет решения. Для теорий с минимальной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией вспомогательные поля известны для практически всех мультиплетов. Однако поиск вспомогательных полей в теориях с расширенной $\mathcal{N} \geq 2$ суперсимметрией уже является нетривиальной задачей и, в ряде случаев, требует введения бесконечного числа вспомогательных полей [86, 87].

В случае $\mathcal{N} = 2$ теорий вспомогательные поля известны для гипермультиплета, векторного мультиплета, конформной и эйнштейновской супергравитаций. В случае высших спинов, набор вспомогательных полей найден в случае безмассовых и конформных $\mathcal{N} = 2$ высших

спинов (с целочисленным высшим спином), что является одним из результатов диссертации. Набор вспомогательных полей остается пока неизвестеным для безмассовых теорий высших спинов с полуцелым старшим спином и для $\mathcal{N} = 2$ массивных высших спинов. В случаях $\mathcal{N} = 3$ теорий известены BMO-формулировки векторного мультиплета [88] и мультиплета конформной супергравитации [89]. В $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии вне массовой оболочки известен только мультиплет конформной супергравитации [90]. Важной открытой проблемой является поиск вспомогательных полей для $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса и $\mathcal{N} = 8$ супергравитации.

***Гармоническое суперпространство***

Наиболее удобным способом описания суперсимметричных мультиплетов вне массовой оболочки является *суперпространство*, которое есть естественное расширение пространства Минковского путем включения грассмановых координат. В случае минимальной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии суперполевые методы хорошо известны [16, 17, 91]. В теориях с расширенной суперсимметрией обычного суперпространства не достаточно, и требуется рассматривать его расширения.

Наиболее естественный суперполевой подход к теориям с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией основан на $\mathcal{N} = 2$ гармоническом суперпространстве [92–94]. Гармоническое $\mathcal{N} = 2$ суперпространство было введено Гальпериным, Ивановым, Огиевецким, Калициным и Сокачевым в 1984 году. В отличие от обычного суперпространства, которое оказывается недостаточным для формулировки $\mathcal{N} = 2$ теорий вне массовой оболочки, гармоническое суперпространство содержит дополнительную сферу $S^2 \sim SU(2)/U(1)$, которая параметризуется гармониками. Как следствие этого, все гармонические суперполя содержат бесконечное количество компонентных полей. Основным преимуществом этого суперпространства является возможность формулировки теории гипермультиплета в терминах суперполя, на которое не наложены связи, а также геометрической формулировки $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий Янга-Миллса и супергравитации (эйнштейнвской и вейлевской) в терминах суперполей, на которые не наложены связи. Такие построения базируются на наличии $\mathcal{N} = 2$ *аналитического суперпространства*, подпространства, которое содержит только половину грассмановых координат. Оно играет фундаментальную роль: суперполя, описывающие все $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные теории, являются аналитическими суперполями, на которые не наложены связи.

Различные версии $\mathcal{N} = 2$ эйнштейновской супергравитации вне массовой оболочки были

построены в гармоническом суперпространстве в работах [95, 96]. В работе Зупника 1998 года [97] рассматривалась линеаризованная версия $\mathcal{N} = 2$ супергравитации в гармоническом суперпространстве.

***Суперсимметричные теории высших спинов***

Первые компонентные работы по суперсимметризации безмассовых высших спинов [98,99] появились через год после работ Фронсдала. Массивные $\mathcal{N} = 1$ супермультиплеты в компонентном подходе были построены в работе [34]. Суперполевой формализм был применен для построения свободных безмассовых $\mathcal{N} = 1$ суперполевых теорий высших спинов [100, 101] на плоском и AdS [102] фонах, для построения свободных массивных $\mathcal{N} = 1$ теорий высших спинов [103] (с целым старшим спином). Также $\mathcal{N} = 1$ суперполевой подход использовался для построения лагранжева описания свободных безмассовых $\mathcal{N} = 2$ мультиплетов высших спинов [104, 105]. Различные $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные кубические вершины в терминах $\mathcal{N} = 1$ суперполей были построены в работах [106–114]. Также кубические вершины с $\mathcal{N}$-расширенной суперсимметрией были построены с использованием суперпространства в калибровке светового конуса [115]. Кубические $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричные вершины рассматривались и в рамках компонентного подхода [116].

Суперконформные $\mathcal{N} = 1$ теории высших спинов на компонентном уровне рассматривались в работе [117], а на суперполевом – в работе [36]. В работе [118] были предложены действия для $\mathcal{N}$-расширенной теории конформных высших спинов. Кубические $\mathcal{N} = 1$ суперконформные вершины впервые рассматривались на компонентном уровне в работе [117]. На уровне суперполей $\mathcal{N} = 1$ суперконформные взаимодействующие вершины высших спинов с киральным мультиплетом были построены в работе [72].

Для теорий с расширенной $\mathcal{N} = 2$ симметрией явно суперсимметричная формулировка свободных действий[5] и кубические вершины вне массовой оболочки никогда не были построены. Основываясь на примерах $\mathcal{N} = 2$ теории Янга-Милла и $\mathcal{N} = 2$ супергравитации, было бы естественно ожидать, что для $\mathcal{N} = 2$ теорий высших спинов наиболее удобная суперполевая формулировка достижима на языке гармонических суперполей.

[5]За исключением предложенного суперконформного действия [118] в конформном суперпространстве. Причем в статье приведено только суперполе, его калибровочные преобразования и суперполевое действие, но не исследован его компонентный состав.

## Цели и задачи диссертационного исследования

Настоящая диссертация посвящена исследованию $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории высших спинов. При этом ставится несколько целей:

1. Построение $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий свободных высших спинов с помощью суперполей, на которые не наложены связи;
2. Построение $\mathcal{N} = 2$ кубических вершин взаимодействия высших спинов с гипермультиплетом материи;
3. Вывод $\mathcal{N} = 2$ суперполевых уравнений движения для свободных высших спинов;
4. Получение $\mathcal{N} = 2$ суперполевых токов гипермультиплета, отвечающих симметриям высших спинов;
5. Компонентная редукция полученных кубических вершин и калибровочных действий;
6. Описание $\mathcal{N} = 2$ суперконформных мультиплетов высших спинов в терминах аналитических суперполей без связей.

## Основные положения, выносимые на защиту диссертации

1. Построена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория высших спинов с помощью аналитических суперполей, на которые не наложены связи;
2. Получены суперполевые уравнения движения для $\mathcal{N} = 2$ теории высших спинов;
3. Построены $\mathcal{N} = 2$ кубические вершины взаимодействия высших спинов с гипермультиплетом;
4. Построены $\mathcal{N} = 2$ суперполевые токи высших спинов для гипермультиплета;
5. Выполнена и изучена компонентная редукция кубических вершин и калибровочных действий;
6. Найдены аналитических суперполя и калибровочные преобразования, описывающие $\mathcal{N} = 2$ суперконформные мультиплеты высших спинов.

**Научная новизна**

Все основные результаты диссертации являются оригинальными и впервые получены в ходе научной работы автора диссертации. В частности, впервые построена суперполевая $\mathcal{N} = 2$ теория высших спинов с целочисленным старшим спином в терминах аналитических суперполей без связей [I]. Нётеровские кубические взаимодействия суперполя гипермультиплета с аналитическими препотенциалами $\mathcal{N} = 2$ высших спинов впервые представлены в работах [II, III, V]. В работе [IV] были получены суперполевые уравнения движения и проанализирован компонентный состав кубических вершин. $\mathcal{N} = 2$ супертоки высших спинов впервые были рассмотрены в публикации [IV]. Гармонические суперполя, описывающие $\mathcal{N} = 2$ суперконформные мультиплеты высших спинов, впервые были представлены в работе [VI].

**Практическая и научная ценность**

Исследования, представленные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Полученные результаты могут иметь применение в построении различных теорий высших спинов, как класса теорий, которые позволили бы описать квантовую гравитацию, а также объединить все наблюдаемые фундаментальные взаимодействия. Такие теории являются обобщениями теории струн и вызывают большой интерес научного сообщества в области теории фундаментальных взаимодействий. Полученные результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами в этой области, и могут быть применены для дальнейших теоретических исследований в указанных направлениях.

## Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследований, вошедших в диссертацию, многократно представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях:

- Доклад на зимней школе XVII DIAS - TH по суперсимметрии и интегрируемости, «$\mathcal{N} = 2$ Fronsdal theory» (ОИЯИ, Дубна, 2022).
- Доклад на семинаре по квантовой теории поля «Off-shell cubic hypermultiplet couplings ot $\mathcal{N} = 2$ higher spin gauge superfields» (ФИАН, Москва, 2022).
- Доклад на международной конференции по квантовой теории поля, физике высоких энергий и космологии, «Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ higher-spin gauge superfields and their

hypermultiplet couplings» (ОИЯИ, Дубна, 2022).

- Доклад на международном рабочем семинаре по суперсимметрии и квантовым симметриям (SQS'22), «$\mathcal{N}$ = 2 higher spin theory in harmonic superspace» (ОИЯИ, Дубна, 2022).

- Стендовый доклад на международной московской школе по физике 2022, «$\mathcal{N}$ = 2 higher spin theory in harmonic superspace», (Дубна, 2022).

- Стендовый доклад на Мемориальной конференции памяти академика Андрея Алексеевича Славнова, «$\mathcal{N}$ = 2 cubic higher spin vertices and rigid symmetries of hypermultiplet» (МИАН, Москва, 2022).

- Доклад на конференции по суперсимметрии в интегрируемых системах, «$\mathcal{N}$ = 2 higher spins in harmonic superspace» (ОИЯИ, Дубна, 2023).

- Доклад на конференции по квантовой теории поля и гравитации, «Supercurrents in the hypermultiplet model cubically coupled to D=4, $\mathcal{N}$ = 2 higher spin gauge superfields» (Томск, 2023).

- Доклад на международной конференции по физике частиц и космологии, «$\mathcal{N}$ = 2 higher spin theories and harmonic superspace» (Ереван, 2023).

- Доклад на конференции "Поля и Струны'24" , «$\mathcal{N}$ = 2 superconformal higher spin supermultiplets» (МИАН, Москва, 2024).

- Доклад на конференции "Проблемы современной математической физики" , «$\mathcal{N}$ = 2 superconformal higher spin multiplets» (ОИЯИ, Дубна, 2024).

- Доклад на научной сессии секции ядерной физики ОФН РАН, «$\mathcal{N}$ = 2 супергравитация и гармоническое суперпространство» (ОИЯИ, Дубна, 2024).

По материалам диссертации опубликовано 6 статей в международных реферируемых журналах, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus.

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав основного текста, заключения и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 195 страниц. Диссертация не содержит таблиц и рисунков. Список литературы содержит 185 наименования.

## Содержание диссертации

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы; приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме; сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований; представлены выносимые на защиту научные положения.

**Глава 1** посвящена суперпространственным методам, которые будут применяться во всех дальнейших главах.

В **разделе 1.1** приведен краткий обзор необходимых основ из теории суперпространств: схематично объясняется построение действительного $\mathbb{R}^{4|4\mathcal{N}}$ и кирального $\mathbb{C}^{4|4\mathcal{N}}$ суперпространств, а также методы построения суперсимметричных моделей. Кратко обсуждается неэффективность таких суперпространств для ВМО-формулировок теорий с расширенной суперсимметрией.

В **разделе 1.2** дано определение *гармонического суперпространства*:

$$\mathbb{HR}^{4+2|8} := \frac{\{P_m, L_{mn}, Q^i_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha i}, su(2)\}}{\{L_{mn}, u(1)\}} = \mathbb{R}^{4|8} \times S^2 = \left(x^m, \theta^{\alpha i}, \bar\theta^i_{\dot\alpha}, u^{\pm i}\right). \tag{0.22}$$

Приводятся явные выражения для *гармоник* $u^\pm_i$ и объясняются методы работы с ними. Определяется аналитический базис

$$x^m_A = x^m - 2i\theta^{(i}\sigma^m\bar\theta^{j)}u^+_i u^-_j, \qquad \theta^\pm_{A\,\alpha} = u^\pm_i\theta^i_\alpha, \qquad \bar\theta^\pm_{A\,\dot\alpha} = u^\pm_i\bar\theta^i_{\dot\alpha}, \tag{0.23}$$

в котором выделяется новое инвариантное *аналитическое суперпространство*

$$\mathbb{HA}^{4+2|4} := \frac{\{P_m, L_{mn}, Q^\pm_\alpha, \bar{Q}^\pm_{\dot\alpha}, su(2)\}}{\{L_{mn}, Q^+_\alpha, \bar{Q}^+_{\dot\alpha}, u(1)\}} = (x^m_A, \theta^+_{A\,\alpha}, \bar\theta^+_{A\,\dot\alpha}, u^{\pm i}) = (\zeta^M), \tag{0.24}$$

содержащее в 2 раза меньше грассмановых координат. Как следствие наличия гармоник, в гармонических суперполях присутствует бесконечное число компонентных полей. Выделение аналитического суперпространства возможно только при введении гармоник, и наличие такого подпространства лежит в основе *принципа грассмановой аналитичности*, который играет определяющую роль в $\mathcal{N} = 2$ теориях, включая высшие спины.

Приводится два способа построения инвариантных действий: как интеграла по всему суперпространству и как интеграла по аналитическому суперпространству. Определяется *гармоническое сопряжение* как произведение обычного комплексного сопряжения и антиподального отображения на $S^3 \sim SU(2)$.

Вводятся *гармонические производные*:

$$\mathcal{D}^{++} = \partial^{++} - 4i\theta^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{+\hat{\alpha}}\partial^{+}_{\hat{\alpha}} + (\theta^{\hat{+}})^2\partial_5, \tag{0.25a}$$

$$D^{--} = \partial^{++} - 4i\theta^{-\alpha}\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{-\hat{\alpha}}\partial^{-}_{\hat{\alpha}} + (\theta^{\hat{-}})^2\partial_5, \tag{0.25b}$$

$$D^{0} = \partial^{0} + \theta^{+\hat{\alpha}}\partial^{-}_{\hat{\alpha}} - \theta^{-\hat{\alpha}}\partial^{+}_{\hat{\alpha}}. \tag{0.25c}$$

В **разделе 1.3** излагаются формулировки основных $\mathcal{N} = 2$ теорий:

- *Гипермультиплет* (спин $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$) описывается аналитическим полем $q^{+}(\zeta)$, для массивного случая добавляется зависимость от вспомогательной координаты $x^5$, $q^{+}(\zeta, x^5) = e^{imx^5}q^{+}(\zeta)$. Свободное действие задается интегралом по аналитическому суперпространству:

$$S_{free} = -\int d\zeta^{(-4)}\tilde{q}^{+}\mathcal{D}^{++}q^{+}. \tag{0.26}$$

- $\mathcal{N} = 2$ *мультиплет Максвелла* (спин $\mathbf{1}$) описывается аналитическим суперполем $V^{++}(\zeta)$, с калибровочными преобразованиями $\delta_\lambda V^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda$. Калибровочно инвариантное действие имеет вид:

$$S_{Max} = \int d^4x d^8\theta du\, V^{++}V^{--}. \tag{0.27}$$

  Здесь суперполе $V^{--}$ является решением уравнения нулевой кривизны $\mathcal{D}^{++}V^{--} = \mathcal{D}^{--}V^{++}$ и преобразуется как $\delta_\lambda V^{--} = \mathcal{D}^{--}\lambda$.

- $\mathcal{N} = 2$ *мультиплет супергравитации* (спин $\mathbf{2}$) описывается набором аналитических препотенциалов $h^{++\alpha\dot{\alpha}}, h^{++\alpha+}, h^{++\dot{\alpha}+}, h^{++5}$, которые являются фильбайнами в ковариантной гармонической производной:

$$\mathfrak{D}^{++} = \mathcal{D}^{++} + h^{++\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + h^{++\alpha+}\partial^{-}_{\alpha} + h^{++\dot{\alpha}+}\partial^{-}_{\dot{\alpha}} + h^{++5}\partial_5. \tag{0.28}$$

  Калибровочные преобразования – это аналитические супердиффеоморфизмы $\delta_\lambda\zeta^M = \lambda^M(\zeta)$, относительно которых $\delta_\lambda\mathfrak{D}^{++} = 0$. Калибровочно инвариантное действие имеет вид:

$$S_{SG} = \int d^4x d^8\theta du\, E H^{++5}H^{--5}. \tag{0.29}$$

  Здесь $E$ обозначает меру интегрирования, которую можно построить из препотенциалов, а $H^{\pm\pm5}$ определяются как фильбайны в разложении ковариантных гармонических

производных:

$$\mathfrak{D}^{\pm\pm} = \partial^{\pm\pm} + H^{++M}\partial_M, \tag{0.30}$$

связанных условием нулевой кривизны:

$$[\mathfrak{D}^{++}, \mathfrak{D}^{--}] = D^0. \tag{0.31}$$

Описание $\mathcal{N} = 2$ мультиплетов Максвелла и супергравитации послужат базой для обобщения на $\mathcal{N} = 2$ высшие спины, а гипермультиплет будет использован для построения кубических вершин и при определении $\mathcal{N} = 2$ суперконформных мультиплетов высших спинов.

**Глава 2** основана на результатах работы [I] и посвящена построению свободной $\mathcal{N} = 2$ теории высших спинов в гармоническом суперпространстве. Изложение начинается с детального изучения линеаризации $\mathcal{N} = 2$ супергравитации в **разделе 2.1**, для которой выводится инвариантное действие, затем излагается метод получения её компонентного состава. После этого в **разделе 2.2** разбирается первый нетривиальный пример $\mathcal{N} = 2$ теории спина **3**, который затем обобщается на общий случай.

В **разделе 2.3** демонстрируется, что аналитические препотенциалы

$$h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(\zeta), \quad h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(\zeta), \quad h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+}(\zeta), \quad h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+}(\zeta), \tag{0.32}$$

с калибровочной свободой

$$\begin{aligned}
&\delta_\lambda h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4i\Big[\lambda^{+\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2}\bar\theta^{+\dot\alpha_{s-1})} + \theta^{+(\alpha_{s-1}}\bar\lambda^{+\alpha(s-2))\dot\alpha(s-1)}\Big],\\
&\delta_\lambda h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} - 2i\left[\lambda^{+(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)}\theta^+_{\alpha_{s-1}} + \bar\lambda^{+(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})\alpha(s-2)}\bar\theta^+_{\dot\alpha_{s-1}}\right],\\
&\delta_\lambda h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)},\\
&\delta_\lambda h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+} = \mathcal{D}^{++}\bar\lambda^{+\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)}.
\end{aligned} \tag{0.33}$$

и преобразованиями $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии

$$\begin{aligned}
&\delta_\epsilon h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = -4i\Big[h^{++\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)+}\bar\epsilon^{-\dot\alpha_{s-1})} - h^{++\dot\alpha(s-1)(\alpha(s-2)+}\,\epsilon^{-\alpha_{s-1})}\Big],\\
&\delta_\epsilon h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = 2i\Big[h^{++(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)+}\epsilon^-_{\alpha_{s-1}} + h^{++\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})+}\,\bar\epsilon^-_{\dot\alpha_{s-1}}\Big],\\
&\delta_\epsilon h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+} = 0, \qquad \delta_\epsilon h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)} = 0
\end{aligned} \tag{0.34}$$

описывают $\mathcal{N}=2$ мультиплет спина $\mathbf{s}$ вне массовой оболочки, содержащий:

$$\begin{aligned}
&\textit{Физические поля}: && \left(\Phi^{\alpha(s)\dot\alpha(s)}, \Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\right), \left(\psi_\rho^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1))i}, \bar\rho_{\dot\beta}^{\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-3)\dot\beta)i}\right), \\
& && (C^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}, C^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s-3)}), \\
&\textit{Вспомогательные поля}: && V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)(ij)}, \rho^{(\alpha(s-2)\beta)\dot\alpha(s-2)\,i}, S^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)(ij)}, \\
& && T^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)}, P^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)\dot\beta}, \chi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)i}.
\end{aligned} \tag{0.35}$$

Калибровочные преобразования физических полей совпадают с калибровочной свободой полей Фронсдала и Фанга-Фронсдала.

Также в главе построено калибровочно-инвариантное и явно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрично инвариантное суперполевое действие:

$$S_{(s)} = (-1)^{s+1}\int d^4x d^8\theta du \left\{G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\right\}, \tag{0.36}$$

где суперсимметрично ковариантные поля $G^{++}$ определены как:

$$\begin{aligned}
G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4i\big[h^{++\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)+}\bar\theta^{-\dot\alpha_{s-1})} - h^{++\dot\alpha(s-1)(\alpha(s-2)+}\theta^{-\alpha_{s-1})}\big], \\
G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} - 2i\big[h^{++(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)+}\theta^-_{\alpha_{s-1}} + h^{++\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})+}\bar\theta^-_{\dot\alpha_{s-1}}\big],
\end{aligned} \tag{0.37}$$

а отрицательно заряженные определяются по ним как решения уравнений нулевой кривизны:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{++}G^{--\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}, \\
\mathcal{D}^{++}G^{--\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}.
\end{aligned} \tag{0.38}$$

На уровне компонент, после исключения вспомогательных полей, действие сводится к сумме действий Фронсдала и Фанга-Фронсдала для соответствующий спинов.

В **главе 3**, основанной на результатах статьи [IV], выводятся суперполевые уравнения движения, которые имеют вид:

$$(\bar D^+)^2 D^{+\alpha_{s-1}}G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - 4(D^+)^2\bar D^+_{(\dot\alpha}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))} = 0. \tag{0.39}$$

Эти уравнения являются обобщением на случай общего спина $\mathcal{N}=2$ суперполевых уравнений Максвелла, приведенных в **разделе 3.1**. Уравнения движения выводятся двумя эквивалентными способами: вариацией по аналитическим препотенциалам (**раздел 3.2**) и вариацией по препотенциалам Мезинческу (**раздел 3.3**), которые определяются через аналитический

суперсимметрично-инвариантный дифференциальный оператор:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} := h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = (\mathcal{D}^+)^4\left(\Psi^{-\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)\hat\mu}\mathcal{D}^-_{\hat\mu}\right)\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}, \tag{0.40}$$

$$\delta_\lambda\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} = [\mathcal{D}^{++},\hat\Lambda_{(s)}], \qquad \hat\Lambda_{(s)} := \lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}. \tag{0.41}$$

Этот дифференциальный оператор играет важную роль в следующей главе.

В **главе 4**, основанной на статьях [II,III,IV,V], формулируются ограничения (**раздел 4.1**), которые накладывает аналитичность, $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия и калибровочная инвариантность на форму кубической вершины взаимодействия высших спинов с гипермультиплетом. В результате вершина практически полностью фиксируется (с точностью до $2\times 2$ матрицы $A_{ab}$) и остается определить только вид калибровочных преобразований гипермультиплета. Они определяются через локализацию глобальных симметрий гипермультиплета, и их форма однозначно фиксируется возможной формой вершины.

В **разделе 4.2** приводятся простейшие примеры вершин для спинов **1**, **2** и **3**, а затем на основании этих примеров в **разделе 4.3** получается общий результат для кубической вершины:

$$S^{(s)}_{gauge} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++}+\kappa_s\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}(J)^{P(s)}\right)q^+_a\,, \tag{0.42}$$

и калибровочных преобразований гипермультиплета:

$$\delta^{(s)}_\lambda q^{+a} = -\frac{\kappa_s}{2}\left\{\partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)},\hat\Lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\right\}(J)^{P(s)}q^{+a} - \frac{\kappa_s}{2}\partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\Omega^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^{+a}\,. \tag{0.43}$$

Вершина взаимодействия имеет нётеровскую форму:

$$S^{(s)}_{int} = \kappa_s\int d\zeta^{(-4)}\; h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\,, \tag{0.44}$$

где введены суперполевые токи:

$$J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M} := -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\partial_M(J)^{P(s)}q^+_a. \tag{0.45}$$

После исключения вспомогательных полей гипермультиплета, для чего удобно использовать суперполевые уравнения движения, на компонентном уровне вершина сводится к вы-

ражению:

$$S^{(s)}_{gauge} = \kappa_s \int d^4x \Big( \Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta\dot\beta} Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta\dot\beta} + \psi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta i} Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta i} + \bar\psi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\dot\beta i} \bar Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\dot\beta i} + C^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)\beta\dot\beta} Y_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)\beta\dot\beta} \Big) + \mathcal{O}(\kappa_s^2). \tag{0.46}$$

В **разделе 4.4** приведены выражения для таких $Y$-токов в случаях $s = 1, 2, 3$.

В **главе 5**, основанной на работе [IV], обсуждаются глобальные симметрии гипермультиплета и их связь с суперполевым токами. Анализируется компонентный состав суперполевых токов.

В **разделе 5.1** исследуется алгебраическая структура глобальных симметрий и показано, что коммутатор фермионных преобразований высших спинов приводит к преобразованиям более старшего спина. Также приведены явная реализация этих фермионных преобразований спина $\frac{3}{2}$ на полях гипермультиплета и соответствующие им сохраняющиеся фермионные токи.

В **разделе 5.2** формулируется $\mathcal{N} = 2$ теорема Нётер в гармоническом суперпространстве и с её помощью воспроизводятся законы сохранения для суперполей токов $J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}$. Тем самым устанавливается их связь с глобальными симметриями гипермультиплета.

В **разделе 5.3** приведены компонентны сохраняющихся супертоков в терминах полей гипермультиплета на массовой оболочке.

В **разделе 5.4** приведен общий анализ компонентного состава сохраняющихся суперполевых токов высших спинов и получены общие формулы для сохраняющихся компонентных токов.

В **главе 6**, основанной на результатах работы [VI], обсуждается построение $\mathcal{N} = 2$ суперконформных мультиплетов высших спинов в гармоническом суперпространстве.

В **разделе 6.1** обсуждается реализация суперконформных преобразований в гармоническом суперпространстве и их действие на гипермультиплет.

В **разделе 6.2** формулируется стратегия, позволяющая из требований аналитичности и $\mathcal{N} = 2$ суперконформной инвариантности кубических вершин получать суперконформные мультиплеты высших спинов.

**Разделы 6.3 и 6.4** посвящены отработке механизма и детальному исследованию суперконформных вершин взаимодействия гипермультиплета с $\mathcal{N} = 2$ мультиплетами Максвелла и Вейля. Показано, что основное отличие мультиплета Вейля от супергравитации состоит в наличии фильбайна $h^{(+4)}$, соответствующего гармонической производной $\partial^{--}$. Обсуждается компонентный состав мультиплета Вейля. Вводятся все необходимые объекты для ковари-

антного описания кубических вершин на фоне $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации.

В **разделе 6.5** подробно исследован случай $\mathcal{N}=2$ суперконформной теории спина **3**. Он описывается набором общих аналитических суперполей $h^{++M^N}, M=(\alpha\dot\alpha,\alpha+,\dot\alpha+,++)$ в отличие от неконформного случая с $h^{++M\alpha\dot\alpha}, M=(\alpha\dot\alpha,\alpha+,\dot\alpha+,5)$. Приводится компонентный состав мультиплета, содержащий конформные поля высших спинов. Обнаружена интересная особенность, состоящая в том, что все поля являются калибровочными, а значит входят в динамическое действие через производные и являются динамическими. Таким образом, этот мультиплет не содержит стандартных вспомогательных полей в отличие от низших суперконформных полей (спинов $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{1},\mathbf{1}$) и неконформного случая.

После этого, в **разделе 6.6**, показано, как обобщить эту вершину на произвольный фон $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации. По сути, это достигается простым удлинением гармонической производной:

$$\mathcal{D}^{++} \quad \to \quad \mathfrak{D}^{++}=\mathcal{D}^{++}+h^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}+h^{++\alpha+}\partial^-_\alpha+h^{++\dot\alpha+}\partial^-_{\dot\alpha}+h^{(+4)}\partial^{--}. \tag{0.47}$$

Затем в **разделе 6.7** полученные результаты обобщаются на случай спина **s**. Показано, что суперконформный мультиплет спина **s** описывается набором наиболее общих аналитических суперполей $h^{++M_1\dots M_{s-1}}$, и обоснована гипотеза о соответствующем наборе физических полей в калибровке Весса-Зумино.

В **разделе 6.8** проведен анализ согласованности бесконечной башни высших спинов, взаимодействующих с гипермультиплетом. Это взаимодействие является инвариантным относительно неабелевых калибровочных преобразований и в дальнейшем может служить для определения взаимодействующих конформных теорий высших спинов через формализм индуцированных действий. Инвариантность обеспечивается тем, что суперполевой дифференциальный оператор бесконечной башни спинов содержит наиболее общие комбинации суперпространственных производных.

В **разделе 6.9** обсуждаются суперконформные токи высших спинов для гипермультиплета.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту, обсуждается дальнейшее развитие гармонического подхода и его возможные применения для задач теории высших спинов.

В **приложении A** собраны некоторые используемые обозначения и соглашения. Приводятся линеаризованные кривизны для спинов 2 и $\frac{3}{2}$.

В **приложении B** приведены необходимые решения уравнений нулевой кривизны в слу-

чае $\mathcal{N} = 2$ спинов **2** и **3**.

## Публикации по теме диссертации


[I] I. Buchbinder, E. Ivanov and N. Zaigraev, *Unconstrained off-shell superfield formulation of 4D, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric higher spins*, JHEP **12** (2021), 016, [arXiv:2109.07639 [hep-th]].

[II] I. Buchbinder, E. Ivanov and N. Zaigraev, *Off-shell cubic hypermultiplet couplings to $\mathcal{N} = 2$ higher spin gauge superfields*, JHEP **05** (2022), 104, [arXiv:2202.08196 [hep-th]].

[III] I. Buchbinder, E. Ivanov and N. Zaigraev, *Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Higher-Spin Gauge Superfields and Their Hypermultiplet Couplings*, Phys. Part. Nucl. Lett. **20** (2023) no.3, 300-305, [arXiv:2211.09501 [hep-th]].

[IV] I. Buchbinder, E. Ivanov and N. Zaigraev, *$\mathcal{N} = 2$ higher spins: superfield equations of motion, the hypermultiplet supercurrents, and the component structure*, JHEP **03** (2023), 036, [arXiv:2212.14114 [hep-th]].

[V] N. Zaigraev, *$\mathcal{N} = 2$ Higher Spin Theory in Harmonic Superspace*, Phys. Part. Nucl. **54** (2023) no.6, 1084-1088.

[VI] I. Buchbinder, E. Ivanov and N. Zaigraev, *$\mathcal{N} = 2$ higher-spin theories and harmonic superspace*, in Proceedings of International Conference on Particle Physics and Cosmology — PoS (ICPPCRubakov2023), vol. 455, p. 048. (2024) [arXiv:2402.05704 [hep-th]].

# Глава 1

# Гармоническое суперпространство и $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные теории

В этой главе мы описываем гармоническое суперпространство в сравнении с другими суперпространствами, вводим обозначения, которые будем использовать, и приводим примеры формулировки $\mathcal{N} = 2$ теорий в гармоническом суперпространстве, которые нам понадобятся в дальнейшем.

## 1.1 Суперпространства

Наиболее систематическим подходом для построения мультиплетов вне массовой оболочки и явно суперсимметричных теорий поля является метод суперпространства [16, 17, 94]. В суперполевом формализме суперсимметричные мультиплеты описываются в терминах суперполей, заданных на суперпространстве. Желательно, чтобы такие суперполя не подчинялись связям. Наиболее естественным способом введения суперпространства является формализм фактор-пространств (однородных пространств). На фактор-пространствах естественным образом задается действие группы и определяются ковариантные (супер)поля. Для построения фактор-пространства необходимо выделить из группы симметрий подгруппу и отфакторизовать исходную группу по ней. Выбор подгруппы, по которой происходит факторизация, не единственен и, вообще говоря, разные выборы подгруппы приводят к разным суперпространствам. Исторически, это было важным наблюдением, которое привело к открытию гармонического суперпространства.

***Пространство Минковского*** в этом формализме появляется как факторпространство

группы Пуанкаре по группе Лоренца и параметризуется координатами $x^m$:

$$\mathbb{M}^4 := \frac{ISO(1,3)}{SO(1,3)} = \frac{\{L_{nm}, P_n\}}{\{L_{ab}\}} = (x^m).$$

Группа Пуанкаре естественным образом реализуется на этом пространстве:

$$x^m \to x'^m = x^m + a^m + \Lambda^m{}_n x^n. \tag{1.1}$$

Ковариантные поля определяются как функции на $\mathbb{M}^4$ и преобразуются относительно трансляций как скаляры, т.е. $\phi'(x') = \phi(x)$, а относительно группы Лоренца соответственно их индексной структуре. Строя из ковариантных полей Лоренцев инвариант и интегрируя его по пространству Минковского, можно строить явно Пуанкаре-инвариантные теории.

***Действительное суперпространство*** определяется как факторпространство прямого произведения супергруппы Пуанкаре и группы автоморфизмов по группе Лоренца и автоморфизмов:

$$\mathbb{R}^{4|4\mathcal{N}} := \frac{SPoincare(1,3|\mathcal{N}) \times SU(\mathcal{N})}{SO(1,3) \times SU(\mathcal{N})} = \frac{\left\{L_{nm}, su(\mathcal{N}), P_n, Q^i_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha i}\right\}}{\{L_{nm}, su(\mathcal{N})\}} = \left(x^m, \theta^\alpha_i, \bar\theta^{\dot\alpha i}\right). \tag{1.2}$$

Помимо координат пространства Минковского $x^m$ суперпространство также имеет грасмановы координаты $\theta^\alpha_i, \bar\theta^{\dot\alpha i}$. Преобразования суперсимметрии (супертрансляции) естественным образом реализуются на этих координатах:

$$\begin{aligned} &x^m \to x'^m = x^m + i\left(\epsilon^{\alpha i}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}_i - \theta^{\alpha i}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\epsilon^{\dot\alpha}_i\right), \\ &\theta^\alpha_i \to \theta'^\alpha_i = \theta^\alpha_i + \epsilon^\alpha_i, \qquad \bar\theta^i_{\dot\alpha} \to \bar\theta'^i_{\dot\alpha} = \bar\theta^i_{\dot\alpha} + \bar\epsilon^i_{\dot\alpha}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Трансляции действуют только на координаты $x^m \to x^{\tilde m} = x^m + a^m$, а преобразования Лоренца и автоморфизмов действуют на эти координаты соответственно их индексной структуре. По построению, полученные преобразования удовлетворяют соотношениям алгебры супер-Пуанкаре и, таким образом, дают координатную реализацию суперсимметрии.

Суперполя определяются как суперфункции на $\mathbb{R}^{4|4\mathcal{N}}$ и, относительно трансляций и супертрансляций, преобразуются как скаляры, т.е. $\Phi'(x', \theta', \bar\theta') = \Phi(x, \theta, \bar\theta)$. Под действием группы Лоренца и группы автоморфизмов суперполя преобрзаются соответственно их индексной структуре.

Поскольку грассмановы координаты антикоммутируют друг с другом, разложение суперполя по ним будет конечным. Коэффициенты разложения будут являться функциями

координат $x^m$ и соответствуют обычным полям, определенным на пространстве Минковского:

$$\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \phi(x) + \theta_i^\alpha \psi_\alpha^i(x) + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}\bar{\chi}_{\alpha i}(x) + \cdots + \theta^{2\mathcal{N}}\bar{\theta}^{2\mathcal{N}} D(x). \tag{1.4}$$

Если зафиксировать грассманову четность суперполя , то из-за грассмановой природы координат $\theta$ разные поля в разложении будут иметь разную четность, отвечая тем самым бозонным и фермионным полям. Законы преобразования компонент суперполя относительно преобразований суперсимметрии следуют непосредственно из (1.3). В частности, несложно видеть, что старшая компонента суперполя $D(x)$ преобразуется как полная производная. Отсюда следует, что интеграл по $d^4x$ от старшей компонентны любого суперполя есть инвариант суперсимметрии. Образуя из ковариантных суперполей скаляр по группе Лоренца и по $SU(\mathcal{N})$, можно строить действия, явно инвариантные относительно $\mathcal{N}$-расширенной алгебры суперсимметрии.

Для того, чтобы осуществить выделение старшего слагаемого в суперполе явно суперсимметричным образом, удобно использовать интеграл Березина по грассмановым координатам. По определению, этот интеграл эквивалентен взятию производной по грассмановой переменной. С его использованием явно суперсимметричный принцип действия записывается как:

$$S = \int d^4x d^{2\mathcal{N}}\theta d^{2\mathcal{N}}\bar{\theta}\, \mathcal{L}. \tag{1.5}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – произвольное скалярное суперполе.

Главным недостатком такого формализма является наличие большого числа компонентных полей в суперполях (1.4). Это значительно ограничивает эффективность суперполевых методов. Чтобы преодолеть это препятствие, вводят суперпространства, содержащие только часть грассмановых координат.

Еще один возможный способ выделения подалгебры, по которой происходит факторизация, даёт ***киральное суперпространство***:

$$\mathbb{C}^{4|2\mathcal{N}} := \frac{\left\{L_{nm}, su(\mathcal{N}), P_n, Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}\right\}}{\left\{L_{nm}, su(\mathcal{N}), \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}\right\}} = (x_L^m, \theta_{L\,i}^\alpha)\,. \tag{1.6}$$

Здесь координаты имеют вид:

$$x_L^m = x^m + i\theta_{L\,i}\sigma^m\bar{\theta}_L^i, \qquad \theta_{L\,i}^\alpha = \theta_i^\alpha. \tag{1.7}$$

А преобразования суперсимметрии действуют таким образом, что сохраняют киральное суперпространство:

$$x_L^m \to x_L'^m = x_L^m - 2i\theta_L^i \sigma^m \bar{\epsilon}_i, \qquad \theta_{L\,i}^\alpha \to \theta_{L\,i}'^\alpha = \theta_{L\,i}^\alpha + \epsilon_i^\alpha. \tag{1.8}$$

Основной особенностью кирального суперпространства является наличие только половины грассмановых координат, что приводит к меньшему числу компонентных полей, содержащихся в киральном суперполе.

На киральном суперпространстве можно также определить явно суперсимметричное действие:

$$S = \int d^4x d^{2\mathcal{N}}\theta \, \mathcal{L}. \tag{1.9}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – произвольное скалярное киральное суперполе.

Суперпространства $\mathbb{R}^{4|4}$ и $\mathbb{C}^{4|2}$ играют важную роль для $\mathcal{N} = 1$ теорий. Вспомогательные поля известны для многих $\mathcal{N} = 1$ мультиплетов, и построены суперполевые описания соответствующих теорий [16, 119], в том числе для безмассовых [100–102, 119] и массивных высших спинов (с полуцелым суперспином) [103].

Однако для теорий с расширенной суперсимметрией ($\mathcal{N} \geq 2$) обычные действительное и киральное суперпространства не обеспечивают адекватного описания. Причиной являются "no-go" теоремы для расширенной суперсимметрии [86,87]. Они утверждают, что невозможно найти конечный набор вспомогательных полей для теорий с расширенной суперсимметрией. Например, такая проблема возникает при работе с гипермультиплетом. Чтобы преодолеть эти сложности, необходимо рассматривать новые типы суперпространств, суперполя на которых содержат бесконечное количество компонент. В следующем разделе мы опишем, как эта проблема со вспомогательными полями была решена для $\mathcal{N} = 2$ теорий.

## 1.2 Гармоническое суперпространство

***Гармоническое*** $\mathcal{N} = 2$ ***суперпространство*** определяется как фактор-пространство:

$$\mathbb{HR}^{4+2|8} := \frac{\{P_m, L_{mn}, Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}, su(2)\}}{\{L_{mn}, u(1)\}} = \mathbb{R}^{4|8} \times S^2 = \left(x^m, \theta^{\alpha i}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^i, u^{\pm i}\right). \tag{1.10}$$

В качестве подгруппы, по которой производится факторизация, берется абелева подгруппа $U(1)$, а не вся группа автоморфизмов $SU(2)$, как это происходило в определении обычного суперпространства. Таким образом, в гармоническом суперпространстве процедура факторизации дает двумерную сферу $S^2 = \frac{SU(2)}{U(1)}$, которая расширяет обычное $\mathcal{N} = 2$ суперпро-

странство. Как следствие наличия дополнительной сферы, гармонические суперполя будут зависеть от координат, параметризующих сферу.

Сферу можно параметризовать различными способами, например, использовать сферические координаты и раскладывать функцию по сферическим гармоникам, или использовать проективные координаты. В гармоническом суперпространстве выбирается параметризация сферы, в которой сохраняется явная $SU(2)$ ковариантность. Опишем, как устроена такая параметризация. Любой элемент группы $SU(2)$ можно зависать в виде:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{1.11}$$

Выберем явную параметризацию $SU(2)$ матриц через 3 угла Эйлера:

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2}\cos(\theta/2)e^{i\phi/2} & e^{-i\psi/2}i\sin(\theta/2)e^{i\phi/2} \\ e^{i\psi/2}i\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} & e^{-i\psi/2}\cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^+ & u_1^- \\ u_2^+ & u_2^- \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Углы принимают значения: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le 4\pi$.

Элементы матрицы отождествляются с *гармониками* $u_i^\pm$, $i = 1, 2$, которые имеют следующий вид:

$$u_i^+ = e^{i\psi/2}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{i\phi/2} \\ i\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \qquad u_i^- = e^{-i\psi/2}\begin{pmatrix} i\sin(\theta/2)e^{+i\phi/2} \\ \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

$SU(2)$-индекс у гармоник можно поднимать и опускать используя $\varepsilon$-символ: $u^{+i} = \epsilon^{ij}u_i^+$ $\varepsilon^{12} = -1$. В этих обозначениях мы получаем ряд полезных свойств, которым удовлетворяют гармоники:

$$u^{+i}u_i^- = 1, \qquad u_i^- := \overline{u^{+i}}, \qquad u_i^+u_j^- - u_i^-u_j^+ = \varepsilon_{ij}. \tag{1.14}$$

Под действием группы $SU(2)$ гармоники преобразуются как:

$$u_i^\pm \quad \to \quad (u_i^\pm)' = \Lambda_i^{\ j}u_j^\pm e^{\pm i\chi(\Lambda)}, \tag{1.15}$$

где $\Lambda_i^{\ j}$ это элемент группы $SU(2)$, а $\chi(\Lambda)$ – фаза индуцированных $U(1)$ преобразований.

Введенные таким образом гармоники зависят от 3-х углов Эйлера. Поскольку в гармоническом суперпространстве функции определены на сфере, нужно еще отфакторизоваться по $U(1)$. Для этого можно рассматривать функции, однородные по степеням $e^{i\frac{\psi}{2}}$, или, как видно из явной параметризации (1.13), имеющие фиксированный гармонический заряд. Тогда, формально, координата $\psi$ будет отфакторизованна и все функции будут зависеть только от

координат на $SU(2)/U(1)$: $\theta$ и $\phi$. Гармоническая функция заряда $q \geq 0$ тогда имеет общее (гармоническое) разложение:

$$f^{(q)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(i_1 \dots i_{n+q} j_1 \dots j_n)} u^+_{(i_1} \dots u^+_{i_{n+q}} u^-_{j_1} \dots u^-_{j_n)}. \tag{1.16}$$

Гармоническая функция с отрицательным зарядом определяется аналогично. Разложение ведется по симметризованным произведениям гармоник.

Таким образом обеспечивается явная $SU(2)$ ковариантность для компонентных полей. На гармоники можно смотреть как на диады, осуществляющие мост между $SU(2)$ и $U(1)$ группами. Тем самым, они выполняют роль, аналогичную тетрадам $e^m_a$ в теории тяготения, осуществляющими мост между индексом общековариантной группы и индексом касательной группы Лоренца.

Под действием индуцированных $U(1)$ преобразований функции с фиксированным гармоническим зарядом преобразуются однородно:

$$f^{(q)} \quad \to \quad f^{(q)} e^{iq\chi(\Lambda)}. \tag{1.17}$$

Таким образом, мы описываем функции на фактор пространстве $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ как функции на $SU(2)$, однородные по $U(1)$ координатам.

Естественно определить набор $SU(2)$-ковариантных гармонических производных (в центральном базисе):

$$\partial^{++} := u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}}, \qquad \partial^{--} := u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}}, \qquad \partial^0 := u^{+i} \frac{\partial}{\partial u^{+i}} - u^{-i} \frac{\partial}{\partial u^{-i}}. \tag{1.18}$$

Действие $\partial^{++}$ повышает гармонический заряд на 2, действие $\partial^{--}$ понижает его на 2 а действие $\partial^0$ дает гармонический заряд функции на сфере. Таким образом, они действуют на гармонических функциях, оставляя их однородными. Важно также и то, что эти производные совместимы с нормировкой $u^{+i} u^-_i = 1$, в отличие от обычных производных по гармоникам.

Для работы с гармоническими суперполями удобно выбрать *аналитический базис* в гармоническом суперпространстве:

$$x^m_A = x^m - 2i\theta^{(i} \sigma^m \bar{\theta}^{j)} u^+_i u^-_j, \qquad \theta^{\pm}_{A\,\alpha} = u^{\pm}_i \theta^i_\alpha, \qquad \bar{\theta}^{\pm}_{A\,\dot{\alpha}} = u^{\pm}_i \bar{\theta}^i_{\dot{\alpha}}. \tag{1.19}$$

Под действием суперсимметрии аналитические координаты преобразуются как[1]:

$$\delta_\epsilon x_A^m = -2i\left(\epsilon^i\sigma^m\bar{\theta}^+ + \theta^+\sigma^m\bar{\epsilon}^i\right)u_i^-, \qquad \delta_\epsilon\theta^\pm_{A\,\hat{\alpha}} = u_i^\pm\epsilon^i_{\hat{\alpha}}, \qquad \delta_\epsilon u_i^\pm = 0. \tag{1.20}$$

Общее гармоническое суперполе фиксированного заряда $q$ имеет вид:

$$\Phi^{(q)}(x_A,\theta_A^\pm,\bar{\theta}_A^\pm,u) = \phi^q(x_A,u) + \theta^{+\alpha}\psi_\alpha^{(q-1)}(x_A,u) + \theta^{-\alpha}\chi_\alpha^{(q+1)}(x_A,u) + \dots \tag{1.21}$$

Каждое из полей в разложении, помимо координаты $x$, также зависит от гармоник $u_i^\pm$, а значит имеет гармоническое разложение и тем самым содержит бесконечное число полей. Таким образом, гармоники являются вспомогательными переменными, позволяющими обеспечить включение бесконечного набора вспомогательных полей в суперполе.

Отметим теперь важный момент, связанный со свойствами комплексного сопряжения. Гармоники сопрягаются как:

$$\overline{u_i^+} = -u^{-i} = -\epsilon^{ij}u_j^-, \qquad \overline{u_i^-} = u^{+i} = \epsilon^{ij}u_j^+, \qquad \overline{\overline{u_i^\pm}} = u_i^\pm. \tag{1.22}$$

На гармониках также можно определить антиподальное отображение $\star$:

$$\begin{cases} \theta \overset{\star}{\to} \pi - \theta, \\ \phi \overset{\star}{\to} \phi + \pi, \\ \psi \overset{\star}{\to} -\psi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u_i^+ \overset{\star}{\to} u_i^-, \\ u_i^- \overset{\star}{\to} -u_i^+. \end{cases} \tag{1.23}$$

Произведение комплексного сопряжения и антиподального отображения называется *тильда-сопряжением* или *гармоническим сопряжением* (можно встретить и название псевдосопряжение). Оно действует на гармоники по правилу:

$$\widetilde{u_i^+} = u^{+i}, \qquad \widetilde{u_i^-} = u^{-i}. \tag{1.24}$$

На координаты в аналитическом базисе тильда-сопряжение действует как:

$$\widetilde{x^{\alpha\dot{\alpha}}} = x^{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \widetilde{\theta^\pm_\alpha} = \bar{\theta}^\pm_{\dot{\alpha}}, \quad \widetilde{\bar{\theta}^\pm_{\dot{\alpha}}} = -\theta^\pm_\alpha, \quad \widetilde{u^{\pm i}} = -u_i^\pm, \quad \widetilde{u_i^\pm} = u^{\pm i}. \tag{1.25}$$

Принцип действия в гармоническом суперпространстве может быть определен абсолют-

[1]Поскольку $x_A$ преобразуется только через $\theta^+$, то сразу видно, что *аналитическое подпространство* $(x_A,\theta^+,u_i^\pm)$ является инвариантным относительно суперсимметрии.

но так же, как и в обычном суперпространстве, за тем исключением, что теперь суперполя еще зависят от гармоник. Чтобы получить $SU(2)$-инвариантное действие, надо проинтегрировать по $SU(2)$ группе, которую параметризуют гармоники. Отсюда сразу следует, что для нетривиальности инвариантного гармонического интеграла требуется нулевой гармонический заряд и любая симметризованная комбинация гармоник при интегрировании должна давать 0, поскольку отсутствуют $SU(2)$ - инвариантные тензоры, которые могли бы стоять в правой части равенства. Нормируя интеграл от единицы как единицу, мы приходим к правилам интегрирования по гармоникам:

$$\int du f^{(q)}(u) = 0 \quad \text{если } q \neq 0 \ , \quad \int du\, 1 = 1, \quad \int du\, u^+_{(i_1} \dots u^+_{i_n} u^-_{j_1} \dots u^-_{j_n)} = 0 \quad (n \geq 1). \tag{1.26}$$

В результате, принцип действия в гармоническом суперпространстве можно записать как:

$$S_{HSS} = \int d^4x d^4\theta^+ d^4\theta^- du\, \mathcal{L}, \tag{1.27}$$

где $\mathcal{L}$ – произвольное гармоническое суперполе нулевого заряда.

Важной особенностью гармонического суперпространства является наличие инвариантного подпространства, которое содержит в 2 раза меньше грассмановых переменных. Это подпространство называется аналитическим суперпространством и играет такую же фундаментальную роль в $\mathcal{N} = 2$ теориях, как киральное суперпространство в $\mathcal{N} = 1$ теориях. ***Аналитическое суперпространство*** определяется как:

$$\mathbb{H}\mathbb{A}^{4+2|4} := \frac{\{P_m, L_{mn}, Q^\pm_\alpha, \bar{Q}^\pm_{\dot\alpha}, su(2)\}}{\{L_{mn}, Q^+_\alpha, \bar{Q}^+_{\dot\alpha}, u(1)\}} = \underbrace{(x^m_A, \theta^+_{A\,\alpha}, \bar\theta^+_{A\,\dot\alpha}, u^{\pm i})}_{\zeta}. \tag{1.28}$$

Это дает возможность определить аналитические суперполя, которые зависят от половины грассмановых координат $\Phi^{(q)}(x_A, \theta^+_A, \bar\theta^+_A, u)$. В литературе принято обозначать аналитические координаты как $\zeta$. Мы будем следовать этим обозначениям. В отличие от кирального суперпространства, которое неинвариантно относительно комплексного сопряжения, аналитическое суперпространство инвариантно относительно тильда-сопряжения (1.25).

На аналитическом суперпространстве можно определить принцип действия:

$$S_{ASS} = \int d^4x d^4\theta^+ du\, \mathcal{L}^{(+4)} = \int d\zeta^{(-4)}\, \mathcal{L}^{(+4)}. \tag{1.29}$$

Здесь лагранжиан $\mathcal{L}^{(+4)}$ это произвольное аналитическое суперполе заряда +4. Отметим, что

такой принцип действия невозможно построить в обычном суперпространстве.

Зная связь центрального базиса и аналитического (1.19), можно найти гармонические производные (1.18) в аналитическом базисе. Мы будем обозначать их следующим образом:

$$D^{++} = \partial^{++} - 4i\theta^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{+\hat{\alpha}}\partial^{+}_{\hat{\alpha}}, \tag{1.30}$$

$$D^{--} = \partial^{++} - 4i\theta^{-\alpha}\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{-\hat{\alpha}}\partial^{-}_{\hat{\alpha}}, \tag{1.31}$$

$$D^{0} = \partial^{0} + \theta^{+\hat{\alpha}}\partial^{-}_{\hat{\alpha}} - \theta^{-\hat{\alpha}}\partial^{+}_{\hat{\alpha}}. \tag{1.32}$$

Смысл производной $D^0$ в том, что она считает гармонический заряд суперполя. Эти производные буду играть важную роль в формулировке $\mathcal{N} = 2$ теорий в гармоническом суперпространстве.

Ковариантных гармонические производные удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0, \qquad [D^0, D^{\pm\pm}] = \pm 2D^{\pm\pm}. \tag{1.33}$$

Для дальнейшего, нам будет полезно ввести вспомогательную координату $x^5$. Она используется для описания мультиплетов с нетривиальным центральным зарядом. В частности, такую координату удобно использовать для описания массивного гипермультиплета, эта конструкция приведена ниже. Координата $x^5$ преобразуется относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии согласно правилу (которое можно вывести из соответствующего косета, см. раздел 3.6 в книге [94]):

$$\delta_\epsilon x^5 = 2i\left(\epsilon^{-\alpha}\theta^{+}_{\alpha} - \bar{\epsilon}^{-}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\right), \qquad \widetilde{x^5} = x^5. \tag{1.34}$$

Как следствие добавления новой координаты, которая преобразуется через грассмановы координаты, в ковариантные гармонические производные добавляется производная по вспомогательной координате $x^5$:

$$\mathcal{D}^{++} = D^{++} + (\theta^{\hat{+}})^2\partial_5, \qquad \mathcal{D}^{--} = D^{--} + (\theta^{\hat{-}})^2\partial_5, \tag{1.35}$$

Если не оговорено противоположное, то все суперполя не зависят от вспомогательной переменной $x^5$, и производные $D^{\pm\pm}$ и $\mathcal{D}^{\pm\pm}$ совпадают.

Спинорные производные, инвариантные относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии (1.20) и

(1.34), имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^+_{\hat{\alpha}} &:= \partial^+_{\hat{\alpha}}, \\
\mathcal{D}^-_{\alpha} &:= -\partial^-_{\alpha} + 4i\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} - 2i\theta^-_{\alpha}\partial_5, \\
\bar{\mathcal{D}}^-_{\dot{\alpha}} &:= -\partial^-_{\dot{\alpha}} - 4i\theta^{-\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + 2i\bar{\theta}^-_{\dot{\alpha}}\partial_5.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Если суперполя не зависят от координаты $x^5$, для спинорных производных мы будем также использовать обозначения $D^{\pm}_{\hat{\alpha}}$.

Ковариантные производные удовлетворяют полезным соотношениям:

$$[\mathcal{D}^{\pm\pm}, \mathcal{D}^{\mp}_{\hat{\alpha}}] = \mathcal{D}^{\pm}_{\hat{\alpha}}, \qquad [\mathcal{D}^{\pm\pm}, \mathcal{D}^{\pm}_{\hat{\alpha}}] = 0. \tag{1.37}$$

В терминах ковариантных производных мера интегрирования по грассмановым координатам может быть записана как:

$$d^8\theta = d^4\theta^+ d^4\theta^- := (\mathcal{D}^-)^4(\mathcal{D}^+)^4, \qquad (\mathcal{D}^{\pm})^4 := \frac{1}{16}(\mathcal{D}^+)^2(\bar{\mathcal{D}}^+)^2. \tag{1.38}$$

Гармоническое $\mathcal{N} = 2$ суперпространство было введено Гальпериным, Ивановым, Огиевецким, Калициным и Сокачевым в 1984 году [92]. Оно является универсальным подходом для описания суперсимметричных теорий с 8 действительными суперзарядами [94]. Другие суперпространственные формулировки $\mathcal{N} = 2$ теорий тесно связаны с гармоническим суперпространством но они не позволяют найти препотенциалы калибровочных теорий [120–122].

Для полноты, упомянем другие $\mathcal{N} = 2$ суперпространства, часто возникающие в современной литературе по суперполям.

- *Изотвисторное суперпространство* [123, 124]

  В изотвисторном суперпространстве в качестве вспомогательных переменных используются изотвисторы:

  $$v^i \in \mathbb{C}/0. \tag{1.39}$$

  Их использование позволяет интерпретировать связи, наложенные на суперполе гипермультиплета, как условия интерпретируемости. В гармоническом суперпространстве рассматриваются изотвисторные суперполя, которые являются гладкими функциями, глобально определенными на $S^2 \sim \mathbb{C}P^1$.

- *Проективное суперпространство* [125–127]

В отличие от гармонического суперпространства, где использовалась вспомогательная сфера $S^2$ и суперполя имели бесконечное число компонентных полей, как следствие разложения по гармоникам, в *проективном суперпространстве* используется вспомогательное многообразие $\mathbb{C}P^1$ и суперполя являются голоморфными функциями вблизи полюсов, что также обеспечивает бесконечное число вспомогательных полей в их тейлоровском разложении. Различная структура вспомогательных полей имеет важные следствия. В частности, отличается принцип действия, который в проективном суперпространстве вместо интеграла по всей сфере задается интегралом по контуру. Несмотря на работы [120,121], в которых было показано, что гармоническое суперпространство является более общим, чем проективное, в гармоническом суперпространстве есть ряд технических сложностей, например, связанных с нестандартной реализацией суперконформной группы и редукцией к $\mathcal{N}=1$ суперполям. В проективном пространстве эти проблемы можно красиво разрешить, однако в нем крайне затруднительна работа с препотенциалами $\mathcal{N}=2$ теорий, которые остаются в этой формулировке неизвестными даже для $\mathcal{N}=2$ супергравитации. Это делает проективное суперпространство неудобным для построения $\mathcal{N}=2$ теорий высших спинов.

- *Конформное суперпространство* [128]

  Под конформным суперпространством понимают подход к алгебре ковариантных суперпространственных производных со структурной группой, выбранной в виде всей суперконформной группы $SU(2,2|2)$, а не только $SL(2,\mathbb{C})\times SU(2)_R$ [129] или $SL(2,\mathbb{C})\times U(2)_R$ [130]. Такой подход значительно упрощает тождества Бьянки и структуру кривизн и очень удобен для работы с $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитацией. Обобщение этого подхода на гармоническое суперпространство обсуждалось в работе [122].

## 1.3 $\mathcal{N}=2$ теории в гармоническом суперпространстве

В этом разделе мы приведем примеры $\mathcal{N}=2$ теорий вне массовой оболочки в гармоническом суперпространстве, которые будут использоваться в дальнейших разделах.

### 1.3.1 Гипермультиплет

Фундаментальным $\mathcal{N}=2$ мультиплетом материи является гипермультиплет. Все остальные $\mathcal{N}=2$ мультиплеты содержат поля со спинами, большими чем $\frac{1}{2}$. В безмассовом и массивном случаях гипермультиплет вне массовой оболочки содержит $4_B$ бозонных степеней

свободы (дублет комплексных скалярных полей) и $4_F$ фермионных степеней свободы (отвечающих дублету Вейлевских спинов $\frac{1}{2}$). В массивном случае гипермультиплет существует только если центральный заряд равен массе, $|Z| = m$, т.е. для BPS мультиплета, иначе в $\mathcal{N} = 2$ мультиплетах появляются поля спинов больших, чем 0 и $\frac{1}{2}$. Одной из важных особенностей $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплета является невозможность его BMO-формулировки с конечным числом вспомогательных полей[2]. Это пример так называемой no-go теоремы для расширенной суперсимметрии. Стандартные аргументы, лежащие в основе вывода этого утверждения, основываются на подсчете степеней свободы вне массовой оболочки в бозонном и фермионном секторах [86, 87]. Таким образом, единственной возможностью построить гипермультиплет вне массовой оболочки является включение бесконечного числа вспомогательных полей. Гармоническое суперпространство даёт красивое решение этой проблемы.

Итак, в гармоническом суперпространстве гипермультиплет описывается аналитическим суперполем $q^+(\zeta)$, на которое не наложено никаких ограничений. Для массивного гипермультиплета добавляется зависимость от вспомогательной координаты $x^5$ в виде экспоненциального множителя $q^+(\zeta, x^5) = e^{imx^5} q^+(\zeta)$. Параметр $m$ отвечает за массу гипермультиплета. Относительно суперсимметрии гипермультиплет преобразуется стандартным образом:

$$\delta^*_\epsilon q^+ = q^{+\prime}(\zeta, x_5) - q^+(\zeta, x_5) = -\delta_\epsilon Z^M \partial_M q^+ \,, \tag{1.40}$$

откуда можно найти законы преобразования компонентных полей. В физическом секторе гипермультиплет содержит дублет комплексных скалярок $f^i$ и пару Вейлевских спиноров $\psi_\alpha, \kappa_\alpha$, и бесконечное количество вспомогательных полей, следующих из разложения по $S^2$ гармоникам:

$$q^+(\zeta) = f^i u^+_i + \theta^{+\alpha}\psi_\alpha + \bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar\kappa^{\dot\alpha} + \text{вспомогательные поля}. \tag{1.41}$$

В полном согласии с нашим обсуждением, BMO гипермультиплет содержит $\boldsymbol{\infty_B + \infty_F}$ степеней свободы.

Действие свободного гипермультиплета имеет вид:

$$S_{free} = \int d\zeta^{(-4)} \mathcal{L}^{(+4)}_{free} = -\int d\zeta^{(-4)} \tilde q^+ \mathcal{D}^{++} q^+ = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\mathcal{D}^{++} q^+_a. \tag{1.42}$$

Во второй форме мы ввели обозначения $q^{+a} = (\tilde q^+, q^+)$, $q^+_a = \epsilon_{ab} q^{+b} = (q^+, -\tilde q^+)$. В таком виде

[2] Существующие формулировки с конечным числом вспомогательных полей, такие как $\omega$-гипермультиплет или ослабленный гипермультиплет, не являются наиболее общими и не допускают минимального взаимодействия с векторным мультиплетом, так же как и построения наиболее общих гипер-Кэлеровых сигма-моделей, см. главу 5 монографии [94].

(в случае $m = 0$) видна явная Паули-Гюрси $SU(2)_{PG}$ симметрия [94], которая в бозонном секторе смешивает между собой дублеты $f^i$ и $\bar{f}^i$. Эта симметрия реализуется действием $SU(2)_{PG}$ матриц на дублет $q^{+a}$. В массивном случае, поскольку $\partial_5 q^+ = imq^+$ или, в записи с явными $\mathrm{SU}(2)_{PG}$ индексами,

$$\partial_5 q^{+a} := -im(\tau^3)^a_{\ b} q^{+b}, \tag{1.43}$$

где

$$(\tau_3)^a_{\ b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\tau_3)_{ab} = \epsilon_{ac}(\tau_3)^c_{\ b} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

симметрия Паули-Гюрси нарушается из-за наличия $SU(2)_{PG}$-неинвариантной матрицы $\tau_3$.

Вторая форма действия гипермультиплета будет удобна для построения взаимодействий гипермультиплета с высшими спинами. Стоит ожидать, что во взаимодействии с полями нечетных спинов $SU(2)_{PG}$ симметрия будет явно нарушена, поскольку комплексно сопряженное поле $\bar{f}^i$ несет электрический заряд, противоположный полю $f^i$. Отметим, что массивный и безмассовый гипермультиплеты описываются одинаковым образом.

Отметим, что зависимость от координаты $x^5$ исчезает в действии гипермультиплета (1.42) и по ней не требуется интегрировать. Это происходит потому, что мы наложили стандартное условие Шерка-Шварца, заключающееся в том, что действие $\partial_5 q^{+a}$ совпадает с действием некоторой $\mathrm{U}(1)_{PG} \subset \mathrm{SU}(2)_{PG}$. Внутренней симметрией действия гипермультиплета является $\mathrm{SU}(2)_{PG} \times \mathrm{SU}(2)_{aut}$ в безмассовом случае ($\partial_5 q^{+a} = 0$) и $\mathrm{U}(1)_{PG} \times \mathrm{SU}(2)_{aut}$ в массивном случае ($\partial_5 q^{+a} \neq 0$), что непосредственно следует из наличия $SU(2)_{PG}$ неинвариантного тензора $\tau_3$ в лагранжиане.

Суперполевые уравнения движения для гипермультиплета непосредственно следуют из действия:

$$\mathcal{D}^{++} q^{+a} = 0\,. \tag{1.45}$$

На уравнениях движения, с использованием нединамической части уравнения (1.45) (слагаемые до второго порядка по $\theta^{+\alpha}, \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}$), из аналитических суперполей $q^+$, $\tilde{q}^+$ можно исключить все вспомогательные поля и получить компонентное разложение:

$$q^+(\zeta) = f^i u_i^+ + \theta^{+\alpha}\psi_\alpha + \bar{\theta}^+_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} + m(\theta^{\hat{+}})^2 f^i u_i^- + 2i\theta^+\sigma^n\bar{\theta}^+\partial_n f^i u_i^-\,, \tag{1.46}$$

$$\tilde{q}^+(\zeta) = -\bar{f}^i u_i^+ + \bar{\theta}^+_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - \theta^{+\alpha}\chi_\alpha + m(\hat{\theta}^+)^2 \bar{f}^i u_i^- - 2i\theta^+\sigma^n\bar{\theta}^+\partial_n \bar{f}^i u_i^-\,. \tag{1.47}$$

Как видно из полученных выражений, бесконечное количество вспомогательных полей, которые были в гипермультиплете, зануляются на уравнениях движения и остаются только

физические поля, входящие в стандартный $\mathcal{N}=2$ гипермультиплет на массовой оболочке: $(f^i,\,\psi_\alpha,\,\kappa_\alpha)$. Действие $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии на эти поля напрямую следует из суперсимметричного закона преобразования суперполя (1.40):

$$\begin{cases} \delta^*_\epsilon f^i = -\epsilon^{\mu i}\psi_\mu - \bar\epsilon^i_{\dot\mu}\bar\chi^{\dot\mu}\,, \\ \delta^*_\epsilon \bar f_i = -\epsilon^\mu_i \chi_\mu - \bar\epsilon_{\dot\mu i}\bar\psi^{\dot\mu}\,, \\ \delta^*_\epsilon \psi_\alpha = -2i\bar\epsilon^{\dot\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha} f_i + 2m\epsilon^i_\alpha f_i\,, \\ \delta^*_\epsilon \bar\psi_{\dot\alpha} = -2i\epsilon^{\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i + 2m\bar\epsilon^i_{\dot\alpha}\bar f_i\,, \\ \delta^*_\epsilon \chi_\alpha = 2i\bar\epsilon^{\dot\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i - 2m\epsilon^{\alpha i}\bar f_i\,, \\ \delta^*_\epsilon \bar\chi_{\dot\alpha} = 2i\epsilon^{\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha} f_i - 2m\bar\epsilon^i_{\dot\alpha} f_i\,. \end{cases} \tag{1.48}$$

В уравнении (1.45) слагаемые вида $\sim\theta^3,\theta^4$ дают массивные уравнения движения для физических полей:

$$\begin{cases} \left(\Box + m^2\right) f^i = 0\,, \\ i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} + m\psi_\alpha = 0\,, \\ i\partial_{\alpha\dot\alpha}\psi^\alpha - m\bar\chi_{\dot\alpha} = 0\,. \end{cases} \tag{1.49}$$

Используя выражения (1.46) и (1.47), можно вывести компоненты действия для гипермультиплета НМО:

$$\begin{aligned} S_{on-shell} = \int d^4x \Big[ & \partial_n f^i \partial^n \bar f_i - m^2 f^i \bar f_i \\ & + \frac{i}{2}\bar\psi_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha + \frac{i}{2}\bar\chi_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}\chi_\alpha + \frac{m}{2}\bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} + \frac{m}{2}\chi^\alpha\psi_\alpha \Big]. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Это действие инвариантно относительно преобразований $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии (1.48). Однако алгебра преобразований суперсимметрии замыкается только при использовании уравнений движения. Дублет сохраняющихся нётеровских фермионных токов, отвечающих инвариантности относительно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, имеет вид:

$$S^{\alpha\dot\alpha}_{\mu k} = \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\dot\alpha}\psi_\mu \bar f_k - \psi_\mu \partial^{\alpha\dot\alpha}\bar f_k\right) - \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\dot\alpha}\chi_\mu f_k - \chi_\mu \partial^{\alpha\dot\alpha} f_k\right). \tag{1.51}$$

Эти токи сохраняются на уравнениях движения (1.49):

$$\partial_{\alpha\dot\alpha} S^{\alpha\dot\alpha}_{\mu k} = 0\,. \tag{1.52}$$

Полезно отметить другую форму уравнений движения гипермультиплета, следующую из (1.45):

$$\mathcal{D}^{++}q^+ = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\mathcal{D}^{--}\right)^2 q^+ = 0\,. \tag{1.53}$$

Это равенство становится очевидным в центральном базисе. Действие на второе уравнение производными $\left(\mathcal{D}^+\right)^4$ немедленно приводит к уравнению Клейна-Гордона:

$$\left(\Box + m^2\right) q^+ = 0\,. \tag{1.54}$$

Таким образом все компоненты гипермультиплета на уравнениях движения удовлетворяют массивному уравнению Клейна-Гордона, в полном согласии с компонентными результатами (1.49).

Важной особенностью действия свободного гипермультиплета (1.42) является инвариантность относительно бесконечной группы глобальных симметрий. Генераторы этих симметрий содержат высшие производные. Мы будем напрямую использовать это наблюдение при построении кубических взаимодействий гипермультиплета с высшими спинами.

### 1.3.2 $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет

$\mathcal{N} = 2$ Максвеловский (векторный) супермультиплет описывается аналитическим калибровочным препотенциалом $V^{++}(\zeta)$, на который не наложены связи. Препотенциал определен с точностью до калибровочной свободы:

$$\delta_\lambda V^{++}(\zeta) = \mathcal{D}^{++}\lambda(\zeta). \tag{1.55}$$

Используя калибровочную свободу, можно наложить калибровку Весса-Зумино и получить неприводимый состав мультиплета:

$$\begin{aligned} V^{++}_{WZ} = &- 4i\theta^+_\beta\bar\theta^+_{\dot\beta}A^{\beta\dot\beta} + i(\bar\theta^+)^2\phi - i(\theta^+)^2\bar\phi \\ &+ (\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\psi^i_\beta u^-_i + (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\psi^i_{\dot\beta}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2 D^{(ij)}u^-_i u^-_j\,. \end{aligned} \tag{1.56}$$

В этой калибровке мы имеем калибровочное поле спина 1 $A_{\beta\dot\beta}$ с калибровочной свободой $\delta A_{\beta\dot\beta} \sim \partial_{\beta\dot\beta}a$, дублет Вейлевских фермионов $\psi^i_\beta$, комплексный скаляр $\phi$ и триплет действительных вспомогательных полей $D^{(ij)}$. Таким образом вне массовой оболочки имеется $\mathbf{8_B} + \mathbf{8_F}$

степеней свободы:

$$\begin{aligned} \text{Физические поля}: &\qquad A_{\beta\dot\beta}, \psi^i_\beta, \phi, \\ \text{Вспомогательные поля}: &\qquad D^{(ij)}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Как видно из представленной формулировки, описание $\mathcal{N}=2$ векторного мультиплета в гармоническом суперпространстве требует включения бесконечного набора чисто калибровочных степеней свободы. Это одно из примечательных отличий $\mathcal{N}=2$ калибровочных теорий ВМО от $\mathcal{N}=1$ теорий ВМО.

Свободное суперсимметричное и калибровочно-инвариантное действие имеет вид:

$$S_{Max} = \int d^4x d^8\theta du\, V^{++}V^{--}, \tag{1.58}$$

где потенциал $V^{--}$ является решением уравнения нулевой кривизны:

$$\mathcal{D}^{++}V^{--} = \mathcal{D}^{--}V^{++}. \tag{1.59}$$

Калибровочная инвариантность действия следует непосредственно из аналитичности калибровочного параметра:

$$\delta_\lambda S_{Max} = 2\int d^4x d^8\theta du\, V^{++}\mathcal{D}^{--}\lambda = \frac{1}{8}\int d^4x d^4\theta^+ du\, V^{++}(\mathcal{D}^+)^4\mathcal{D}^{--}\lambda = 0. \tag{1.60}$$

В калибровке Весса-Зумино, после исключения вспомогательных полей $D^{(ij)}$ действие (1.58) сводится к сумме свободного действия Максвелла, Вейлевскому действию для дублета фермионов и действию Клейна-Гордона для комплексного скаляра.

Приведенное здесь рассмотрение может также быть обобщено и на $\mathcal{N}=2$ теорию Янга-Миллса [94]. Поскольку она в дальнейшем нам не понадобится, мы тут не приводим её формулировку.

### 1.3.3 $\mathcal{N}=2$ супергравитация

В этом разделе мы опишем построение $\mathcal{N}=2$ теории "эйнштейновской"супергравитации в гармоническом суперпространстве. В главе 2, мы будем рассматривать линеаризованную версию этой теории, поскольку она допускает прямолинейное обобщение на $\mathcal{N}=2$ высшие спины.

При суперполевой формулировке теории супергравитации возникает несколько естествен-

ных вопросов:

- Что является калибровочной супергруппой теории?
- В терминах каких суперполей без связей можно описывать супергравитацию?
- Как построить инвариантное действие такой теории?
- Как построить инвариантные действия для других мультиплетов на фоне супергравитации?

Ответы на эти вопросы для $\mathcal{N}=2$ супергравитации были даны в 1984 году [92] Гальперины, Ивановым, Калицыным, Огиевецким и Сокачевым. Мы переходим к изложению этих результатов в форме, которая будет в дальнейшем нам удобна.

Калибровочной супергруппой $\mathcal{N}=2$ Эйнштейновской супергравитации являются супертрансляции[3] в гармоническом суперпространстве, сохраняющие аналитичность [94–96],

$$\delta_\lambda x^{\alpha\dot\alpha} = \lambda^{\alpha\dot\alpha}(\zeta), \quad \delta_\lambda \theta^{+\hat\alpha} = \lambda^{+\hat\alpha}(\zeta), \quad \delta_\lambda \theta^{-\hat\alpha} = \lambda^{-\hat\alpha}(\zeta,\theta^-), \quad \delta_\lambda u^\pm_i = 0, \quad \delta_\lambda x^5 = \lambda^5(\zeta). \tag{1.61}$$

Только параметр $\lambda^{-\hat\alpha}$ является неаналитическим. Гармоники $u^\pm_i$ не преобразуются под действием супертрансляций[4]. Для дальнейшего полезно ввести мульти-индекс $M := (\alpha\dot\alpha, +\hat\alpha, -\hat\alpha, 5)$ и обозначить координаты гармонического суперпространства как $z^M := (x^{\alpha\dot\alpha}, \theta^{+\hat\alpha}, \theta^{-\hat\alpha}, x^5)$. Тогда супердиффеоморфизмы могут быть представлены как действие дифференциального оператора:

$$\delta_\lambda z^M = [\hat\Lambda, z^M], \qquad \hat\Lambda := \lambda^M \partial_M. \tag{1.62}$$

Это очень удобные обозначения, поскольку преобразования различных объектов могут быть записаны через них единым образом. Например, преобразования суперпространственных производных $\partial_M := (\partial_{\alpha\dot\alpha}, \partial^-_{\hat\alpha}, \partial^+_{\hat\alpha}, \partial_5)$ записываются как:

$$\delta_\lambda \partial_M = [\hat\Lambda, \partial_M]. \tag{1.63}$$

В частности, отсюда немедленно следует, что гармоническая производная $\mathcal{D}^{++}$ перестает быть

[3] Супертрансляции могут рассматриваться как аналитическая локализация глобальных преобразований $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии (1.20).

[4] Калибровочная группа $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации нетривиально дейсвтиует на гармоники, см., например [94, 96, 131] и раздел 6.4.

ковариантной[5] относительно супертрансляций (1.61):

$$\delta_\lambda \mathcal{D}^{++} = [\hat{\Lambda}, \mathcal{D}^{++}] = -\mathcal{D}^{++}\lambda^M \partial_M - 4i\lambda^{+\rho}\bar{\theta}^{+\dot{\rho}}\partial_{\rho\dot{\rho}} - 4i\theta^{+\rho}\bar{\lambda}^{+\dot{\rho}}\partial_{\rho\dot{\rho}} + \lambda^{+\hat{\rho}}\partial^+_{\hat{\rho}} + 2(\lambda^{\hat{+}}\theta^{\hat{+}})\partial_5. \tag{1.64}$$

Слагаемые, нарушающие ковариантность, могут быть скомпенсированы введением набора калибровочных препотенциалов:

$$\mathcal{D}^{++} \quad \to \quad \mathfrak{D}^{++} = \mathcal{D}^{++} + h^{++\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + h^{++\hat{\alpha}+}\partial^-_{\hat{\alpha}} + h^{++\hat{\alpha}-}\partial^+_{\hat{\alpha}} + h^{++5}\partial_5, \tag{1.65}$$

которые обладают калибровочной свободой:

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++\alpha\dot{\alpha}} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} + 4i\theta^{+\alpha}\bar{\lambda}^{+\dot{\alpha}} - \hat{\Lambda}h^{++\alpha\dot{\alpha}}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat{\alpha}+} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{+\hat{\alpha}} - \hat{\Lambda}h^{++\hat{\alpha}+}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat{\alpha}-} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{-\hat{\alpha}} - \lambda^{+\hat{\alpha}} - \hat{\Lambda}h^{++\hat{\alpha}-}, \\ \delta_\lambda h^{++5} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^5 - 2\lambda^{+\hat{\alpha}}\theta^+_{\hat{\alpha}} - \hat{\Lambda}h^{++5}. \end{cases} \tag{1.66}$$

Тогда производная $\mathfrak{D}^{++}$ является ковариантной (1.61), т.е. удовлетворяет соотношению:

$$\delta_\lambda \mathfrak{D}^{++} = [\hat{\Lambda}, \mathfrak{D}^{++}] + \delta_\lambda h^{++M}\partial_M = 0. \tag{1.67}$$

Только параметр $\lambda^{-\hat{\alpha}}$ является неаналитическим, из чего следует, что только препотенциал $h^{++\hat{\alpha}-}$ является неаналитическим.

Поскольку плоская гармоническая производная $\mathcal{D}^{++}$ является действительной относительно тильда-сопряжения, естественно потребовать чтобы производная $\mathfrak{D}^{++}$ также удовлетворяла тому же свойству. Отсюда мы получаем свойства препотенциалов относительно тильда-сопряжения:

$$\widetilde{\mathfrak{D}^{++}} = \mathfrak{D}^{++} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\widetilde{h^{++\alpha\dot{\alpha}}} = h^{++\alpha\dot{\alpha}}, \\ &\widetilde{h^{++5}} = h^{++5}, \\ &\widetilde{h^{++\alpha+}} = h^{++\dot{\alpha}+}, \\ &\widetilde{h^{++\dot{\alpha}+}} = -h^{++\alpha+}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Отметим, что калибровочный закон преобразования $h^{++\hat{\alpha}-}$ в (1.66) позволяется наложить *аналитическую калибровку* $h^{++\hat{\alpha}-} = 0$. После этого параметры $\lambda^{-\hat{\alpha}}$ задаются в терминах ана-

[5] Глобальные преобразования $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии могут быть определены как супертрансляции (1.61), которые удовлетворяют условию $\delta_\epsilon \mathcal{D}^{++} = 0$.

литических $\lambda^{+\hat{\alpha}}$ как решения гармонического уравнения:

$$\mathfrak{D}^{++}\lambda^{-\hat{\alpha}} = \lambda^{+\hat{\alpha}}. \tag{1.69}$$

В аналитической калибровке, дифференциальный оператор $\mathfrak{D}^{++}$ является аналитическим, т.е. удовлетворяет условию $[\mathcal{D}^{+}_{\hat{\alpha}}, \mathfrak{D}^{++}] = 0$. В дальнейшем мы будем работать в этой калибровке. Отметим, что её можно наложить, не нарушая калибровочную свободу аналитических потенциалов.

Каждый из калибровочных параметров $\lambda^M(\zeta)$, являясь гармоническим суперполем, содержит бесконечное число координатно-зависимых компонент. Тем самым, рассматриваемая калибровочная группа является бесконечномерной.

Нетривиальным является тот факт, что калибровочная свобода (1.66) позволяет выкалибровать бесконечное количество компонентных полей из препотенциалов и приводит к $\mathcal{N} = 2$ мультиплету Эйнштейновской супергравитации вне массовой оболочки, составленному из компонент аналитических препотенциалов $h^{++M}$. После фиксации этой калибровочной свободы, в калибровке Весса-Зумино компонентный состав препотенциалов имеет вид[6]:

$$\begin{aligned}
h^{++\alpha\dot{\alpha}}_{WZ} &= -4i\theta^{+\beta}\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\Phi^{\alpha\dot{\alpha}}_{\beta\dot{\beta}} + 16(\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+\beta}\psi^{\alpha\dot{\alpha}i}_{\beta}u^{-}_{i} - 16(\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\alpha\dot{\alpha}i}_{\dot{\beta}}u^{-}_{i} + (\theta^{+})^4 V^{\alpha\dot{\alpha}(ij)}u^{-}_{i}u^{-}_{j}\\
h^{++5}_{WZ} &= -4i\theta^{+\beta}\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}C_{\beta\dot{\beta}} + 8(\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+\beta}\rho^{i}_{\beta}u^{-}_{i} - 8(\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\bar{\rho}^{i}_{\dot{\beta}}u^{-}_{i} + (\theta^{+})^4 S^{(ij)}u^{-}_{i}u^{-}_{j}\\
h^{++\alpha+}_{WZ} &= (\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+}_{\beta}T^{(\alpha\beta)} + (\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+\alpha}T + (\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+}_{\dot{\beta}}P^{\alpha\dot{\beta}} + (\theta^{+})^4\chi^{\alpha i}u^{-}_{i},\\
h^{++\dot{\alpha}+}_{WZ} &= (\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+}_{\dot{\beta}}\bar{T}^{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + (\theta^{+})^2\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}\bar{T} - (\bar{\theta}^{+})^2\theta^{+}_{\beta}\bar{P}^{\beta\dot{\alpha}} + (\theta^{+})^4\bar{\chi}^{\dot{\alpha}i}u^{-}_{i}.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Полученные поля определены с точностью до остаточной калибровочной свободы. Остаточная калибровочная свобода определяется из требования сохранения формы калибровки Весса-Зумино, т.е. $\delta^{res}_{\lambda}h^{++M} \sim h^{++M}_{WZ}$. Отсюда сразу получается набор остаточных калибровочных параметров:

$$\begin{cases}
\lambda^{\alpha\dot{\alpha}}_{WZ} = a^{\alpha\dot{\alpha}}(x) - 4i\theta^{+\alpha}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}i}(x)u^{-}_{i} - 4i\epsilon^{\alpha i}(x)u^{-}_{i}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}},\\
\lambda^{+\alpha}_{WZ} = \epsilon^{\alpha i}(x)u^{+}_{i} + \theta^{+\beta}l^{\ \alpha)}_{(\beta}(x) + 4i\theta^{+\beta}\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}(\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\dot{\rho}}_{\dot{\beta}} + \Phi^{\rho\dot{\rho}}_{\beta\dot{\beta}})\partial_{\rho\dot{\rho}}\epsilon^{\alpha i}(x)u^{-}_{i},\\
\lambda^{+\dot{\alpha}}_{WZ} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}i}(x)u^{+}_{i} + \bar{\theta}^{+\dot{\beta}}l^{\ \dot{\alpha})}_{(\dot{\beta}}(x) + 4i\theta^{+\beta}\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}(\delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\dot{\rho}}_{\dot{\beta}} + \Phi^{\rho\dot{\rho}}_{\beta\dot{\beta}})\partial_{\rho\dot{\rho}}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}i}(x)u^{-}_{i},\\
\lambda^{5}_{WZ} = c(x) + 2i\epsilon^{\hat{\alpha}i}(x)u^{-}_{i}\theta^{+}_{\hat{\alpha}}.
\end{cases} \tag{1.71}$$

Реализация остаточных преобразований на полях супергравитационного мультиплета немед-

[6] Численные коэффициенты выбраны таким образом, чтобы получить законы преобразований полей мультиплета без численных коэффициентов, см. (2.7).

ленно следует из (1.66). Для примера, приведем линеаризованные законы преобразований для калибровочных полей спина 2, $\frac{3}{2}$, 1:

$$\begin{aligned}\delta\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} =&(\delta^\rho_\beta\delta^{\dot\rho}_{\dot\beta}+\Phi^{\rho\dot\rho}_{\beta\dot\beta})\partial_{\rho\dot\rho}a^{\alpha\dot\alpha}-a^{\rho\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta}-\left(l_{(\beta}^{\ \ \rho)}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\rho}+\delta^\alpha_\rho\bar l_{(\dot\beta}^{\ \ \dot\rho)}\right)\left(\delta^\alpha_\rho\delta^{\dot\alpha}_{\dot\rho}+\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}\right)\\&-2i\epsilon_{\beta i}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}-2i\bar\epsilon_{\dot\beta i}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta},\end{aligned}\tag{1.72a}$$

$$\begin{aligned}\delta\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta =&-\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}(\delta^\rho_\beta\delta^{\dot\rho}_{\dot\beta}+\Phi^{\rho\dot\rho}_{\beta\dot\beta})\partial_{\rho\dot\rho}\epsilon^{\alpha i}+i\frac12T_{(\beta}^{\ \ \alpha)}\bar\epsilon^{\dot\alpha i}-i\frac12T\delta^\alpha_\beta\bar\epsilon^{\dot\alpha i}-i\frac12\bar P^{\dot\alpha}_\beta\epsilon^{\alpha i}+\frac16\epsilon_{\beta j}V^{\alpha\dot\alpha(ij)}\\&+\psi^{\rho\dot\rho}_\beta\partial_{\rho\dot\rho}a^{\alpha\dot\alpha}-a^{\rho\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta-l_{(\beta}^{\ \ \rho)}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\rho},\end{aligned}\tag{1.72b}$$

$$\delta C_{\alpha\dot\alpha}=(\delta^\rho_\alpha\delta^{\dot\rho}_{\dot\alpha}+\Phi^{\rho\dot\rho}_{\alpha\dot\alpha})\partial_{\rho\dot\rho}c-a^{\rho\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}C_{\alpha\dot\alpha}-(l_{(\alpha}^{\ \ \beta)}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}+\delta^\beta_\alpha l_{(\dot\alpha}^{\ \ \dot\beta)})C_{\beta\dot\beta}-i\epsilon_{\beta i}\bar\rho^i_{\dot\beta}-i\epsilon_{\dot\beta i}\rho^i_\beta.\tag{1.72c}$$

Эти законы преобразования позволяют напрямую связать суперполевую формулировку $\mathcal{N}=2$ супергравитации с известными компонентными подходами. Например, из полученных преобразований мы видим, что выражение $\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}+\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta}:=\frac12\sigma^{\alpha\dot\alpha}_\mu\sigma^a_{\beta\dot\beta}e^\mu_a$ должно быть идентифицировано с фильбайном $e^\mu_a$, $a^{\alpha\dot\alpha}$ это параметр локальных трансляций, параметры $l^{(\alpha\beta)},\bar l^{(\dot\alpha\dot\beta)}$ являются параметрами локальных преобразований Лоренца; фермионные параметры $\epsilon^{\alpha i},\bar\epsilon^{\dot\alpha i}$ являются параметрами локальной суперсимметрии. Метрический тензор тогда задаётся выражением $g^{\mu\nu}=e^\mu_ae^\nu_b\eta^{ab}$ и имеет стандартный закон преобразования $\delta g^{\mu\nu}=\partial_\rho a^\mu g^{\rho\nu}+\partial_\rho a^\nu g^{\mu\rho}-a^\rho\partial_\rho g^{\mu\nu}$. Фермионное поле $\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta$ описывает дублет полей Рариты-Швингера со спином $\frac32$, а поле $C_{\alpha\dot\alpha}$ – гравифотон, а $c$ – параметр соответствующих калибровочных преобразований. Остальные поля являются вспомогательными полями[7] мультиплета $\mathcal{N}=2$ Эйнштейновской супергравитации вне массовой оболочки.

В результате мы получаем $\mathcal{N}=2$ мультиплет Эйнштейновской супергравитации вне массовой оболочки:

$$\begin{aligned}\text{Физические поля}:&\quad \Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta},\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta,C_{\beta\dot\beta},\\ \text{Вспомогательные поля}:&\quad V^{\alpha\dot\alpha(ij)},\rho^i_\beta,S^{(ij)},T,T^{(\alpha\beta)},P^{\alpha\dot\beta},\chi^{\alpha i}.\end{aligned}\tag{1.73}$$

Всего в мультиплете $\mathbf{40_B+40_F}$ степеней свободы ВМО. Размерности этих полей могут быть определены из разложения препотенциалов в калибровке Весса-Зумино (1.70). Полученный компонентный состав соответствует так называемой "минимальной версии"("нелинейной версии") $\mathcal{N}=2$ супергравитации (в этой формулировке неявно присутствуют 2 суперконформных компенсатора: $\mathcal{N}=2$ векторный мультиплет и нелинейный мультиплет, см., например [94, 132, 133]). Вне массовой оболочки, состав мультиплета $\mathcal{N}=2$ Эйнштейновской суперграв-

[7] Некоторые вспомогательные поля требуют переопределения, точные формулы для переопределения в линеаризованном пределе приведены в (2.14).

витации был впервые получен Фрадкиным и Васильевым в работах [134, 135] и независимо де Витом и ван Холтеном в работе [136].

Отсюда можно сделать вывод, что набор суперполей $h^{++\alpha\dot\alpha}, h^{++\hat\alpha+}, h^{++5}$ является обобщением динамической степени свободы теории граитации – метрики на случай $\mathcal{N}=2$ супергравитации.

Инвариантное суперполевое действие для $\mathcal{N}=2$ Эйнштейновской супергравитации в гармоническом суперпрострнстве было построено Гальпериным, Ку и Сокачевым [96]. Действие имеет вид $\mathcal{N}=2$ абелева векторного мультплета на фоне $\mathcal{N}=2$ супергравитации:

$$S_{SG} = -\int d^4x d^8\theta du\, E\, H^{++5} H^{--5}. \tag{1.74}$$

Отметим, что знак перед действием противоположен знаку $\mathcal{N}=2$ действия Максвелла (1.58). Это общая особенность использования конформных компенсаторов: они всегда имеют действия с противоположенным знаком, а поле $h^{++5}$ является неявным компенсатором. Как мы продемонстрируем в разделе 2.1.3, посвященном компонентной редукции линейной теории супергравитации, правильный знак действия для гравифотона получается после исключения вспомогательных полей.

В действии (1.74) мы использовали ряд обозначений. $E$ обозначает меру интегрирования по полному $\mathcal{N}=2$ гармоническому суперпространству. Она преобразуется как:

$$\delta_\lambda E = -\left(\partial_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\alpha\dot\alpha} - \partial^-_{\hat\alpha}\lambda^{+\hat\alpha} - \partial^+_{\hat\alpha}\lambda^{-\hat\alpha}\right) E, \tag{1.75}$$

тем самым компенсируя преобразование $d^4x d^8\theta du$. Мера $E$ может быть построена из аналитических препотенциалов супергравитации и удовлетворяет ряду полезных свойств. Явное выражение для меры можно найти в работах [94, 96, 131]. Мы его не приводим, поскольку в дальнейшем не будем использовать.

Поля $H^{++M}$ и $H^{--M}$, входящие в действие, определены как фильбайны в разложении ковариантных производных:

$$\mathfrak{D}^{++} = \partial^{++} + H^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + H^{++\hat\alpha+}\partial^-_{\hat\alpha} + \theta^{+\hat\alpha}\partial^+_{\hat\alpha} + H^{++5}\partial_5, \tag{1.76a}$$

$$\mathfrak{D}^{--} = \partial^{--} + H^{--\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + H^{--\hat\alpha+}\partial^-_{\hat\alpha} + H^{--\hat\alpha-}\partial^+_{\hat\alpha} + H^{--5}\partial_5. \tag{1.76b}$$

Потенциалы с отрицательным гармоническим зарядом $H^{--M}$ однозначно определяются в

терминах $H^{++M}$ как решение условия нулевой кривизны:

$$[\mathfrak{D}^{++}, \mathfrak{D}^{--}] = \mathcal{D}^0. \tag{1.77}$$

Можно также рассмотреть альтернативное нелинейное действие, имеющее ту же форму:

$$S_{alt} = \int d^4x d^8\theta du\, E\, H^{++\alpha\dot{\alpha}} H^{--}_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{1.78}$$

Однако, это действие тождественно равно нулю как следствие свойства (в калибровке Весса-Зумино):

$$(\mathcal{D}^+)^4 \left(E H^{--\alpha\dot{\alpha}}\right) = 0. \tag{1.79}$$

В гармоническом суперпространстве можно сформулировать и другие версии $\mathcal{N} = 2$ Эйнштейновской супергравитации. Они строятся с использованием $\mathcal{N} = 2$ мультиплета Вейля, векторного мультиплета, как одного суперконформного компенсатора и компенсирующего мультиплета материи, в качестве которого можно взять гипермультиплет, нелинейный мультиплет или тензорный мультиплет. Мы не затрагиваем эти вопросы, их изложение можно найти в работах [94, 96, 131].

В заключение отметим, что формулировка $\mathcal{N} = 2$ супергравитации в гармоническом суперпространстве отличается от других суперполевых формулировок супергравитации. Стандартная суперполевая формулировка основывается на решении связей, наложенных на алгебру ковариантных производных [129, 130]. Обзор применения этого способа к конформной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации и ряда новых результатов можно найти в свежей работе [137]. Идентификация суперполей, не подчиненных связям и описывающих мультиплет супергравитации (препотенциалов), в таких формулировка крайне затруднена и никогда не была осуществлена. В гармоническом суперпространстве, препотенциалы являются исходными объектами, из которых можно восстановить алгебру ковариантных производных с автоматически выполненными связями [95]. Эта формулировка является $\mathcal{N} = 2$ аналогом подхода Огиевецкого и Сокачева к $\mathcal{N} = 1$ супергравитации [138–140]. Эта особенность является основным преимуществом гармонического подхода и именно эта особенность позволит нам построить $\mathcal{N} = 2$ мультиплеты высших спинов.

# Глава 2

# $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная теория высших спинов

В этой главе мы описываем BMO-формулировку $\mathcal{N} = 2$ безмассовой свободной теории высших спинов с произвольным старшим целочисленным спином, опираясь на статью [141]. Мы будем использовать для таких теорий терминологию: *теория спина* $\mathbf{s}$, выделяя значение старшего спина жирным шрифтом и подразумевая, что речь идет о всем $\mathcal{N} = 2$ супермультиплете. Если речь идет просто про поле спина $s$, то мы используем обычный шрифт.

$\mathcal{N} = 2$ мультиплеты теории спина $\mathbf{s}$ на массовой оболочке содержат состояния спиральности $\pm s$, дублет состояний спиральности $\pm(s-1/2)$ и состояния спиральности $\pm(s-1)$. Состояния спиральности $\pm s$ и $\pm(s-1)$ отвечают бозонным полям Фронсдала, а состояния спиральности $\pm(s-1/2)$ – фермионным полям Фанга-Фронсдала. Как мы покажем в этой главе, набор вспомогательный полей для $\mathcal{N} = 2$ BMO-мультиплета получается прямым обобщением случая $\mathcal{N} = 2$ супергравитации. Мы также построим суперполевое калибровочно-инвариантное действие на уровне компонент, сводящееся к сумме квадратичных действий Фронсдала и Фанга-Фронсдала. Первым шагом нашего построения будет линеаризация $\mathcal{N} = 2$ супергравитации (описанной в разделе 1.3.3), результатом которой будет построение свободного суперполевого действия. На этом примере мы продемонстрируем, как переходить от суперполей к компонентам и исключать вспомогательные поля. После этого мы перейдем к конструкции $\mathcal{N} = 2$ теорий спина $\mathbf{s}$ вне массовой оболочки.

## 2.1 $\mathcal{N} = 2$ супергравитация: линеаризация

В разделе 1.3.3 мы показали, что мультиплет $\mathcal{N} = 2$ супергравитации описывается набором аналитических суперполей:

$$h^{++\alpha\dot{\alpha}}, \qquad h^{++\alpha+}, \qquad h^{++\dot{\alpha}+}, \qquad h^{++5}. \tag{2.1}$$

Нашей целью в этом разделе является линеаризация теории и построение суперполевого действия, которое в компонентах содержит линеаризованной действие гравитации – действие Паули-Фирца.

### 2.1.1 Аналитические препотенциалы

Линеаризация нелинейных калибровочных законов преобразования (1.66) приводит к:

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha} + 4i\theta^{+\alpha}\bar\lambda^{+\dot\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat\alpha+} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\hat\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat\alpha-} = \mathcal{D}^{++}\lambda^{-\hat\alpha} - \lambda^{+\hat\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++5} = \mathcal{D}^{++}\lambda^5 - 2i\lambda^{+\hat\alpha}\theta^+_{\hat\alpha}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Мы будем работать в аналитической калибровке, так что зафиксируем $h^{++\hat\alpha-} = 0$, а параметр $\lambda^{-\hat\alpha}$ тогда полностью определяется уравнением $\mathcal{D}^{++}\lambda^{-\hat\alpha} = \lambda^{+\hat\alpha}$. Тогда все линеаризованные препотенциалы $h^{++M}$ будут аналитическими. Их преобразования (2.2) позволяют наложить калибровку Весса-Зумино, которая имеет тот же вид, что и в нелинейном случае (1.70).

Действие глобальных преобразований суперсимметрии на аналитических препотенциалах может быть получено из требования инвариантности ковариантной производной $\mathfrak{D}^{++}$ относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии:

$$\delta_\epsilon \mathfrak{D}^{++} = [\hat\Lambda_\epsilon, \mathcal{D}^{++}] + \delta_\epsilon h^{++M}\partial_M = 0. \tag{2.3}$$

Параметры $\lambda^M_\epsilon$, входящие в закон преобразования, соответствуют глобальной суперсимметрии:

$$\lambda^{\alpha\dot\alpha}_\epsilon = -4i\theta^{+\alpha}\bar\epsilon^{-\dot\alpha} - 4i\epsilon^{-\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}, \quad \lambda^{+\alpha}_\epsilon = \epsilon^{+\alpha}, \quad \lambda^{+\dot\alpha}_\epsilon = \bar\epsilon^{+\dot\alpha}, \quad \lambda^5_\epsilon = 2i\epsilon^{-\hat\alpha}\theta^+_{\hat\alpha}. \tag{2.4}$$

При этом, в полном согласии с (1.20), выполняется равенство $\delta_\epsilon z^M = \lambda^M_\epsilon$.

Из уравнения (2.3) получаем, что суперсимметричные преобразования аналитических препотенциалов даются уравнениями:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon h^{++\alpha\dot\alpha} = -4ih^{++\alpha+}\bar\epsilon^{-\dot\alpha} - 4i\epsilon^{-\alpha}h^{++\dot\alpha+} - \delta_\epsilon z^M\partial_M h^{++\alpha\dot\alpha}, \\ \delta_\epsilon h^{++\alpha+} = -\delta_\epsilon z^M\partial_M\delta_\epsilon h^{++\alpha+}, \\ \delta_\epsilon h^{++\dot\alpha+} = -\delta_\epsilon z^M\partial_M h^{++\dot\alpha+}, \\ \delta_\epsilon h^{++5} = 2ih^{++\hat\alpha+}\epsilon^-_{\hat\alpha} - \delta_\epsilon z^M\partial_M h^{++5}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Отметим, что при этом препотенциалы $h^{++\alpha\dot\alpha}$ и $h^{++5}$ имеют нестандартный суперполевой закон преобразования. Как обычно, в калибровке Весса-Зумино преобразования суперсимметриии должны сопровождаться компенсирующими калибровочными преобразованиями, такими, чтобы сохранялась форма калибровки $h^{++M}_{WZ}$.

Из уравнений (2.5) можно непосредственно получить суперсимметричные преобразования компонентных полей. Например, поле гравитона преобразуется как:

$$\delta_\epsilon \Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} = 2i\left(\epsilon^i_\beta \bar\psi^{\alpha\dot\alpha}_{\dot\beta\ i} - \bar\epsilon^i_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\ i}\right). \tag{2.6}$$

Отсюда следует хорошо известный факт, что гравитино (спин $3/2$) является суперпартнером гравитона.

Полный набор линеаризованных калибровочных преобразований может быть получен из (2.2) и остаточных калибровочных параметров (1.71):

$$\delta_\lambda \Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} = \partial_{\beta\dot\beta} a^{\alpha\dot\alpha} - l_{(\beta}{}^{\alpha)}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} - \delta^\alpha_\beta l_{(\dot\beta}{}^{\dot\alpha)}, \tag{2.7a}$$

$$\delta_\lambda \psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta = -\partial^{\dot\alpha}_\beta \epsilon^{\alpha i}, \tag{2.7b}$$

$$\delta_\lambda C_{\alpha\dot\alpha} = \partial_{\alpha\dot\alpha} c, \tag{2.7c}$$

$$\delta_\lambda P^{\alpha\dot\alpha} = -2i\partial^{\dot\alpha\beta} l_{(\beta}{}^{\alpha)}, \tag{2.7d}$$

$$\delta_\lambda \chi^{\alpha i} = 2\,\Box\,\epsilon^{\alpha i}, \tag{2.7e}$$

$$\delta_\lambda \rho^i_\alpha = \partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\epsilon^{\dot\alpha i}. \tag{2.7f}$$

Все остальные поля имеют тривиальные калибровочные законы преобразования. Преобразования (2.7a), (2.7b) и (2.7c) – это линеаризованные законы преобразования для калибровочных полей спина 2, $\frac{3}{2}$ и 1 соответственно. Поскольку поля $P^{\alpha\dot\alpha}, \chi^{\alpha i}, \rho^i_\alpha$ преобразуются через калибровочные параметры, отвечающие полям спинов 2, $\frac{3}{2}$ и 1, то они требуют соответствующего переопределения. Это переопределение будет играть существенную роль в компонентной редукции суперполевых действий, поэтому здесь мы представим явные правила переопределения. Для этого сначала удобно разложить поля на неприводимые части.

Поле спина 2 имеет разложение на неприводимые части:

$$\Phi^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = \Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + \epsilon^{\alpha\beta}\Phi^{(\dot\alpha\dot\beta)} + \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\Phi^{(\alpha\beta)} + \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\Phi. \tag{2.8}$$

Используя локальные преобразования Лоренца, можно зафиксировать "симметричную" калибровк $\Phi^{(\alpha\beta)} = 0$, $\Phi^{(\dot\alpha\dot\beta)} = 0$. В этой калибровке преобразования Лоренца $a^{\alpha\dot\alpha}$ задаются в терминах локальных трансляций:

$$l_{(\beta}^{\ \ \alpha)} = \frac{1}{2}\partial_{(\beta\dot\beta}a^{\alpha)\dot\beta}, \qquad l_{(\dot\beta}^{\ \ \dot\alpha)} = \frac{1}{2}\partial_{\beta(\dot\beta}a^{\beta\dot\alpha)}. \tag{2.9}$$

В такой калибровке оставшиеся неприводимые поля имеют следующие калибровочные законы преобразования:

$$\delta\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha}a^{\beta)\dot\beta)}, \qquad \delta\Phi = \frac{1}{4}\partial_{\beta\dot\beta}a^{\beta\dot\beta}. \tag{2.10}$$

Поле $P^{\alpha\dot\alpha}$ имеет калибровочные преобразования (2.7d). Подставляя соотношения (2.9),в симметричной калибровке получаем:

$$\partial^{\dot\alpha\beta}l_{(\beta}^{\ \ \alpha)} = \frac{1}{16}\,\Box\, a^{\alpha\dot\alpha} - \frac{1}{4}\partial^{\alpha}_{\dot\beta}\partial^{\dot\alpha}_{\beta}a^{\beta\dot\beta} = \frac{1}{8}\,\Box\, a^{\alpha\dot\alpha} - \frac{1}{4}\partial^{\alpha\dot\alpha}\partial^{\beta\dot\beta}a_{\beta\dot\beta}. \tag{2.11}$$

При выводе этого соотношения в последнем равенстве мы использовали свойства $\sigma$-матриц. Это слагаемое может быть скомпенсировано преобразованием комбинации, построенной из поля спина 2:

$$B^{\alpha\dot\alpha} = -2\left(\frac{1}{2}\partial_{\beta\dot\beta}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - \frac{3}{2}\partial^{\alpha\dot\alpha}\Phi\right). \tag{2.12}$$

Этот объект удовлетворяет полезному свойству: $\partial_{\beta\dot\beta}B^{\beta\dot\beta} = -\frac{1}{4}R$, где $R$ – это линеаризованная кривизна, определенная в (A.14). $R$ является инвариантом относительно линеаризованных калибровочных преобразований (2.10).

Поле спина $\frac{3}{2}$ также может быть разложено на неприводимые части:

$$\psi^{\beta\alpha\dot\alpha i} = \psi^{(\beta\alpha)\dot\alpha i} + \epsilon^{\beta\alpha}\psi^{\dot\alpha}, \qquad \delta_\lambda\psi^{(\beta\alpha)\dot\alpha} = -\partial^{(\beta\dot\alpha}\epsilon^{\alpha)i}, \quad \delta_\lambda\psi^{\dot\alpha i} = -\frac{1}{2}\partial^{\dot\alpha}_{\alpha}\epsilon^{\alpha i}. \tag{2.13}$$

Так же как и в бозонном случае для поля $P^{\alpha\dot\alpha}$, фермионные поля $\chi^{\alpha i}$ и $\rho^i_\alpha$ имеющие нетривиальные калибровочные преобразования (2.7e), (2.7f), могут быть аналогично проанализированы. Как результат мы заключаем, что поля $P^{\alpha\dot\alpha}$, $\chi^{\alpha i}$ м $\rho^i_\alpha$ требуют переопределения:

$$P^{\alpha\dot\alpha} \to P^{\alpha\dot\alpha} + iB^{\alpha\dot\alpha}, \qquad \chi^{\alpha i} \to \chi^{\alpha i} + 4\partial^{\beta}_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\beta i}_{\beta}, \qquad \rho^i_\alpha \to \rho^i_\alpha - 2\bar\psi^i_\alpha. \tag{2.14}$$

После такой "сдвижки", поля $P^{\alpha\dot\alpha}$, $\chi^{\alpha i}$ и $\rho^i_\alpha$ имеют тривиальные калибровочные законы преобразовнаия и являются чисто вспомогательными.

### 2.1.2 Суперполевое действие

Вообще говоря, действие линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации может быть получено прямой линеаризацией полной теории (1.74). Однако, намного проще, зная из формы нелинейного действия, что комбинация $h^{++5}h^{--5}$ должна входить в линеаризованное действие, явным образом суперсимметризовать его и потребовать, чтобы выполнялась линеаризованная калибровочная инвариантность. Этот подход позволяет естественно ввести ковариантные суперполя, которые играют существенную роль в структуре линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации в гармоническом суперпространстве.

Наиболее естественный способ ввести $\mathcal{N}=2$ ковариантные суперполя состоит в использовании базиса ковариантных производных. Для этого полезно разбить ковариантную гармоническую производную на плоскую и супергравитационную части:

$$\mathfrak{D}^{++} = \mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}, \qquad \hat{\mathcal{H}}^{++} := h^{++M}\partial_M. \tag{2.15}$$

Эти части независимым образом инвариантны относительно глобальной суперсимметрии: $\delta_\epsilon \mathcal{D}^{++}=0$, $\delta_\epsilon \hat{\mathcal{H}}^{++}=0$. После этого можно переписать супергравитационную часть, задаваемую аналитическим оператором $\hat{\mathcal{H}}^{++}$, в базисе ковариантых производных (1.36):

$$\hat{\mathcal{H}}^{++} = G^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + G^{++\alpha+}\mathcal{D}^-_\alpha + G^{++\dot\alpha+}\bar{\mathcal{D}}^-_{\dot\alpha} + G^{++5}\partial_5. \tag{2.16}$$

Как следствие суперсимметричной инвариантности $\hat{\mathcal{H}}^{++}$ и суперсимметричной инвариантности ковариантных производных, автоматически получается что суперполя $G^{++M}$ являются $\mathcal{N}=2$ ковариантными.

Цена, которую приходится заплатить за введение ковариантных суперполей $G^{++M}$ – это их неаналитичность:

$$\begin{aligned}
G^{++\alpha\dot\alpha} &= h^{++\alpha\dot\alpha} + 4ih^{++\alpha+}\bar\theta^{-\dot\alpha} + 4i\theta^{-\alpha}h^{++\dot\alpha+},\\
G^{++5} &= h^{++5} - 2ih^{++\hat\alpha+}\theta^-_{\hat\alpha},\\
G^{++\hat\alpha+} &= -h^{++\hat\alpha+}.\\
G^{++\hat\alpha-} &= h^{++\hat\alpha-} = 0.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Линеаризованные калибровочные преобразования оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}$ задаются вариацией

$$\delta_\lambda \mathcal{H}^{++} = [\mathcal{D}^{++}, \hat\Lambda], \qquad \hat\Lambda := \lambda^M\partial_M = \Lambda^M\mathcal{D}_M. \tag{2.18}$$

Параметры $\Lambda^M$ задаются выражениями:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\alpha\dot\alpha} &= \lambda^{\alpha\dot\alpha} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar\theta^{-\dot\alpha} + 4i\theta^{-\alpha}\lambda^{+\dot\alpha},\\
\Lambda^{5} &= \lambda^{5} - 2i\lambda^{+\hat\alpha}\theta^{-}_{\hat\alpha},\\
\Lambda^{+\hat\alpha} &= -\lambda^{+\hat\alpha},\\
\Lambda^{-\hat\alpha} &= \lambda^{-\hat\alpha}, \qquad \mathcal{D}^{++}\Lambda^{-\hat\alpha} + \Lambda^{+\hat\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Отсюда можно определить калибровочные преобразования ковариантных суперполей. Они имеют простой вид:

$$\delta_\lambda G^{++\alpha\dot\alpha} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{\alpha\dot\alpha}, \quad \delta_\lambda G^{++5} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{5}, \quad \delta_\lambda G^{++\hat\alpha+} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{+\hat\alpha}. \tag{2.20}$$

Линеаризованные условия нулевой кривизны (1.77) имеют форму:

$$[\mathfrak{D}^{++}, \mathfrak{D}^{--}] = \mathcal{D}^{0} \qquad \Rightarrow \qquad [\mathcal{D}^{++}, \hat{\mathcal{H}}^{--}] = [\mathcal{D}^{--}, \hat{\mathcal{H}}^{++}]. \tag{2.21}$$

Здесь мы ввели отрицательно заряженный дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{H}}^{--}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^{--} &:= \mathcal{D}^{--} + \hat{\mathcal{H}}^{--},\\
\hat{\mathcal{H}}^{--} &:= G^{--\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + G^{--\hat\alpha+}\mathcal{D}^{-}_{\hat\alpha} + G^{--\hat\alpha-}\mathcal{D}^{+}_{\hat\alpha} + G^{--5}\partial_5.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

По построению, этот оператор тривиально преобразуется под действием глобальной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, т.е. $\delta_\epsilon\hat{\mathcal{H}}^{--} = 0$, а значит суперполя $G^{--M}$ являются ковариантными.

В терминах ковариантных суперполей условие нулевой кривизны (2.21) записывается как

$$\begin{cases}
\mathcal{D}^{++}G^{--\alpha\dot\alpha} = \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha\dot\alpha},\\
\mathcal{D}^{++}G^{--5} = \mathcal{D}^{--}G^{++5},\\
\mathcal{D}^{++}G^{--\hat\alpha+} = \mathcal{D}^{--}G^{++\hat\alpha+},\\
\mathcal{D}^{++}G^{--\hat\alpha-} + G^{--\hat\alpha+} = 0.
\end{cases} \tag{2.23}$$

Эти уравнения являются линеаризованными гармоническими уравнениями и всегда имеют единственное решение, см. [94]. Мы представим нужные нам решения в приложении B.

Уравнения нулевой кривизны (2.21) инвариантны относительно линеаризованных калиб-

ровочных преобразований:

$$\delta_\lambda \hat{\mathcal{H}}^{++} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}], \qquad \delta_\lambda \hat{\mathcal{H}}^{--} = [\mathcal{D}^{--}, \hat{\Lambda}]. \tag{2.24}$$

Отсюда можно извлечь линеаризованные калибровочные преобразования $G^{--M}$ потенциалов:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda G^{--\alpha\dot{\alpha}} &= \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \delta_\lambda G^{--5} = D^{--}\Lambda^5, \\ \delta_\lambda G^{--\hat{\alpha}+} &= \mathcal{D}^{--}\Lambda^{+\hat{\alpha}} + \Lambda^{-\hat{\alpha}}, \quad \delta_\lambda G^{--\hat{\alpha}-} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{-\hat{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Теперь, зная калибровочные преобразования, несложно проверить, что суперсимметричное действие имеет вид:

$$S_{lin} = -\int d^4x d^8\theta du \left[ G^{++\alpha\dot{\alpha}} G^{--}_{\alpha\dot{\alpha}} + 4 G^{++5} G^{--5} \right]. \tag{2.26}$$

Поскольку действие построено из ковариантных суперполей, то оно автоматически $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрично инвариантно. Калибровочная вариация действия приводит к выражению:

$$\delta_\lambda S_{lin} = -2 \int d^4x d^8\theta du \left[ G^{++\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}^{--}\Lambda_{\alpha\dot{\alpha}} + 4 G^{++5} \mathcal{D}^{--}\Lambda^5 \right]. \tag{2.27}$$

Интегрирование по неаналитическим грассмановым переменным, меру которого удобно записать в терминах аналитических производных $d^4\theta^- := (\mathcal{D}^+)^4 = \frac{1}{16}(\mathcal{D}^+)^2(\bar{\mathcal{D}}^+)^2$, даёт:

$$(\mathcal{D}^+)^4 \left( G^{++\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{D}^{--}\Lambda_{\alpha\dot{\alpha}} \right) = 16 i h^{++\alpha+} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{+\dot{\alpha}} - 16 i h^{++\dot{\alpha}+} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{+\alpha}, \tag{2.28}$$

$$(\mathcal{D}^+)^4 \left( G^{++5} \mathcal{D}^{--}\Lambda^4 \right) = -4 i h^{++\alpha+} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{+\dot{\alpha}} + 4 i h^{++\dot{\alpha}+} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \lambda^{+\alpha}. \tag{2.29}$$

Таким образом, два слагаемых в вариации действия в точности сокращают друг друга.

### 2.1.3 Компонентная редукция

В этом разделе мы детально исследуем компонентный состав построенного действия и исключение вспомогательных полей. В результате мы убедимся, что предложенное действие (2.26) в действительности соответствует линеаризованной $\mathcal{N} = 2$ Эйнштейновской супергравитации. Удобно разделить анализ бозонного и фермионных секторов.

Прямая подстановка потенциалов и решений нулевой кривизны из приложения B.1 в суперполевое действие после интегрирования по грассмановым и гармоническим координатам

даёт в бозонном секторе:

$$
\begin{aligned}
S_{lin}^{(bos)} = \int d^4x \Big( & 8\Phi^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} + 32C^{\rho\dot\rho}\Big[\partial_{\rho\dot\rho}\partial^{\beta\dot\beta}C_{\beta\dot\beta} - \frac{1}{2}\,\Box\, C_{\rho\dot\rho}\Big] \\
& + 32iT^{(\alpha\beta)}\partial^{\dot\beta}_{(\alpha}C_{\dot\beta\beta)} - 32i\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)}\partial^{\beta}_{(\dot\alpha}C_{\beta\dot\beta)} \\
& + 4T^{(\alpha\beta)}T_{(\alpha\beta)} + 4\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)}\bar T_{(\dot\alpha\dot\beta)} - 16T\bar T \\
& - 4P^{\alpha\dot\alpha}\bar P_{\alpha\dot\alpha} - 6P^{\alpha\dot\alpha}P_{\alpha\dot\alpha} - 6\bar P^{\alpha\dot\alpha}\bar P_{\alpha\dot\alpha} \\
& - \frac{1}{9}V^{\alpha\dot\alpha(ij)}V_{\alpha\dot\alpha(ij)} - \frac{4}{9}S^{ij}S_{ij}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Для анализа сектора со спином 1 удобно разложить тензор напряженности электромагнитного поля на неприводимые части:

$$
\mathcal{F}_{\rho\dot\rho\beta\dot\beta} = \partial_{\rho\dot\rho}C_{\beta\dot\beta} - \partial_{\beta\dot\beta}C_{\rho\dot\rho} = \epsilon_{\rho\beta}\partial^{\sigma}_{(\dot\rho}C_{\sigma\dot\beta)} + \epsilon_{\dot\rho\dot\beta}\partial^{\dot\sigma}_{(\rho}C_{\dot\sigma\beta)} = \epsilon_{\rho\beta}\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\rho\dot\beta)} + \epsilon_{\dot\rho\dot\beta}\mathcal{F}_{(\rho\beta)}. \tag{2.31}
$$

Неприводимые спин-тензоры $\mathcal{F}_{(\rho\beta)} = \partial^{\dot\sigma}_{(\rho}C_{\dot\sigma\beta)}$ и $\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\rho\dot\beta)} = \partial^{\sigma}_{(\dot\rho}C_{\sigma\dot\beta)}$ являются калибровочно инвариантными и удобны для компонентной редукции различных инвариантов. Эти спин-тензоры отвечают самодуальным и антисамодуальным частям тензора напряженностей.

Используя эти обозначения, для Максвелловской части действия (2.32) мы получаем (с точностью до интегрирования по частям):

$$
\begin{aligned}
32C^{\rho\dot\rho}\Big[\partial_{\rho\dot\rho}\partial^{\beta\dot\beta}C_{\beta\dot\beta} - \frac{1}{2}\,\Box\, C_{\rho\dot\rho}\Big] &= 16\Big[\partial^{\beta\dot\beta}C^{\rho\dot\rho} - \partial^{\rho\dot\rho}C^{\beta\dot\beta}\Big]\big[\partial_{\beta\dot\beta}C_{\rho\dot\rho} - \partial_{\rho\dot\rho}C_{\beta\dot\beta}\big] \\
&= -32\bar{\mathcal{F}}^{(\dot\beta\dot\rho)}\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\beta\dot\rho)} - 32\mathcal{F}^{(\beta\rho)}\mathcal{F}_{(\beta\rho)}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Отсюда видно, что полученное действие имеет неправильный знак. Это следствие того, что в этой формулировке супергравитации Максвелловское суперполе выступает в роли неявного суперконформного компенсатора. Правильный знак действия получается после учета вспомогательных полей. Уравнения движения вспомогательных полей являются алгебраическими:

$$
\begin{gathered}
T_{(\alpha\beta)} = -4i\mathcal{F}_{(\alpha\beta)}, \quad \bar T_{(\dot\alpha\dot\beta)} = 4i\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\alpha\dot\beta)}, \\
T = \bar T = 0, \quad P_{\alpha\dot\alpha} = \bar P_{\alpha\dot\alpha} = 0, \quad V^{\alpha\dot\alpha(ij)} = 0, \quad S^{(ij)} = 0.
\end{gathered}
\tag{2.33}
$$

Используя их, мы исключаем вспомогательные поля из действия (эквивалентно, можно сдвинуть вспомогательные поля, чтобы получить правильный знак). После исключения вспомогательных полей мы получаем сумму безмассовых действий Паули-Фирца и Максвелла, с

правильными знаками:

$$S^{(bos)}_{lin|on-shell} = \int d^4x \left(8\Phi^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} + 32\mathcal{F}^{(\alpha\beta)}\mathcal{F}_{(\alpha\beta)} + 32\bar{\mathcal{F}}^{(\dot\alpha\dot\beta)}\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\alpha\dot\beta)}\right). \tag{2.34}$$

Для полноты, приведем также действие для спина 2, записанное в терминах полей $\Phi$:

$$\begin{aligned} 8\int d^4x\, \Phi^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = -4\int d^4x \Big[&\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\,\Box\,\Phi_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - \Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial^{\rho\dot\rho}\Phi_{(\rho\beta)(\dot\rho\dot\beta)} \\ &+ 2\,\Phi\partial^{\alpha\dot\alpha}\partial^{\beta\dot\beta}\Phi_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - 6\Phi\,\Box\,\Phi\Big]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

В фермионном секторе для BMO-действия $\mathcal{N}=2$ супергравитации[1] получается:

$$S^{(ferm)}_{lin} = -\int d^4x\Big(-32i\psi^{\beta\alpha\dot\alpha i}\bar{\mathcal{G}}_{\beta\alpha\dot\alpha i} - 64i\rho^{\beta i}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\bar\rho_{\dot\beta i} - 2i\rho^{\alpha i}\chi_{\alpha i} + c.c.\Big). \tag{2.36}$$

Вспомогательные фермионные поля $\chi^{\alpha i}$ и $\rho^{\alpha i}$ имеют алгебраические уравнения движения, приводящими к тому, что эти поля равны нулю на массовой оболочке. Таким образом, на массовой оболочке получается дейсвтие Рариты-Швингера для дублета полей спина $\frac{3}{2}$.

Заключая этот раздел, резюмируем, что в результате компонентной редукции мы получили действие $\mathcal{N}=2$ линеаризованной Эйнштейновской супергравитации BMO, и явно показали, что после исключения вспомогательных полей оно состоит из суммы свободных действий для спина 2, дублета полей спина $\frac{3}{2}$ и свободного действия спина 1.

## 2.2 $\mathcal{N}=2$ теория спина 3

В $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории свободного спина 2, описанной в предыдущем разделе, аналитические препотенциалы имели красивое геометрическое происхождение, поскольку были получены линеаризацией $\mathcal{N}=2$ аналитических фильбайнов, ковариантизующих гармоническую производную $\mathcal{D}^{++}\to\mathfrak{D}^{++}$ относительно группы супердиффеоморфизмов (1.61). Для спинов $\mathbf{s>2}$ такая красивая геометрическая интерпретация отсутствует. Тем не менее, выясняется, что задача построения соответствующего BMO-формализма может быть решена путем соответствующего обобщения формализма линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации, описанной в разделе 2.1.

Прежде чем переходить к обобщению на случай произвольного спина, мы детально рассмотрим первый нетривиальный пример: случай спина **3**.

[1] Отметим, что при вычислении компонентного состава происходит много неожиданных сокращений.

### 2.2.1 Аналитические препотенциалы

Мы вводим действительные $\mathcal{N}=2$ бозонные аналитические суперполя $h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}(\zeta)$, $h^{++\alpha\dot\alpha}(\zeta)$ (размерности $-1$) и сопряженные друг другу фермионные аналитические суперполя $h^{++(\alpha\beta)\dot\alpha+}(\zeta)$, $h^{++(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+}(\zeta)$ (размерности $-1/2$). На введенные суперполя не накладывается никаких связей. Мы приписываем введенным потенциалам калибровочные преобразования, которые являются прямым обобщением преобразований спина **2** (2.2):

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + 4i\lambda^{+(\alpha\beta)(\dot\alpha}\bar\theta^{+\dot\beta)} + 4i\theta^{+(\alpha}\bar\lambda^{+\beta)(\dot\alpha\dot\beta)},\\
\delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha} - 2i\lambda^{+(\alpha\beta)\dot\alpha}\theta^+_\beta - 2i\bar\lambda^{+(\dot\alpha\dot\beta)\alpha}\bar\theta^+_{\dot\beta},\\
\delta_\lambda h^{++(\alpha\beta)\dot\alpha+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{+(\alpha\beta)\dot\alpha}\,,\\
\delta_\lambda h^{++(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+} &= \mathcal{D}^{++}\bar\lambda^{+(\dot\alpha\dot\beta)\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Преобразования глобальной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии[2] также обобщают со случай спина **2** (2.5):

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= -4i\Big[h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha+}\bar\epsilon^{-\dot\beta)} - h^{++(\dot\alpha\dot\beta)(\alpha+}\epsilon^{-\beta)}\Big],\\
\delta_\epsilon h^{++\alpha\dot\beta} &= 2i\Big[h^{++(\alpha\beta)\dot\beta+}\epsilon^-_\beta - \bar\epsilon^-_{\dot\alpha}h^{++(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+}\Big].
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Преобразования суперсимметрии (в пассивной форме) всех других калибровочных потенциалов зануляются, так же как и в случае спина **2**.

Используя калибровочную свободу, можно наложить калибровку типа Весса-Зумино:

$$\begin{aligned}
h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= -4i\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}\Phi^{(\alpha\beta\rho)(\dot\alpha\dot\beta\dot\rho)} - 4i\theta^{+(\alpha}\bar\theta^{+(\dot\alpha}\Phi^{\beta)\dot\beta)} + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\psi_\rho^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)i}u^-_i\\
&\quad + (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\bar\psi_{\dot\rho}^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)i}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2V^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)(ij)}u^-_iu^-_j\,,\\
h^{++\alpha\dot\alpha} &= -4i\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}C^{(\alpha\rho)(\dot\alpha\dot\rho)} - 4i\theta^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}C + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\rho_\beta^{\alpha\dot\alpha i}u^-_i\\
&\quad + (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\rho_{\dot\beta}^{\alpha\dot\alpha i}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2S^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j\,,\\
h^{++(\alpha\mu)\dot\alpha+} &= (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\mu}P^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu} + \left(\bar\theta^+\right)^2\theta^+_\nu\left[\varepsilon^{\nu(\alpha}T^{\mu)\dot\alpha} + T^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)}\right] + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2\chi^{(\alpha\mu)\dot\alpha i}u^-_i\,,\\
h^{++\alpha(\dot\alpha\dot\mu)+} &= \big(\widetilde{h^{++(\alpha\mu)\dot\alpha+}}\big)\,.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

[2]Для преобразований суперсимметрии в случае спина **2** (2.5), мы использовали "активную" форму преобразований. Тут мы используем "пассивную" форму, которая отличается отсутствием трансляционного слагаемого $\delta_\epsilon z^M\partial_M$.

В результате получаем $\mathcal{N}=2$ мультиплет спина **3** вне массовой оболочки:

$$\begin{aligned} &\textit{Физические поля}: && \left(\Phi^{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)}, \Phi^{\alpha\dot\alpha}\right), \left(\psi_\rho^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)i}, \bar\rho_{\dot\beta}^{\alpha\dot\beta i}\right), (C^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}, C), \\ &\textit{Вспомогательные поля}: && V^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)(ij)}, \rho^{(\alpha\beta)\dot\alpha\, i}, S^{\alpha\dot\alpha(ij)}, T^{\alpha\dot\alpha}, T^{\dot\alpha(\alpha\beta\gamma)}, P^{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta}, \chi^{(\alpha\beta)\dot\alpha i}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Проследим за набором калибровочных параметров:

$$\begin{cases} \lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} \;\Rightarrow\; a^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}(x)\,, \\ \lambda^{\alpha\dot\alpha} \;\Rightarrow\; b^{\alpha\dot\alpha}(x)\,, \\ \lambda^{(\mu\alpha)\dot\alpha+} \;\Rightarrow\; \epsilon^{(\mu\alpha)\dot\alpha i}(x)u_i^+ + \bar\theta^{+\dot\alpha} n^{(\mu\alpha)} + \theta^{+\nu} l_{(\nu}^{\ \ \mu\alpha)\dot\alpha}(x)\,, \\ \bar\lambda^{\alpha(\dot\alpha\dot\mu)+} \;\Rightarrow\; \bar\epsilon^{\alpha(\dot\alpha\dot\mu)i}(x)u_i^+ + \theta^{+\alpha} n^{(\dot\alpha\dot\mu)} + \bar\theta^{+\dot\nu} l_{(\dot\nu}^{\ \ \alpha\dot\alpha\dot\mu)}(x)\,, \end{cases} \tag{2.41}$$

чтобы убедится в правильных калибровочных законах приведенных физических полей. Эти параметры могут быть идентифицированы как:

- $a^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}(x)$ – это локальные параметры калибровочных преобразований спина 3;
- $b^{\alpha\dot\alpha}(x)$ – это локальные преобразования калибровочных преобразований спина 2;
- Параметры $\epsilon^{(\mu\alpha)\dot\alpha i}(x)$ и $\bar\epsilon^{\alpha(\dot\alpha\dot\mu)i}(x)$ являются параметрами локальной фермионной симметрии спина 3 (по аналогии с фермионной локальной симметрией для случая спина 2, (2.7b));
- $n^{(\mu\alpha)}$ и $n^{(\dot\alpha\dot\mu)}$ являются параметрами локальных преобразований Лоренца (так же как и в случае спина 2, (2.7a));
- $l^{(\nu\mu\alpha)\dot\alpha}(x)$ и $l^{\alpha(\dot\nu\dot\alpha\dot\mu)}(x)$ являются аналогами локальных преобразований Лоренца для спина 3 и в зафиксированной калибровке выражаются через производные параметра $a^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}(x)$, как будет объяснено ниже.

Приведем ряд деталей процедуры фиксирования калибровки, поскольку они будут важны при анализе компонентного действия.

- **Сектор спина 3**

  Полный закон преобразования поля $\Phi_{\beta\dot\beta}^{(\alpha\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma)}$, входящего в препотенциал $h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} \sim \theta^{+\beta}\bar\theta^{+\dot\beta}\Phi_{\beta\dot\beta}^{(\alpha\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma)}$, имеет вид:

$$\delta\Phi_{\beta\dot\beta}^{(\alpha\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma)} = \partial_{\beta\dot\beta}a^{(\alpha\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma)} - 2l_{(\beta}^{\ \ \alpha\gamma)(\dot\alpha}\delta_{\dot\beta}^{\dot\gamma)} - 2l_{(\dot\beta}^{\ \ \dot\alpha\dot\gamma)(\alpha}\delta_{\beta}^{\gamma)}\,. \tag{2.42}$$

Мы раскладываем поле спина 3 на неприводимые части как:

$$\Phi_{(\alpha\gamma)\beta(\dot\alpha\dot\gamma)\dot\beta} = \Phi_{(\alpha\gamma\beta)(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} + \Phi_{(\alpha\gamma\beta)(\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\gamma)\dot\beta} + \Phi_{(\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)}\varepsilon_{\gamma)\beta} + \Phi_{(\alpha(\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\gamma)\dot\beta}\varepsilon_{\gamma)\beta}\,. \tag{2.43}$$

Используя "преобразования Лоренца спина 3" , можно выкалибровать $\Phi_{(\alpha\gamma\beta)\dot\alpha}$ и $\Phi_{\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)}$, в результате чего восстанавливается неприводимый полевой состав поля Фронсдала спина 3:

$$\Phi_{(\alpha\gamma)\beta(\dot\alpha\dot\gamma)\dot\beta} = \Phi_{(\alpha\gamma\beta)(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} + \Phi_{(\alpha(\dot\alpha}\varepsilon_{\dot\gamma)\dot\beta}\varepsilon_{\gamma)\beta}\,, \tag{2.44}$$

$$\Phi_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{9}\varepsilon^{\gamma\beta}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\Phi_{(\alpha\gamma)\beta(\dot\alpha\dot\gamma)\dot\beta}\,. \tag{2.45}$$

Остаточные преобразования Лоренца спина 3 определяются из требования сохранения калибровки $\Phi_{(\alpha\gamma\beta)\dot\alpha} = \Phi_{\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} = 0$:

$$\delta\Phi_{(\alpha\gamma\beta)\dot\alpha} = \frac{2}{3}\partial_{(\alpha\dot\beta}a^{(\dot\beta}_{\gamma\beta)\dot\alpha)} - 2l_{(\alpha\gamma\beta)\dot\alpha} = 0, \;\Rightarrow\; l_{(\alpha\gamma\beta)\dot\alpha} = \frac{1}{3}\partial_{(\alpha\dot\beta}a^{(\dot\beta}_{\gamma\beta)\dot\alpha)}\,, \tag{2.46}$$

$$\delta\Phi_{\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} = \frac{2}{3}\partial_{\beta(\dot\alpha}a^{(\beta}_{\dot\gamma\dot\beta)\alpha)} - 2l_{\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} = 0, \;\Rightarrow\; l_{\alpha(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} = \frac{1}{3}\partial_{\beta(\dot\alpha}a^{(\beta}_{\dot\gamma\dot\beta)\alpha)}\,. \tag{2.47}$$

Тогда для неприводимых слагаемых в (2.44) мы получаем законы преобразования

$$\delta\Phi_{(\alpha\gamma\beta)(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} = \partial_{(\beta(\dot\beta}a_{\alpha\gamma)\dot\alpha\dot\gamma)}\,, \tag{2.48}$$

$$\delta\Phi_{\alpha\dot\beta} = \frac{4}{9}\partial^{\gamma\dot\gamma}a_{(\alpha\gamma)(\dot\beta\dot\gamma)}\,. \tag{2.49}$$

Это не что иное, как калибровочные законы преобразования для спина 3.

- **Сектор спина 2**

Закон преобразования поля $C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}$ спина 2, входящего в аналитический потенциал $h^{++\alpha\dot\alpha} \sim \theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}$, имеет вид:

$$\delta C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho} = \partial_{\rho\dot\rho}b^{\alpha\dot\alpha} - n^{\dot\alpha}_{\dot\rho}\delta^{\alpha}_{\rho} + n^{\alpha}_{\rho}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\rho}\,. \tag{2.50}$$

После разложения этого поля на неприводимые части,

$$C_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = C_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + C_{(\alpha\beta)}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} + C_{(\dot\alpha\dot\beta)}\varepsilon_{\alpha\beta} + C\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{2.51}$$

можно выкалибровать $C_{(\alpha\beta)}$ и $C_{(\dot\alpha\dot\beta)}$, используя локальные "Лоренцевы" сдвиги. Остаточные преобразования получаются из требования сохранения этой "симметрической" калибровки:

$$2\delta C_{(\alpha\beta)} = \partial_{(\alpha\dot\alpha}b^{\dot\alpha}_{\beta)} + 2n_{\alpha\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial_{(\alpha\dot\alpha}b^{\dot\alpha}_{\beta)}\,, \tag{2.52}$$

$$2\delta C_{(\dot\alpha\dot\beta)} = \partial_{\beta(\dot\alpha}b^{\beta}_{\dot\beta)} - 2n_{\dot\alpha\dot\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}\partial_{\beta(\dot\alpha}b^{\beta}_{\dot\beta)}\,. \tag{2.53}$$

В конечном итоге, поле спина 2 представляется как:

$$C_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = C_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + C\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}, \qquad C = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}C_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{2.54}$$

и его составные части обладают законами преобразования для составляющих полей:

$$\delta C_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\alpha\dot\alpha}b_{\beta\dot\beta} + \partial_{\beta\dot\beta}b_{\alpha\dot\alpha}\right), \tag{2.55}$$

$$\delta C_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \partial_{(\beta(\dot\beta}b_{\alpha)\dot\alpha)}, \qquad \delta C = \frac{1}{4}\partial_{\alpha\dot\alpha}b^{\alpha\dot\alpha}\,. \tag{2.56}$$

Таким образом мы заключаем, что поле спина 2 имеет правильный закон преобразования под действием калибровочной $b_{\alpha\dot\alpha}$ симметрии.

- **Вспомогательные поля**

Так же, как и в случае спина 2, бозонное вспомогательное поле $P^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu}$ в (2.39) не инвариантно относительно Лоренцево-подобных преобразований спина 3:

$$\delta P^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu} = i\partial^{\dot\mu}_{\rho}l^{(\rho\mu\alpha)\dot\alpha}, \qquad \delta\bar P^{\alpha\mu(\dot\alpha\dot\mu)} = -i\partial^{\mu}_{\dot\rho}l^{\alpha(\dot\rho\dot\alpha\dot\mu)}\,. \tag{2.57}$$

Это приводит к необходимости переопределения этих полей через слагаемые, построенные из поля спина 3. Комбинации с необходимыми законами преобразования имеют

вид:

$$
\begin{aligned}
B_{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta} &= -\frac{1}{2}\left\{\partial^{\gamma\dot\gamma}\Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} - \partial_{(\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta)} - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta}\right\},\\
\bar B_{\alpha\beta(\dot\alpha\dot\beta)} &= -\frac{1}{2}\left\{\partial^{\gamma\dot\gamma}\Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta)} - \partial_{(\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta)} - \partial_{\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta\dot\beta)}\right\},\\
\delta B_{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta} &= \partial_{\rho\dot\alpha} l^{(\rho}_{\alpha\beta)\dot\beta}\,, \quad \delta\bar B_{\alpha\beta(\dot\alpha\dot\beta)} = \partial_{\alpha\dot\rho}\bar l^{(\dot\rho}_{\dot\alpha\dot\beta)\beta}\,.
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Соответствующие переопределения имеют вид

$$
P^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu} \to P^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu} + iB^{(\alpha\mu)\dot\alpha\dot\mu}, \quad \bar P^{\alpha\mu(\dot\alpha\dot\mu)} \to \bar P^{\alpha\mu(\dot\alpha\dot\mu)} - i\bar B^{\alpha\mu(\dot\alpha\dot\mu)}. \tag{2.59}
$$

После такого переопределения поля $P$ будут преобразовываться тривиально относительно калибровочной группы.

Поля $M^{\alpha\dot\alpha}$ и $T^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)}$ из калибровки (2.39) имеют нетривиальные законы преобразования под действием калибровочной группы спина 2:

$$
\delta M^{\alpha\dot\alpha} = -\frac{2}{3} i\partial^{\dot\alpha}_{\gamma} n^{(\alpha\gamma)}\,, \quad \delta T^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)} = -i\partial^{(\alpha\dot\alpha} n^{\mu\nu)}\,, \tag{2.60}
$$

где индуцированные "Лоренцевы" параметры $n^{(\alpha\gamma)}$ определены в (2.52). Таким образом эти поля тоже требуют переопределения, чтобы быть инертными относительно калибрововочной группы. Требуемое переопределение имеет вид:

$$
T^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)} \to T^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)} + iH^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)}\,, \quad M^{\alpha\dot\alpha} \to M^{\alpha\dot\alpha} + iH^{\alpha\dot\alpha}, \tag{2.61}
$$

где мы ввели:

$$
H^{\dot\alpha(\alpha\mu\nu)} := \partial^{(\alpha}_{\dot\beta} C^{\mu\nu)(\dot\alpha\dot\beta)}\,, \quad H^{\alpha\dot\alpha} := \partial^{\alpha\dot\alpha} C - \frac{1}{3}\partial_{\beta\dot\beta} C^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\,. \tag{2.62}
$$

Аналогично можно провести анализ и в фермионном секторе. В результате заключаем, что бозонные поля $\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\rho\dot\rho}, C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}$, и фермионные поля $\psi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)i}_{\rho}, \bar\rho^{\alpha\dot\beta i}_{\dot\beta}$ (и комплексно сопряженные) являются физическим, остальные поля являются вспомогательными. Учитывая остаточную калибровочную свободу, в результате мы остаемся с набором $\mathbf{104}_B + \mathbf{104}_F$ степеней свободы вне массовой оболочки. На массовой оболочке получается мультиплет $(3, 5/2, 5/2, 2)$, как это и ожидалось из элементарного анализа представлений $\mathcal{N} = 2$ алгебры суперсимметрии.

### 2.2.2 Суперполевое действие

Так же, как и при построении инвариантного действия линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации, в случае спина **3** требуется ввести ковариантные суперполя, а затем построить из них отрицательно заряженные суперполя.

Неаналитические потенциалы, преобразующиеся как ковариантные суперполя относительно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, имеют вид:

$$\begin{aligned} G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + 4i\Big[h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha+}\bar\theta^{-\dot\beta)} - h^{++(\dot\alpha\dot\beta)(\alpha+}\theta^{-\beta)}\Big], \\ G^{++\alpha\dot\beta} &= h^{++\alpha\dot\beta} - 2i\Big[h^{++(\alpha\beta)\dot\beta+}\theta^-_\beta - \bar\theta^-_{\dot\alpha}h^{++(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+}\Big]. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Они построены также по аналогии со случаем спина **2**. Напрямую можно проверить, что они являются ковариантными

$$\delta_\epsilon G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = 0, \qquad \delta_\epsilon G^{++\alpha\dot\beta} = 0\,. \tag{2.64}$$

Используя уравнения нулевой кривизны, можно построить отрицательно заряженные потенциалы:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++}G^{--(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= \mathcal{D}^{--}G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = 0\,, \\ \mathcal{D}^{++}G^{--\alpha\dot\beta} &= \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha\dot\beta}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Введенные суперполя обладают простыми калибровочными законами преобразования

$$\delta_\lambda G^{\pm\pm(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \mathcal{D}^{\pm\pm}\Lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\,, \quad \delta_\lambda G^{\pm\pm\alpha\dot\beta} = \mathcal{D}^{\pm\pm}\Lambda^{\alpha\dot\beta}\,, \tag{2.66}$$

где неаналитические калибровочные параметры определяются как

$$\begin{aligned} \Lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} &= \lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + 4i\Big[\lambda^{+(\alpha\beta)(\dot\alpha}\bar\theta^{-\dot\beta)} - \bar\lambda^{+(\dot\alpha\dot\beta)(\alpha}\theta^{-\beta)}\Big], \\ \Lambda^{\alpha\dot\beta} &= \lambda^{\alpha\dot\beta} - 2i\Big[\lambda^{+(\alpha\beta)\dot\beta}\theta^-_\beta - \bar\theta^-_{\dot\alpha}\bar\lambda^{+(\dot\alpha\dot\beta)\alpha}\Big]. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Проделывая те же самые технические шаги, как и для случая спина **2** в разделе 2.1.2, можно проверить, что явно $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное дейсвтие

$$S_{(s=3)} = \int d^4x d^8\theta du \left\{G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}G^{--}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + 4G^{++\alpha\dot\beta}G^{--}_{\alpha\dot\beta}\right\} \tag{2.68}$$

инвариантно относительно всех калибровочных преобразований и тем самым решает пробле-

му построения суперсимметричного действия для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории спина **3** вне массовой поверхности. Знак перед действием фиксирован требованием, чтобы кинетические слагаемые имели правильные знаки. Численный коэффициент может быть фиксирован из требования нужного коэффициента перед компонентным действием Фронсдала для спина 3. В следующем разделе мы проделаем эту процедуру.

### 2.2.3 Компонентная редукция

В данном случае ограничимся только рассмотрением бозонного сектора. Фермионный сектор может быть исследован полностью аналогично.

*Сектор спина 3*

В секторе спина 3 ненулевыми являются компоненты суперполей $G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ и $G^{++\alpha\dot\alpha}$:

$$\begin{aligned} G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(\Phi,B)} &= -4i\theta^{+\gamma}\bar\theta^{+\dot\gamma}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\gamma\dot\gamma} + 4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\gamma}\bar\theta^{-(\dot\alpha}B^{\dot\beta)(\alpha\beta)}_{\dot\gamma} \\ &\quad - 4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\gamma}\theta^{-(\alpha}\bar B^{\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\gamma}\,, \\ G^{++\alpha\dot\alpha}_{(\Phi,B)} &= -2(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\theta^-_\mu B^{(\mu\alpha)\dot\alpha}_{\dot\rho} - 2(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\bar\theta^-_{\dot\rho}\bar B^{\alpha(\dot\rho\dot\alpha)}_{\beta}\,. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Второе и третье слагаемые в потенциале $G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ и два слагаемых в $G^{++\alpha\dot\alpha}$ следуют из переопределения (2.59).

Соответствующие части отрицательно заряженных потенциалов $G^{--(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(\Phi,B)}$ и $G^{--\alpha\dot\beta}_{(\Phi,B)}$ даны в приложении B.2 (уравнение (B.12f)). Подставляя все эти суперполя в суперполевое действие (2.68) и интегрируя по грассмановым переменным и гармоникам, получаем компонентное действие для спина 3:

$$\begin{aligned} S_{(s=3)} = \int d^4x \Big\{ &\Phi^{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)}\,\Box\,\Phi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} \\ &- \frac{3}{2}\Phi^{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)}\partial_{\alpha_1\dot\alpha_1}\partial^{\rho\dot\rho}\Phi_{(\rho\alpha_2\alpha_3)(\dot\rho\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} \\ &+ 3\Phi^{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)}\partial_{\alpha_1\dot\alpha_1}\partial_{\alpha_2\dot\alpha_2}\Phi_{\alpha_3\dot\alpha_3} - \frac{15}{4}\Phi^{\alpha\dot\alpha}\,\Box\,\Phi_{\alpha\dot\alpha} \\ &+ \frac{3}{8}\partial_{\alpha_1\dot\alpha_1}\Phi^{\alpha_1\dot\alpha_1}\partial_{\alpha_2\dot\alpha_2}\Phi^{\alpha_2\dot\alpha_2}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Можно напрямую проверить, что действие (2.70) инвариантно относительно калибровочных преобразований спина 3 (2.48), (2.49). Полученное действие (2.70) включает поля $\Phi^{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)}$ и $\Phi^{\alpha\dot\alpha}$, необходимые для согласованного описания поля спина 3, и совпадают с соответствующим действием Фронсдала, записанным в спинорных обозначениях.

*Сектор спина 2*

Для спина 2, который в этом случае является суперпартнером спина 3 и описывается парой полей $(C^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}, C)$, также получается правильное компонентное действие. Объясним, как это происходит.

В результате переопределения (2.61) мы получаем в секторе спина 2:

$$G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(s=2)} = -4(\bar\theta^+)^2\theta^+_\rho\bar\theta^{-(\dot\alpha}H^{\dot\beta)\rho(\alpha\beta)} + 4(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\theta^{-(\alpha}\bar H^{\beta)\dot\rho(\dot\alpha\dot\beta)}\,, \tag{2.71}$$

$$G^{++\alpha\dot\alpha}_{(s=2)} = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho} + 2(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar\theta^-_{\dot\mu}\bar H^{\alpha\dot\rho(\dot\mu\dot\alpha)} + 2(\bar\theta^+)^2\theta^+_\rho\theta^-_\mu H^{\dot\alpha\rho(\alpha\mu)}\,. \tag{2.72}$$

Отрицательные потенциалы получаются тогда как решения соответствующих уравнений нулевой кривизны:

$$G^{--(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(s=2)} = -4(\bar\theta^-)^2\theta^-_\rho\bar\theta^{+(\dot\alpha}H^{\dot\beta)\rho(\alpha\beta)} + 4(\theta^-)^2\bar\theta^-_{\dot\rho}\theta^{+(\alpha}\bar H^{\beta)\dot\rho(\dot\alpha\dot\beta)} + \dots\,, \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned} G^{--\alpha\dot\alpha}_{(s=2)} = {}& -4i\theta^{-\rho}\bar\theta^{-\dot\rho}C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho} + 4(\theta^-)^2\bar\theta^{-(\dot\rho}\bar\theta^{+\dot\beta)}\partial^\beta_{\dot\rho}C^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} - 4(\bar\theta^-)^2\theta^{-(\rho}\theta^{+\beta)}\partial^{\dot\beta}_\rho C^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} \\ & + 2(\theta^-)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar\theta^-_{\dot\mu}\bar H^{\alpha\dot\rho(\dot\mu\dot\alpha)} + 2(\bar\theta^-)^2\theta^+_\rho\theta^-_\mu H^{\dot\alpha\rho(\mu\alpha)} + 8i(\theta^-)^4\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}\mathcal{G}^{\alpha\rho\dot\alpha\dot\rho}\,. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Тут мы использовали обозначение, $\mathcal{G}^{\alpha\rho\dot\alpha\dot\rho}$ для линеаризованного тензора Эйнштейна. Также были использованы обозначения:

$$\bar H^{\alpha\dot\rho(\dot\alpha\dot\mu)} := \bar H^{\alpha(\dot\rho\dot\alpha\dot\mu)} + \epsilon^{\dot\rho(\dot\alpha}\bar H^{\alpha\dot\mu)}\,, \qquad H^{\dot\alpha\rho(\mu\alpha)} := H^{\dot\alpha(\rho\mu\alpha)} + \epsilon^{\rho(\alpha}H^{\dot\alpha\mu)}\,,$$

$$\bar H^{\alpha(\dot\rho\dot\alpha\dot\mu)} = -\partial^{(\dot\rho}_\beta C^{\dot\alpha\dot\mu)(\alpha\beta)}\,, \qquad H^{\dot\alpha(\rho\mu\alpha)} = \partial^{(\alpha}_{\dot\beta}C^{\mu\rho)(\dot\alpha\dot\beta)}\,,$$

$$H^{\mu\dot\mu} = \partial^{\mu\dot\mu}C - \frac{1}{3}\partial_{\rho\dot\rho}C^{(\mu\rho)(\dot\mu\dot\rho)} = -\bar H^{\mu\dot\mu}\,.$$

Подставляя все это в суперполевое действие (2.68), мы получаем действие для бозонного сектора спина 2 в $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной теории спина **3**:

$$\begin{aligned} S_{(s=2)} = 16\int d^4x\, C^{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = -8\int d^4x\,\Big[ & C^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\,\Box\, C_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} \\ & - C^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial^{\rho\dot\rho}C_{(\rho\beta)(\dot\rho\dot\beta)} + 2\,C\partial^{\alpha\dot\alpha}\partial^{\beta\dot\beta}C_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - 6C\,\Box\, C\Big]. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Это линеаризованное действие Эйнштейна с точностью до числового фактора.

Разумеется, как и в случае спина **2**, можно провести детальный анализ как в бозонном так и в фермионном секторе, полностью рассматривая вспомогательные поля. Одно из важных отличий, которое сразу бросается в глаза, это отсутствие механизма, использующего вспомогательные поля, благодаря которому менялся знак у действия гравифотона. Это связано с невозможность построения калибровочных инвариантов первого порядка по производным от бозонных полей со спином больше 1. Для высших спинов правильный знак у действий получается автоматически.

## 2.3 $\mathcal{N} = 2$ теория высших спинов

В этом разделе мы приведем суперполевую формулировку $\mathcal{N} = 2$ теории высших спинов с целочисленным старшим спином.

### 2.3.1 Аналитические препотенциалы

Теперь мы рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ теорию высшего спина **s**. Представленные результаты получаются непосредственным обобщением формулировки линеаризованной $\mathcal{N} = 2$ Эйнштейновской супергравитации, путем добавления дополнительных индексов к аналитическим препотенциалам и калибровочным параметрам.

Препотенциалы $\mathcal{N} = 2$ теории высших спинов – аналитические $\mathcal{N} = 2$ суперполя:

$$h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(\zeta),\ h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(\zeta),\ h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+}(\zeta),\ h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+}(\zeta), \tag{2.76}$$

где символы $\alpha(s)$ и $\dot\alpha(s)$ обозначают полностью симметричные комбинации $s$ спинорных индексов, $\alpha(s) \coloneqq (\alpha_1 \dots \alpha_s)$, $\dot\alpha(s) \coloneqq (\dot\alpha_1 \dots \dot\alpha_s)$. Первые два препотенциала являются бозонными, последние 2 фермионными. Фермионные препотенциалы связаны друг с другом гармониче-

ским сопряжением. Калибровочная свобода препотенциалов задается преобразованиями:

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4i\Big[\lambda^{+\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2}\bar\theta^{+\dot\alpha_{s-1})} \\
&\qquad + \theta^{+(\alpha_{s-1}}\bar\lambda^{+\alpha(s-2))\dot\alpha(s-1)}\Big], \\
\delta_\lambda h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} - 2i\Big[\lambda^{+(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)}\theta^+_{\alpha_{s-1}} \\
&\qquad + \bar\lambda^{+(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})\alpha(s-2)}\bar\theta^+_{\dot\alpha_{s-1}}\Big], \\
\delta_\lambda h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)}, \\
\delta_\lambda h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+} &= \mathcal{D}^{++}\bar\lambda^{+\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Используя эту свободу, можно занулить чисто калибровочные степени свободы. В результате в калибровке Весса-Зумино мы получаем набор полей:

$$\begin{aligned}
h_{WZ}^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= -4i\theta^+_\beta\bar\theta^+_{\dot\beta}\Phi^{(\beta\alpha(s-1))(\dot\beta\dot\alpha(s-1))} - 4i\theta^{+(\alpha}\bar\theta^{+(\dot\alpha}\Phi^{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2))} \\
&\quad + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\psi_\beta^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)i}u^-_i + (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\psi_{\dot\beta}^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)i}u^-_i \\
&\quad + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)(ij)}u^-_iu^-_j, \\
h_{WZ}^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= -4i\theta^+_\beta\bar\theta^+_{\dot\beta}C^{(\beta\alpha(s-2))(\dot\beta\dot\alpha(s-2))} - 4i\theta^{+(\alpha}\bar\theta^{+(\dot\alpha}C^{\alpha(s-3))\dot\alpha(s-3))} \\
&\quad + (\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\rho_\beta^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)i}u^-_i + (\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\rho_{\dot\beta}^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)i}u^-_i \\
&\quad + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2S^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)(ij)}u^-_iu^-_j, \\
h_{WZ}^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+} &= (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}P^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)\dot\beta} + \left(\bar\theta^+\right)^2\theta^+_\beta T^{\dot\alpha(s-2)\alpha(s-1)\beta} \\
&\quad + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2\chi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)i}u^-_i, \\
h_{WZ}^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+} &= \left(\widetilde{h_{WZ}^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+}}\right).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Они образуют $\mathcal{N}=2$ мультиплет спина $\mathbf{s}$ вне массовой оболочки:

$$\begin{aligned}
&\textit{Физические поля}: && \left(\Phi^{\alpha(s)\dot\alpha(s)}, \Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\right), \left(\psi_\rho^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1))i}, \bar\rho_{\dot\beta}^{\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-3)\dot\beta)i}\right), \\
& && (C^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}, C^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s-3)}), \\
&\textit{Вспомогательные поля}: && V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)(ij)}, \rho^{(alpha(s-2)\beta)\dot\alpha(s-2)\,i}, S^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)(ij)}, \\
& && T^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)}, P^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)\dot\beta}, \chi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)i}.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Можно непосредственно проверить, что калибровочные преобразования для полей Фронсдала и Фанга-Фронсдала будет иметь правильный вид, как в (0.2) и (0.8). То есть мы получили набор физических полей спинов $(s, s-1/2, s-1/2, s-1)$.

Преобразования суперсимметрии действуют на эти аналитические суперполя нестандарт-

ным образом:

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= -4i\Big[h^{++\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)+}\bar\epsilon^{-\dot\alpha_{s-1})} - h^{++\dot\alpha(s-1)(\alpha(s-2)+}\epsilon^{-\alpha_{s-1})}\Big]\,,\\
\delta_\epsilon h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= 2i\Big[h^{++(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)+}\epsilon^-_{\alpha_{s-1}} + h^{++\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})+}\bar\epsilon^-_{\dot\alpha_{s-1}}\Big].
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Остальные препотенциалы преобразуются тривиально. Вид этих преобразований получен прямым обобщением случая линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации (частный случай $\mathbf{s}=\mathbf{2}$). Альтернативный, более геометрический взгляд на происхождение этих преобразований будет дан при обсуждении кубических вершин с гипермультиплетом.

### 2.3.2 Суперполевое действие

Для построения действия, так же, как и в прошлых примерах, удобно ввести $\mathcal{N}=2$ суперполя, инвариантные относительно суперсимметрии:

$$\begin{aligned}
G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4i\Big[h^{++\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)+}\bar\theta^{-\dot\alpha_{s-1})}\\
&\qquad - h^{++\dot\alpha(s-1)(\alpha(s-2)+}\theta^{-\alpha_{s-1})}\Big],\\
G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} - 2i\Big[h^{++(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)+}\theta^-_{\alpha_{s-1}}\\
&\qquad + h^{++\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})+}\bar\theta^-_{\dot\alpha_{s-1}}\Big].
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Эти суперполя имеют калибровочные законы преобразования:

$$\delta_\lambda G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\,,\quad \delta_\lambda G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\,, \tag{2.82}$$

где мы определили калибровочные параметры:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &:= \lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4i\Big[\lambda^{+\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)}\bar\theta^{-\dot\alpha_{s-1})} - \bar\lambda^{+\dot\alpha(s-1)(\alpha(s-2)}\theta^{-\alpha_{s-1})}\Big],\\
\Lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &:= \lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} - 2i\Big[\lambda^{+(\alpha(s-2)\alpha_{s-1})\dot\alpha(s-2)}\theta^-_{\alpha_{s-1}} - \bar\theta^-_{\dot\alpha_{s-1}}\bar\lambda^{+(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})\alpha(s-2)}\Big].
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Естественное происхождение этих суперполей будет обсуждаться в разделе по кубическим взаимодействиям. Отметим, что хотя поля инвариантны относительно суперсимметрии, они не аналитические.

Следующим шагом в построении динамического действия является введение отрицательно заряженных потенциалов. Они естественным образом определяются как решения уравне-

ний нулевой кривизны:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++}G^{--\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} &= \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}\,, \\ \mathcal{D}^{++}G^{--\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} &= \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\,. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Отрицательно заряженные потенциалы имеют законы калибровочных преобразований:

$$\delta_\lambda G^{--\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}\,, \quad \delta_\lambda G^{--\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}. \tag{2.85}$$

Уравнения нулевой кривизны калибровочно инвариантны.

Инвариантное действие, с точностью до нормализационного фактора, имеет универсальный вид для всех **s**:

$$\begin{aligned} S_{(s)} = (-1)^{s+1}\int d^4x d^8\theta du \Big\{ & G^{++\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}G^{--}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} \\ & + 4G^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\Big\}\,. \end{aligned} \tag{2.86}$$

$\mathcal{N}=2$ суперсимметрия действия явна, поскольку оно построено из синглетных суперполей. Калибровочная инвариантность проверяется приведением вариации действия к форме:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda S_{(s)} = 2(-1)^{s+1}\int d^4x d^8\theta du \Big\{ & \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}G^{++}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} \\ & + 4\mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}G^{++}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\Big\} \end{aligned} \tag{2.87}$$

и дальнейшим интегрированием по неаналитическим грассмановым координатам, полностью аналогично случаю спина **2**.

# Глава 3

# Суперполевые уравнения движения

В этой главе мы анализируем суперполевые уравнения движения для $\mathcal{N}$ = 2 высших спинов. Материал главы базируется на результатах статьи [142].

Для вывода уравнений движения из действия прежде всего необходимо идентифицировать (супер)поля, на которые не наложено связей. Для суперсимметричных теорий такие суперполя называются *препотенциалами*. Такие препотенциалы были найдены в предыдущей главе. В этом разделе мы покажем, что в $\mathcal{N}$ = 2 теориях высших спинов суперполевые уравнения движения могут быть выведены из действия (2.86) двумя эквивалентными способами, путём варьирования по:

- аналитическим препотенциалам $h^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M}(\zeta)$ (на них не наложено никаких ограничений) ;
- неаналитическим потенциалам типа Мезенческу $\Psi^{-\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\hat{\mu}}(Z)$, которые мы введем в разделе 3.3. Они дают альтернативное представление для суперполевых препотенциалов $\mathcal{N}$ = 2 теории высших спинов.

Разумеется, итоговые результаты должны быть идентичны.

Мы начнем с анализа простейшего случая $\mathcal{N}$ = 2 теории Максвелла (спин **1**) и выведем уравнения движения двумя способами, упомянутыми выше. Этот пример даст нам понимание того, как процедура вывода суперполевых уравнений движения работает в более сложных случаях. В дальнейшем мы выведем уравнения движения для произвольного $\mathcal{N}$ = 2 супермультиплета целочисленного высшего спина **s**, также двумя способами. После этого мы рассмотрим компонентную структуру суперполевых уравнений движения в простейших случаях.

## 3.1 $\mathcal{N}=2$ суперсимметричная теория спина 1

Мы начнем с простейшего примера $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной калибровочной теории, $\mathcal{N}=2$ теории Максвелла [92–94], основные детали формулировки которой приведены в разделе 1.3.2. Действие этой теории можно рассматривать как вырожденный случай общего действия $\mathcal{N}=2$ теории высших спинов (2.86):

$$S_{(s=1)} = \int d^4x d^8\theta du\, V^{++}V^{--}\,. \tag{3.1}$$

***Вариация по аналитическим препотенциалам***

$\mathcal{N}=2$ действие Максвелла может быть записано исключительно в терминах аналитического препотенциала $V^{++}$ используя гармонические распределения[1]:

$$S_{(s=1)} = \int \frac{d^4x d^8\theta du du_1}{(u^+u_1^+)^2}\, V^{++}(x,\theta,u)V^{++}(x,\theta,u_1)\,. \tag{3.2}$$

Это выражение нелокально по гармоникам. Важно отметить, что тут предполагается, что все аналитичесие суперполя рассматриваются в центральном базисе:

$$V^{++}(x,\theta,u) = V^{++}(x^m - 2i\theta^{(i}\sigma^m\bar\theta^{j)}u_i^+u_j^-, \theta^i_{\hat\alpha}u_i^+, u^\pm)\,, \tag{3.3}$$

и интеграл берется по пространству $\mathbb{R}^{4|8}\times S^2\times S^2$.

Чтобы переписать $\mathcal{N}=2$ действие Максвелла (3.1) в форме (3.2), мы записали решение уравнения нулевой кривизны через гармонические распределения:

$$V^{--}(u) = \int \frac{du_1}{(u^+u_1^+)^2}V^{++}(u_1)\,. \tag{3.4}$$

Также предполагается, что $V^{++}$ рассматривается в центральном базисе (3.3). Используя свойство гармонического распределения

$$D^{++}\frac{1}{(u^+u_1^+)^2} = D^{--}\delta^{(2,-2)}(u,u_1)\,, \tag{3.5}$$

можно непосредственно убедиться, что (3.4) удовлетворяет уравнению нулевой кривизны.

[1] Педагогическое обсуждение гармонических распределений, явные выражения для них и набор их свойств даны в главе 4 монографии [94]. Мы используем приведенные там результаты, относящиеся к решению дифференциальных уравнений на сфере.

Теперь, используя представление (3.2), можно проварьировать действие:

$$\delta S_{(s=1)} = 2\int \frac{d^4xd^8\theta dudu_1}{(u^+u_1^+)^2}\,\delta V^{++}(x,\theta,u)\,V^{++}(x,\theta,u_1)\,. \tag{3.6}$$

С помощью уравнений (3.4) и (3.5) можно привести вариацию действия к интегралу по гармоническому суперпространству:

$$\delta S_{(s=1)} = 2\int d^4xd^8\theta du\;\delta V^{++}(\zeta)\,V^{--}(\zeta,\theta^-)\,. \tag{3.7}$$

Затем, интегрируя по $\theta^-$, мы переходим к интегралу по аналитическому суперпространству:

$$\delta S_{(s=1)} = 2\int d\zeta^{(-4)}\;\delta V^{++}(\zeta)\,(D^+)^4V^{--}(\zeta,\theta^-)\,. \tag{3.8}$$

В силу произвольности аналитической вариации $\delta V^{++}(\zeta)$ мы получаем уравнение движения из принципа наименьшего действия:

$$\delta S_{(s=1)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (D^+)^4V^{--} = 0\,. \tag{3.9}$$

***Вариация по потенциалу Мезинческу***

Аналитический потенциал $\mathcal{N}=2$ теории Максвелла $V^{++}(\zeta)$ и калибровочный параметр $\lambda(\zeta)$ могут быть выражены в терминах общих гармонических полей [94]:

$$V^{++}(\zeta) = (D^+)^4M^{--}(Z)\,, \tag{3.10}$$

$$\lambda(\zeta) = (D^+)^4\rho^{(-4)}(Z)\,. \tag{3.11}$$

На гармонические суперполя $M^{--}$ и $\rho^{(-4)}$ не наложено связей. Используя калибровочную свободу, можно наложить калибровку, в которой будет конечный набор компонентных полей:

$$M^{--}(Z) = M^{(ij)}u_i^-u_j^- \qquad \Leftrightarrow \qquad (D^{++})^3M^{--} = 0\,, \tag{3.12}$$

где $M^{(ij)}$ – это обычное $\mathcal{N}=2$ суперполе независящее от гармоник. В этой калибровке остаточные калибровочные преобразования суперполя $M^{(ij)}$ имеют вид:

$$\delta M^{(ij)} = D_k^\alpha\chi_\alpha^{(ijk)} + \bar{D}_{\dot\alpha k}\bar\chi^{(ijk)\dot\alpha}\,. \tag{3.13}$$

$\mathcal{N}=2$ потенциал и соответствующие ему калибровочные преобразования совпадают с результатами Мезинческу [143], полученными прямым решением суперполевых связей, соответствующих $\mathcal{N}=2$ теории Максвелла [144]. Мы будем называть препотенциалом Мезинческу также и гармоническое суперполе $M^{--}(Z)$, определенное в (3.10) (так же как и его обобщение на высшие спины).

Теперь можно вывести уравнения движения $\mathcal{N}=2$ теории Максвелла, используя представление (3.10). Варьируя действие (3.2) по суперполю $M^{--}(Z)$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\delta S_{(s=1)} &= 2\int \frac{d^4xd^8\theta dudu_1}{(u^+u_1^+)^2}\left((D^+)^4\delta M^{--}(Z)\right)V^{++}(x,\theta,u_1)\\ &= 2\int d^4xd^8\theta du\,\delta M^{--}(Z)\,(D^+)^4V^{--}(x,\theta,u)\,.\end{aligned}\tag{3.14}$$

При переходе ко второй сточке мы использовали (3.4) и интегрирование по частям. Поскольку на гармоническое суперполе $\delta M^{--}(Z)$ не наложено ограничений, снова применяя принцип наименьшего действия $\delta S_{(s=1)}=0$ мы получаем суперполевые уравнения движения (3.9).

## 3.2 $\mathcal{N}=2$ высшие спины: аналитические препотенциалы

Процедура получения уравнений движения для $\mathcal{N}=2$ мультиплета высшего спина $\mathbf{s}$ похожа на простейший пример $\mathcal{N}=2$ Максвелловской теории, однако есть несколько важных отличий.

Для получений уравнений движения необходимо переписать действие (2.86) исключительно в терминах препотенциалов $h^{++\cdots}(\zeta)$, которые описывают степени свободы теории и на которые не наложены связи. Этого также можно добиться ценой нелокальности по гармоникам:

$$\begin{aligned}S_{(s)} = (-1)^{s-1}\int \frac{d^4xd^8\theta dudu_1}{(u^+u_1^+)^2}\Big\{&G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(u)G^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(u_1)\\ &+4G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(u)G^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(u_1)\Big\}\,.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Здесь мы использовали решения уравнений нулевой кривизны (2.84):

$$G^{--\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(u) = \int \frac{du_1}{(u^+u_1^+)^2}G^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(u_1)\,,\tag{3.16}$$

$$G^{--\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(u) = \int \frac{du_1}{(u^+u_1^+)^2}G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(u_1)\,.\tag{3.17}$$

Теперь, используя это представление, можно проварьировать действие (3.15) по анали-

тическим препотенциалам $h^{++\cdots}$, принимая во внимание выражение суперполей $G^{++\cdots}$ выражаются через них (2.81). Поскольку имеется 4 независимых аналитических препотенциала, вообще говоря, мы получим 4 суперполевых уравнения. Мы будем рассматривать эти уравнения последовательно.

***Вариация по препотенциалу*** $h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$

Эта вариация дает уравнение:

$$\delta S_{(s)} = (-1)^{s-1}\int d\zeta^{(-4)}\left\{2\delta h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(D^+)^4 G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\right\} \quad\Rightarrow\quad (D^+)^4 G^{--\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0\,. \tag{3.18}$$

***Вариация по препотенциалу*** $h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$

Вариация по препотенциалу $h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$ производится абсолютно аналогично и приводит к уравнениям движения:

$$\boxed{(D^+)^4 G^{--\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = 0}\,. \tag{3.19}$$

***Вариация по препотенциалу*** $h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)+}$

Вариация действия представима в форме:

$$\begin{aligned}\delta S_{(s)} = -4i(-1)^{s-1}\int d^4x d^8\theta du\,\Big\{&\delta h^{++\dot\alpha(s-1)\alpha(s-2)+}\,\theta^{-\alpha_{s-1}}\,G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\\ &+4\delta h^{++\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\alpha_{s-1})+}\,\bar\theta^-_{\dot\alpha_{s-1}}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\Big\}\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Это приводит к уравнению:

$$(D^+)^4\left[\theta^{-\alpha_{s-1}}\,G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + 4\bar\theta^-_{(\dot\alpha_{s-1}}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}\right] = 0\,. \tag{3.21}$$

Принимая во внимание уравнения (3.18) и (3.19), мы можем привести уравнение к виду:

$$\frac{1}{8}(\bar D^+)^2 D^{+\alpha_{s-1}} G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} - \frac{1}{2}(D^+)^2\bar D^+_{(\dot\alpha_{s-1}}G^{--5}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))} = 0\,. \tag{3.22}$$

***Вариация по препотенциалу*** $h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+}$

Абсолютно аналогичная процедура приводит к суперполевым уравнениям, которые тильда-сопряженны к уравнениям (3.22):

$$\frac{1}{8}(D^+)^2\bar D^{+\dot\alpha_{s-1}} G^{--}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + \frac{1}{2}(\bar D^+)^2 D^+_{(\alpha_{s-1}}G^{--5}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)} = 0\,. \tag{3.23}$$

Отметим, что уравнения, полученные вариацией по бозонным препотенциалам, *m.e.* уравнения (3.18) и (3.19), являются вторичными в том смысле, что они могут быть выведены как следствие уравнений (3.22) и (3.23). Действительно, чтобы воспроизвести их, достаточно подействовать спинорной производной $\bar{D}^+_{\dot\alpha}$ или $D^+_\alpha$ на (3.22) или (3.23). Уравнения (3.22) и (3.23) связаны друг с другом тильда-сопряжением.

## 3.3 $\mathcal{N} = 2$ высшие спины: препотенциалы Мезинческу

Для того, чтобы определить препотенциалы Мезинческу для $\mathcal{N} = 2$ высших спинов, необходимо собрать аналитические препотенциалы $h^{++\cdots}(\zeta)$ в один суперсимметрично ковариантный объект. Удивительно, что это удаётся сделать, но для этого нам нужно будет развить удобный формализм. В этом разделе для спина **s** мы построим 2 таких инвариантных объекта: дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ степени $s-1$ и суперполе $\Gamma^{++}_{(s)}$. Они будут играть важную роль при построении кубических взаимодействий в следующей главе. Эта конструкция мотивирована построением оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}$ в случае спина **2** (2.16).

Рассмотрим аналитический оператор, построенный из аналитических потенциалов $h^{++\cdots}(\zeta)$:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} := h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\,, \tag{3.24}$$

$$[D^+_{\hat\mu}, \hat{\mathcal{H}}^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}] = 0\,. \tag{3.25}$$

Этот объект является прямым обобщением аналитического оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}$, введенного в (2.15) для описания ковариантных суперполей $\mathcal{N} = 2$ линеаризованной супергравитации. Однако, в отличие от спина **2**, такой объект обладает недостатком: он не является инвариантным относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, заданной уравнениями (1.20), (2.80). Чтобы это исправить, мы добавляем симметризованные производные по координатам, тем самым получая дифференциальный оператор

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} := \hat{\mathcal{H}}^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\,. \tag{3.26}$$

Построенный таким образом оператор инвариантен относительно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии и, более того, он кодирует всю информацию о калибровочной свободе $\mathcal{N} = 2$ супермультиплета спина **s** через уравнение:

$$\delta_\lambda \mathcal{H}^{++}_{(s)} = [\mathcal{D}^{++}, \hat\Lambda_{(s)}]\,, \tag{3.27}$$

где мы использовали обозначение для аналитического дифференциального оператора

$$\hat{\Lambda}_{(s)} := \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \,, \tag{3.28}$$

$$\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} := \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M} \partial_M \,. \tag{3.29}$$

Отметим, что наличие производной $\partial_5$ в (3.24) играет важную роль: оно обеспечивает инвариантность $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ относительно преобразований $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. В дальнейшем, мы будем использовать такой оператор для построения взаимодействий высших спинов с гипермультиплетом, этому посвящена Глава 4. Отметим еще раз, что все спинорные индексы в операторах (3.24) и (3.29) предполагаются полностью симметризованными с индексами такого же типа.

Условие аналитичности (3.25) для супермультиплета спина $\mathbf{s}$ может быть разрешено в терминах фермионного препотенциала $\Psi^{-\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\hat{\mu}}(Z)$, на который не наложено связей:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} &= \hat{\mathcal{H}}^{++\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \\ &= (D^+)^4 \left( \Psi^{-\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\hat{\mu}} D^-_{\hat{\mu}} \right) \partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь мы предполагаем, что препотенциал $\Psi^{-\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\hat{\mu}}$ является полностью симметричным относительно спинорных индексов одного типа, как в (3.24) и (3.29). Здесь также используется ковариантная спинорная производная $\mathcal{D}^-_{\hat{\mu}}$, определенная в (1.36).

Соотношение (3.30) является обобщением на $\mathcal{N} = 2$ высшие спины соотношения (3.10), определяющего потенциал Мезинческу для $\mathcal{N} = 2$ теории Максвелла. Для случая спина $\mathbf{2}$ (линеаризованной $\mathcal{N} = 2$ Эйнштрейновской супергравитации) такой потенциал был получен в работе [145], а в в рамках гармонического суперпространства рассматривался в работе [97].

Поскольку оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ является инвариантным относительно преобразований суперсимметрии, введенные препотенциалы также $\mathcal{N} = 2$ инвариантны:

$$\delta_\epsilon \Psi^{-\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\hat{\mu}} = 0 \,. \tag{3.31}$$

Препотенциалы Мезинческу дают альтернативное суперполевое представление для степеней свободы $\mathcal{N} = 2$ BMO-мультиплетов высших спинов, однако в этом представлении отсутствует аналитичность и увеличивается калибровочная свобода. Мы не приводим здесь явных калибровочных преобразований, однако они могут быть легко найдены. Используя эту свободу, можно наложить гармонически-независимую калибровку, подобную случаю спина $\mathbf{1}$.

Можно выразить $G^{++}$-суперполя через $\Psi^{-\cdots}$. Для того, чтобы сделать это, полезно переписать дифференциальный оператор (3.24) в базисе $\mathcal{N}=2$ ковариантных производных, $\mathcal{D}_M=(\partial_{\alpha\dot\alpha},\mathcal{D}^-_{\hat\alpha},\partial_5)$:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}=G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\mathcal{D}_M\,. \tag{3.32}$$

Производные $\mathcal{D}_M$ коммутируют с $\mathcal{N}=2$ суперсимметрией, так что в таком формализме $G^{++\cdots}$ являются суперсимметрично инвариантными по построению, хотя не являются аналитическими, как это видно из выражений (2.81).

Из уравнений (3.30) и (3.32) получаются явные выражения для $G^{++\cdots}$ через препотенциалы Мезинческу:

$$G^{++(\alpha(s-2)\beta)(\dot\alpha(s-2)\dot\beta)}=4i(D^+)^2\bar D^{+(\dot\beta}\Psi^{-(\alpha(s-2)\beta)\dot\alpha(s-2))}+4i(\bar D^+)^2D^{+(\beta}\bar\Psi^{-\alpha(s-2))(\dot\alpha(s-1)\dot\beta)}\,, \tag{3.33}$$

$$G^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}=4i(\bar D^+)^2D^+_\beta\Psi^{-(\beta\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}-4i(D^+)^2\bar D^+_{\dot\beta}\bar\Psi^{-\alpha(s-2)(\dot\beta\dot\alpha(s-2))}\,. \tag{3.34}$$

Вариация действия тогда имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta_\Psi S_{(s)}=&8i(-1)^{s+1}\int d^4xd^8\theta du\,\Big\{(D^+)^2\bar D^{+(\dot\beta}\delta\Psi^{-\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2))}G^{--}_{\alpha(s-1)(\dot\beta\dot\alpha(s-2))}\\&+4(\bar D^+)^2D^+_\beta\delta\Psi^{-(\beta\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\Big\},\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\bar\Psi} S_{(s)}=&8i(-1)^{s+1}\int d^4xd^8\theta du\,\Big\{(\bar D^+)^2D^{+(\beta}\delta\bar\Psi^{-\alpha(s-2))\dot\alpha(s-1)}G^{--}_{(\beta\alpha(s-2))\dot\alpha(s-1)}\\&-4(D^+)^2\bar D^+_{\dot\beta}\delta\bar\Psi^{-\alpha(s-2)(\dot\beta\dot\alpha(s-2))}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Таким образом, вариации действия свелись к вариации потенциалов, на которые не наложено ограничений. В результате интегрирования по частям получаем уравнения движения:

$$\begin{cases}(D^+)^2\bar D^{+\dot\beta}G^{--}_{(\beta\alpha(s-2))(\dot\beta\dot\alpha(s-2))}+4(\bar D^+)^2D^+_{(\beta}G^{--}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}=0\,,\\(\bar D^+)^2D^{+\beta}G^{--}_{(\beta\alpha(s-2))(\dot\beta\dot\alpha(s-2))}-4(D^+)^2\bar D^+_{(\dot\beta}G^{--}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}=0\,.\end{cases} \tag{3.37}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (3.22) и (3.23), полученными ранее вариацией по аналитическим препотенциалам $h^{++\cdots}$. Эти уравнения являются тильда-сопряженными.

## Итоговые уравнения

В результате мы получили, что суперполевые уравнения движения $\mathcal{N}=2$ супермультиплета спина **s** имеют вид:

$$(\bar{D}^+)^2 D^{+\alpha_{s-1}} G^{--}_{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} - 4(D^+)^2 \bar{D}^+_{(\dot{\alpha}} G^{--}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2))} = 0. \tag{3.38}$$

# Глава 4

# Кубические взаимодействия $\mathcal{N} = 2$ высших спинов с гипермультиплетом

Эта глава посвящена построению кубических вершин взаимодействия $\mathcal{N} = 2$ суперполей высших спинов с гипермультиплетом и основывается на публикациях [142, 146–148]. Это простейший пример кубических вершин для высших спинов. Мы будем обозначать такие вершины как $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$, где $\mathbf{s}$ обозначает $\mathcal{N} = 2$ BMO-мультиплет высших спинов с физическими полями $\{s, s-1/2, s-1/2, s-1\}$ а $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ обозначает $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплет вне массовой оболочки, содержащий физические поля $\{1/2, 1/2, 0, 0\}$.

На уровне компонент, такие взаимодействия содержат целый набор кубических вершин, таких как $(s, 0, 0)$, $(s, 1/2, 1/2)$, $(s-1/2, 1/2, 0)$ и т.д. Построение таких вершин и нахождение соответствующих преобразований $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии в компонентном подходе является довольно трудоемкой и громоздкой задачей. Более того, построение старших вершин потребует деформации преобразований суперсимметрии. Суперполевой подход позволяет разрешить все эти сложности и обеспечивает компактную и явно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричную форму таких вершин в терминах суперполей.

## 4.1 Принципы построения

Прежде, чем переходить к построению вершин, мы сформулируем ограничения, которые налагаются *á priori* на возможную структуру взаимодействия гипермультиплета:

- *Аналитичность*. Мы требуем, чтобы взаимодействия были аналитическими, поскольку гипермультиплет описывается аналитическим суперполем $q^+(\zeta)$ и конструкция известных взаимодействий гипермультиплета с $\mathcal{N} = 2$ векторным мультиплетом и $\mathcal{N} = 2$ супергравитацией использует принцип аналитичности. Более того, гармоническая анали-

тичность является одной из главных особенностей гармонического суперпространства и играет важную роль при построении $\mathcal{N}=2$ теории высших спинов в гармоническом суперпространстве, как это было показано в главе 2.

- *$\mathcal{N}=2$ суперсимметрия*. Явная глобальная $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия вне массовой оболочки является необходимой составляющей нашего построения. Поскольку суперполе гипермультиплета под действием $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии преобразуется тривиально (1.40), калибровочные суперполя высших спинов должны появляться в комбинации, явно сохраняющей $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию. Это требование значительно ограничивает возможную форму кубического взаимодейсвтия. Зная, что скалярные поля взаимодействуют с полями высших спинов через $s$ производных, нам надо искать дифференциальный оператор степени $s$. В разделе 3.3 мы показали, что дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ (3.26) является инвариантным относительно суперсимметрии, а значит кубическая вершина принимает форму[1]:

$$S^{(s)}_{int} = \int d\zeta^{(-4)}\ A_{ab} q^{+a} \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} q^{+b}\,, \tag{4.1}$$

Здесь $A_{ab}$ – это некоторая матрица, которая в общем случае нарушает $\mathrm{SU}(2)_{PG}$ симметрию Паули-Гюрси. Возможная структура этой матрицы полностью определяется калибровочной симметрией.

- *Калибровочная инвариантность*. Наиболее важным свойством является калибровочная инвариантность в лидирующем порядке по калибровочным суперполям.

Поскольку нам известны калибровочные преобразования суперсимметрично-инвариантного оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ (3.27), то в лидирующем порядке калибровочная вариация вершины имеет вид:

$$\delta_\lambda S^{(s)}_{int(1)} = \int d\zeta^{(-4)}\ A_{ab} q^{+a} [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}] \partial^{s-2}_{\alpha\dot{\alpha}} q^{+b}\,, \tag{4.2}$$

Эта вариации должна сокращаться с соответствующей вариацией действия свободного гипермультиплета, индуцированной калибровочными преобразованиями "высшего спина" для суперполя гипермультиплета $q^{+a}$.

Стандартным образом, калибровочные преобразования полей материи определяются

[1] Еще одна возможность построения суперсимметричной вершины обсуждалась в работе [142]. Однако в работе [147] на уровне компонент было показано, что такая вершина является "фэйковой". Мы не включаем эти результаты в диссертацию.

через локализацию глобальных преобразований симметрии. Это и позволит нам определить матрицу $A_{ab}$.

Эта процедура по сути является нётеровской процедурой построения взаимодействий, адаптированной к случаю $\mathcal{N}=2$ гипермультиплета вне массовой оболочки.

Стоит подчеркнуть, что общая процедура калибрования может быть применена ко всем глобальным симметриям, реализованным на гипермультиплете. Таким образом можно воспроизвести все допустимые локальные нётеровские взаимодействия лидирующего порядка с калибровочными суперполями высших спинов. Отметим также, что эту конструкцию можно использовать и в обратную сторону: воспроизвести калибровочные препотенциалы из калибрования глобальных симметрий. Мы воспользуемся этой процедурой в главе 6, при построении $\mathcal{N}=2$ суперконформных мультиплетов.

Мы начнем с построения простейших примеров вершин взаимодействий спинов **1**,**2**,**3**,**4** с гипермультиплетом а затем обобщим полученные результаты на случай произвольного четного и нечетного спинов. После этого мы проанализируем компонентный состав полученных вершин в простейших случаях.

## 4.2 Простейшие примеры

### 4.2.1 Взаимодействие со спином 1

Построение взаимодействия $\mathcal{N}=2$ векторного мультиплета с гипермультиплетом хорошо известно [92, 94]. Мы начнем с этого простейшего примера, а потом приспособим эту конструкцию для применения в общей форме к суперполям высших спинов.

*Глобальная симметрия.* Действие свободного гипермультиплета (1.42),

$$S_{free} = -\int d\zeta^{(-4)}\tilde{q}^{+}\mathcal{D}^{++}q^{+} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^{+}_{a}, \tag{4.3}$$

инвариантно относительно $\mathrm{U}(1)$ глобальных преобразований, которые реализованы как:

$$q^{+} \to e^{i\alpha}q^{+}, \qquad \tilde{q}^{+} \to e^{-i\alpha}\tilde{q}^{+}. \tag{4.4}$$

В терминах дублета $q^{+a} = (\tilde{q}^{+}, q^{+})$, $U(1)$ преобразования задаются с помощью генератора $J$,

являющегося двумерной матрицей:

$$\delta q^{+a} = \alpha J q^{+a}, \qquad J q^{+a} = J^a_b q^{+b} = -i(\tau_3)^a_b q^{+b}, \qquad (\tau_3)^a_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Для массивного мультиплета $U(1)$ преобразования могут быть реализованы как "сдвиг" по вспомогательной координате $x^5$, т.е. как $x^5 \to x^5 + \alpha/m$. Действие генератора $J$ в этом случае пропорционально производной по вспомогательной координате $x^5$, $\partial_5 = mJ$, согласно соотношению (1.43).

Теперь мы переходим к калиброванию этой симметрии.

*Калибрование симметрии*. Калибровочные преобразования спина 1 имеют вид[2]:

$$\delta_\lambda q^{+a} = -\lambda J q^{+a}\,, \tag{4.6}$$

где параметр $\lambda(\zeta)$ является произвольным аналитическим суперполем. Это наиболее общий вид локализации преобразований (4.5).

Преобразование действия свободного гипермультиплета (1.42) относительно (4.6) имеет вид:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2}(D^{++}\lambda) q^{+a} J q^+_a = -\frac{1}{2} J_{ab} (D^{++}\lambda) q^{+a} q^{+b}\,. \tag{4.7}$$

Если на параметр калибровочного преобразования наложено условие $D^{++}\lambda = 0$, тогда калибровочные преобразования (4.6) становятся глобальными симметриями действия, в полном согласии с процедурой калибрования. Для того, чтобы действие свободного гипермультиплета (1.42) было инвариантно относительно калибровочных преобразований, необходимо использовать компенсирующее аналитическое калибровочное суперполе $V^{++}(\zeta)$, которое вводится удлинением гармонической производной:

$$\mathcal{L}^{+4}_{free} = -\frac{1}{2} q^{+a} \mathcal{D}^{++} q^+_a \quad \to \quad \mathcal{L}^{+4(s=1)}_{gauge} = -\frac{1}{2} q^{+a} \left(\mathcal{D}^{++} + V^{++} J\right) q^+_a\,. \tag{4.8}$$

Используя калибровочные преобразования $\delta V^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda$, можно наложить калибровку Весса-Зумино на суперполе $V^{++}$, как в (1.56). Таким образом, мы воспроизводим $\mathcal{N} = 2$ векторный супермультиплет, рассмотренный в разделе 1.3.2.

[2]Знак "минус" мы выбираем чтобы в дальнейшем получить калибровочные преобразования для препотенциалов со знаком "плюс".

В результате мы заключаем, что формализм суперсимметрично-инвариантных операторов применяется к этому вырожденному случаю путем следующего удлинения гармонической производной:

$$\mathcal{D}^{++} \;\Rightarrow\; \mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(1)} J\,, \qquad \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(1)} = V^{++}\,, \tag{4.9}$$

где закон преобразования оператора спина **1** задается коммутатором:

$$\delta_\lambda \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(1)} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(1)}], \qquad \hat{\Lambda}_{(1)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \delta_\lambda V^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda\,. \tag{4.10}$$

Отметим, что построенное действие (4.8) является инвариантным относительно калибровочных преобразований (4.6) и (4.10) во всех порядках, как это следует из соотношения

$$\delta_\lambda \left((\tau^3)_{ab} q^{+a} q^{+b}\right) \sim 2(\tau^3)_{ab}(\tau_3)^a_c q^{+c} q^{+b} \sim \varepsilon_{bc} q^{+c} q^{+b} = 0. \tag{4.11}$$

В случае взаимодействия с высшими спинами ($\mathbf{s} > 2$), такой точной калибровочной инвариантности нет, из-за отсутствия подобных соотношений. Это свойство является особенностью взаимодействия со спином **1**.

Под конец отметим, что в калибровочно ковариантной производной (4.9) можно убрать массивное слагаемое в $\mathcal{D}^{++}$ путем переопределения препотенциала $V^{++} \to V^{++} - im[(\theta^+)^2 - (\bar{\theta}^+)^2]$[3]. Это означает, что в калиброванной $\mathbf{s} = 1$ теории гипермультиплета нет разницы между массивным и безмассовым случаями: параметр массы $m$ может быть убран путем соответствующего переопределения $V^{++}$ (подобное явление может быть прослежено и компонентной формулировке).

### 4.2.2 Взаимодействие со спином 2

Взаимодействие гипермультиплета с $\mathcal{N} = 2$ супергравитацией ($\mathbf{s}$=**2**) также хорошо известно [94–96]. Некоторые элементы этой конструкции были использованы в разделе 2.1 при построении ковариантной производной $\mathfrak{D}^{++}$. В этом разделе мы приводим нужную конструкцию полностью, в форме, наиболее удобной для дальнейших обобщений.

*Глобальная симметрия*. Действие свободного гипермультиплета инвариантно относительно глобальных супертрансляций

$$\delta_{rig} q^{+a} = -\hat{\Lambda}_{rig} q^{+a}, \tag{4.12}$$

[3]Такое переопределение оставляет инвариантным, с точностью до полной гармонической производной, действие для $V^{++}$, но меняет вид преобразования $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии для $V^{++}$.

$$\hat{\Lambda}_{rig} := \Lambda^M \partial_M = \left(\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} - 4i\lambda^{-\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} - 4i\theta^{+\alpha}\bar{\lambda}^{-\dot{\alpha}}\right)\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \lambda^{+\alpha}\partial^-_\alpha + \bar{\lambda}^{+\dot{\alpha}}\partial^-_{\dot{\alpha}} + \left(\lambda^5 + 2i\lambda^{\hat{\alpha}-}\theta^+_{\hat{\alpha}}\right)\partial_5 \,. \tag{4.13}$$

Эти преобразования параметризуются бозонными параметрами $\lambda^{\alpha\dot{\alpha}}$, $\lambda^5$ и спинорными параметрами $\lambda^{\hat{\alpha}i}$, такими, что $\lambda^{\pm\hat{\alpha}} = \lambda^{\hat{\alpha}i}u^\pm_i$. Эти преобразования совпадают с преобразованиями $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии в активной форме (мы не выписываем здесь явно преобразования Лоренца).

Оператор $\hat{\Lambda}_{rig}$ коммутирует с гармонической производной (мы предполагаем, что все эти операторы действуют на аналитические суперполя):

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{rig}] = 0 \,. \tag{4.14}$$

Это условие приводит к тому, что свободный лагранжиан гипермультиплета (1.42) оказывается инвариантным с точностью до полной производной:

$$\begin{aligned}\delta_{rig}\mathcal{L}^{+4}_{free} &= \frac{1}{2}\hat{\Lambda}_{rig}q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a + \frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{++}\hat{\Lambda}_{rig}q^+_a = \frac{1}{2}\hat{\Lambda}_{rig}\left(q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a\right) \\ &= (-1)^{P(M)}\frac{1}{2}\partial_M\Lambda^M\left(q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a\right) = 0 \,.\end{aligned} \tag{4.15}$$

*Калибрование*. В этом случае есть 2 возможности для калибровочных преобразований гипермультиплета:

$$\delta_1 q^{+a} = -\hat{\Lambda}_{(2)}q^{+a}, \qquad \hat{\Lambda}_{(2)} := \lambda^M\partial_M = \lambda^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \lambda^{+\alpha}\partial^-_\alpha + \bar{\lambda}^{+\dot{\alpha}}\partial^-_{\dot{\alpha}} + \lambda^5\partial_5 \,, \tag{4.16}$$

$$\delta_2 q^{+a} = -\frac{1}{2}\Omega_{(2)}q^{+a}, \qquad \Omega_{(2)} := (-1)^{P(M)}\partial_M\lambda^M = \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} - \partial^-_\alpha\lambda^{+\alpha} - \partial^-_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{+\dot{\alpha}}. \tag{4.17}$$

Здесь параметры $\lambda^{\alpha\dot{\alpha}}(\zeta), \lambda^{+\hat{\alpha}}(\zeta)$ и $\lambda^5(\zeta)$ являются произвольными аналитическим параметрами. Первый тип преобразований $\delta_1 q^{+a}$, соответствует прямому аналогу глобальных супертрансляций, а вторая вариация $\delta_2 q^{+a}$ может рассматриваться как масштабное преобразования гипермультиплета.

Относительно преобразования (4.16), действие (1.42), с точностью до полной производной, преобразуется как:

$$\delta_1\mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2}q^{+a}[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}]q^+_a - \frac{1}{2}\Omega_{(2)}q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a \,. \tag{4.18}$$

Под действием преобразования второго типа (4.17), лагранжиан преобразуется как:

$$\delta_2 \mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2}\Omega_{(2)} q^{+a} \mathcal{D}^{++} q^+_a \,, \tag{4.19}$$

где мы использовали свойство:

$$q^{+a}(\mathcal{D}^{++}\Omega_{(2)})q^+_a = 0\,. \tag{4.20}$$

Можно скомбинировать преобразования (4.16) и (4.17) таким образом, чтобы сократить слагаемое с $\Omega_{(2)}$. В результате полная калибровочная вариация свободного лагранжиана принимает вид:

$$(\delta_1 + \delta_2)\,\mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2} q^{+a}[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}]q^+_a. \tag{4.21}$$

Эта вариация имеет подходящую форму для компенсации вариацией оператора $\delta\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}$. Данная вариация зануляется для параметров вида (4.13), которые тем самым определяют глобальную симметрию действия.

Для построения взаимодействия $\mathbf{2}$ теории с гипермультиплетом мы используем аналитический дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}$,

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)} = h^{++\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + h^{++\alpha+}\partial^-_\alpha + h^{++\dot{\alpha}+}\partial^-_{\dot{\alpha}} + h^{++5}\partial_5\,, \tag{4.22}$$

который обладает калибровочным законом преобразования (3.27):

$$\delta\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}]. \tag{4.23}$$

Таким образом, калибрование приводит к удлинению гармонической производной:

$$\mathcal{L}^{+4}_{free} = -\frac{1}{2} q^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a \quad \to \quad \mathcal{L}^{+4(s=2)}_{gauge} = -\frac{1}{2} q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}\right) q^+_a\,. \tag{4.24}$$

Вариация оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}$ во втором слагаемом сокращает вариацию первого слагаемого (4.21). Таким образом, действие (4.24) определяется калибровочно-инвариантное взаимодействие спина $\mathbf{2}$ с гипермультиплетом в лидирующем порядке по калибровочным суперполям.

Рассмотрим вариацию полученной вершины $(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ в следующих порядках. Сумма вариаций гипермультиплета $\delta_1 q^{+a}$ и $\delta_2 q^{+a}$ во втором слагаемом (4.24), с точностью до полных

производных приводит к слагаемому:

$$\tilde{\delta}\left(\frac{1}{2}q^{+a}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}q^{+}_{a}\right) = \frac{1}{2}q^{+a}[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}, \hat{\Lambda}_{(2)}]q^{+}_{a}\,. \tag{4.25}$$

Можно компенсировать это слагаемое путем нелинейной деформации линеаризованного закона преобразования (4.23) для оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}$:

$$\delta\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}] \quad \rightarrow \quad \delta_{full}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}] + [\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}, \hat{\Lambda}_{(2)}] = [\mathfrak{D}^{++}, \hat{\Lambda}_{(2)}]\,. \tag{4.26}$$

Таким образом, в отличие от случая спина **1**, где была точная инвариантность без модификации калибровочного преобразования $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(1)}$, в случае спина **2** необходимо модифицировать закон преобразования $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}$, чтобы добиться полной калибровочной инвариантности.

Полученная нелинейная деформация (4.26) калибровочного преобразования мультиплета спина **2** означает, что линеаризованное действие $\mathcal{N} = 2$ супергравитации (2.27) также должно быть дополнено нелинейными слагаемыми для сохранения калибровочной инвариантности. В этом состоит отличие от случая спина **1**, где действие чистого спина **1** задается действием (1.58) и не требует новых нелинейных слагаемых. Полное нелинейное действие $\mathcal{N} = 2$ Эйнштейновской супергравитации было приведено в (1.74). Мы не обсуждаем в рамках диссертации нелинейные слагаемые в нем.

Поскольку случай спина **2** является выделенным, мы коротко подытожим полученные результаты. Из преобразований гипермультиплета и калибровочных суперполей мы воспроизвели хорошо известное взаимодействие гипермультиплета с мультиплетом минимальной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации:

$$\mathcal{L}^{+4(s=2)}_{gauge} = -\frac{1}{2}q^{+a}\mathfrak{D}^{++}q^{+}_{a} = -\frac{1}{2}q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(2)}\right)q^{+}_{a}\,. \tag{4.27}$$

Оно получается удлинением гармонической производной аналитическим оператором первого порядка.

Отметим, что в случае безмассового гипермультиплета ($\partial_5 q^{+a} = 0$) препотенциал $h^{++5}$ не появляется в ковариантном действии гипермультиплета. Однако $h^{++5}$ с необходимостью присутствует в калибровочном действии (2.86) для спина $\mathbf{s} = 2$, обеспечивая суперсимметричную и калибровочную инвариантность.

Ещё одна интересная особенность построенной вершины состоит в том, что она является кубической по суперполям, а на уровне компонент таковой не является. Действительно,

ковариантное действие спина 0 на фоне гравитации имеет вид:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}g^{mn}\partial_m\phi\partial_n\phi. \tag{4.28}$$

При подстановке метрики в форме $g_{mn} = \eta_{mn} + h_{mn}$ это выражение содержит вершины произвольного порядка по $h_{mn}$. Это также иллюстрирует эффективность суперполевого подхода.

### 4.2.3 Взаимодействие со спином 3

В этом случае мы тоже начинаем с подходящих *глобальных симметрий*. В данном примере искомые глобальные симметрии похожи на преобразования в случае спина **1**, но отличаются наличием двух дополнительных производных:

$$\delta_{rig}q^{+a} = -\hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}_{rig}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}Jq^{+a}\,, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}_{rig} = &\left(\lambda^{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} - 4i\lambda^{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}-}\bar{\theta}^{+\dot{\beta})} - 4i\theta^{+(\alpha}\bar{\lambda}^{\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})-}\right)\partial_{\beta\dot{\beta}}\\ &+ \lambda^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}+}\partial^-_{\beta} + \bar{\lambda}^{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha+}\partial^-_{\dot{\beta}} + \left(\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} + 2i\lambda^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}-}\theta^+_{\beta} + 2i\lambda^{\alpha(\dot{\beta}\dot{\alpha})-}\bar{\theta}^+_{\dot{\beta}}\right)\partial_5\,.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Здесь мы использовали генератор $J$, определенный в (4.5). Поскольку мы рассматриваем глобальную симметрию, бозонные параметры $\lambda^{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})}, \lambda^{\alpha\dot{\alpha}}$, так же как и коэффициенты перед гармониками в фермионных параметрах $\lambda^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}\pm} = \lambda^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}i}u^\pm_i$, $\bar{\lambda}^{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha\pm} = \bar{\lambda}^{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha i}u^\pm_i$, предполагаются координатно-независимыми. В результате остается $9+4=13$ действительных бозонных параметров и $2\cdot3\cdot2=12$ комплексных фермионных параметров. Предполагая, что операторы действуют на аналитические суперполя, можно проверить, что выполняется равенство:

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}_{rig}]\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = 0. \tag{4.31}$$

Это равенство, с использованием интегрирования по частям и соотношения $\partial_M\Lambda^{\alpha\dot{\alpha}M}_{rig} = \partial_{\beta\dot{\beta}}\Lambda^{\alpha\dot{\alpha}M}_{rig} = 0\,,\ J_{ab} = J_{ba}\,$, обеспечивает инвариантность свободного лагранжиана гипермультиплета относительно преобразований (4.29).

*Калибрование*. Операторы калибровочных преобразований в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}&\hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^{\alpha\dot{\alpha}M}\partial_M\,, \quad \hat{\Lambda}_{(3)} = \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^{\alpha\dot{\alpha}M}\partial_M\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\,,\\ &\Omega^{\alpha\dot{\alpha}} = (-1)^{P(M)}(\partial_M\lambda^{\alpha\dot{\alpha}M})\,, \quad \Omega_{(3)} = (\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha\dot{\alpha}}_{(3)})\,,\end{aligned} \tag{4.32}$$

где

$$\lambda^{\alpha\dot{\alpha}M}\partial_M = \lambda^{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})}\partial_{\beta\dot{\beta}} + \lambda^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}+}\partial^-_{\beta} + \bar{\lambda}^{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha+}\partial^-_{\dot{\beta}} + \lambda^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_5\,, \tag{4.33}$$

и все калибровочные параметры являются произвольными аналитическими суперполями. Рассматривая последовательно все типы вариации гипермультиплета, мы получаем калибровочное преобразование гипермультиплета [4]:

$$\begin{aligned}\delta_\lambda q^{+a} &= -\frac{1}{2}\{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}\}Jq^{+a} - \frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha\dot{\alpha}}Jq^{+a} \\ &= -\frac{1}{2}\{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}\}Jq^{+a} - \frac{1}{4}\{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \Omega^{\alpha\dot{\alpha}}\}Jq^{+a} - \frac{1}{4}\Omega Jq^{+a}\,,\end{aligned} \tag{4.34}$$

относительно которого лагранжиан гипермультиплета преобразуется как:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2}J_{ab}q^{+a}[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}]\partial_{\alpha\dot{\alpha}}q^{+b}\,. \tag{4.35}$$

Теперь, используя калибровочные преобразования для аналитического оператора $\mathcal{H}^{++}_{(3)}$,

$$\delta\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(3)} = \delta\hat{\mathcal{H}}^{++\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = [\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha\dot{\alpha}}]\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\,, \tag{4.36}$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}^{++\alpha\dot{\alpha}} = h^{++(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})}\partial_{\beta\dot{\beta}} + h^{++(\alpha\beta)\dot{\alpha}+}\partial^-_{\beta} + h^{++(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha+}\partial^-_{\dot{\beta}} + h^{++\alpha\dot{\alpha}}\partial_5\,, \tag{4.37}$$

мы можем сократить слагаемое (4.35) в калибровочной вариации действия свободного гипермультиплета путем введения *взаимодействия с калибровочными суперполями*:

$$\mathcal{L}^{+4(s=3)}_{gauge} = -\frac{1}{2}q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(3)}J\right)q^+_a\,. \tag{4.38}$$

Действие (4.38) является инвариантным только в лидирующем порядке по калибровочным полям. В отличие от случаев спина $\mathbf{s} = \mathbf{1}$, где действие (4.8) было полностью инвариантным, и спина $\mathbf{s} = \mathbf{2}$, где взаимодействие (4.27) можно было сделать калибровочно-инвариантным во всех порядках, добавляя нелинейные слагаемые в закон преобразования калибровочных полей, в случае спина $\mathbf{s} = \mathbf{3}$ необходимы некоторые другие механизмы (если они существуют)[5].

[4] Отметим полезное для проверок свойство, что оператор $J$ можно "интегрировать по частям" как обычную производную. Например: $Jq^{+a}\mathcal{D}^{++}q^+_a = -q^{+a}\mathcal{D}^{++}Jq^+_a$.

[5] Возможно, полная инвариантность может быть достигнута путем расширения стандартного $4D$, $\mathcal{N} = 2$ суперпространства путем добавления дополнительных координат [141].

## 4.3 Обобщение на произвольные $\mathcal{N}=2$ спины

Несложно написать общею форму *глобальных преобразований* для произвольного спина:

$$\delta^{(s)}_{rig} q^{+a} = -\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig} \partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} (J)^{P(s)} q^{+a} \,. \tag{4.39}$$

Тут мы использовали $P(s) = \frac{1-(-1)^s}{2}$ и ввели дифференциальный оператор

$$\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig} := \Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M} \partial_M \,, \tag{4.40}$$

компонентны которого имеют вид:

$$\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} - 4i\lambda^{\alpha(s-1)(\dot{\alpha}(s-2)-}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha})} - 4i\theta^{+(\alpha}\lambda^{\alpha(s-2))\dot{\alpha}(s-1)-} \,, \tag{4.41a}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5} + 2i\lambda^{(\alpha(s-2)\beta)\dot{\alpha}(s-2)-}\theta^{+}_{\beta} + 2i\lambda^{\alpha(s-2)(\dot{\alpha}(s-2)\dot{\beta})-}\bar{\theta}^{+}_{\dot{\beta}} \,, \tag{4.41b}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)+} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)+} \,, \qquad \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)\pm} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)i} u^{\pm}_i \tag{4.41c}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)+} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)+} \,, \qquad \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)\pm} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)i} u^{\pm}_i \,. \tag{4.41d}$$

Все параметры $\lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}, \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5}, \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)i}, \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)i}$ в операторе $\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig}$ не зависят от координат. Всего имеется $s^2+(s-1)^2$ действительных бозонных параметров и $2s(s-1)$ комплексных фермионных параметров. Построенный оператор также удовлетворяет замечательному свойству:

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig}] \partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} = 0 \,, \tag{4.42}$$

которое обеспечивает инвариантность действия свободного гипермультиплета.

*Калибрование*. Так же, как и в случае спина **3**, можно начать с наиболее общей комбинации калибровочных преобразований, а затем следовать стратегии раздела 4.1. Но, как следствие ограничений (4.1) на форму взаимодействия, достаточно методом проб и ошибок (зная итоговые преобразования в случаях спина **3** и **4**) угадать форму калибровочных преобразований гипермультиплета, которые приведут к калибровочно-инвариантному взаимодействию с высшими спинами.

$$\delta^{(s)}_{\lambda} q^{+a} = -\frac{1}{2} \left\{ \partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \right\} (J)^{P(s)} q^{+a} - \frac{1}{2} \partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \Omega^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} (J)^{P(s)} q^{+a} \,. \tag{4.43}$$

Вариация свободного лагранжиана есть:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}^{+4}_{free} = \frac{1}{2} q^{+a} \left[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\right] \partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} (J)^{P(s)} q^+_a = \frac{1}{2} q^{+a} \delta \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} (J)^{P(s)} q^+_a \,. \tag{4.44}$$

Мы видим, что полученное слагаемое может быть скомпенсировано вариацией оператора $\delta\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$.

Итоговое действие может быть написано в универсальной форме для всех спинов:

$$S^{(s)}_{gauge} = -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a} \left(\mathcal{D}^{++} + \kappa_s \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} (J)^{P(s)}\right) q^+_a \,. \tag{4.45}$$

Здесь мы ввели константы взаимодействия $\kappa_s$, которые также надо добавить в калибровочные законы преобразования гипермультиплета (4.43):

$$\delta^{(s)}_\lambda q^{+a} = -\frac{\kappa_s}{2} \left\{\partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\right\} (J)^{P(s)} q^{+a} - \frac{\kappa_s}{2} \partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} \Omega^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} (J)^{P(s)} q^{+a} \,. \tag{4.46}$$

Их размерность легко установить, приписывая полям Фронсдала канонические размерности:

$$\left[\Phi^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s)}\right] = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[h^{++\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}\right] = 0 \tag{4.47}$$

и учитывая размерности производных

$$\left[\mathcal{D}^{++}\right] = 0, \qquad \left[\partial^{s-1}_{\alpha\dot{\alpha}}\right] = s-1 \qquad \Rightarrow \qquad \left[\kappa_s\right] = 1 - s. \tag{4.48}$$

## 4.4 Компонентная редукция

В этом разделе, мы изучаем компонентную структуру $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных кубических взаимодействий гипермультиплета с высшими спинами. Основная цель этого раздела состоит в том, чтобы продемонстрировать, как в результате компонентной редукции суперполевой вершины воспроизводятся известные компонентные кубические вершины. Мы будем рассматривать простейшие супермультиплеты спина **1**, **2** и **3**, которые наглядно иллюстрируют способ нахождения компонентной структуры вершины.

Поскольку мы построили BMO-вершину, то для анализа компонентного состава необходимо исключить вспомогательные поля, которых в BMO-гипермультиплете бесконечно много. Чтобы это проделать, удобно использовать *суперполевые уравнения движения гипермультиплета*, включающие взаимодействие с высшими спинами. В результате вариации действия

(4.45) мы получаем:

$$\Big(2\mathcal{D}^{++} + \kappa_s \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}(J)^{P(s)} + \kappa_s(-1)^{P(M)}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\partial_M h^{++M\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}\Big)\, q^+_a = 0. \tag{4.49}$$

Мы рассматриваем только нединамическую часть этих уравнений, которая определяет вспомогательные поля, динамические уравнения на физические поля гипермультиплета мы не накладываем. Процедура исключения вспомогательных полей приводит к тому, что на массовой оболочке суперполе гипермультиплета можно представить в виде ряда по $\kappa_s$:

$$q^+ = q^+_{(0)} + \kappa_s q^+_{(1)} + \kappa_s^2 q^+_{(2)} + \dots \tag{4.50}$$

Здесь $q^+_{(0)}$ это свободный НМО-гипермультиплет, полученный в формуле (1.46). Поскольку мы интересуемся кубическими вершинами, нас не интересуют слагаемые второго порядка по $\kappa_s^2$ и старше[6].

Подстановка НМО-разложения в действие (4.45) дает в лидирующем порядке по $\kappa_s$:

$$\begin{aligned} S^{(s)}_{gauge} = &-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}_{(0)}\mathcal{D}^{++}q^+_{(0)a} - \frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}_{(0)}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}(J)^{P(s)}q^+_{(0)a} \\ &- \frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}_{(1)}\mathcal{D}^{++}q^+_{(0)a} - \frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}_{(0)}\mathcal{D}^{++}q^+_{(1)a} + \mathcal{O}(\kappa_s^2). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Непосредственной подстановкой полей НМО-гипермультиплета во вторую строчку находим, что она не дает вклада в кубическую вершину на массовой оболочке, однако даёт вклады в четвертичную вершину и старше.

В результате кубические вершины на массовой оболочке имеют такой же вид, как и ВМО-вершины, но с заменой ВМО-гипермультиплета на НМО-гипермультиплет $q^+ \to q^+_{(0)}$:

$$S^{(s)}_{gauge} = \kappa_s \int d\zeta^{(-4)}\; h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M} J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\,. \tag{4.52}$$

Здесь $J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}$ это аналитические суперполевые токи, построенные из полей гипермультиплета:

$$J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M} := -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\partial_M(J)^{P(s)}q^+_a. \tag{4.53}$$

[6]В отличие от случаев $\mathbf{s} \geq 3$, в случаях спинов **1** и **2** взаимодействие калибровочного поля с гипермультиплетом является согласованным во всех порядках по $\kappa_{(s)}$. Например, в случае спина **1** четвертичная вершина имеет вид:

$$S^{(s=1)}_{quart} = \kappa_1^2 \int d^4x\,(A^m A_m)(f^i\bar f_i)\,.$$

Однако, поскольку минимальные вершины для $\mathbf{s} \geq 3$ согласованны только в лидирующем порядке по $\kappa_s$, построение старших вершин для взаимодействий с высшими спинами в данном случае не рассматривается.

Здесь предполагается полная симметрия по всем индексам одного типа. Мы будем рассматривать такие суперполевые токи в следующей главе и установим их связь с глобальными симметриями гипермультиплета. Из такой формы вершины видно, что эти суперполевые токи являются источниками в суперсимметричных уравнениях движения высших спинов, полученных в главе 3.

На компонентном уровне вершина сведется к выражению:

$$S^{(s)}_{gauge} = \kappa_s \int d^4x \left( \Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta\dot\beta} Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta\dot\beta} + \psi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta i} Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\beta i} + \bar\psi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\dot\beta i} \bar Y_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)\dot\beta i} + C^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)\beta\dot\beta} Y_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)\beta\dot\beta} \right) + \mathcal{O}(\kappa_s^2). \tag{4.54}$$

Здесь $\Phi, \psi, C$ это поля Фронсдала спинов $s, s-\frac{1}{2}, s-1$, а $Y$ – это сохраняющиеся билинейные токи, построенные из физических полей гипермультиплета. Это общая форма нетеровского взаимодействия. Эти вершины определены с точностью до переопределения полей. При анализе компонентного состава вершин мы будем это использовать.

В этом подразделе мы приведем компоненты для $Y$-токов в случае спинов $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$.

**Взаимодействие спина 1**

В калибровочном секторе аналитический потенциал спина $\mathbf{1}$ имеет форму:

$$V^{++}_A = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho} A_{\rho\dot\rho}. \tag{4.55}$$

Кубическая вершина имеет вид:

$$S^{(s=1)}_{int} = -i\kappa_1 \int d\zeta^{(-4)}\, V^{++} \tilde q^+_{(0)} q^+_{(0)} = \kappa_1 \int d\zeta^{(-4)} V^{++} J^{++}\,. \tag{4.56}$$

Здесь мы определили $J^{++} := -i\tilde q^+_{(0)} q^+_{(0)}$ – суперполевой ток спина $\mathbf{1}$. Мы ограничиваемся только на бозонным слагаемым, существенным для редукции в бозонном секторе:

$$J^{++} = -i\tilde q^+_{(0)} q^+_{(0)} = \ldots + 2\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\left(\partial_{\rho\dot\rho} f^i \bar f_i - f^i \partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i\right) + \ldots. \tag{4.57}$$

Отсюда следует, что взаимодействие в первом порядке по $\kappa_1$ имеет вид:

$$S^{(s=1)}_{int} = -2i\kappa_1 \int d^4x\, A^{\rho\dot\rho}\left(\partial_{\rho\dot\rho} f^i \bar f_i - f^i \partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i\right). \tag{4.58}$$

Это стандартное минимальное нетеровское взаимодействие калибровочного поля спина 1 с

U(1) током.

### Взаимодействие спина 2

***Сектор спина 2***

В секторе спина 2, калибровочные препотенциалы имеют следующие слагаемые в своих $\theta$-разложениях:

$$h^{++\alpha\dot\alpha}_{(\Phi,\mathcal{P})} = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}\,, \tag{4.59a}$$

$$h^{++\alpha+}_{(\Phi,\mathcal{P})} = -i(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}B^{\alpha}_{\dot\beta}\,, \tag{4.59b}$$

$$h^{++\dot\alpha+}_{(\Phi,\mathcal{P})} = -i(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}B^{\dot\alpha}_{\beta}\,. \tag{4.59c}$$

Используя их, мы получаем в бозонном секторе:

$$\begin{aligned} S^{(s=2)}_{int} = &-\frac{\kappa_2}{4}\int d^4x\,\Phi^{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}\left(\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}f^i\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - \partial_{\beta\dot\beta}f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i + f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\right)\\ &+\kappa_2\int d^4x B^{\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}\left(f^i\bar f_i\right). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Во второй строчке содержится взаимодействие с линеаризованной скалярной кривизной, как следствие соотношения $\partial_{\alpha\dot\alpha}B^{\alpha\dot\alpha}\sim R$. Это слагаемое может быть убрано переопределением полей (детали приведены в [142]).

В результате полученный $Y$-ток принимает вид:

$$Y_{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} = -\frac{1}{4}\Big[\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}f^i\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - \partial_{\beta\dot\beta}f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i + f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\Big]. \tag{4.61}$$

Он совпадает с тензором энергии импульса комплексного скаляра (см. также далее уравнение (5.59)).

***Сектор спина 1***

После исключения вспомогательных полей в секторе спина 1 калибровочные препотенциалы имеют вид:

$$h^{++5}_{(C)} = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}C_{\rho\dot\rho}\,, \tag{4.62}$$

$$h^{++\alpha+}_{(C)} = 4i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\nu\partial^{(\alpha}_{\dot\rho}C^{\dot\rho\nu)}\,, \tag{4.63}$$

$$h^{++\dot\alpha+}_{(C)} = -4i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\nu}\partial^{(\dot\alpha}_{\rho}C^{\rho\dot\nu)}\,. \tag{4.64}$$

Прямые вычисления показывают, что вклад во взаимодействие в первом порядке по $\kappa_2$ следует только из препотенциала $h^{++5}$, $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}\to h^{++5}\partial_5$. Итоговое вы выражение для $Y$-тока

получается в виде:

$$Y_{\rho\dot\rho} = -\frac{im}{2}\left(f^i\partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i - \partial_{\rho\dot\rho}f^i\bar f_i\right). \tag{4.65}$$

***Сектор спина*** 3/2

Похожий анализ аналогично проводится и в спинорном секторе. Соответствующее взаимодействие также имеет нетеровскую форму:

$$S_{int}^{(s=2)} = \kappa_2\int d^4x\left(\psi^{\alpha\beta\dot\alpha i}Y_{\alpha\beta\dot\alpha i} + \bar\psi^{\alpha\dot\alpha\dot\beta i}\bar Y_{\alpha\dot\alpha\dot\beta i}\right). \tag{4.66}$$

Соответствующие токи спина 3/2 совпадают с соответствующими сохраняющимися токами для $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии (см. дальше формулу (5.78)), с точностью до слагаемых, которые тривиально сохраняются без использования уравнений движения:

$$Y^i_{\rho\dot\rho\alpha} = -\frac{1}{4}\Big[\psi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}\bar f^i - \chi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}f^i - im\epsilon_{\rho\alpha}\left(\bar\chi_{\dot\rho}\bar f^i - \bar\psi_{\dot\rho}f^i\right)\Big]. \tag{4.67}$$

Общий коэффициент однозначно определяется взаимодействием симметричной части $\psi^{(\alpha\rho)\dot\rho i}$ калибровочного поля спина $\frac{3}{2}$ с полями гипермультиплета.

**Взаимодействие спина 3**

***Сектор спина 3***

Сектор спина 3 в калибровочных $\mathcal{N}=2$ препотенциалах спина **3** описывается вкладами:

$$h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\rho\dot\rho}\,, \tag{4.68a}$$

$$h^{++(\alpha\beta)\dot\alpha+} = -i(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}B^{(\alpha\beta)\dot\alpha}_{\dot\beta}\,, \tag{4.68b}$$

$$h^{++(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+} = -i(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}B^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha}_{\beta}\,. \tag{4.68c}$$

Здесь мы использовали обозначения из главы 2:

$$\Phi_{(\alpha\beta)\gamma(\dot\alpha\dot\beta)\dot\gamma} = \Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)} + \Phi_{(\alpha(\dot\alpha\epsilon_{\beta)\gamma}\epsilon_{\dot\beta)\dot\gamma}}\,, \tag{4.69}$$

$$B_{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{1}{2}\Big[\partial^{\gamma\dot\gamma}\Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)} - \partial_{(\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta)} - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta}\Big], \tag{4.70}$$

$$B_{\alpha\beta(\dot\alpha\dot\beta)} = -\frac{1}{2}\Big[\partial^{\gamma\dot\gamma}\Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)} - \partial_{(\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta)\dot\beta)} - \partial_{\alpha(\dot\alpha}\Phi_{\beta\dot\beta)}\Big]. \tag{4.71}$$

Подставляя выражения (4.68) в суперполевое действие для вершины, мы получаем в компонентах для $(3,0,0)$ кубической вершины:

$$\begin{aligned} S_{int}^{(s=3)} = -\frac{i\kappa_3}{4}\int d^4x\, \Phi^{(\alpha\beta)\rho(\dot\alpha\dot\beta)\dot\rho}\Big( & f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}f^i\bar f_i \\ & - \partial_{\rho\dot\rho}f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i + \partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i\Big) \\ + \frac{i\kappa_3}{2}\int d^4x\, \Big(B^{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta} + B^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha\beta}\Big)\Big( & f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\bar f_i\Big). \end{aligned} \tag{4.72}$$

Некоторые их этих слагаемых могут быть убраны путем переопределения полей, тем самым значительно упрощая полученное компонентное действие. В частности, можно воспользоваться соотношением:

$$\begin{aligned} & \partial^{\alpha\dot\alpha}B_{(\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta} = \partial^{\alpha\dot\alpha}B_{\alpha\beta(\dot\alpha\dot\beta)} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}_{\beta\dot\beta} \\ & = -\frac{1}{2}\Big(\partial^{\alpha\dot\alpha}\partial^{\gamma\dot\gamma}\Phi_{(\alpha\beta\gamma)(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)} - \frac{1}{4}\partial_{\beta\dot\beta}\partial^{\alpha\dot\alpha}\Phi_{\alpha\dot\alpha} - \frac{5}{2}\,\Box\,\Phi_{\beta\dot\beta}\Big), \end{aligned} \tag{4.73}$$

которое дает линеаризованный калибровочно-инвариантный тензор ("скалярная кривизна" для спина 3) определенный в (B.12h). На свободных уравнения движения $\mathcal{R}_{\beta\dot\beta} = 0$.

В результате получаем, что соответствующий сохраняющийся $Y$-ток (в безмассовом случае) задается выражением:

$$Y_{(\alpha\beta)\rho(\dot\alpha\dot\beta)\dot\rho} = -\frac{i}{4}\Big(f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}f^i\bar f_i - \partial_{\rho\dot\rho}f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\bar f_i + \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}f^i\partial_{\rho\dot\rho}\bar f_i\Big). \tag{4.74}$$

***Сектор спина 2***

Сектор спина 2 определяется следующими слагаемыми в аналитических препотенциалах:

$$h^{++5\alpha\dot\alpha} = -4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}C^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}\,, \tag{4.75a}$$

$$h^{++\dot\alpha(\alpha\beta)+} = i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\rho H^{\dot\alpha\rho(\alpha\beta)}\,, \tag{4.75b}$$

$$h^{++\alpha(\dot\alpha\dot\beta)} = i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar H^{\alpha\dot\rho(\dot\alpha\dot\beta)}\,. \tag{4.75c}$$

С точностью до переопределения, получаем соответствующий $Y$-ток:

$$Y_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{m}{4}\left(\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}f^i\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - \partial_{\beta\dot\beta}f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i + f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\right). \tag{4.76}$$

***Сектор спина*** 5/2

Анализ спинорного сектора проводится аналогично, мы не приводим здесь промежуточные детали. Итоговое взаимодействие имеет нетеровскую форму:

$$S_{int}^{(s=3)} = \kappa_3 \int d^4x \left( \psi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\gamma i} Y_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\gamma i} + \bar\psi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\dot\gamma i} \bar Y_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\dot\gamma i} \right), \tag{4.77}$$

где соответствующий фермионный $Y$-ток спина $\frac{5}{2}$ (в безмассовом случае), с точностью до численного множителя совпадает с сохраняющим $\mathcal{S}$-током спина $\frac{5}{2}$ (см. также дальше уравнение (5.102)):

$$Y^i_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\rho)\rho} = -\frac{i}{4}\chi_\rho \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\bar f^i - \frac{i}{4}\psi_\rho \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho} f^i. \tag{4.78}$$

# Глава 5

# Симметрии гипермультиплета и $\mathcal{N} = 2$ суперполевые токи высших спинов

В этой главе, основанной на работе [142], мы построим сохраняющиеся суперполевые токи, отвечающие глобальным симметриям "высших спинов" гипермультиплета. Эти супертоки определяют кубическое нётеровское взаимодействие гипермультиплета с $\mathcal{N} = 2$ супермультиплетами высших спинов, как было показано в предыдущей главе.

В начале главы мы обсудим глобальные симметрии высших спинов и особенности их алгебраической структуры. Затем мы получим суперполевые токи, используя $\mathcal{N} = 2$ теорему Нётер. После этого мы обсудим их компонентный состав. В заключительном разделе 5.4, являющимся приложением, содержится общее обсуждение компонентного состава суперполевых токов.

Дальнейшее обсуждение структуры суперполевых токов, описанных здесь, и ряд предложений по их возможным применениям можно найти в работе [149].

## 5.1 Глобальные симметрии гипермультиплета

В этом разделе мы рассматриваем общий класс глобальных симметрий (содержащих высшие производные) свободного гипермультиплета, полученные в главе 4. В следующем разделе мы построим сохраняющиеся супертоки, отвечающие этим симметриям.

Глобальные симметрии гипермультиплета реализуются преобразованиями вида[1]:

$$\delta^{(s)}_{rig} q^{+a} = -\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig} \partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} (J)^{P(s)} q^{+a} \,, \tag{5.1}$$

[1]Здесь $s \geq 2$. Для случая $s = 1$, преобразования симметрии имеют вид:

$$\delta^{(s=1)}_{rig} q^{+a} = -\lambda J q^{+a}.$$

В отличие от этих симметрий, все симметрии высших спинов ($s \geq 2$) содержат производные.

где дифференциальный оператор $\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig}$ определяется как

$$\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig} := \Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M}\partial_M, \qquad M = (\alpha\dot{\alpha}, \alpha, \dot{\alpha}, 5), \tag{5.2}$$

с параметрами

$$\Lambda^{(\alpha(s-2)\alpha)(\dot{\alpha}(s-2)\dot{\alpha})} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} - 4i\lambda^{\alpha(s-1)(\dot{\alpha}(s-2)-}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha})} - 4i\theta^{+(\alpha}\lambda^{\alpha(s-2))\dot{\alpha}(s-1)-}, \tag{5.3a}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5} + 2i\lambda^{(\alpha(s-2)\beta)\dot{\alpha}(s-2)-}\theta^{+}_{\beta} + 2i\lambda^{\alpha(s-2)(\dot{\alpha}(s-2)\dot{\beta})-}\bar{\theta}^{+}_{\dot{\beta}}, \tag{5.3b}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)+} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)+}, \qquad \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)\pm} = \lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)i}u^{\pm}_{i}, \tag{5.3c}$$

$$\Lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)+} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)+}, \qquad \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)\pm} = \lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)i}u^{\pm}_{i}. \tag{5.3d}$$

Все параметры преобразований $\lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$, $\lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)5}$, $\lambda^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)i}$, $\lambda^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)i}$ в операторе $\hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig}$ являются глобальными и не зависят от координат. Как было показано в главе 4 аналитическая локализация этих параметров приводит к калибровочным преобразованиям спина $s$, спина $s-1$ и дублета преобразований спина $s-\frac{1}{2}$, соответственно. Оператор (5.2) удовлетворяет специальному условию:

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}_{rig}]\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)} = 0, \tag{5.4}$$

которое является определяющим для инвариантности действия свободного гипермультиплета (1.42) относительно симметрий вида (5.1).

Рассмотрим алгебраическую структуру этих преобразований симметрии. Для простоты, ограничимся рассмотрением безмассового случая ($m.e.$, $\partial_5 q^{+a} = 0$). Коммутатор двух глобальных симметрий вида (5.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}[\delta^{(s)}_{\lambda_1}, \delta^{(s)}_{\lambda_2}]q^{+a} =& \Lambda_1^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)N}(\partial_N\Lambda_2^{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-2)M})\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\partial^{s-2}_{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-2)} \\ &- \Lambda_2^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)M}(\partial_M\Lambda_1^{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-2)N})\partial_N\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\partial^{s-2}_{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-2)}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Из полученного соотношения и структуры параметров $\Lambda^{\cdots}$ видно, что только глобальные преобразования с фермионными параметрами могут дать нетривиальный вклад в коммутатор. Таким образом, мы должны следить исключительно за спинорными параметрами $\lambda_1^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)i}$, $\lambda_2^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)i}$. Тогда в результате простого вычисления получаем:

$$[\delta^{(s)}_{\lambda_1}, \delta^{(s)}_{\lambda_2}]q^{+a} = 4i\lambda_1^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-2)j}\left(\lambda_2^{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-1)}\right)_j\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-2)}\partial^{s-2}_{\beta(s-2)\dot{\beta}(s-2)}\partial_{\alpha\dot{\beta}}q^{+a} + \text{c.c.} \tag{5.6}$$

Для простейшего случая $s = 2$, мы таким образом воспроизводим стандартный результат: коммутатор двух глобальных суперсимметрий дает преобразование трансляции. Более того, мы заключаем, что преобразования (5.1) являются замкнутыми только в случае $s = 2$, а для $s > 2$ с необходимостью генерируются преобразования нового типа (как и ожидается для алгебр высших спинов).

Действительно, рассмотрим более детально простейший нетривиальный случай $s = 3$:

$$[\delta^{(3)}_{\lambda_1}, \delta^{(3)}_{\lambda_2}] q^{+a} = 4i\lambda_1^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}j} \left(\lambda_2^{\gamma(\dot{\beta}\dot{\gamma})}\right)_j \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\gamma\dot{\gamma}}\partial_{\beta\dot{\beta}} q^{+a} + \text{c.c.} \tag{5.7}$$

Преобразование в правой части состоит из двух неприводимых частей:

1. Полностью симметричное:

$$[\delta^{(3)}_{\lambda_1}, \delta^{(3)}_{\lambda_2}]_{sym} q^{+a} = \lambda^{(\alpha\beta\gamma)(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\gamma\dot{\gamma}}\partial_{\beta\dot{\beta}} q^{+a}, \tag{5.8}$$

где:

$$\lambda^{(\alpha\beta\gamma)(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})} = 4i\lambda_1^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}j} \left(\lambda_2^{\gamma(\dot{\beta}\dot{\gamma})}\right)_j + \text{symm}(\alpha, \beta, \gamma) + \text{c.c.}\,; \tag{5.9}$$

2. Антисимметричное по $[\alpha\gamma]$, $[\dot{\alpha}\dot{\gamma}]$:

$$[\delta^{(3)}_{\lambda_1}, \delta^{(3)}_{\lambda_2}]_{antisym} q^{+a} = \lambda^{\beta\dot{\beta}} \partial_{\beta\dot{\beta}} \,\Box\, q^{+a}, \tag{5.10}$$

где:

$$\lambda^{\beta\dot{\beta}} = -i \left(\lambda_1\right)^{(\alpha\beta)j}_{\dot{\gamma}} \left(\lambda_2\right)^{(\dot{\beta}\dot{\gamma})}_{\alpha j} + \text{c.c.}. \tag{5.11}$$

Мы видим, что коммутатор двух преобразований суперсимметрий спина $\frac{3}{2}$ генерирует бозонное преобразование спина $s = 4$ с параметром $\lambda^{(\alpha\beta\gamma)(\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma})}$ м преобразование, подобное преобразованиям спина $s = 2$ с векторным параметром и дополнительным оператором $\Box$, действующим на $q^{+a}$. Это явно показывает, что алгебра глобальных симметрий не является замкнутой для $s \geq 3$[2].

В общем случае несложно установить, что коммутатор двух преобразований симметрии с параметрами спина $(s - \frac{3}{2})$ дает бозонное преобразование симметрии с параметром спина

[2]В этом состоит важное отличие рассматриваемой суперсимметрии высшего спина 3/2 (и её обобщения на произвольные высшие спины) от замкнутых 3/2 супералгебр (и их высших аналогов) которые изучались в работах [150, 151].

$2s-3$ $(s \geq 2)$:

$$\lambda^{(\alpha(s-1)\beta(s-2))(\dot\alpha(s-2)\dot\beta(s-1))} = 4i\lambda_1^{(\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)j}\left(\lambda_2^{\beta(s-2))\dot\beta(s-1))}\right)_j + \mathrm{symm}(\alpha(s-1),\beta(s-2)) + \text{c.c.}, \tag{5.12}$$

В приведенном выражении мы опустили дополнительные слагаемые (для $(s \geq 3)$) которые содержат степени оператора $\Box$, действующие на $q^{+a}$, и обобщают слагаемые, найденные для $s = 3$.

Как простое обобщение, можно рассмотреть и коммутатор преобразований фермионных симметрий различного спина:

$$\begin{aligned}
[\delta^{(s_1)}_{\lambda_1}, \delta^{(s_2)}_{\lambda_2}]q^{+a} =& 4i\left(\lambda_1^{\alpha(s_1-1)\dot\alpha(s_1-2)+}\lambda_2^{\beta(s_2-2)\dot\beta(s_2-1)-} - \lambda_1^{\alpha(s_1-1)\dot\alpha(s_1-2)-}\lambda_2^{\beta(s_2-2)\dot\beta(s_2-1)+}\right)\\
&\times \partial^{s_1-2}_{\alpha(s_1-2)\dot\alpha(s_1-2)}\partial^{s_2-2}_{\beta(s_2-2)\dot\beta(s_2-2)}\partial_{\alpha\dot\beta}\,(J)^{P(s_1)+P(s_2)}\,q^{+a}\\
=& 4i\,\lambda_1^{\alpha(s_1-1)\dot\alpha(s_1-2)j}\left(\lambda_2^{\beta(s_2-2)\dot\beta(s_2-1)}\right)_j\\
&\times \partial^{s_1-2}_{\alpha(s_1-2)\dot\alpha(s_1-2)}\partial^{s_2-2}_{\beta(s_2-2)\dot\beta(s_2-2)}\partial_{\alpha\dot\beta}\,(J)^{P(s_1+s_2)}\,q^{+a}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Коммутатор приводит к глобальным бозонным преобразованиям спина $s = s_1+s_2-2$ с постоянным параметром спина $s = s_1+s_2-3$ и некоторым дополнительным слагаемым, включающим степени оператора $\Box$, действующего на $q^{+a}$. Например, в простейшем нетривиальном случае $(s_1 = 2,\ s_2 = 3)$ скобка глобальный преобразований $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии спина $\frac{1}{2}$ с глобальной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией спина $\frac{3}{2}$ приводит к бозонным преобразованиям спина 3 с симметричным бесследовым тензором ранга 2 в качестве параметра.

Выше мы рассматривали глобальные преобразования свободного гипермультиплета. Если бы мы рассматривали калибровочные преобразования, тогда аналогичное рассмотрение привило бы к заключению, что в правых частях коммутационных соотношений появляются слагаемые, отвечающие растущему высшему спину. Это рассуждение приводит к заключению, что в гипотетической полной согласованной теории ($\mathcal{N} = 2$) высших спинов должны присутствовать все спины.

**Фермионная симметрии с параметром спина $\frac{3}{2}$**

Полезно выяснить, как описанные выше преобразования выглядят на уровне компонент. Для этого рассмотрим преобразования, отвечающие $s = 3$ глобальной симметрии. Напрямую можно убедиться, что в данном случае бозонная симметрия является хорошо известной

симметрией спина 3 для свободного действия комплексного скаляра [61]. Рассмотрим менее тривиальные глобальные фермионные симметрии:

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}_{rig} q^{+a} =& -4i\left(\lambda^{(\alpha\beta)(\dot\alpha-}\bar\theta^{+\dot\beta)} + \theta^{+(\alpha}\lambda^{\beta)(\dot\alpha\dot\beta)-}\right)\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta} Jq^{+a}\\ &+2i\left(\lambda^{(\alpha\beta)\dot\alpha-}\theta^{+}_{\beta} + \lambda^{\alpha(\dot\alpha\dot\beta)-}\bar\theta^{+}_{\dot\beta}\right)\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_5 Jq^{+a}\\ &-\left(\lambda^{(\alpha\beta)\dot\alpha+}\partial^{-}_{\beta} + \lambda^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha+}\partial^{-}_{\dot\alpha}\right)\partial_{\alpha\dot\beta} Jq^{+a}\,.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Эти преобразования характеризуются постоянным грассмановым параметром спина $\frac{3}{2}$ $\lambda^{(\alpha\beta)\dot\alpha i}$ и $\bar\lambda^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha i}$. Они реализуются на полях НМО-гипермультиплета как:

$$\begin{cases}\delta f^i = i\lambda^{(\alpha\beta)\dot\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\chi_\beta + i\bar\lambda^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\beta}\,,\\ \delta\bar f_i = -i\lambda^{(\alpha\beta)\dot\alpha}_i\partial_{\alpha\dot\alpha}\psi_\beta - i\bar\lambda^{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha}_i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\beta}\,,\\ \delta\psi_\alpha = -2\bar\lambda^{\beta(\dot\alpha\dot\beta)i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - 2im\lambda^{\beta\dot\beta i}_\alpha\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\,,\\ \delta\bar\psi_{\dot\alpha} = 2\lambda^{(\alpha\beta)\dot\beta i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta} f_i - 2im\bar\lambda^{\beta\dot\beta i}_{\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta} f_i\,,\\ \delta\chi_\alpha = -2\bar\lambda^{\beta(\dot\alpha\dot\beta)i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta} f_i - 2im\lambda^{\beta\dot\beta i}_\alpha\partial_{\beta\dot\beta} f_i\,,\\ \delta\bar\chi_{\dot\alpha} = 2\lambda^{(\alpha\beta)\dot\beta i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - 2im\bar\lambda^{\dot\beta\beta i}_{\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\,.\end{cases} \tag{5.15}$$

Полученные преобразования очень похожи на преобразования $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии (1.48) для свободного гипермультиплета, но включают дополнительную производную. Можно прямо проверить, что действие НМО-гипермультиплета (1.50) инвариантно относительно этих преобразований (с точностью до полной производной). Можно рассмотреть и их обобщения на высшие спины. Таким образом, мы видим, что среди глобальных симметрий свободного гипермультиплета (5.1) присутствует $\mathcal{N}=2$ "суперсимметрии высших спинов". Сохраняющиеся нётеровские токи, отвечающие преобразованиям с параметром спина $\frac{3}{2}$, даются выражениями:

$$\begin{aligned}J^{\alpha\dot\alpha}_{(\mu\nu)\dot\mu i} =& \frac{i}{2}\left[\partial_{(\mu\dot\mu}\chi_{\nu)}\partial^{\alpha\dot\alpha}\bar f_i - \partial^{\alpha\dot\alpha}\partial_{(\mu\dot\mu}\chi_{\nu)}\bar f_i\right] + \frac{i}{2}\left[\partial_{\mu\dot\mu}\psi_\beta\partial^{\alpha\dot\alpha} f_i - \partial^{\alpha\dot\alpha}\partial_{\mu\dot\mu}\psi_\beta f_i\right]\\ &-\delta^{\alpha}_{(\mu}\Big[\partial_{\nu)\dot\mu}\bar f_i\left(i\partial^{\dot\alpha\rho}\chi_\rho + m\bar\psi^{\dot\alpha}\right) + \partial_{\nu)\dot\mu} f_i\left(i\partial^{\dot\alpha\rho}\phi_\rho + m\bar\chi^{\dot\alpha}\right)\Big]\\ &+\delta^{\alpha}_{(\nu}\delta^{\dot\alpha}_{\mu}\Big[i f_i\left(\Box\psi_\mu + m^2\psi_\mu\right) + i\bar f_i\left(\Box\chi_\mu + m^2\chi_\mu\right)\Big],\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\partial_{\alpha\dot\alpha}J^{\alpha\dot\alpha}_{(\mu\nu)\dot\mu i} = 0\,. \tag{5.17}$$

Вторая и третья строчки в (5.16) зануляются на свободных уравнениях движения гипермультиплета (1.49) и могут быть исключены из тока.

Так же можно вычислить скобку Ли таких преобразований:

$$[\delta_{\lambda_1}, \delta_{\bar{\lambda}_2}] f^i = -4i\lambda_1^{(\alpha\beta)\dot{\alpha}j} \left(\bar{\lambda}_2^{(\dot{\rho}\dot{\sigma})\rho}\right)_j \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\beta\dot{\sigma}}\partial_{\rho\dot{\rho}} f^i. \tag{5.18}$$

Таким образом, в полном согласии с обсуждением $s = 3$ преобразований (5.7) вне массовой оболочки получаем, что коммутатор двух "суперсимметрий" спина $\frac{3}{2}$ приводит к преобразованиям спина $s = 4$ с параметром спина 3.

## 5.2 $\mathcal{N} = 2$ теорема Нётер

Этот раздел посвящен выводу токовых суперполей, отвечающих глобальным симметриям (5.1) действия свободного гипермультиплета.

Для начала мы приведем теорему Нетер в форме, которая допускает обобщение на гармоническое суперпространстве. Если некоторое преобразование с параметром $a^A$ ($A$ это индекс параметра преобразования) является глобальной симметрией, тогда вариация действия с координатно-зависимым параметром $a^A(x)$ имеет универсальную форму:

$$\delta S = \int d^4x\, \partial^\mu a^A(x) J^A_\mu(x)\,. \tag{5.19}$$

Если параметр является постоянным, $a^A(x) = const$, мы получаем $\delta S = 0$ в полном согласии с тем, что данное преобразование является симметрией действия. С другой стороны, на уравнениях движения любая вариация действия зануляется:

$$\delta S = 0\,, \tag{5.20}$$

и мы заключаем, что на уравнениях движения, как следствие произвольности параметров $a^A(x)$, ток в вариации (5.19) сохраняется:

$$\partial^\mu J^A_\mu(x) = 0\,. \tag{5.21}$$

Теперь мы применим эту общую процедуру к глобальным симметриям свободного гипермультиплета. Варьируя действие свободного гипермультиплета (1.42) относительно преобра-

зований (5.1) с произвольными аналитическими параметрами, мы получаем:

$$\begin{aligned}\delta S =& \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\Big[\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\Big(\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^{+a}\Big)\mathcal{D}^{++}q^+_a \\ &+ q^{+a}\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a\Big)\Big].\end{aligned} \tag{5.22}$$

Теперь мы переписываем второе слагаемое, пользуясь соотношением:

$$\begin{aligned}&\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a\Big) \\ &\qquad=\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\Big)\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a \\ &\qquad+\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\left[\mathcal{D}^{++},\partial_M\right]\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a \\ &\qquad+\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}\mathcal{D}^{++}q^+_a\,.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Чтобы получить сохраняющиеся токи, удобно использовать свободные уравнения движения гипермультиплета с целью исключения слагаемых, содержащих $\mathcal{D}^{++}q^+_a$, которые зануляются на уравнениях движения. Также полезно выделить в вариации (5.22) вклады с различной индексной структурой:

$$\delta S\Big|_{M=\alpha\dot\alpha}=\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\Big)\,q^{+a}\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}(J)^{P(s)}q^+_a\,, \tag{5.24}$$

$$\delta S\Big|_{M=5}=\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\Big)\,q^{+a}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\partial_5(J)^{P(s)}q^+_a\,, \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}\delta S\Big|_{M=\alpha}=\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,&\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+}\Big)\,q^{+a}\partial^-_\alpha\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a \\ &+\lambda^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)}q^{+a}[\mathcal{D}^{++},\partial^-_\alpha]\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a\,,\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\delta S\Big|_{M=\dot\alpha}=\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,&\Big(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)+}\Big)\,q^{+a}\partial^-_{\dot\alpha}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a \\ &+\lambda^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)+}q^{+a}[\mathcal{D}^{++},\partial^-_{\dot\alpha}]\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}(J)^{P(s)}q^+_a\,.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Отсюда немедленно следует, что если параметры являются глобальными, *m.e.*, удовлетворяют соотношениям (5.4), то все эти вариации зануляются в полном согласии с теоремой Нётер. Используя обозначения (4.53) для токовых суперполей, мы получаем набор законов сохранения на уравнениях движения свободного гипермультиплета $\mathcal{D}^{++}q^{+a}=0$:

$$\mathcal{D}^{++}J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}=0, \tag{5.28a}$$

$$\mathcal{D}^{++}J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}=0, \tag{5.28b}$$

$$\mathcal{D}^{++}J^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = -2i\theta^{+\rho}J^{++}_{(\alpha(s-2)\rho)\dot\alpha(s-1)} - 2i\bar\theta^{+}_{(\dot\alpha}J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}, \tag{5.28c}$$

$$\mathcal{D}^{++}J^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = 2i\bar\theta^{+\dot\rho}J^{++}_{\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)\dot\rho)} - 2i\theta^{+}_{(\alpha}J^{++}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}\,. \tag{5.28d}$$

В результате мы установили прямое соответствие между глобальными симметриями действия свободного гипермультиплета (5.1) и сохраняющимися токовыми суперполями, которые входят в кубические суперполевые вершины (4.52), построенные в главе 4. Использованная нами теорема Нётер может рассматриваться как обобщение суперпространственной теоремы Нётер [152] на гармоническое суперпространство.

Применяя результаты раздела 5.4.1 к полученным токовым суперполям, мы заключаем, что полученные законы сохранения на компонентном уровне отвечают сохранению тока спина $s$, дублета фермионных токов спина $s-\frac{1}{2}$ (и их комплексно сопряженных) и бозонного тока спина $s-1$.

Под действием суперсимметрии суперполевые токи преобразуются согласно уравнениям:

$$\delta_\epsilon J^{+}_{(\dot\alpha(s-2)\dot\beta)\alpha(s-2)} = -2i\epsilon^{-\beta}J^{++}_{(\alpha(s-2)\beta)\dot\alpha(s-1)} - 2i\bar\epsilon^{-}_{(\dot\beta}J^{++}_{\dot\alpha(s-2))\alpha(s-2)}\,, \tag{5.29a}$$

$$\delta_\epsilon J^{+}_{(\alpha(s-2)\beta)\dot\alpha(s-2)} = 2i\bar\epsilon^{-\dot\beta}J^{++}_{(\dot\alpha(s-2)\dot\beta)\alpha(s-2)} - 2i\epsilon^{-}_{(\beta}J^{++}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}\,, \tag{5.29b}$$

$$\delta_\epsilon J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0\,, \qquad \delta_\epsilon J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = 0\,. \tag{5.29c}$$

Форма уравнения (5.28c) предполагает, что можно определить модифицированное токовое суперполе

$$\mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = \frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)}\mathcal{D}^{-}_{\dot\alpha)}(J)^{P(s)}q^{+}_{a}, \tag{5.30}$$

где мы использовали ковариантные спинорные производные (1.36). Таким образом введенный суперполевой ток сохраняется стандартным образом (как следствие соотношения $[\mathcal{D}^{++},\mathcal{D}^{-}_{\hat\mu}] = \mathcal{D}^{+}_{\hat\mu}$ и аналитичности суперполя гипермультиплета),

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = 0\,. \tag{5.31}$$

Такое токовое суперполе инвариантно относительно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, но не является аналитическим. Полезно переписать суперток (5.30) как:

$$\mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = J^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} + 2i\theta^{-\mu}J^{++}_{(\alpha(s-2)\mu)\dot\alpha(s-1)} + 2i\bar\theta^{-}_{(\dot\alpha}J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}\,. \tag{5.32}$$

В полной аналогии с построением (5.30), можно также построить суперсимметрично-инвариантное и сохраняющиеся неаналитическое токовое суперполе:

$$\mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = \frac{1}{2} q^{+a} \partial^{s-2}_{(\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} D^{-}_{\alpha)}(J)^{P(s)} q^{+}_{a}. \tag{5.33}$$

В терминах аналитических токовых суперполей оно запишется как:

$$\mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = J^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} - 2i\bar\theta^{-\dot\mu} J^{++}_{\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)\dot\mu)} + 2i\theta^{-}_{(\alpha} J^{++}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)} \,. \tag{5.34}$$

Соответствующее условие сохранение имеет вид:

$$\mathcal{D}^{++} \mathcal{J}^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = 0 \,. \tag{5.35}$$

## 5.3 Компонентный состав суперполевых токов

В этом разделе мы проанализируем компонентный состав суперполевых токов для ряда характерных примеров.

### 5.3.1 Максвелловский суперполевой ток

Свободные уравнения движения гипермультиплета (1.45) приводят к уравнению сохранения для суперполевого тока $J^{++} = -i\tilde q^{+} q^{+}$[3]:

$$\mathcal{D}^{++} J^{++} = 0 \,. \tag{5.36}$$

Следовательно, компоненты токового суперполя $J^{++}$ образуют тензорный (или "линейный") $\mathcal{N} = 2$ супермультиплет [94, 136, 153, 154].

Действительно, в согласии с этой идентификацией, суперполе $J^{++}$ имеет структуру:

$$\begin{aligned} J^{++}(x,\theta^{+},u) =& j^{(ij)}(x) u^{+}_{i} u^{+}_{j} + \theta^{+\alpha} j^{i}_{\alpha}(x) u^{+}_{i} + \bar\theta^{+\dot\alpha} \bar j^{i}_{\dot\alpha}(x) u^{+}_{i} \\ &+ (\theta^{+})^2 j(x) + (\bar\theta^{+})^2 \bar j(x) \\ &+ 2i\theta^{+}\sigma^{n}\bar\theta^{+} \left[ j_n(x) + \partial_n j^{(ij)}(x) u^{+}_{i} u^{-}_{j} \right] \\ &- i(\bar\theta^{+})^2 \theta^{+\alpha} \partial^{\dot\alpha}_{\alpha} j^{i}_{\dot\alpha} u^{-}_{i} - i(\theta^{+})^2 \bar\theta^{+\dot\alpha} \partial^{\alpha}_{\dot\alpha} \bar j^{i}_{\alpha} u^{-}_{i} \\ &- (\theta^{+})^2 (\bar\theta^{+})^2 \,\Box\, j^{(ij)} u^{-}_{i} u^{-}_{j} \,, \qquad \partial^{n} j_n(x) = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

[3] На этот суперполевой ток можно смотреть как на вырожденный случай общего семейства токов (4.53).

Как обсуждается в разделе 5.4, такая структура является универсальной для всех суперполей токов. Можно напрямую выразить все компоненты в (5.37) в терминах полей НМО-гипермультиплета (1.46):

- Низшая компонента является композитным SU(2) триплетным оператором:

$$j^{(ij)}(x) = i\bar{f}^{(i}f^{j)}\,. \tag{5.38}$$

- Коэффициентами перед $\theta^+$ и $\bar{\theta}^+$ в токовом суперполе $J^{++}$ являются композитными фермионными операторами:

$$j^i_\alpha = i\left(\bar{f}^i\psi_\alpha + f^i\chi_\alpha\right), \qquad \bar{j}^i_{\dot\alpha} = i\left(f^i\bar{\psi}_{\dot\alpha} - \bar{f}^i\bar{\chi}_{\dot\alpha}\right). \tag{5.39}$$

- Коэффициенты перед $(\theta^+)^2$ и $\left(\bar{\theta}^+\right)^2$ выражаются как:

$$j(x) = -imf^i\bar{f}_i - \frac{i}{2}\psi^\beta\chi_\beta\,, \qquad \bar{j}(x) = imf^i\bar{f}_i - \frac{i}{2}\bar{\chi}^{\dot\alpha}\bar{\psi}_{\dot\alpha}\,. \tag{5.40}$$

- $SU(2)$-синглетной компонентой перед мономом $\theta^+\sigma^n\bar{\theta}^+$ является U(1) ток

$$j^{el}_m = \frac{i}{2}\left(f^i\partial_m\bar{f}_i - \partial_m f^i\bar{f}_i\right) + \frac{1}{2}\psi\sigma_m\bar{\psi} - \frac{1}{2}\chi\sigma_m\bar{\chi}\,. \tag{5.41}$$

  Можно проверить, что данный ток сохраняется на уравнениях движения гипермультиплета (1.49),

$$\partial^m j^{el}_m = 0\,, \tag{5.42}$$

  в соответствии с условием трансверсальности, задаваемым уравнением (5.37).

  SU(2) триплетная часть коэффициента перед $\theta^+\sigma^n\bar{\theta}^+$, в согласии с общей структурой (5.37), оказывается полной производной от SU(2) композитного оператора (5.38):

$$j^{(ij)}_n = i\left(\bar{f}^{(i}\partial_n f^{j)} + f^{(i}\partial_n\bar{f}^{j)}\right) = i\partial_n\left(\bar{f}^{(i}f^{j)}\right) = \partial_n j^{(ij)}\,; \tag{5.43}$$

- Все старшие компоненты в токовом суперполе также выражаются как производные низших компонент, в полном согласии с общем разложении (5.37).

Также можно непосредственно проверить, что приведенные выше композитные операторы преобразуются друг через друга под действием преобразований суперсимметрии (1.48).

В частности,

$$\delta^*_\epsilon j^{(ij)}(x) = i\delta^*_\epsilon \left(\bar f^{(i} f^{j)}\right) = -i\epsilon^{\mu(i} \underbrace{\left(\bar f^{j)}\psi_\mu + f^{j)}\kappa_\mu\right)}_{-ij^j_\mu} + \dots . \tag{5.44}$$

Таким образом, токовое суперполе $J^{++} = -\frac{1}{2}q^{+a}Jq^+_a = -i\tilde q^+ q^+$ содержит сохраняющийся U(1) ток и его $\mathcal{N}=2$ суперсимметричные партнеры.

### 5.3.2 $\mathcal{N}=2$ суперток свободного гипермультиплета

Первый нетривиальный пример токового суперполя – это суперток, отвечающий случаю спина **2**. Хорошо известно, что мультиплет супергравитации (спин **2**) взаимодействует с супертоком [155]. На компонентном уровне $\mathcal{N}=2$ мультиплет супертоков был впервые введен Сониусом [156]. Дальнейшие обсуждения и ссылки можно найти в работах [157–160]. В этом разделе мы исследуем суперток в $\mathcal{N}=2$ гармоническом суперпространстве и детально исследуем его компонентную структуру.

В случае $s=2$ суперполевые токи (4.53) принимают вид:

$$\begin{aligned} J^{++}_{\alpha\dot\alpha} &= -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}q^+_a\,, \quad J^{++} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_5 q^+_a\,,\\ J^+_\alpha &= -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^-_\alpha q^+_a\,, \quad J^+_{\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^-_{\dot\alpha} q^+_a\,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Отметим, что все эти токовые суперполя могут быть получены из соответствующей проекции аналитического суперполя $\mathcal{J}$ введенного (в конформном случае) С. Кузенко и С. Тейзеном в работе [158]:

$$\mathcal{J} := -\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{J} = 0. \tag{5.46}$$

Действительно, используя определение ковариантных производных (1.36) и аналитичность $q^{+a}$, получаем

$$\mathcal{J}^+_\alpha = D^+_\alpha \mathcal{J}\,, \qquad \mathcal{J}^+_{\dot\alpha} = -\bar D^+_{\dot\alpha}\mathcal{J}\,, \tag{5.47}$$

$$J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{i}{2}D^+_\alpha \bar D^+_{\dot\alpha}\mathcal{J}\,, \qquad J^{++} = \frac{i}{4}(D^+)^2\mathcal{J} = -\frac{i}{4}(\bar D^+)^2\mathcal{J}\,. \tag{5.48}$$

Геометрический смысл супертока $\mathcal{J}$ становится ясным в суперконформной теории, где он возникает как ток гипермультиплета, ассоциированный с дополнительным аналитическим потенциалом $h^{+4}$ [96]. Мы обсудим эту связь в разделе (6.9).

Теперь мы переходим к компонентному анализу токовых суперполей, определенных в этом разделе.

**1.** Суперток $J^{++}_{\alpha\dot\alpha}$ имеет вид:

$$J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}q^+_a = -\frac{1}{2}\tilde q^+\partial_{\alpha\dot\alpha}q^+ + \frac{1}{2}q^+\partial_{\alpha\dot\alpha}\tilde q^+ \,. \tag{5.49}$$

В этом случае, помимо общего условия сохранения $\mathcal{D}^{++}J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = 0$, есть еще дополнительное условие сохранения:

$$\partial^{\alpha\dot\alpha}J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}\partial^{\alpha\dot\alpha}\tilde q^+\partial_{\alpha\dot\alpha}q^+ + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\dot\alpha}q^+\partial_{\alpha\dot\alpha}\tilde q^+ - \tilde q^+\,\Box\, q^+ + q^+\,\Box\,\tilde q^+ = 0\,, \tag{5.50}$$

где мы использовали суперполевое уравнение Клейна-Гордона (1.54) для суперполя гипермультиплета. Это свойство показывает, что суперток $J^{++}_{\alpha\dot\alpha}$ выделен среди токовых суперполей. Действительно, все компоненты суперполя $J^{++}_{\alpha\dot\alpha}$ являются сохраняющимися токами. Мы увидим, что в компонентах это суперполе содержит сохраняющиеся фермионные токи, которые по теореме Нетер отвечают $\mathcal{N} = 2$ глобальной симметрии свободного действия гипермультиплета (1.42). В связи с этим, мы будем использовать термин "*супертоκ*" для токового суперполя $J^{++}_{\alpha\dot\alpha}$. Обсуждение общей компонентной структуры $\mathcal{N} = 2$ супертока дано в разделе 5.4.2.

Суперток (5.49) является действительным относительно тильда-сопряжения:

$$\widetilde{J^{++}_{\alpha\dot\alpha}} = J^{++}_{\alpha\dot\alpha}\,, \tag{5.51}$$

как следствие соотношения $\widetilde{(\tilde q^+)} = -q^+$. Используя $\theta$-разложение НМО-гипермультиплета, можно явно найти компонентную структуру $J^{++}_{\alpha\dot\alpha}$ в полном согласии с общим $\theta$ разложением, приведенным в вспомогательном разделе 5.4 (формула (5.122)):

$$\begin{aligned} J^{++}_{\alpha\dot\alpha} =& R^{(ij)}_{\alpha\dot\alpha}u^+_iu^+_j + \theta^{+\beta}S^i_{\alpha\dot\alpha\beta}u^+_i + \bar\theta^{+\dot\beta}\bar S^i_{\alpha\dot\alpha\dot\beta}u^+_i + (\theta^+)^2R_{\alpha\dot\alpha} + (\bar\theta^+)^2\bar R_{\alpha\dot\alpha} \\ &+ 2i\theta^+\sigma^n\bar\theta^+\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\Big[T_{mn} + \partial_nR^{(ij)}_mu^+_iu^-_j\Big] + \dots\,. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Для свободного гипермультиплета мы получаем представление для компонентных токов в терминах полей гипермультиплета:

- Ток для SU(2) $R$-симметрии:

$$R^{(ij)}_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{2}\left(\bar f^{(i}\partial_{\alpha\dot\alpha}f^{j)} - f^{(i}\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f^{j)}\right), \tag{5.53}$$

$$\partial^{\alpha\dot\alpha} R^{(ij)}_{\alpha\dot\alpha} = 0\,; \tag{5.54}$$

- Фермионный ток для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии:

$$S^{\alpha\dot\alpha}_{i\mu} = \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\dot\alpha}\psi_\mu \bar f_i - \psi_\mu \partial^{\alpha\dot\alpha}\bar f_i\right) - \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha\dot\alpha}\chi_\mu f_i - \chi_\mu \partial^{\alpha\dot\alpha} f_i\right), \tag{5.55}$$

$$\partial_{\alpha\dot\alpha} S^{\alpha\dot\alpha}_{i\mu} = 0\,; \tag{5.56}$$

  Этот ток совпадает с нетеровским $\mathcal{N} = 2$ фермионным током (1.51).

- Сохраняющийся ток

$$R_{\alpha\dot\alpha} = \frac{1}{4}\left(\psi^\gamma \partial_{\alpha\dot\alpha}\chi_\gamma - \chi^\gamma \partial_{\alpha\dot\alpha}\psi_\gamma\right), \qquad \partial^{\alpha\dot\alpha} R_{\alpha\dot\alpha} = 0\,, \tag{5.57}$$

  соответствует следующей глобальной симметрии действия гипермультиплета (1.50):

$$\delta\psi_{\dot\alpha} = \lambda \partial_{\dot\alpha\beta}\chi^\beta\,, \qquad \delta\bar\chi_{\dot\alpha} = -\lambda\partial_{\dot\alpha\beta}\psi^\beta\,. \tag{5.58}$$

  На массовой поверхности и после переопределения параметра $\lambda$ (для $m \neq 0$), эти преобразования сводятся к U(1) R-симметрии. Отметим, что компонентное действие физических компонент гипермультиплета (1.50) инвариантно относительно (5.58), как при $m = 0$, так и при $m \neq 0$.

- Тензор энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T_{nm} =& \frac{1}{2}\partial_{(n} f^i \partial_{m)}\bar f_i - \frac{1}{4}\left(\bar f_i \partial_n\partial_m f^i + f^i\partial_m\partial_n \bar f_i\right) \\ & - \frac{i}{8}\sigma_n^{\dot\beta\beta}\left(\chi_\beta\partial_m\bar\chi_{\dot\beta} + \bar\chi_{\dot\beta}\partial_m\chi_\beta + \psi_\beta\partial_m\bar\psi_{\dot\beta} + \bar\psi_{\dot\beta}\partial_m\psi_\beta\right). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Отметим, что $T_{nm}$ не зависит от массы гипермультиплета. На уравнениях движения гипермультиплета (1.49) этот тензор сохраняется стандартным образом:

$$\partial^n T_{nm} = 0\,. \tag{5.60}$$

Бозонная часть выражения (5.59), $T^{(bos)}_{(nm)}$, отличается от аналогичной части канонического тензора энергии импульса $\mathcal{T}^{(bos)}_{(nm)}$:

$$\mathcal{T}^{(bos)}_{(nm)} = \partial_{(n} f^i \partial_{m)}\bar f_i - \frac{1}{2}\eta_{nm}\left(\partial^k \bar f^i \partial_k f_i + m^2 \bar f^i f_i\right). \tag{5.61}$$

Канонический тензор энергии-импульса $\mathcal{T}^{(bos)}_{mn}$ также не зависит от массы. Рассмотрим разницу между этими двумя выражениями:

$$\begin{aligned} T^{(bos)}_{(nm)} - \mathcal{T}^{(bos)}_{(nm)} =& \frac{1}{2}\eta_{nm}\left(\partial^k \bar{f}^i \partial_k f_i + m^2 \bar{f}^i f_i\right) \\ & - \frac{1}{4}\left(\bar{f}_i \partial_n \partial_m f^i + f^i \partial_m \partial_n \bar{f}_i\right) - \frac{1}{2}\partial_{(n} f^i \partial_{m)} \bar{f}_i \,. \end{aligned} \tag{5.62}$$

На уравнениях движения эта разность может быть переписана как:

$$T^{(bos)}_{(nm)} - \mathcal{T}^{(bos)}_{(nm)} = \frac{1}{4}\left(\eta_{nm}\,\Box - \partial_n \partial_m\right)\left(\bar{f}^i f_i\right). \tag{5.63}$$

Таким образом, $T_{nm}$ отличается от канонического тензора энергии-импульса на тривиально сохраняющийся "ток".

Симметричная часть фермионного слагаемого в тензоре (5.59) совпадает с каноническим фермионным тензором энергии импульса. Антисимметричная часть имеет вид:

$$\mathcal{T}^{(ferm)}_{[nm]} = -\frac{i}{4}\sigma^{\dot\beta\beta}_{[n}\sigma^{\rho\dot\rho}_{m]}\left(\chi_\beta \partial_{\rho\dot\rho}\bar\chi_{\dot\beta} + \bar\chi_{\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}\chi_\beta + \psi_\beta \partial_{\rho\dot\rho}\bar\psi_{\dot\beta} + \bar\psi_{\dot\beta}\partial_{\rho\dot\rho}\psi_\beta\right). \tag{5.64}$$

Используя соотношение:

$$\sigma^{\dot\beta\beta}_{[n}\sigma^{\rho\dot\rho}_{m]} \sim \sigma^{(\beta\rho)}_{[nm]}\epsilon^{\dot\beta\dot\rho} + \tilde\sigma^{(\dot\beta\dot\rho)}_{[nm]}\epsilon^{\beta\rho}, \tag{5.65}$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(ferm)}_{[nm]} &\sim \sigma^{(\beta\rho)}_{[nm]}\left(\bar\chi^{\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\chi_\beta + \bar\psi^{\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\psi_\beta\right) + \tilde\sigma^{(\dot\beta\dot\rho)}_{[nm]}\left(\chi^\rho\partial_{\rho\dot\rho}\bar\chi_{\dot\beta} + \psi^\rho\partial_{\rho\dot\rho}\bar\psi_{\dot\beta}\right) \\ &= \sigma^{(\beta\rho)}_{[nm]}\partial_{\rho\dot\rho}\left(\bar\chi^{\dot\rho}\chi_\beta + \bar\psi^{\dot\rho}\psi_\beta\right) + \tilde\sigma^{(\dot\beta\dot\rho)}_{[nm]}\partial_{\rho\dot\rho}\left(\chi^\rho\bar\chi_{\dot\beta} + \psi^\rho\bar\psi_{\dot\beta}\right). \end{aligned} \tag{5.66}$$

Далее, используя соотношения:

$$(\tilde\sigma^{ns})^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta}\sigma^m_{\alpha\dot\alpha} = -i(\eta^{ms}\sigma^n - \eta^{mn}\sigma^s)_{\alpha\dot\beta} + \epsilon^{nsmt}(\sigma_t)_{\alpha\dot\beta}\,, \tag{5.67a}$$

$$(\sigma^{ns})_\alpha^{\ \beta}\sigma^m_{\beta\dot\beta} = i(\eta^{sm}\sigma^n - \eta^{mn}\sigma^s)_{\alpha\dot\beta} + \epsilon^{nsmt}(\sigma_t)_{\alpha\dot\beta}, \tag{5.67b}$$

приходим к представлению:

$$T^{(ferm)}_{[mn]} \sim \epsilon_{nmkt}\partial^k(\sigma^t)^\beta_{\dot\rho}\left(\bar\chi^{\dot\rho}\chi_\beta + \bar\psi^{\dot\rho}\psi_\beta\right). \tag{5.68}$$

Таким образом, антисимметричная часть фермионной части (5.59) сохраняется тождественно, без использования уравнений движения.

**2.** Токовое суперполе $J^{++}$ не исчезает только при $m \neq 0$ ($\partial_5 q^+ \neq 0$):

$$J^{++} = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial_5 q^+_a = -\frac{m}{2} q^{+a} J q^+_a = im\tilde{q}^+ q^+ \,. \tag{5.69}$$

С точностью до множителя $(-m)$ оно совпадает с токовым суперполем спина **1**. Соответствующий сохраняющийся ток (5.41) соответствует $\mathrm{U}(1)$ симметрии Паули-Гюрси (центральному заряду) свободного гипермультиплета.

**3.** Фермионное токовое суперполе $J^+_\alpha$ имеет вид:

$$J^+_\alpha = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial^-_\alpha q^+_a = -\frac{1}{2} \tilde{q}^+ \partial^-_\alpha q^+ + \frac{1}{2} q^+ \partial^-_\alpha \tilde{q}^+ \,. \tag{5.70}$$

Поскольку оно удовлетворяет модифицированному закону сохранения,

$$\mathcal{D}^{++} J^+_\alpha = 2i\bar{\theta}^{+\dot{\rho}} J^{++}_{\alpha\dot{\rho}} - 2i\theta^+_\alpha J^{++} \,, \tag{5.71}$$

то, согласно общему обсуждению раздела 5.4.1, сохраняющийся фермионный ток, определяемый уравнением (5.71), задается комбинацией:

$$\mathrm{j}^i_{\rho\dot{\rho}\alpha} := j^i_{\rho\dot{\rho}\alpha} - S^i_{\alpha\dot{\rho}\rho} + m\epsilon_{\rho\alpha}\bar{j}^i_{\dot{\rho}} \,. \tag{5.72}$$

Здесь $j^i_{\rho\dot{\rho}\sigma}$ является компонентой $J^+_\alpha$:

$$J^+_\alpha = \cdots + 2i\theta^{+\rho}\bar{\theta}^{+\dot{\rho}} j^i_{\rho\dot{\rho}\alpha} u^-_i + \ldots \,, \tag{5.73}$$

и выражается в терминах компонент НМО-гипермультиплета (определенных уравнениями (1.46) и (1.47)) как:

$$j^i_{\rho\dot{\rho}\alpha} = \psi_{(\alpha}\partial_{\rho)\dot{\rho}}\bar{f}^i - \chi_{(\alpha}\partial_{\rho)\dot{\rho}} f^i - \frac{1}{2} im\epsilon_{\rho\alpha}\left(\bar{\chi}_{\dot{\rho}}\bar{f}^i - \bar{\psi}_{\dot{\rho}} f^i\right). \tag{5.74}$$

Ток $S^i_{\alpha\dot{\rho}\rho}$ был определен в (5.55) а $\bar{j}^i_{\dot{\rho}}$ определен в (5.39). Закон сохранения имеет вид $\partial^{\alpha\dot{\rho}} S^i_{\alpha\dot{\rho}\rho} = 0$ (уравнение (5.56)).

Итоговое выражение для полного фермионного тока $\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = \quad & \frac{1}{2}\left(\psi_\alpha\partial_{\rho\dot\rho}\bar f^i + 2\psi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}\bar f^i - \partial_{\alpha\dot\rho}\psi_\rho\bar f^i\right)\\ & -\frac{1}{2}\left(\chi_\alpha\partial_{\rho\dot\rho}f^i + 2\chi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}f^i - \partial_{\alpha\dot\rho}\chi_\rho f^i\right)\\ & -\frac{3}{2}im\epsilon_{\rho\alpha}\left(\bar\chi_{\dot\rho}\bar f^i - \bar\psi_{\dot\rho}f^i\right).\end{aligned} \tag{5.75}$$

Используя свободные уравнения движения гипермультиплета (1.49), можно проверить, что ток сохраняется, $\partial^{\rho\dot\rho}\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = 0$, в полном согласии с общим результатом (5.118).

Токи, построенные таким образом, не совпадают с фермионными токами $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, определенными в уравнении (1.51). Перепишем ток (5.75), используя уравнения движения для физических полей и тождества:

$$\partial_{\rho\dot\rho}\psi_\alpha - \partial_{\alpha\dot\rho}\psi_\rho = \epsilon_{\rho\alpha}\partial^\sigma_{\dot\rho}\psi_\sigma = im\epsilon_{\rho\alpha}\bar\chi_{\dot\rho}\,, \tag{5.76a}$$

$$\partial_{\rho\dot\rho}\chi_\alpha - \partial_{\alpha\dot\rho}\chi_\rho = \epsilon_{\rho\alpha}\partial^\sigma_{\dot\rho}\chi_\sigma = im\epsilon_{\rho\alpha}\bar\psi_{\dot\rho} \tag{5.76b}$$

Мы получаем

$$\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = -2S^i_{\rho\dot\rho\alpha} + \partial_{\alpha\dot\rho}\left(\psi_\rho\bar f^i - \chi_\rho f^i\right) - \frac{1}{2}\partial_{\rho\dot\rho}\left(\psi_\alpha\bar f^i - \chi_\alpha f^i\right). \tag{5.77}$$

Таким образом, ток(5.75) отличается от нетеровского тока $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии на выражение (последние два слагаемых), которые сохраняются автоматически, без использования уравнений движения.

Есть и другой способ переписать сохраняющий ток для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии свободного гипермультиплета:

$$\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = \psi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}\bar f^i - \chi_\rho\partial_{\alpha\dot\rho}f^i - im\epsilon_{\rho\alpha}\left(\bar\chi_{\dot\rho}\bar f^i - \bar\psi_{\dot\rho}f^i\right), \qquad \partial^{\rho\dot\rho}\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = 0. \tag{5.78}$$

Этот ток связан с токами $S^i_{\rho\dot\rho\alpha}$ и $\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha}$ как:

$$\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho\alpha} = \mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho\alpha} + S^i_{\rho\dot\rho\alpha}. \tag{5.79}$$

Таким образом, все рассмотренные токи спина $\frac{3}{2}$ совпадают друг с другом с точностью до численных факторов и тривиально сохраняющихся слагаемых. Отметим также, что именно ток $Y^i_{\rho\dot\rho\alpha} = -\frac{1}{4}\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho\alpha}$ появляется в кубической вершине $(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0)$ в разделе 4.4.

### 5.3.3 $\mathcal{N}=2$ суперполевой ток спина 3

Теория спина **3** является первым нетривиальным примером теории высших спинов. Суперполевые токи (4.53) в данном случае имеют вид:

$$J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}Jq^+_a, \tag{5.80a}$$

$$J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}J\partial_5 q^+_a, \tag{5.80b}$$

$$J^{+}_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}Jq^+_a, \tag{5.80c}$$

$$J^{+}_{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha(\dot\alpha}\partial^-_{\dot\beta)}Jq^+_a. \tag{5.80d}$$

Так же, как и в случае $\mathbf{s}=2$, эти токовые суперполя можно представить как компонентны единого токового суперполя, в данном случае векторного,

$$\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha} := -\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}\partial_{\alpha\dot\alpha}Jq^+_a. \tag{5.81}$$

На уравнениях движения гипермультиплета оно удовлетворяет закону сохранения:

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}Jq^+_a. \tag{5.82}$$

Из (5.81) получаем

$$\mathcal{J}^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = D^+_{(\alpha}\mathcal{J}_{\beta)\dot\alpha}\,, \qquad \mathcal{J}^+_{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha} = -\bar D^+_{(\dot\alpha}\mathcal{J}_{\dot\beta)\alpha}\,, \tag{5.83}$$

$$J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -\frac{i}{2}D^+_{(\alpha}\bar D^+_{\dot\alpha}\mathcal{J}_{\beta)\dot\beta)}\,, \qquad J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = \frac{i}{4}(D^+)^2\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{i}{4}(\bar D^+)^2\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}\,, \tag{5.84}$$

и $\mathcal{J}^+$ токи имеют структуру

$$\mathcal{J}^+_{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha} = J^+_{(\dot\alpha\dot\beta)\alpha} + 2i\theta^{-\mu}J^{++}_{(\alpha\mu)(\dot\alpha\dot\beta)} + 2i\bar\theta^-_{(\dot\alpha}J^{++}_{\alpha\dot\beta)}, \tag{5.85a}$$

$$\mathcal{J}^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = J^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} - 2i\bar\theta^{-\dot\mu}J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\mu)} + 2i\theta^-_{(\alpha}J^{++}_{\beta)\dot\alpha}. \tag{5.85b}$$

Поскольку все токовые суперполя получены действием аналитических спинорных производных на $\mathcal{J}^{\alpha\dot\alpha}$, и правая часть гармонических связей (5.82) является аналитической, эти суперполя автоматически удовлетворяют стандартным гармоническим законам сохранения, $\mathcal{D}^{++}J^{++}_{\alpha\dot\alpha}=0$, и т.д.[4]

[4]Эта конструкция допускает обобщение на случай произвольного $\mathcal{N}=2$ спина $\mathbf{s}$, с соответствующим неаналитическим "родительским" токовым суперполем.

Компонентная структура токовых суперполей спина **3** может быть проанализирована в полной аналогии со случаем спина **2**.

**1.** Аналитическое токовое суперполе спина **3**, определенное в (5.80a), имеет вид:

$$J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta} J q^+_a . \tag{5.86}$$

Чтобы выяснить его компонентную структуру, удобно его переписать в терминах $q^+$ и $\tilde q^+$:

$$J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = i\frac{1}{2}\left(\tilde q^+ \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta} q^+ + q^+ \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\tilde q^+\right). \tag{5.87}$$

Дивергенция суперполя (5.86) не зануляется,

$$\partial^{\alpha\dot\alpha} J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} \neq 0 . \tag{5.88}$$

В этом отличие от случая спина **2**: токовое суперполе спина **3** $J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ не подчиняется дополнительным условиям сохранения кроме $\mathcal{D}^{++} J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = 0$. Для нас будут важны слагаемые его $\theta$-разложения:

$$J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \cdots + \theta^{+\gamma} S^i_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\gamma} u^+_i + \bar\theta^{+\dot\gamma} S^i_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\dot\gamma} u^+_i + 2i\theta^+\sigma^n\bar\theta^+ j^n_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + \dots . \tag{5.89}$$

Приведем явное выражение нужных для нас компонент через поля НМО-гипермультиплета, используя выражение (5.87).

- Спинорная компонента (5.89) имеет вид:

$$\begin{aligned} S^i_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)\rho} = &-\frac{i}{2}\left(\kappa_\rho \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta} f^i + \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\kappa_\rho f^i\right) \\ &-\frac{i}{2}\left(\psi_\rho \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\bar f^i + \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\psi_\rho \bar f^i\right). \end{aligned} \tag{5.90}$$

  В отличие от случая спина **2**, эта компонента не удовлетворяет никаким законам сохранения. Однако, это не означает, что на компонентном уровне поля спина $\frac{5}{2}$ взаимодействуют с несохраняющимися токами. Сохраняющийся ток спина $\frac{5}{2}$ состоит из нескольких составляющих и будет представлен ниже (уравнение (5.96)).

- Сохраняющаяся компонента спина 3 в токовом суперполе (5.86) имеет вид:

$$j^n_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -\,i\frac{1}{4}\Big(f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\partial^n\bar f_i - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\partial^n f^i\bar f_i \\ - \partial^n f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}\bar f_i + \partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta}f^i\partial^n\bar f_i\Big). \tag{5.91}$$

  Этот бозонный ток в точности совпадает с током спина 3, построенным из скалярных полей [61].

**2.** Токовое суперполе спина 2

$$J^{++}_{\alpha\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}J\partial_5 q^+_a = -m\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}q^+_a \tag{5.92}$$

совпадает (с точностью до множителя $m$) с супертоком, отвечающим $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии свободного гипермультиплета (5.49), введенным в разделе 5.3.2. Соответствующий сохраняющийся ток спина 2 в бозонном секторе имеет вид:

$$j_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = \frac{m}{4}\Big(\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}f^i\bar f_i - \partial_{\alpha\dot\alpha}f^i\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i - \partial_{\beta\dot\beta}f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar f_i + f^i\partial_{\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta\dot\beta}\bar f_i\Big). \tag{5.93}$$

**3.** Фермионное токовое суперполе спина **3** имеет вид:

$$J^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}Jq^+_a - \frac{1}{2}\xi\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}\left(q^{+a}Jq^+_a\right) \\ = \frac{i}{2}\tilde q^+\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}q^+ + \frac{i}{2}q^+\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}\tilde q^+ - i\xi\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial^-_{\beta)}\left(\tilde q^+q^+\right). \tag{5.94}$$

Как в случае спина **2**, оно удовлетворяет модифицированному условию сохранения (5.28d):

$$\mathcal{D}^{++}J^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = 2i\bar\theta^{+\dot\rho}J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\rho)} - 2i\theta^+_{(\alpha}J^{++}_{\beta)\dot\alpha}\,. \tag{5.95}$$

Соответствующий сохраняющийся фермионный ток спина $\frac{5}{2}$, согласно общему рассмотрению раздела 5.4.1, строится как комбинация различных спинорных компонент:

$$\mathfrak{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} := j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} - S^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} + m\epsilon_{\rho(\alpha}S^i_{\beta)\dot\rho\dot\alpha}\,. \tag{5.96}$$

Здесь $j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha}$ возникает как компонента суперполя $J^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha}$,

$$J^+_{(\alpha\beta)\dot\alpha} = \dots + 2i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} + \dots\,. \tag{5.97}$$

Используя суперполе НМО-гипермультиплета (1.46) и определение (5.94), можно выразить её в терминах физических полей свободного гипермультиплета:

$$j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = \frac{i}{2}\left(\chi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}f^i - \partial_{\rho\dot\rho}f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\chi_{\beta)}\right) + \frac{i}{2}\left(\psi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\bar f^i - \partial_{\rho\dot\rho}\bar f^i\partial_{(\alpha\dot\alpha}\psi_{\beta)}\right). \tag{5.98}$$

Слагаемое $S^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha}$ в (5.96) является фермионной компонентой (5.90) токового суперполя спина 3 $J^{++}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ (5.89). Последняя компонента $S^i_{\beta\dot\rho\dot\alpha}$ в (5.96) является $\mathcal{N}=2$ суперсимметричным током, определенным в (5.55).

Полный сохраняющийся фермионный ток (5.96) (для простоты мы рассматриваем случай $m=0$) задается выражением:

$$\begin{aligned}\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = \quad & \frac{i}{2}\left(\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\chi_\rho f^i + 2\chi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}f^i - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\chi_{\beta)}\partial_{\rho\dot\rho}f^i\right)\\ & + \frac{i}{2}\left(\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\psi_\rho \bar f^i + 2\psi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\bar f^i - \partial_{(\alpha\dot\alpha}\psi_{\beta)}\partial_{\rho\dot\rho}\bar f^i\right).\end{aligned} \tag{5.99}$$

Этот ток отличается от нетеровского тока спина $\frac{5}{2}$, полученного в (5.16). Покажем, что эти токи отличаются только на тривиально сохраняющиеся слагаемые.

Используя свободные уравнения движения

$$\partial_{\rho\dot\rho}\chi_\beta - \partial_{\beta\dot\rho}\chi_\rho = 0, \qquad \partial_{\rho\dot\rho}\psi_\beta - \partial_{\beta\dot\rho}\psi_\rho = 0, \tag{5.100}$$

можно привести ток $\mathrm{j}$ к виду:

$$\begin{aligned}\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = & -2j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha}\\ & + \frac{i}{2}\Big[2\partial_{(\beta\dot\rho}\left(\chi_\rho\partial_{\alpha)\dot\alpha}f^i + \psi_\rho\partial_{\alpha)\dot\alpha}\bar f^i\right) - \partial_{\rho\dot\rho}\left(\chi_{(\beta}\partial_{\alpha)\dot\alpha}f^i + \psi_{(\beta}\partial_{\alpha)\dot\alpha}\bar f^i\right)\Big]\\ & + \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot\alpha}\left(\chi_\beta\partial_{\rho\dot\rho}f^i - \partial_{\rho\dot\rho}\chi_\beta f^i\right) + \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot\alpha}\left(\psi_\beta\partial_{\rho\dot\rho}\bar f^i - \partial_{\rho\dot\rho}\psi_\beta\bar f^i\right).\end{aligned} \tag{5.101}$$

Вторая строчка в этом выражении тривиально сохраняется В третью строчку входят независимо сохраняющиеся $\psi-$ и $\chi-$ части $\mathcal{N}=2$ суперсимметричного фермионного тока (5.55). Поскольку они также являются полными производными, они не дают вклада в сохраняющиеся заряды.

В результате мы получаем, что с точностью до численного фактора, тривиально сохраняющегося тока и производной токов $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, ток $\mathrm{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha}$ совпадает с каноническим нетеровским током спина $\frac{5}{2}$.

Сохраняющийся ток спина $\frac{5}{2}$ для гипемультиплета также может быть представлен в фор-

ме:

$$\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} := i\chi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}f^i + i\psi_\rho\partial_{(\alpha\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\rho}\bar f^i, \qquad \partial^{\rho\dot\rho}\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = 0. \tag{5.102}$$

Различные токи спина $\frac{5}{2}$, использованные в этом разделе, связаны соотношением:

$$\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = \mathfrak{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} + j^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} \tag{5.103}$$

В результате мы заключаем, что как и в случае токов спина $\frac{3}{2}$, соответствующих глобальной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, различные токи спина $\frac{5}{2}$ совпадают с точностью до численных коэффициентов, тривиально сохраняющихся вкладов и производных от токов низших спинов. В разделе 4.4 мы видели, что именно токи $Y^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\mathcal{S}^i_{\rho\dot\rho(\alpha\beta)\dot\alpha}$ входят в кубические вершины $(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0)$.

### 5.3.4 $\mathcal{N}=2$ суперполевой ток спина s

Вычисления для произвольного спина могут быть проведены полностью по аналогии рассмотрением в предыдущих разделах. В качестве примера, мы рассмотрим, как бозонные токи спина s получаются из соответствующих токовых суперполей.

В случае *четных спинов* токовое суперполе $J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ имеет вид:

$$J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}q^+_a\,. \tag{5.104}$$

Соответствующие бозонные сохраняющиеся токи спина $s$ в бозонном секторе имеют вид:

$$\begin{aligned} j^n_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = &-\frac{1}{4}\partial^n\bar f^i\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}f_i - \frac{1}{4}\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\bar f^i\partial^n f_i \\ &+\frac{1}{4}\bar f^i\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\partial^n f_i + \frac{1}{4}\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\partial^n\dot\alpha(s-1)}\bar f^i f_i\,. \end{aligned} \tag{5.105}$$

Для случая *нечетных спинов*:

$$J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}Jq^+_a. \tag{5.106}$$

В этом случае сохраняющийся ток спина $s$ в бозонном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} j^n_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = -i\frac{1}{4}\Big(&f^i\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\partial^n\bar f_i - \partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\partial^n f^i\bar f_i \\ &-\partial^n f^i\partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}\bar f_i + \partial^{s-1}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}f^i\partial^n\bar f_i\Big). \end{aligned} \tag{5.107}$$

Можно непосредственно проверить, что токи (5.105) и (5.107) сохраняются на уравнениях

движения свободного гипермультиплета (1.49):

$$\partial_n j^n_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0\,. \tag{5.108}$$

## 5.4 Приложение: о структуре $\mathcal{N} = 2$ суперполевых токов

Составные операторы в суперсимметричных теориях принадлежат некоторым супермультиплетам, которые преобразуются замкнуто при действии суперсимметрии. На суперпространственном языке это означает существование суперполей, включающих составные операторы в компонентном разложении. Нас интересуют суперполя, содержащие среди своих компонент сохраняющиеся токи. Как мы увидим в дальнейшем, такие суперполя будут появляться как супериточники в суперполевых уравнениях движения для высших спинов. Сохраняющиеся токи представляют собой собой важный класс локальных операторов и могу использоваться для изучения динамики суперсимметричных теорий, нарушения суперсимметрии и взаимодействия с калибровочными теориями (включая высшие спины) [161]. Этот раздел-приложение посвящен обсуждению общих свойств суперполей токов, и мы представим общую структуру аналитических суперполей, которые отвечают $\mathcal{N} = 2$ супермультиплетам, содержащим сохраняющиеся токи[5].

Можно выделить 2 различных типа супермультиплетов токов:

- *Суперполевой ток*: супермультиплет, содержащий ток симметрии, не связанный с преобразованиями из супергруппы Пуанкаре (например, мультиплеты, включающие токи внутренних симметрий или симметрии высших спинов);
- *Супертоκ*: содержит фермионный ток, отвечающий глобальной суперсимметрии, а также тензор энергии-импульса, отвечающий трансляциям. Это связано с тем, что коммутатор двух суперсимметрий дает трансляцию. Суперток является выделенным, специальным случаем суперполевого тока.

Структура $\mathcal{N} = 1$ *суперполей токов* хорошо известна, обсуждение и дальнейшие ссылки можно найти в работах [161, 163]. Построение сохраняющихся $\mathcal{N} = 1$ суперполей токов, содержащих токи высших спинов проведено в работах [107, 108, 110, 113, 114, 164]. Наша цель состоит в рассмотрении суперполевых токов для свободного $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплета. В разделе 5.4.1 мы опишем $\mathcal{N} = 2$ гармонические суперполя, которые включают различные токо-

[5] Впервые супертоки были определены и обсуждались в работах [155, 162].

вые супермультиплеты. В частности, мы представим гармонические суперполя, содержащие токи высших спинов.

Структура $\mathcal{N}=1$ *супертоков* также хорошо известна, обсуждение можно найти в [17, 163, 165, 166]. Для $\mathcal{N}=2$ теорий структура супертоков рассматривалась в работе [159].

В этом разделе мы последовательно рассматриваем структуру $\mathcal{N}=2$ суперполей токов в гармоническом суперпространстве.

### 5.4.1 $\mathcal{N}=2$ суперполевые токи

**1.** Мы рассматриваем действительные (по отношению к тильда сопряжению, $\widetilde{J^{++A}}=J^{++A}$) аналитические суперполя $J^{++A}$, где $A$ обозначает некоторый общий мультииндекс типа $A=\alpha(n)\dot\alpha(n)$. Мы накладываем "гармонический закон сохранения" на суперполе $J^{++A}$ [6]:

$$\mathcal{D}^{++}J^{++A}=\partial^{++}J^{++A}-2i\theta^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}J^{++A}=0\,. \tag{5.109}$$

Мы предполагаем, что суперток не зависит от вспомогательной координаты $x^5$.

Общее решение условия $\mathcal{D}^{++}J^{++A}=0$ дается суперполевым разложением:

$$\begin{aligned}J^{++A}(x,\theta^+,u)=&j^{(ij)A}(x)u^+_iu^+_j+\theta^{+\alpha}j^{iA}_\alpha(x)u^+_i+\bar\theta^{+\dot\alpha}\bar j^{iA}_{\dot\alpha}(x)u^+_i\\&+(\theta^+)^2j^A(x)+(\bar\theta^+)^2\bar j^A(x)\\&+2i\theta^+\sigma^n\bar\theta^+\left[j^A_n(x)+\partial_nj^{(ij)A}(x)u^+_iu^-_j\right]\\&-i(\bar\theta^+)^2\theta^{+\alpha}\partial^{\dot\alpha}_\alpha\bar j^{iA}_{\dot\alpha}u^-_i-i(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\alpha}\partial^\alpha_{\dot\alpha}j^{iA}_\alpha u^-_i\\&-(\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2\,\Box\, j^{(ij)A}u^-_iu^-_j\,.\end{aligned} \tag{5.110}$$

В этом разложении присутствуют действительное поле $j^{(ij)A}(x)$, комплексное поле $j^{iA}_\alpha(x)$ и его комплексно сопряженное $\bar j^{iA}_{\dot\alpha}(x)$, комплексное поле $j^A(x)$ и вещественное поле $j^A_n(x)$. Суперполевое условие (5.109) влечет обычное условие сохранения для поля $j^A_n(x)$:

$$\partial^nj^A_n=0\,. \tag{5.111}$$

Это и позволяет идентифицировать гармоническое суперполе $J^{++A}$ с супермультиплетом, содержащим сохраняющийся ток, а условие $\mathcal{D}^{++}J^{++A}=0$ как соответствующее суперполевое условие сохранения. Как показано в этом разделе, все бозонные токовые суперполя высших

[6] Этот закон сохранения формально совпадает с гармонической связью $\mathcal{D}^{++}L^{++}=0$, определяющей $\mathcal{N}=2$ тензорный мультиплет $L^{++}(\zeta)$ ВМО. Детали приведены в разделе 6.2 книги [94].

спинов гипермультиплета имеют такую структуру.

**2.** Для определения суперполевых токов, содержащих сохраняющиеся фермионные токи высших спинов, как было получено ранее в этой главе, надо наложить другие условия (5.28c):

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{++} J^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = -2i\theta^{+\rho} J^{++}_{(\alpha(s-2)\rho)\dot\alpha(s-1)} - 2i\bar\theta^{+}_{(\dot\alpha} J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}\,, \\ \mathcal{D}^{++} J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0\,, \\ \mathcal{D}^{++} J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = 0\,. \end{cases} \tag{5.112}$$

Используя общее решение (5.110) для второго и третьего уравнений в (5.112) и подставляя их в первое уравнение, мы получаем, что поле перед мономом $\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}$ в фермионном суперполе,

$$J^{+}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} = \cdots + 2i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho} j^{i}_{\rho\dot\rho\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)} u^{-}_{i} + \dots\,, \tag{5.113}$$

удовлетворяет условию сохранения:

$$\partial^{\rho\dot\rho}\left( j^{i}_{\rho\dot\rho\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\sigma)} - j^{i}_{\dot\rho(\alpha(s-2)\rho)(\dot\alpha(s-2)\dot\sigma)} - \epsilon_{\dot\rho(\dot\sigma} j^{i}_{\rho\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))} \right) = 0\,. \tag{5.114}$$

Здесь поля $j^{i}_{\rho\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $j^{i}_{\rho\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$ – соответствующие фермионные компоненты суперполей $J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$.

Таким образом мы заключаем, что фермионный ток, определенный как

$$\mathfrak{j}^{i}_{\rho\dot\rho\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\sigma)} := j^{i}_{\rho\dot\rho\alpha(s-2)(\dot\alpha(s-2)\dot\sigma)} - j^{i}_{\dot\rho(\alpha(s-2)\rho)(\dot\alpha(s-2)\dot\sigma)} - \epsilon_{\dot\rho(\dot\sigma} j^{i}_{\rho\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2))}, \tag{5.115}$$

сохраняется вследствие суперполевых уравнений (5.112).

**3.** Аналогично, можно рассмотреть и сопряженное поле (5.28d):

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{++} J^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = 2i\bar\theta^{+\dot\rho} J^{++}_{\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)\dot\rho)} - 2i\theta^{+}_{(\alpha} J^{++}_{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}\,, \\ \mathcal{D}^{++} J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0\,, \\ \mathcal{D}^{++} J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = 0\,. \end{cases} \tag{5.116}$$

Эти условия приводят к тому, что фермионная компонента

$$J^{+}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} = \cdots + 2i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho} j^{i}_{\rho\dot\rho\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)} + \dots\,, \tag{5.117}$$

удовлетворяет уравнению сохранения:

$$\partial^{\rho\dot\rho}\left(j^i_{\rho\dot\rho(\alpha(s-2)\sigma)\dot\alpha(s-2)} - j^i_{\rho(\alpha(s-2)\sigma)(\dot\alpha(s-2)\dot\rho)} + \epsilon_{\rho(\sigma}j^i_{\dot\rho\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}\right) = 0\,. \tag{5.118}$$

Здесь поля $j^i_{\rho\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $j^i_{\dot\rho\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$ являются соответствующими фермионными компонентами суперполей $J^{++}_{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$ и $J^{++}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}$. Соответствующий сохраняющийся фермионный ток определяется как:

$$\mathfrak{j}^i_{\rho\dot\rho(\alpha(s-2)\sigma)\dot\alpha(s-2)} := j^i_{\rho\dot\rho(\alpha(s-2)\sigma)\dot\alpha(s-2)} - j^i_{\rho(\alpha(s-2)\sigma)(\dot\alpha(s-2)\dot\rho)} + \epsilon_{\rho(\sigma}j^i_{\dot\rho\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2)}\,. \tag{5.119}$$

В дальнейшем, в разделах 5.3.2 и 5.3.3, мы приведем явные формулы для этих токовых суперполей в терминах свободного гипермультиплета в случаях спина **2** (который будет удовлетворять дополнительному условию сохранения, см. раздел 5.4.2) и спина **3**.

В разделе 5.1, суперполевые уравнения сохранения (5.109), (5.112) и (5.116) были получены как следствие $\mathcal{N}=2$ суперполевой теоремы Нётер для глобальных симметрий свободного гипермультиплета.

### 5.4.2 $\mathcal{N}=2$ супертоки

Теперь рассмотрим специальный суперток $J^{++\alpha\dot\alpha}$, имеющий дополнительный закон сохранения:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{++}J^{++\alpha\dot\alpha} = 0\,, \\ \partial_{\alpha\dot\alpha}J^{++\alpha\dot\alpha} = 0\,. \end{cases} \tag{5.120}$$

Второе условие предполагает сохранение всех компонентных токов в $\theta$-разложении (5.110):

$$\begin{cases} \partial_{\alpha\dot\alpha}j^{(ij)\alpha\dot\alpha} = 0\,, \\ \partial_{\alpha\dot\alpha}j^{i\alpha\dot\alpha}_\beta = 0\,, \\ \partial_{\alpha\dot\alpha}j^{\alpha\dot\alpha} = 0\,, \\ \partial_m j^m_n = 0\,. \end{cases} \tag{5.121}$$

Эти токи можно отождествить с токами, существующими в любой $\mathcal{N}=2$ супер-Пуанкаре инвариантой теории:

- $j^m_n$ является тензором энергии-импульса,

- $j^{\alpha\dot{\alpha}}$ – ток, соответствующий U(1) R-симметрии,
- $j^{i\alpha\dot{\alpha}}_{\beta}$ – дублет фермионных токов, отвечающий $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии,
- $j^{(ij)\alpha\dot{\alpha}}$ является током SU(2) R-симметрии.

С учётом этой идентификации, мы используем следующие удобные обозначения для компонент супертока:

$$\begin{aligned} J^{++}_{\alpha\dot{\alpha}}(x,\theta^+,u) =& R^{(ij)}_{\alpha\dot{\alpha}}(x)u^+_i u^+_j + \theta^{+\beta} S^i_{\alpha\dot{\alpha}\beta}(x)u^+_i + \bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\bar{S}^i_{\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}}(x)u^+_i \\ &+ (\theta^+)^2 R_{\alpha\dot{\alpha}}(x) + (\bar{\theta}^+)^2 \bar{R}_{\alpha\dot{\alpha}}(x) \\ &+ 2i\theta^+\sigma^n\bar{\theta}^+\left[T_{n\,\alpha\dot{\alpha}}(x) + \partial_n R^{(ij)}_{\alpha\dot{\alpha}}(x)u^+_i u^-_j\right] \\ &- i(\bar{\theta}^+)^2\theta^{+\beta}\partial^{\dot{\beta}}_{\beta}\bar{S}^i_{\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta}}u^-_i - i(\theta^+)^2\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\partial^{\beta}_{\dot{\beta}}S^i_{\alpha\dot{\alpha}\beta}u^-_i \\ &- (\theta^+)^2(\bar{\theta}^+)^2\,\Box\, R^{(ij)}_{\alpha\dot{\alpha}}u^-_i u^-_j\,. \end{aligned} \tag{5.122}$$

# Глава 6

# $\mathcal{N} = 2$ суперконформная теория высших спинов

Эта глава основывается на результатах, представленных в работе [167]. Она посвящена $\mathcal{N} = 2$ суперконформным теориям высших спинов, которые являются суперсимметричными расширения теорий, введенных Фрадкиным и Цейтлиным в известном обзоре по конформной супергравитации [35]. Основные результаты, которые мы получим в этом разделе, состоят в построение набора аналитических суперполей без связей и соответствующих им калибровочных и $\mathcal{N} = 2$ суперконформных преобразований. При фиксации калибровочной свободы, в калибровке типа Весса-Зумино компонентный состав полученных суперполей отвечает $\mathcal{N} = 2$ суперконформным мультиплетам высших спинов. Также мы построим кубические суперконформные вершины $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ взаимодействия этих мультиплетов с гипермультиплетом. Задача построения в гармоническом суперпространстве явно $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрично инвариантного действия вне массовой оболочки, содержащего в компонентах действие Фрадкина-Цейтлина пока остается открытой задачей.

Реализация $\mathcal{N} = 2$ суперконформной симметрии на координатах гармонического суперпространства приведена в [94, 168]. Также хорошо известно, как $\mathcal{N} = 2$ суперконформная группа реализуется на гармонических суперполях, описывающих гипермультиплет, $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет и мультиплет $\mathcal{N} = 2$ конформной супергравитации ($\mathcal{N} = 2$ мультиплет Вейля). Для того, чтобы обобщить эти результаты на высшие спины, базируясь на результатах главы 4, мы рассматриваем кубические вершины $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ наиболее общего вида, и, исходя из известных суперконформных преобразований гипермультиплета, находим необходимый минимальный набор аналитических суперполей и соответствующие $\mathcal{N} = 2$ суперконформные преобразования. После этого мы переходим к анализу калибровочной свободы и компонентного состава суперконформных мультиплетов.

Одна из интересных особенностей описанной конструкции возможность обобщения полученных здесь результатов на произвольный фон конформной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации, что в

обычном подходе к конформным высшим спинам не было сделано. Построение таких вершин на произвольном гравитационном фоне оставалось открытой задачей. Также интересным следствием полученных результатов является построение согласованного во всех порядках по калибровочным полям действия, содержащего бесконечную башню суперконформных высших спинов, взаимодействующих с гипермультиплетом. На суперполевом уровне такая вершина является кубической. Вычисляя индуцированное действие (беря функциональный интеграл по гипермультиплету), в дальнейшем на этой соснове можно строить согласованные взаимодействующие теории высших спинов.

Как правило, суперконформные мультиплеты имеют более простую структуру, чем общие суперсимметричные мультиплеты. Поэтому конформные супермультиплеты находят свое применение для построения различных теорий супергравитаций вне массовой оболочки с использованием метода конформных компенсаторов. Обобщение метода конформных компенсаторов на $\mathcal{N} = 2$ высшие спины является интересной проблемой, которая может быть решена с помощью полученных здесь результатов.

## 6.1 $\mathcal{N} = 2$ суперконформная симметрия гипермультиплета

Мы начнем с вывода $\mathcal{N} = 2$ суперконформных преобразований гипермультиплета, исследуя глобальные симметрии действия свободного гипермультиплета. Мы представим этот вывод в форме, позволяющей связать полученные преобразования с калибровочной супергруппой $\mathcal{N} = 2$ конформной супергравитации. Несмотря на то, что такие преобразования можно реализовать на координатах гармонического суперпространства, мы будем рассматривать преобразования в активной форме, поскольку это удобнее для анализа суперконформных преобразований кубических вершин.

Для вывода суперконформных преобразований мы рассмотрим наиболее общие преобразования гипермультиплета, содержащих первую степень суперпространственных производных:

$$\delta q^{+a} = -\hat{\Lambda} q^{+a} - \frac{1}{2}\Omega q^{+a}, \tag{6.1}$$

где мы ввели обозначения[1]:

$$\hat{\Lambda} := \lambda^M \partial_M = \lambda^{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \lambda^{+\hat{\alpha}}\partial^-_{\hat{\alpha}} + \lambda^{++}\partial^{--} + \lambda^5\partial_5, \tag{6.2}$$

$$\Omega := (-1)^{P(M)}\partial_M\lambda^M = \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} - \partial^-_{\hat{\alpha}}\lambda^{+\hat{\alpha}} + \partial^{--}\lambda^{++}. \tag{6.3}$$

[1] $M = (\alpha\dot{\alpha}, \alpha+, \dot{\alpha}+, ++, 5)$; $P(\alpha\dot{\alpha}) = P(++) = P(5) = 0$, $P(\hat{\alpha}+) = 1$.

Здесь $\hat{\Lambda}$ – это дифференциальный оператор первого порядка, $\Omega$ – весовой фактор, построенный из параметров $\lambda^M$. Поскольку суперполе $q^{+a}$ является аналитическим, мы накладываем условия, что преобразования (6.1) сохраняют аналитичность, которые приводят к тому, что параметры $\lambda^M$ являются аналитическими суперполями:

$$\partial^+_{\hat{\rho}}\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} = 0, \qquad \partial^+_{\hat{\rho}}\lambda^{+\hat{\alpha}} = 0, \qquad \partial^+_{\hat{\rho}}\lambda^{++} = 0, \qquad \partial^+_{\hat{\rho}}\lambda^{5} = 0. \tag{6.4}$$

Также мы предполагаем, что параметры $\lambda^M$ не зависят от вспомогательной координаты $x^5$. В отличие от глобальных симметрий, рассматриваемых в главах 4 и 5, здесь мы допускаем нетривиальную зависимость параметров $\lambda^M$ от координат $x^{\mu\dot{\mu}}$ и $\theta^{+\hat{\mu}}$. Как мы увидим, это приведет к расширенной алгебре глобальных симметрий гипермультиплета с большим количеством независимых параметров преобразований.

Вариация свободного действия гипермультиплета относительно преобразований (6.1) с произвольными аналитическими параметрами $\lambda^M$ дает:

$$\delta S_{free} = \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}]q^+_a. \tag{6.5}$$

Явная форма коммутатора в выражении (6.5) имеет вид:

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}] = &\left(\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot{\alpha}} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} + 4i\theta^{+\alpha}\bar{\lambda}^{+\dot{\alpha}}\right)\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \\ &+ \left(\mathcal{D}^{++}\lambda^{+\hat{\alpha}} - \lambda^{++}\theta^{+\hat{\alpha}}\right)\partial^-_{\hat{\alpha}} + \mathcal{D}^{++}\lambda^{++}\partial^{--} + \lambda^{++}\mathcal{D}^0 \\ &+ \left(\mathcal{D}^{++}\lambda^{5} - 2\lambda^{+\hat{\rho}}\theta^+_{\hat{\rho}}\right)\partial_5 + \lambda^{++}\theta^{-\hat{\alpha}}\partial^+_{\hat{\alpha}}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Принимая во внимание соотношения $\mathcal{D}^0 q^{+a} = q^{+a}$ и $q^{+a}q^+_a = 0$, мы получаем условие инвариантности действия (1.42) в форме

$$[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}] = \lambda^{++}\mathcal{D}^0, \tag{6.7}$$

или, в терминах параметров $\lambda^M$,

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha} + 4i\theta^{+\alpha}\bar\lambda^{+\dot\alpha} = 0, \\ \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\alpha} - \lambda^{++}\theta^{+\alpha} = 0, \\ \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\dot\alpha} - \lambda^{++}\bar\theta^{+\dot\alpha} = 0, \\ \mathcal{D}^{++}\lambda^{++} = 0, \\ \mathcal{D}^{++}\lambda^{5} - 2\lambda^{+\hat\rho}\theta^{+}_{\hat\rho} = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Общее решение системы уравнений (6.8) – это $\mathcal{N} = 2$ **суперконформные преобразования**. Общее решение параметризуется 13 бозонными параметрами (+ 6 параметров для преобразований Лоренца, которые мы не выписываем явно) и 16 фермионными параметрами:

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha\dot\alpha}_{sc} = & a^{\alpha\dot\alpha} - 4i\left(\epsilon^{\alpha i}\bar\theta^{+\dot\alpha} + \theta^{+\alpha}\bar\epsilon^{\dot\alpha i}\right)u^-_i + x^{\dot\alpha\rho}k_{\rho\dot\rho}x^{\dot\rho\alpha} + bx^{\alpha\dot\alpha} \\ & -4i\theta^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}\lambda^{(ij)}u^-_i u^-_j - 4i\left(x^{\alpha\dot\rho}\eta^i_{\dot\rho}\bar\theta^{+\dot\alpha} + \theta^{+\alpha}\eta^i_\rho x^{\rho\dot\alpha}\right)u^-_i, \\ \lambda^{+\alpha}_{sc} = & \epsilon^{\alpha i}u^+_i + \tfrac{1}{2}\theta^{+\alpha}(b + i\gamma) + x^{\alpha\dot\beta}k_{\beta\dot\beta}\theta^{+\beta} + x^{\alpha\dot\alpha}\eta^i_{\dot\alpha}u^+_i \\ & +\theta^{+\alpha}\left(\lambda^{(ij)}u^+_i u^-_j + 4i\theta^{+\rho}\eta^i_\rho u^-_i\right), \\ \bar\lambda^{+\dot\alpha}_{sc} = & \epsilon^{\dot\alpha i}u^+_i + \tfrac{1}{2}\bar\theta^{+\dot\alpha}(b - i\gamma) + x^{\dot\alpha\beta}k_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{+\dot\beta} + x^{\alpha\dot\alpha}\eta^i_\alpha u^+_i \\ & +\bar\theta^{+\dot\alpha}\left(\lambda^{(ij)}u^+_i u^-_j - 4i\bar\theta^{+\dot\rho}\eta^i_{\dot\rho}u^-_i\right), \\ \lambda^{++}_{sc} = & \lambda^{ij}u^+_i u^+_j + 4i\theta^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}k_{\alpha\dot\alpha} + 4i\left(\theta^{+\alpha}\eta^i_\alpha + \eta^i_{\dot\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}\right)u^+_i. \end{cases} \tag{6.9}$$

Отсюда можно найти весовой фактор (6.3):

$$\Omega_{sc} = 2b + 2k_{\beta\dot\beta}x^{\beta\dot\beta} - 2\lambda^{(ij)}u^+_i u^-_j - 8i\left(\theta^{+\alpha}\eta^i_\alpha + \eta^i_{\dot\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}\right)u^-_i. \tag{6.10}$$

Он удовлетворяет полезному соотношению:

$$\mathcal{D}^{++}\Omega_{sc} = -2\lambda^{++}_{sc}. \tag{6.11}$$

Как следует из (6.6), последнее уравнение в системе (6.8) выполняется только при наложении ограничения $\partial_5 q^{+a} = 0$, иначе параметр $\lambda^5$ является неаналитическим суперполем, что противоречит исходным предположениям. Таким образом, мы ограничиваемся рассмотрением безмассового гипермультиплета. Это согласуется с хорошо известным фактом, что все теории с точной конформной симметрией являются безмассовыми (смотри, например [17]).

Преобразования симметрии с параметрами (6.9) расширяет глобальную $\mathcal{N}=2$ суперсимметрию свободного безмассового гипермультиплета (см. раздел 4.2.2):

$$\underbrace{\{a^{\alpha\dot{\alpha}}, \epsilon^{\hat{\alpha}i}\}}_{\mathcal{N}=2 \text{ суперсимметрия}} \to \underbrace{\{a^{\alpha\dot{\alpha}}, \epsilon^{\hat{\alpha}i}, b, \gamma, k_{\alpha\dot{\alpha}}, \eta^{\hat{\alpha}i}, \lambda^{(ij)}\}}_{\mathcal{N}=2 \text{ суперконформная симметрия}}. \tag{6.12}$$

Полученные аналитические параметры (6.9) соответствуют $\mathcal{N}=2$ суперконформной симметрии в координатной реализации [94, 168]. Параметры преобразований классифицируются как:

- $a^{\alpha\dot{\alpha}}$ – параметры глобальных трансляций;
- $\epsilon^{\hat{\alpha}i}$ – параметры глобальной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии;
- $b$ – это параметр дилатаций;
- $\gamma$ – параметр $U(1)$ R-симметрии;
- $k_{\alpha\dot{\alpha}}$ – параметры специальной конформной симметрии;
- $\eta^{\hat{\alpha}i}$ – параметры глобальной $\mathcal{N}=2$ конформной суперсимметрии;
- $\lambda^{(ij)}$ – параметры $SU(2)_R$ симметрии.

Можно проверить, что полученные преобразования удовлетворяют алгебраическим соотношениям $\mathfrak{su}(2,2|2)$ супералгебры, которая является $\mathcal{N}=2, D=4$ суперконформной алгебры. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы кубические вершины были инвариантны относительно этих преобразований.

Работать с суперконформными преобразованиями мы будем как с супердиффеоморфизмами с аналитическими параметрами $\lambda^M$, на которые дополнительно наложены ограничения (6.7). Если на каком-то этапе это будет важно, мы будем использовать это ограничение. В дальнейшем мы увидим, что требование суперконформной инвариантности вершины (но не действия свободного гипермультплета!) с необходимостью влечет за собой инвариантность относительно произвольных супердиффеоморфизмов, т.е. относительно калибровочной супергруппы $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации. Чтобы сделать явным тот факт, что мы рассматриваем общие супердиффеоморфизмы, для вариации мы будем использовать обозначение $\delta_{diff}$.

## 6.2 Принципы построения суперконформных вершин и суперконформных мультиплетов

Принципы такого построения схожи с принципами построения неконформных кубических вершин, изложенными в главе 4, однако с тем важным отличием, что в данном случае неизвестны аналитические препотенциалы $\mathcal{N} = 2$ суперконформных мультиплетов и их суперконформные преобразования. Так что эта процедура в некоторых аспектах обратна: мы определяем препотенциалы из требования суперконформной симметрии.

Приведем последовательность действий, которой мы будем придерживаться.

(1) Наша стратегия построения суперконформных кубических вершин будет начинаться с выделения минимального набора калибровочных суперполей $h^{++M_1\dots M_{s-1}}(\zeta)$, необходимых для обеспечения инвариантности наиболее общего взаимодействия, имеющего вид:

$$S^{(s)}_{int} = -\frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} h^{++M_1\dots M_{s-1}} \partial_{M_{s-1}}\dots\partial_{M_1} (J)^{P(s)}\, q^+_a + \text{слагаемые с меньшим количеством производных}\,, \tag{6.13}$$

относительно суперконформных преобразований гипермультиплета[2]:

$$\delta_{diff} q^{+a} = -\hat{\Lambda} q^{+a} - \frac{1}{2}\Omega q^{+a} \tag{6.14}$$

и некоторых преобразований калибровочных суперполей

$$\delta_{diff} h^{++M_1\dots M_{s-1}} = \dots \tag{6.15}$$

вид которых будет определен из требования инвариантности. Выбор взаимодействия в форме (6.13) мотивирован рассмотрением неконформного случая (изложенного в главе 4) и значительно ограничивается требованием аналитичности. Главным отличием здесь является наличие всех возможных суперпространственных производных

$$\partial_M = (\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \partial^-_\alpha, \partial^-_{\dot{\alpha},\partial^{--}}). \tag{6.16}$$

Производная $\partial^{++}$ отсутствует, поскольку такое слагаемое может быть убрано переопределением суперполя гипермультиплета.

[2]Еще раз обратим внимание на то, что мы рассматриваем наиболее общие супердиффеоморфизмы, обозначаемые как $\delta_{diff}$. При необходимости, мы можем наложить условия $[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}] = \lambda^{++}\mathcal{D}^0$, выделяющие глобальные суперконформные преобразования.

(2) На следующем шаге, мы анализируем калибровочную свободу построенного действия

$$S_{free} + S_{int}^{(s)} \tag{6.17}$$

и получаем законы преобразования калибровочных препотенциалов.

(3) Затем, используя полученные калибровочные преобразования, мы фиксируем калибровку и определяем набор физических полей в потенциалах $h^{++M_1\dots M_{s-1}}(\zeta)$, а следовательно $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет высших спинов вне массовой оболочки.

В следующих разделах мы начнем с разбора хорошо известных кубических взаимодействий спина **1** и **2** с гипермультиплетом для иллюстрации того, как эта процедура работает и к каким отличиям от неконформного случая это приводит. Также мы обсудим фон $\mathcal{N}=2$ конформной BMO-супергравитации. Затем мы применим эту процедуру к случаю суперконформного спина **3**, и обобщим результаты на произвольный целый суперконформный спин **s**.

## 6.3 $\mathcal{N}=2$ Максвелловский супермультиплет и суперконформная кубическая вершина $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$

Простейшим примером кубической вершины является $\mathcal{N}=2$ суперконформное кубическое взаимодействие гипермультиплета с кабибровочным мультиплетом спина **1** (Максвелловским мультиплетом) [94]. Такую вершину мы уже рассматривали в неконформном случае (см. раздел 4.2.1), сейчас наша цель проанализировать её суперконформные свойства и показать на технически простом примере, как работает процедура построения суперконформных вершин. Кубическая вершина $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ имеет вид:

$$S_{int}^{(s=1)} = -\frac{\kappa_1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}V^{++}Jq_a^+ = -\kappa_1\int d\zeta^{(-4)}\, V^{++}\tilde{q}^+q^+. \tag{6.18}$$

Здесь $V^{++}(\zeta)$ – произвольное аналитическое суперполе с калибровочной свободой $\delta_\lambda V^{++}(\zeta) = \mathcal{D}^{++}\lambda(\zeta)$, где параметр $\lambda(\zeta)$ является произвольным аналитическим суперпараметром. Препотенциал $V^{++}$ удовлетворяет условию вещественности $\widetilde{V^{++}} = V^{++}$. Согласно общим принципам построения вершин, это наиболее общая вершина гипермультиплета, не содержащая производных.

(1) *$\mathcal{N}=2$ суперконформная симметрия*

Проанализируем суперконформную инвариантность вершины (6.18). Под действием диф-

феоморфизмов гипермультиплета (6.14) и пока неизвестных диффеоморфизмов суперполя $V^{++}$ вершина (6.18) преобразуется как:

$$\begin{aligned}\delta_{diff} S_{int}^{(s=1)} =& \frac{\kappa_1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\left[(\hat{\Lambda}q^{+a})V^{++}Jq_a^+ + q^{+a}V^{++}J(\hat{\Lambda}q_a^+)\right] \\ &+ \frac{\kappa_1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,\Omega q^{+a}V^{++}Jq_a^+ - \frac{\kappa_1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}\delta_{diff}V^{++}Jq_a^+\,,\end{aligned} \tag{6.19}$$

где $\hat{\Lambda}$ и $\Omega$ были определены в (6.1) и (6.3). Мы требуем зануления вариации путем выбора соответствующих преобразований $\delta_{diff}V^{++}$ для спина **1**.

Первая строчка, с точностью до полной производной, может быть переписана как:

$$\begin{aligned}(\hat{\Lambda}q^{+a})V^{++}Jq_a^+ + q^{+a}V^{++}J(\hat{\Lambda}q_a^+) &= \hat{\Lambda}\left(q^{+a}V^{++}Jq_a^+\right) - q^{+a}(\hat{\Lambda}V^{++})Jq_a^+ \\ &= -\Omega\left(q^{+a}V^{++}Jq_a^+\right) - q^{+a}(\hat{\Lambda}V^{++})Jq_a^+,\end{aligned} \tag{6.20}$$

Требование инвариантности (6.18) приводит к закону преобразования калибровочного препотенциала:

$$\delta_{diff}V^{++} = -\hat{\Lambda}V^{++}. \tag{6.21}$$

Таким образом, в случае спина **1**, преобразования $\mathcal{N}=2$ конформных диффеоморфизмов содержат только транспортное слагаемое. В результате получаем, что вершина (6.18) инвариантна относительно произвольных $\mathcal{N}=2$ диффеоморфизмов, а не только глобальной суперконформной симметрии. Отметим, что свободное действие гипермультиплета (1.42) не является инвариантным относительно *общих* диффеоморфизмов, инвариантность достигается только на суперконформных преобразованиях.

### (2) ***Калибровочная свобода***

На следующем шаге мы анализируем калибровочную свободу. Сумма действия свободного гипермультиплета и вершины (6.18),

$$S_{free} + S_{int}^{(s=1)} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}\mathcal{D}^{++}q_a^+ - \frac{\kappa_1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}V^{++}Jq_a^+, \tag{6.22}$$

инвариантна относительно $s=1$ калибровочных преобразований:

$$\begin{cases}\delta_\lambda V^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda, \\ \delta_\lambda q_a^+ = -\kappa_1\lambda Jq_a^+\end{cases} \tag{6.23}$$

с произвольным аналитическим параметром $\lambda(\zeta)$.

③ ***Калибровка Весса-Зумино***

Используя калибровочную свободу(6.23) можно наложить калибровку Весса-Зумино для препотенциала спина **1**, как было уже рассмотрено в разделе (1.3.2):

$$\begin{aligned} V^{++}_{WZ} = &-4i\theta^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}A_{\alpha\dot\alpha} - i(\theta^+)^2\bar\phi + i(\bar\theta^+)^2\phi \\ &+ 4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\alpha}\psi^i_\alpha u^-_i - 4(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha i}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2D^{ij}u^-_iu^-_j\ . \end{aligned} \tag{6.24}$$

Компонентные полям образуют $\mathcal{N}=2$ супермультиплет спина **1** вне массовой оболочки.

Мы заключаем, что $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ вершина (6.18) является инвариантной относительно $\mathcal{N}=2$ конформных супердиффеоморфизмов (6.14) и (6.21). При специальном выборе параметров (6.9) получаем глобальные $\mathcal{N}=2$ суперконформные преобразования, относительно которых инвариантно действие (6.22).

## 6.4 $\mathcal{N}=2$ супермультиплет Вейля и суперконформная кубическая вершина $(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$

Суперконформная вершина для $\mathcal{N}=2$ спина **2**, взаимодействующего с гипермультиплетом также хорошо известна [94–96, 131]. Здесь мы рассматриваем важные особенности её построения, необходимые для дальнейшего описания взаимодействий на фоне $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации. Этот пример также даст ряд полезных наблюдений, которые будут полезны для построения вершин высших спинов.

Итак, в случае спина **2** наиболее общая аналитическая кубическая вершина в первом порядке по суперполевым производным имеет вид:

$$S^{(s=2)}_{int} = -\frac{\kappa_2}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}h^{++M}\partial_M q^+_a = -\frac{\kappa_2}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}q^+_a. \tag{6.25}$$

Тут мы ввели набор аналитических калибровочных суперполей,

$$h^{++\alpha\dot\alpha}(\zeta), \qquad h^{++\alpha+}(\zeta), \qquad h^{++\dot\alpha+}(\zeta), \qquad h^{(+4)}(\zeta)\,, \tag{6.26}$$

и построили из них аналитический дифференциальный оператор первого порядка:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} := h^{++M}\partial_M = h^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + h^{++\alpha+}\partial^-_\alpha + h^{++\dot\alpha+}\partial^-_{\dot\alpha} + h^{(+4)}\partial^{--}. \tag{6.27}$$

По сравнению с неконформным случаем Эйнштейновской супергравитации (см. раздел 4.2.2),

здесь присутствует дополнительный потенциал $h^{(+4)}$, входящий вместе с производной $\partial^{--}$. Как следствие действительности действия (6.25), оператор (6.27) удовлетворяет условиям вещественности:

$$\widetilde{\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}} = \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{h^{++\alpha\dot\alpha}} = h^{++\alpha\dot\alpha}, \qquad \widetilde{h^{++\alpha+}} = h^{++\dot\alpha+}, \qquad \widetilde{h^{(+4)}} = h^{(+4)}. \tag{6.28}$$

### ① $\mathcal{N}=2$ *суперконформная симметрия*

Мы начинаем с того, что требуем суперконформной инвариантности кубической вершины (6.25). Вариация вершины $(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ относительно супердиффеоморфизмов с произвольными параметрами даёт:

$$\delta_{diff} S^{(s=2)}_{int} = \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}, \hat\Lambda] q^+_a - \frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\; q^{+a}\delta_{diff}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} q^+_a. \tag{6.29}$$

Для инвариантности мы должны преобразовывать оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}$ как:

$$\delta_{diff}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} = [\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}, \hat\Lambda]. \tag{6.30}$$

Это приводит к законам преобразования аналитических препотенциалов:

$$\delta_{diff} h^{++M} = -\hat\Lambda h^{++M} + h^{++N}\partial_N \lambda^M. \tag{6.31}$$

Если мы ограничимся $\mathcal{N}=2$ суперконформными преобразованиями потенциалов спина $\mathbf{2}$ (отвечающих выбору параметров (6.9)) различные препотенциалы будут перемешиваться между собой. Например специальные конформные преобразования (параметр $k_{\alpha\dot\alpha}$ в (6.9)) и конформная суперсимметрия (параметр $\eta^i_{\dot\alpha}$) действуют на $h^{++\alpha+}$ как:

$$\delta_{k_{\alpha\dot\alpha}} h^{++\alpha+} = -\hat\Lambda h^{++\alpha+} + h^{++\alpha\dot\rho} k_{\rho\dot\rho}\theta^{+\rho} + h^{++\rho+} x^{\alpha\dot\rho} k_{\rho\dot\rho}, \tag{6.32a}$$

$$\delta_{\eta^i_{\dot\alpha}} h^{++\alpha+} = -\hat\Lambda h^{++\alpha+} + h^{++\alpha\dot\alpha}\eta^i_{\dot\alpha} u^+_i - 4i h^{++\beta+}\theta^+_\beta \eta^{\alpha i} u^-_i + h^{(+4)} x^{\alpha\dot\alpha}\eta^i_{\dot\alpha} u^-_i. \tag{6.32b}$$

А из закона преобразования

$$\delta_{k_{\alpha\dot\alpha}} h^{(+4)} = -\hat\Lambda h^{(+4)} + 4i h^{++\alpha+}\bar\theta^{+\dot\alpha} k_{\alpha\dot\alpha} + 4i\theta^{+\alpha} h^{++\dot\alpha+} k_{\alpha\dot\alpha} \tag{6.33}$$

очевидна неизбежность включения дополнительного препотенциала $h^{(+4)}$, отсутствующего в эйнштейновской $\mathcal{N}=2$ супергравитации. Если бы это поле отсутствовало, то глобаль-

ная $\mathcal{N}=2$ суперконформная симметрия была бы нарушена (осталась бы только глобальная $\mathcal{N}=2$ Пуанкаре суперсимметрия). Тем самым, мы видим, что требование глобальной суперконформной симметрии приводит к инвариантности вершины относительно произвольных супердиффеоморфизмов.

**(2) *Калибровочная свобода***

Теперь мы переходим к анализу калибровочной свободы полного действия:

$$S_{free}+S_{int}^{(s=2)}=-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}\mathcal{D}^{++}q_a^+-\frac{\kappa_2}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}h^{++M}\partial_M q_a^+. \tag{6.34}$$

Хорошо известно, что $\mathcal{N}=2$ мультиплет Вейля воспроизводится как результат калибрования $\mathcal{N}=2$ суперконформных преобразований, поэтому в данном случае мы отождествляем $\delta_\lambda^{(s=2)}=\kappa_2\delta_{diff}$. Мы начинаем с преобразований

$$\delta_\lambda^{(s=2)}q^{+a}=-\kappa_2\hat{\Lambda}q^{+a}-\frac{\kappa_2}{2}\Omega q^{+a}, \tag{6.35}$$

и рассматриваем все калибровочные параметры

$$\lambda^{\alpha\dot\alpha}(\zeta),\qquad \lambda^{+\alpha}(\zeta),\qquad \lambda^{+\dot\alpha}(\zeta),\qquad \lambda^{++}(\zeta) \tag{6.36}$$

как произвольные аналитические суперполя.

В формуле (6.5) мы вывели вариацию свободного действия гипермультиплета относительно таких преобразований:

$$\delta_\lambda^{(s=2)}S_{free}=\frac{\kappa_2}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}[\mathcal{D}^{++},\hat{\Lambda}]q_a^+. \tag{6.37}$$

При выводе преобразований глобальной суперконформной симметрии мы требовали, чтобы это слагаемое зануллялось. Теперь, вместо требования зануления, мы сокращаем её вариацией калибровочных препотенциалов во втором слагаемом (6.34) посредством выбора специального конформного преобразования для оператора $s=2$:

$$\delta_\lambda\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}=[\mathcal{D}^{++},\hat{\Lambda}]-\lambda^{++}\mathcal{D}^0. \tag{6.38}$$

Отсюда мы получаем линеаризованные калибровочные преобразования препотенциалов $h^{++M}(\zeta)$:

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha} + 4i\lambda^{+\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha} + 4i\theta^{+\alpha}\bar\lambda^{+\dot\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++\alpha+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\alpha} - \lambda^{++}\theta^{+\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++\dot\alpha+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{+\dot\alpha} - \lambda^{++}\bar\theta^{+\dot\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{(+4)} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{++}. \end{cases} \tag{6.39}$$

Эти преобразования полностью воспроизводят линеаризованную калибровочную свободу $\mathcal{N}=2$ мультиплета Вейля [96]. Отметим, что уравнения (6.8), задающие условия на глобальные суперконформные симметрии гипермультиплета, совпадают с условиями зануления вариаций (6.39), $\delta h^{++M}=0$. Таким образом, $\mathcal{N}=2$ суперконформные преобразования можно интерпретировать как преобразования, сохраняющие плоский фон $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации $h^{++M}=0$.

Поскольку при рассмотрении преобразований в этом разделе мы нигде не накладывали условий на параметры $\lambda^M(\zeta)$, сумма действий $S_{free}+S^{(s=2)}_{gauge}$ будет инвариантна относительно преобразования $\delta_\lambda+\delta_{diff}$ с произвольными аналитическими параметрами $\lambda^M(\zeta)$:

$$\delta^\lambda_{non-linear}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} := \left(\delta_\lambda+\kappa_2\delta_{diff}\right)\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} = [\mathcal{D}^{++}+\kappa_2\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)},\hat\Lambda] - \lambda^{++}\mathcal{D}^0. \tag{6.40}$$

Таким способом мы воспроизводим *нелинейную калибровочную свободу* $\mathcal{N}=2$ *мультиплета Вейля*, полученную в работе [96]. В этой нелинейной теории суперконформные преобразования являются подгруппой калибровочной группы конформной супергравитации. Отметим также, что действие калибровочнной группы на препотенциалы $h^{++M}$ задается теми же формулами (6.39), в которых произведена модификация гармонических производных

$$\mathcal{D}^{++} \;\Rightarrow\; \mathfrak{D}^{++} := \mathcal{D}^{++}+\kappa_2\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}\,. \tag{6.41}$$

Отметим, что в бозонном секторе построенное действие

$$S^{sg}_{hyper} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}\mathfrak{D}^{++}q^+_a \tag{6.42}$$

должно сводится к конформному взаимодействию скаляров и гравитации $S^{sg}_{hyper}\sim \bar f^i(\nabla^2-\frac{1}{6}R)f^i$, вообще говоря, являющемуся некубическим. Такая некубическая структура появляется после последовательного исключения вспомогательных полей.

Теперь, используя полученные результаты, можно вернуться к суперконформной вершине (6.18) гипермультиплета с суперполем спина **1** и продемонстрировать, что её также можно сделать инвариантной относительно полной калибровочной группы конформной $\mathcal{N}=2$ супергравитации. Сумма $\mathcal{N}=2$ ковариантизованного действия $q^{+a}$ (6.34) и вершины $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ (6.18)

$$S=-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}\left(\mathfrak{D}^{++}+\kappa_1 V^{++}J\right)q_a^+ \tag{6.43}$$

инвариантна относительно $\mathcal{N}=2$ калибровочной группы и $U(1)$ калибровочных преобразований:

$$\delta_\lambda V^{++}=[\mathfrak{D}^{++},\lambda]. \tag{6.44}$$

Действие $U(1)$ калибровочных преобразований (6.23) модифицируется через удлинение производной (6.41).

Таким образом, мы построили кубическую вершину $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ на фоне $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации. Отметим интересную особенность, состоящую в том, что в суперполевом действии (6.43) $V^{++}$ не взаимодействует с $h^{++M}$ напрямую, в отличие от хорошо известных аналогов таких действий в случаях $\mathcal{N}=0$ и $\mathcal{N}=1$. На компонентном уровне такое взаимодействие появляется после исключения вспомогательных полей гипермультиплета. Интересно изучить, как производится такая редукция. Эффективные методы перехода к компонентам предлагались, в частности в примечательной работе [122].

### ③ *Калибровка Весса-Зумино*

Для получения состава Вейлевского мультиплета, надо устранить чисто калибровочные степени свободы, тем самым зафиксировав калибровку Весса-Зумино:

$$\begin{cases} h^{++\alpha\dot\alpha}=-4i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}+(\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\rho}u^-_i+(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\rho}u^-_i \\ \qquad\qquad +(\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j\,, \\ h^{++\mu+}=(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\mu}P^{\mu\dot\mu}+\left(\bar\theta^+\right)^2\theta^+_\nu T^{(\nu\mu)}+(\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2\chi^{\mu i}u^-_i\,, \\ h^{++\dot\mu+}=\widetilde{h^{++\mu+}}\,, \\ h^{(+4)}\quad=(\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2D\,. \end{cases} \tag{6.45}$$

В результате мы получаем $\mathcal{N}=2$ мультиплет Вейля [90, 96, 169] включающий гравитон, дублет гравитино, калибровочные поля для $SU(2)_R$ и $\gamma_5$ преобразований; все остальные поля

являются вспомогательными (после соответствующего переопределения):

$$\begin{aligned} &\textit{Физические поля}: \qquad \Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}, \quad \psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\rho}, \quad V^{(ij)}_{\alpha\dot\alpha}, \quad P^{\mu\dot\mu}; \\ &\textit{Вспомогательные поля}: \qquad T^{(\mu\nu)}, \quad \chi^{\mu i}, \quad D. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Проанализируем калибровочную свободу этих полей. Остаточная калибровочная свобода задается параметрами:

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha\dot\alpha} \Rightarrow a^{\alpha\dot\alpha}(x)\,, \\ \lambda^{\mu+} \Rightarrow \epsilon^{\mu i}(x)u^+_i + \theta^{+\nu}\Big[\left\{a(x) + ib(x) + \lambda^{(ij)}(x)u^+_i u^-_j\right\}\delta^\mu_\nu + l_{(\nu}{}^{\mu)}(x)\Big] + (\theta^+)^2\eta^{\mu i}(x)u^-_i\,, \\ \bar\lambda^{\dot\mu+} \Rightarrow \bar\epsilon^{\mu i}(x)u^+_i + \bar\theta^{+\dot\nu}\Big[\left\{a(x) - ib(x) + \lambda^{(ij)}(x)u^+_i u^-_j\right\}\delta^{\dot\mu}_{\dot\nu} + l_{(\dot\nu}{}^{\dot\mu)}(x)\Big] + (\bar\theta^+)^2\bar\eta^{\mu i}(x)u^-_i\,, \\ \lambda^{++} \Rightarrow \lambda^{ij}(x)u^+_i u^+_j + i\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}c_{\rho\dot\rho}(x) + 2i\left(\theta^{+\alpha}\eta^i_\alpha(x) + \eta^i_{\dot\alpha}(x)\bar\theta^{+\dot\alpha}\right)u^+_i\,. \end{cases} \tag{6.47}$$

Можно идентифицировать эти параметры:

- $a^{\alpha\dot\alpha}(x)$ – параметры локальных трансляций, которые являются калибровочными для поля спина 2;
- $\epsilon^{\hat\mu i}(x)$ – параметры локальной суперсимметрии, являющиеся калибровочными параметрами для гравитино;
- $l^{(\mu\nu)}(x)$ и $l^{(\dot\mu\dot\nu)}(x)$ – параметры локальных Лоренцевых преобразований, которые используются для выкалибрования антисмметричных частей поля $\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\rho\dot\rho}$, в результате чего остается только симметричную часть (бесследовый "конформный гравитон" и его след);
- $a(x)$ – параметр локальных Вейлевских преобразований, он может использоваться для зануления следа гравитона;
- $b(x)$ – параметр локальной $U_R(1)$;
- $\lambda^{(ij)}(x)$параметры локальных $SU(2)_R$ преобразований;
- $c_{\alpha\dot\alpha}(x) = \partial_{\alpha\dot\alpha}a(x)$ – параметры локальных специальных конформных преобразований;
- $\eta^{\mu i}(x) = \frac{1}{2}\partial^\alpha_{\dot\rho}\bar\epsilon^{\dot\rho i}(x)$ – параметры локальной конформной суперсимметрии.

Для того, чтобы найти действие этих остаточных преобразований на компонентны мультиплета Вейля, необходимо потребовать инвариантность калибровки Весса-Зумино,которая заключается в том, что вариация $\delta_\lambda h^{++M}$ не должна иметь слагаемых, которые не могут

быть скомпенсированы вариациями компонент $h^{++M}_{WZ}$. Из этих условий находятся параметры $\lambda^M_{comp}$ и получается их действие на поля $\mathcal{N}=2$ мультиплета Вейля. Как результат, для поля гравитона находим:

$$\delta_\lambda \Phi^{\alpha\dot\alpha\rho\dot\rho} = \partial^{\rho\dot\rho} a^{\alpha\dot\alpha} - 2l^{(\alpha\rho)}\epsilon^{\dot\alpha\dot\rho} - 2l^{(\dot\alpha\dot\rho)}\epsilon^{\alpha\rho} - 4a\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot\alpha\dot\rho}. \tag{6.48}$$

Разложение $\Phi^{\alpha\dot\alpha\rho\dot\rho}$ на неприводимые части имеет вид:

$$\Phi^{\alpha\dot\alpha\rho\dot\rho} = \Phi^{(\alpha\rho)(\dot\alpha\dot\rho)} + \epsilon^{\dot\alpha\dot\rho}\Phi^{(\alpha\rho)} + \epsilon^{\alpha\beta}\Phi^{(\dot\alpha\dot\beta)} + \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\rho}\Phi. \tag{6.49}$$

Таким образом, используя параметры $l^{(\alpha\rho)}$, $l^{(\dot\alpha\dot\rho)}$ и $a$, можно откалибровать все слагаемые, за исключением полностью симметричного, для которого остаются преобразования:

$$\delta\Phi^{(\alpha\rho)(\dot\alpha\dot\rho)} = \partial^{(\dot\rho(\rho} a^{\alpha)\dot\alpha)}. \tag{6.50}$$

Связь этого поля с метрическим тензором $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ имеет вид $h^{ab} = \sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\sigma^b_{\beta\dot\beta}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + \frac{1}{2}\eta^{ab}\Phi$.

Другие калибровочные поля могут быть проанализированы аналогично. Они имеют законы преобразования:

$$\delta\psi^{(\alpha\rho)\dot\alpha i} = \partial^{\dot\alpha(\alpha}\epsilon^{\rho)i}, \qquad \delta V^{(ij)}_{\alpha\dot\alpha} = \partial_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{(ij)}, \qquad \delta P_{\alpha\dot\beta} = \partial_{\alpha\dot\alpha} b. \tag{6.51}$$

Поля $T^{(\mu\nu)}, \chi^{\mu i}, D$ являются вспомогательными и не имеют калибровочной свободы (некоторые из них требуют переопределения!). В результате мы заключаем, что $\mathcal{N}=2$ мультиплет Вейля имеет $\mathbf{24}_B + \mathbf{24}_F$ степеней свободы вне массовой оболочки.

## 6.5 $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина 3 и кубическая вершина $(\mathbf{3}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$

Взаимодействие суперконформного мультиплета спина **3** с гипермультиплетом представляет собой совершенно новую теорию, которая никогда не рассматривалась раньше. Базируясь на двух вспомогательных примерах, разобранных в прошлых разделах, здесь мы обобщаем наше построение на этот случай. Наиболее общая форма аналитической вершины с двумя суперпространственными производными имеет вид:

$$S^{(s=3)}_{int} = -\frac{\kappa_3}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\, h^{++MN}\partial_N\partial_M J\, q^+_a. \tag{6.52}$$

Здесь мы ввели аналитические препотенциалы $h^{++MN}(\zeta)$, которые удовлетворяют условиям:

$$h^{++MN} = (-1)^{P(M)P(N)} h^{++NM}, \tag{6.53}$$

где

$$P(M) := \begin{cases} 0 & \text{для} \quad M = \alpha\dot{\alpha}, ++ \quad \text{(бозонные индексы)}; \\ 1 & \text{для} \quad M = \alpha+, \dot{\alpha}+ \quad \text{(фермионные индексы)}. \end{cases} \tag{6.54}$$

Условия (6.53) необходимы для отождествления слагаемых одного типа, например, слагаемых:

$$h^{++\alpha+\dot{\beta}+} \partial^-_{\dot{\beta}} \partial^-_{\alpha} = h^{++\dot{\beta}+\alpha+} \partial^-_{\alpha} \partial^-_{\dot{\beta}}. \tag{6.55}$$

Принимая во внимание эти свойства, явное разложение оператора с двумя производными имеет вид:

$$\begin{aligned} h^{++MN} \partial_N \partial_M = {} & h^{++\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} \partial_{\beta\dot{\beta}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \\ & + h^{++[\beta+\gamma]+} \partial^-_{\gamma} \partial^-_{\beta} + h^{++[\dot{\beta}+\dot{\gamma}]+} \partial^-_{\dot{\gamma}} \partial^-_{\dot{\beta}} + h^{(+6)} \partial^{--} \partial^{--} \\ & + 2h^{++\beta+\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \partial^-_{\beta} + 2h^{++\dot{\beta}+\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \partial^-_{\dot{\beta}} + 2h^{++\alpha\dot{\alpha}++} \partial^{--} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \\ & + 2h^{++\beta+\dot{\gamma}+} \partial^-_{\dot{\gamma}} \partial^-_{\beta} + 2h^{++++\beta+} \partial^-_{\beta} \partial^{--} + 2h^{++++\dot{\beta}+} \partial^-_{\dot{\beta}} \partial^{--}. \end{aligned} \tag{6.56}$$

Мы предполагаем вещественность действия (6.52), откуда следует, что аналитические препотенциалы удовлетворяют условиям тильда-сопряжения:

$$\widetilde{h^{++MN} \partial_N} \partial_M = h^{++MN} \partial_N \partial_M. \tag{6.57}$$

Отсюда получаем условия на препотенциалы $h^{++MN}$:

$$\widetilde{h^{++\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}} = h^{++\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}}, \qquad \widetilde{h^{(+6)}} = h^{(+6)}, \tag{6.58a}$$

$$\widetilde{h^{++[\beta+\gamma]+}} = -h^{++[\dot{\beta}+\dot{\gamma}]+}, \qquad \widetilde{h^{++[\dot{\beta}+\dot{\gamma}]+}} = -h^{++[\beta+\gamma]+}, \tag{6.58b}$$

$$\widetilde{h^{++\beta+\alpha\dot{\alpha}}} = -h^{++\dot{\beta}+\alpha\dot{\alpha}}, \qquad \widetilde{h^{++\dot{\beta}+\alpha\dot{\alpha}}} = h^{++\beta+\alpha\dot{\alpha}}, \tag{6.58c}$$

$$\widetilde{h^{++\alpha\dot{\alpha}++}} = h^{++\alpha\dot{\alpha}++}, \qquad \widetilde{h^{++\alpha+\dot{\alpha}+}} = -h^{++\alpha+\dot{\alpha}+}, \tag{6.58d}$$

$$\widetilde{h^{++++\beta+}} = -h^{++++\dot{\beta}+}, \qquad \widetilde{h^{++++\dot{\beta}+}} = h^{++++\beta+}. \tag{6.58e}$$

Теперь мы налагаем требование $\mathcal{N} = 2$ суперконформной инвариантности вершины (6.52)

и определяем минимальный набор препотенциалов $h^{++MN}(\zeta)$, необходимый для обеспечения этой инвариантности.

**(1)** $\mathcal{N}=2$ ***суперконформная симметрия***

При действии произвольных супердиффеоморфизмов (6.1) с произвольными параметрами, мы получаем (с точностью до полных производных):

$$\begin{aligned}\delta_{diff}\left(q^{+a}h^{++MN}\partial_N\partial_M Jq_a^+\right) =& q^{+a}(\hat{\Lambda}h^{++MN})\partial_N\partial_M Jq_a^+\\ &- 2q^{+a}h^{++MN}(\partial_N\lambda^K)\partial_K\partial_M Jq_a^+\\ &+ \frac{1}{2}(-1)^{P(K)}\partial_K\left(h^{++MN}\partial_N\partial_M\lambda^K\right)q^{+a}Jq_a^+\\ &+ \frac{1}{2}(-1)^{P(M)}(\partial_M h^{++MN})(\partial_N\Omega)q^{+a}Jq_a^+\\ &+ q^{+a}\delta_{diff}h^{++MN}\partial_N\partial_M Jq_a^+.\end{aligned} \tag{6.59}$$

В процессе вычисления мы воспользовались свойством симметрии

$$J_{ab}=J_{ba}\ \Rightarrow\ q^{+a}J_{ab}(\partial_M q^{+b})=\frac{1}{2}\partial_M(q^aJ_{ab}q^b), \tag{6.60}$$

которое позволяет свести все слагаемые с одной производной к слагаемым без производных, используя интегрирование по частям.

В результате мы видим, что возникает 2 типа слагаемых, которые надо компенсировать преобразованиями суперполей спина **3**: слагаемые с двумя производными, действующими на гипермультиплет, и слагаемые без производных. Для того, чтобы сократить слагаемые второго топа, нужно модифицировать вершину (6.52) путем введения аналитического препотенциала $h^{++}$ спина **1** и добавления вершины $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$:

$$(6.1)\ \Rightarrow\ S_{int}^{(s=3)}=-\frac{\kappa_3}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}h^{++MN}\partial_N\partial_M Jq_a^+-\frac{\kappa_3}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}h^{++}Jq_a^+. \tag{6.61}$$

Аналитический препотенциал $h^{++}$ удовлетворяет условию вещественности $\widetilde{h^{++}}=h^{++}$. В результате мы можем сократить все слагаемые и добиться суперконформной инвариантности.

Рассмотрим слагаемые с двумя производными. Требуя инвариантность относительно конформных супердиффеоморфизмов (мы представляем преобразования в форме, явно удовлетворяющей соотношениям (6.53)),

$$\delta_{diff}h^{++MN}=-\hat{\Lambda}h^{++MN}+h^{++MK}(\partial_K\lambda^N)+(-1)^{P(N)[P(M)+P(K)]}h^{++KN}(\partial_K\lambda^M), \tag{6.62}$$

мы сокращаем слагаемые с двумя производными в (6.59). Первое слагаемое является транспортным членом, второе и третье слагаемые смешивают различные препотенциалы. Если ограничиться параметрами суперконформных преобразований (6.9), то несложно убедиться, что необходимо включить в рассмотрение полный набор потенциалов $h^{++MN}$. Ограничиться неприводимыми частями не получится. Например, при действии конформной суперсимметрии (параметр $\eta^i_\rho$ в (6.9)) получаем:

$$\delta_{\eta^i_\rho} h^{++\alpha+\dot\beta+} = -\hat\Lambda h^{++\alpha+\dot\beta+} + h^{++(\alpha\beta)\dot\beta+}\left(\eta^i_\beta u^+_i\right) + \dots\,. \tag{6.63}$$

Таким образом мы видим, что потенциал $h^{++\alpha+\dot\beta+}$ с необходимостью появляется, если есть потенциал $h^{++(\alpha\beta)\dot\beta+}$, содержащий в компонентнах спин 3 . Остальные потенциалы могут быть проанализированы аналогично. Таким образом, мы снова видим, что суперконформная инвариантность вершины приводит и к инвариантности относительно произвольных супердиффеоморфизмов.

Эта тонкость ведет к значительным отличиям суперконформных кубических вершин высших спинов от неконформных, рассмотренных в главе 4. Действительно, относительно Пуанкаре суперсимметрии (параметры $a^{\alpha\dot\alpha}$ и $\epsilon^{\hat\alpha i}$ в (6.9)) достаточно рассматривать только подкласс препотенциалов $h^{++M\alpha\dot\alpha}$ с полностью симметризованными точечными и бесточечными индексами. В данном случае в вершину входят все возможные препотенциалы.

Преобразования супердиффеоморфизмов действуют на $(\mathbf{1},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ часть вершины

$$\delta_{diff}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a} h^{++} J q^+_a = \int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\left(\delta_{diff} h^{++} + \hat\Lambda h^{++}\right) J q^+_a\,, \tag{6.64}$$

и определяя соответствующий закон преобразования для $h^{++}$, мы можем сократить все слагаемые без производных:

$$\begin{aligned}\delta_{diff} h^{++} = &-\hat\Lambda h^{++} - \frac{1}{2}(-1)^{P(K)}\partial_K\left(h^{++MN}\partial_N\partial_M\lambda^K\right)\\ &-\frac{1}{2}(-1)^{P(M)}(\partial_M h^{++MN})(\partial_N\Omega)\,.\end{aligned} \tag{6.65}$$

Первое слагаемое совпадает с аналогичным слагаемым в законе преобразований для супермультиплета спина $\mathbf{1}$ (6.21). Остальные слагаемые сокращают слагаемые без производных, которые были получены в (6.59).

Таким образом мы построили кубическую вершину, которая *инвариантна относительно* $\mathcal{N}=2$ *супердиффеоморфизмов* с произвольными аналитическими параметрами $\lambda^M$ (т.е. инвариантна относительно калибровочной группы $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации). Ка-

либровочные преобразования спина **2** действуют на супермультиплет спина **3** согласно выражениям (6.62) и (6.65). Вывод состоит в том, что кубическая вершина (6.61) инвариантна относительно этих преобразований и преобразований гипермультиплета (6.1).

Если ограничиться только суперконформными преобразованиями и подставить параметры (6.9) в (6.62) и (6.65), то можно получить глобальные $\mathcal{N}=2$ суперконформные преобразования аналитических препотенциалов спина **3**. Мы комбинируем все препотенциалы в аналитический оператор спина **3**, второго порядка по суперпространственным производным:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} := h^{++MN}\partial_N\partial_M + h^{++}. \tag{6.66}$$

### (2) *Калибровочная свобода*

Теперь мы переходим к анализу калибровочной свободы действия:

$$S_{free} + S^{(s=3)}_{int} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)} q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \kappa_3\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}J\right)q^{+}_{a}. \tag{6.67}$$

Обобщение $\mathbf{s}=\mathbf{2}$ калибровочных преобразований (6.35) на случай $\mathbf{s}=\mathbf{3}$ получается путем добавления одной суперпространственной производной,

$$\partial_M = \{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \partial^{-}_{\hat{\alpha}}, \partial^{--}\}. \tag{6.68}$$

$\mathbf{s}=\mathbf{3}$ калибровочные преобразования задаются выражением[3]:

$$\delta^{(s=3)}_{\lambda} q^{+a} = -\frac{\kappa_3}{2}\{\hat{\Lambda}^M, \partial_M\}_{AGB} J q^{+a} - \frac{\kappa_3}{4}\{\Omega^M, \partial_M\}_{AGB} J q^{+a}. \tag{6.69}$$

Здесь мы ввели аналитический дифференциальны оператор первого порядка

$$\hat{\Lambda}^M := \sum_{N\leq M} \lambda^{MN}\partial_N, \tag{6.70}$$

построенный из аналитических параметров, удовлетворяющих условиям

$$\lambda^{MN} = (-1)^{P(M)P(N)}\lambda^{NM},$$

[3]Анти-градуированная скобка определена как $\{F_1, F_2\}_{AGB} := [F_1, F_2]$ для фермионных объектов и как $\{B_1, B_2\}_{AGB} := \{B_1, B_2\}$ для бозонных.

и аналитический весовой фактор

$$\Omega^M := \sum_{N<M} (-1)^{P(N)} \partial_N \lambda^{NM}. \tag{6.71}$$

Вообще говоря, есть некоторый произвол в выборе слагаемых низшей степени по производным (но не высших!), который при этом не меняет числа независимых калибровочных параметров. Мы выбираем слагаемые низшей степени таким образом, чтобы получить наиболее простой суперполевой закон калибровочного преобразования для потенциалов. Такие слагаемые действуют только на поле $h^{++}$, которое содержит чисто калибровочные степени свободы, как будет показано ниже.

Калибровочные параметры удовлетворяют условиям действительности, которые следуют из требования действительности вариации (6.69). Эти условия имеют такую же форму, как условия вещественности, налагаемые на аналитические препотенциалы (6.58):

$$\widetilde{\lambda^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}} = \lambda^{\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta}, \qquad \widetilde{\lambda^{++++}} = \lambda^{++++}, \tag{6.72a}$$

$$\widetilde{\lambda^{[\beta+\gamma]+}} = -\lambda^{[\dot\beta+\dot\gamma]+}, \qquad \widetilde{\lambda^{[\dot\beta+\dot\gamma]+}} = -\lambda^{[\beta+\gamma]+}, \tag{6.72b}$$

$$\widetilde{\lambda^{\beta+\alpha\dot\alpha}} = -\lambda^{\dot\beta+\alpha\dot\alpha}, \qquad \widetilde{\lambda^{\dot\beta+\alpha\dot\alpha}} = \lambda^{\beta+\alpha\dot\alpha}, \tag{6.72c}$$

$$\widetilde{\lambda^{\alpha\dot\alpha++}} = \lambda^{\alpha\dot\alpha++}, \qquad \widetilde{\lambda^{\alpha+\dot\alpha+}} = -\lambda^{\alpha+\dot\alpha+}, \tag{6.72d}$$

$$\widetilde{\lambda^{++\beta+}} = -\lambda^{++\dot\beta+}, \qquad \widetilde{\lambda^{++\dot\beta+}} = \lambda^{++\beta+}. \tag{6.72e}$$

Вариация действия свободного гипермультиплета относительно общих преобразований (6.69) с произвольными аналитическими параметрами $\lambda^{MN}(\zeta)$ имеет вид (с точностью до полных производных)[4]:

$$\delta_\lambda^{(s=3)} S_{free} = \frac{\kappa_3}{4} \int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} \left[\mathcal{D}^{++}, \{\hat\Lambda^M, \partial_M\}_{AGB}\right] J q_a^+. \tag{6.73}$$

Поскольку в полученном выражении стоит коммутатор дифференциального оператора первой степени по производным и второй степени по производным, в результате получатся слагаемые второй, первой и нулевой степени по производным. С использованием соотношения (6.60) можно свести слагаемые с одной производной к слагаемым без производных. Тем самым, эти слагаемые можно сократить калибровочной вариацией оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}$.

[4]Используя этот результат, можно получить глобальные суперконформные симметрии высших спинов для безмассового гипермультиплета и соответствующие конформные суперполя токов.

Требование калибровочной инвариантности

$$\delta_\lambda^{(s=3)} S_{hyper} + \delta_\lambda^{(s=3)} S_{int} = 0 \tag{6.74}$$

в лидирующем порядке дает линеаризованные калибровочные преобразования аналитических потенциалов. Калибровочный закон преобразования может быть формально представлен как[5]:

$$\delta_\lambda^{(s=3)} \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}^{++}, \{\hat{\Lambda}^M, \partial_M\}_{AGB}\right]. \tag{6.75}$$

Действие $S_{hyper} + S_{int}^{(s=3)}$ также инвариантно относительно $U(1)$ калибровочных преобразований, которые реализуются стандартным образом:

$$\delta_\lambda q^{+a} = -\kappa_3 \lambda J q^{+a}, \qquad \delta_\lambda h^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda. \tag{6.76}$$

### ③ *Калибровка Весса-Зумино*

Линеаризованные калибровочные преобразования препотенциалов могут быть напрямую выделены из закона преобразования суперполевого оператора (6.75):

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha\beta\dot\beta} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} + 2i\left(\lambda^{\alpha\dot\alpha\beta+}\bar\theta^{+\dot\beta} + \lambda^{\beta\dot\beta\alpha+}\bar\theta^{+\dot\alpha}\right) \\ & \qquad\qquad - 2i\left(\bar\lambda^{\alpha\dot\alpha\dot\beta+}\theta^{+\beta} + \bar\lambda^{\beta\dot\beta\dot\alpha+}\theta^{+\alpha}\right), \\ 2\delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha\beta+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha\beta+} - 8i\lambda^{[\alpha+\beta]+}\bar\theta^{+\dot\alpha} - 8i\lambda^{\beta+\dot\alpha+}\theta^{+\alpha} - \lambda^{\alpha\dot\alpha++}\theta^{+\beta}, \\ 2\delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha++} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha++} + 4i\lambda^{++\alpha+}\bar\theta^{+\dot\alpha} - 4i\lambda^{++\dot\alpha+}\theta^{+\alpha}, \end{cases} \tag{6.77a}$$

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++[\alpha+\beta]+} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{[\alpha+\beta]+} - \lambda^{++[\alpha+}\theta^{+\beta]}, \\ 2\delta_\lambda h^{++\alpha+\dot\alpha+} &= 2\mathcal{D}^{++}\lambda^{\alpha+\dot\alpha+} - \lambda^{++\alpha+}\bar\theta^{+\dot\alpha} + \lambda^{++\dot\alpha+}\theta^{+\alpha}, \\ 2\delta_\lambda h^{++\hat\alpha+++} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{\hat\alpha+++} - 2\theta^{+\hat\alpha}\lambda^{(+4)}, \\ \delta_\lambda h^{(+6)} &= \mathcal{D}^{++}\lambda^{(+4)}, \end{cases} \tag{6.77b}$$

[5] В этом выражении предполагается, что нужно интегрировать по частям для слагаемых с одной производной для того, чтобы привести их к слагаемым без производных и сократить калибровочным преобразованием суперполя $h^{++}$ в $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}$. В формуле (6.75) мы предполагаем, что такие манипуляции проделаны.

$$
\begin{aligned}
\delta_\lambda h^{++} = \mathcal{D}^{++}\lambda &+ 2i\bar\theta^{+\dot\rho}\left(\partial_{\alpha\dot\rho}\partial^-_\beta\lambda^{[\alpha+\beta]+}\right) - 2i\theta^{+\rho}\left(\partial_{\rho\dot\alpha}\partial^-_{\dot\beta}\lambda^{[\dot\alpha+\dot\beta]+}\right)\\
&+ 2i\bar\theta^{+\dot\rho}\left(\partial_{\alpha\dot\rho}\partial^-_{\dot\beta}\lambda^{\alpha+\dot\beta+}\right) - 2i\theta^{+\rho}\left(\partial_{\rho\dot\alpha}\partial^-_{\beta}\lambda^{\dot\alpha+\beta+}\right)\\
&+ 2i\bar\theta^{+\dot\rho}\left(\partial_{\alpha\dot\rho}\partial^{--}\lambda^{\alpha+++}\right) - 2i\theta^{+\rho}\left(\partial_{\rho\dot\beta}\partial^{--}\lambda^{\dot\beta+++}\right)\\
&- 8i\partial_{\alpha\dot\alpha}\lambda^{\alpha+\dot\alpha+} + \frac{1}{2}\theta^{+\hat\rho}\left(\partial^-_{\hat\rho}\partial^{--}\lambda^{++++}\right) - 2(\partial^{--}\lambda^{++++}).
\end{aligned}
\tag{6.77c}
$$

Используя эти преобразования, можно наложить калибровку Весса-Зумино. Только препотенциалы вида $h^{++\alpha\dot\alpha M}$ содержат поля $\mathcal{N}=2$ супермультиплета спина **3** (**s** = **3** супермультиплета Вейля):

$$
\begin{cases}
h^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = -4i\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}\Phi^{(\alpha\beta\rho)(\dot\alpha\dot\beta\dot\rho)} - (\bar\theta^+)^2\theta^+_\rho\psi^{(\alpha\beta\rho)(\dot\alpha\dot\beta)i}u^-_i\\
\qquad\qquad\qquad\qquad - (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar\psi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta\dot\rho)i}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2V^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)ij}u^-_iu^-_j\,,\\
h^{++(\alpha\beta)\dot\alpha+} = (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\nu}\mathcal{P}^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\nu)} + (\bar\theta^+)^2\theta^+_\nu T^{(\alpha\beta\nu)\dot\alpha} + (\theta^+)^4\chi^{(\alpha\beta)\dot\alpha i}u^-_i\,,\\
h^{++\alpha(\dot\alpha\dot\beta)+} = \widetilde{h^{++(\alpha\beta)\dot\alpha+}}\,,\\
h^{(+4)\alpha\dot\alpha} = (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2D^{\alpha\dot\alpha}\,.
\end{cases}
\tag{6.78}
$$

Все остальные препотенциалы могут быть полностью откалиброваны[6] с использованием калибровочной свободы (6.77b) и (6.77c). Это довольно сложная техническая процедура и сответствующих промежуточных вычислений мы тут не приводим. На все поля, представленные в калибровке (6.78), действуют остаточные калибровочные преобразования. В результате мы получаем набор полей[7]:

***Бозонный сектор***:

• *Конформное поле спина 3* с калибровочной свободой (7 степеней свободы BMO):

$$
\delta\Phi^{(\alpha\beta\rho)(\dot\alpha\dot\beta\dot\rho)} = \partial^{(\dot\rho(\rho}a^{\alpha\beta)\dot\alpha\dot\beta)}.
\tag{6.79}
$$

• *Триплет конформных гравитонов (полей спина 2 )* (15 степеней свободы BMO):

$$
V^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)(ij)} = \partial^{(\dot\alpha(\alpha}v^{\beta)\dot\beta)(ij)}.
\tag{6.80}
$$

[6]Похожие чисто калибровочные степени свободы также использовались в ряде работ по конформным высшим спинам, например в работе [72] (конкретно раздел 3.4). После исключения таких полей конформные преобразования уже являются нелинейными по полям.

[7]Некоторые поля требуют переопределения, как и во всех предыдущих примерах.

- *Конформный гравитон* (5 степеней свободы ВМО):

$$\delta\mathcal{P}^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \partial^{(\dot\alpha(\alpha}p^{\beta)\dot\beta)}. \tag{6.81}$$

- *Калибровочное поле для самодуальной симметрии 2-формы* (10 степеней свободы ВМО):

$$\delta T^{(\alpha\beta\rho)\dot\alpha} = \partial^{\dot\alpha(\rho}b^{\alpha\beta)}. \tag{6.82}$$

Спин-тензорные поля $T^{(\alpha\beta\gamma)\dot\alpha}$ и комплексно сопряженное $\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)\alpha}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с тензором $T^{[ab]d}$:

$$T^{[ab]c} = \sigma^{[ab]}_{(\alpha\beta)}\sigma^{c}_{\gamma\dot\gamma}T^{(\alpha\beta\gamma)\dot\gamma} + \tilde\sigma^{[ab]}_{(\dot\alpha\dot\beta)}\sigma^{c}_{\dot\gamma\gamma}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma)\gamma}. \tag{6.83}$$

Как следствие свойств $\sigma$-матриц, тензор удовлетворяет свойству:

$$T^{[abc]} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad T^{[ab]c} + T^{[bc]a} + T^{[ca]b} = 0. \tag{6.84}$$

Такие свойства симметрии соответствуют простой крюковой диаграмме Юнга $\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$. Более того, свойства $\sigma$-матриц приводят в условию бесследовости $T^{[ab]}_{\ \ b} = 0$. Калибровочная свобода задается формулой:

$$\delta T^{[ab]c} = 2\partial^{[a}b^{b]c} - 2\partial^{c}b^{[ab]}, \qquad b^{[ab]} = \sigma^{[ab]}_{(\alpha\beta)}b^{(\alpha\beta)} + \sigma^{[ab]}_{(\dot\alpha\dot\beta)}\bar b^{(\dot\alpha\dot\beta)}. \tag{6.85}$$

Такое поле называется "крюковым" полем (hook field) (или конформным псевдо-гравитоном). Оно впервые рассматривалось в работах [170, 171] как возможное обобщение калибровочных полей[8]. Мотивацией для рассмотрения таких полей было построение дуальных формулировок теорий со спинами $s \neq 1$. Таким образом, на эти поля можно смотреть как на обобщение поля нотофа (notoph), введенного Огиевецким и Полубариновым [173] (см. обзор в [174]).

- *Калибровочное поле спина 3* (3 степени свободы ВМО):

$$\delta D^{\alpha\dot\alpha} = \partial^{\alpha\dot\alpha}d. \tag{6.86}$$

***Фермионный сектор***:

[8] Построение конформного и калибровочно инвариантного действия для такого поля приведено, например, в работе [172].

- *Дублет конформных полей спина* $\frac{5}{2}$ (24 степени свободы ВМО):

$$\delta\psi^{(\alpha\beta\rho)(\dot\alpha\dot\beta)i} = -12\partial^{(\dot\alpha(\rho}b^{\alpha\beta)\dot\beta)i}. \tag{6.87}$$

- *Дублет калибровочных полей спина* $\frac{3}{2}$ $\chi^{(\alpha\beta)\dot\alpha i}$ (16 степеней свободы ВМО):

$$\delta\chi^{(\alpha\beta)\dot\alpha i} = \partial^{\dot\alpha(\alpha}t^{\beta)i}. \tag{6.88}$$

Таким образом, суперконформный $\mathcal{N}=2$ мультиплет спина $\mathbf{3}$ содержит $\mathbf{40}_B+\mathbf{40}_F$ степеней свободы ВМО. Отметим, что как поле спина 3 так и поле 1 одновременно выключены в $\mathcal{N}=2$ супермультиплет. Интересно установить связь с предположением Григорьева и Цейтлина [73,74] о калибровочной инвариантности системы конформных спинов 1 и 3 на произвольном кривом фоне.

## 6.6 Обобщение на произвольный супергравитационный фон

Рассмотрим действие гипермультиплета, взаимодействующего с $\mathcal{N}=2$ супермультиплетами спина $\mathbf{2}$ и $\mathbf{3}$:

$$S = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \kappa_2\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} + \kappa_3\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}J\right)q^+_a. \tag{6.89}$$

Мы знаем, что это действие инвариантно относительно глобальных суперконформных преобразований. Сумма всех трех слагаемых инвариантна относительно нелинейных калибровочных преобразований спина $\mathbf{2}$ (6.1), (6.40), (6.62), сумма первого и третьего инвариантна относительно линеаризованных калибровочных преобразований спина $\mathbf{3}$ (6.69), (6.75) в лидирующем порядке по $\kappa_3$.

Осталось рассмотреть только преобразование второго слагаемого под действием калибровочных преобразований гипермультиплета спина $\mathbf{3}$ (6.69). Мы проверили, что вершина $(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ преобразуется как:

$$\begin{aligned}\delta^{(s=3)}_\lambda\left(q^{+a}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}q^+_a\right) = &-\frac{\kappa_3}{2}q^{+a}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)},\{\hat\Lambda^M,\partial_M\}_{AGB}\right]Jq^+_a\\ &-\frac{\kappa_3}{4}q^{+a}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)},\{\Omega^M,\partial_M\}_{AGB}\right]Jq^+_a.\end{aligned} \tag{6.90}$$

Все получившиеся слагаемые могут быть сведены к слагаемым второго порядка и нулевого

порядка по производным. Эти слагаемые могут быть сокращены путем включения дополнительных слагемых, зависящих от спина **2**, в калибровочные преобразования (6.75) мультиплета спина **3**:

$$\delta^{ad}_{\lambda}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} = \frac{\kappa_2}{2}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}, \{\hat{\Lambda}^M, \partial_M\}_{AGB}\right] + \frac{\kappa_2}{4}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}, \{\Omega^M, \partial_M\}_{AGB}\right]. \tag{6.91}$$

Эти слагаемые деформируют закон преобразования (6.75) на общий фон $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации:

$$\delta^{(s=3)}_{\lambda|full}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{D}^{++}, \{\hat{\Lambda}^M, \partial_M\}_{AGB}\right] + \frac{\kappa_2}{4}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)}, \{\Omega^M, \partial_M\}_{AGB}\right]. \tag{6.92}$$

Последнее слагаемое действует только на $h^{++}$ в операторе $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}$.

Таким образом, мы показали, что действие (6.89) инвариантно относительно преобразований спина **3** в лидирующем порядке по $\kappa_3$ и в произвольном порядке по $\kappa_2$. Это означает, что построенная кубическая вершина $(\mathbf{3}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ инвариантна относительно полной калибровочной группы $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации. На компонентном уровне, после исключения вспомогательных полей, это действие содержит взаимодействие конформных полей Фрадкина-Цейтлина спина 3 с компонентными полями гипемультиплета на *общем* фоне $\mathcal{N}=2$ Вейлевской супергравитации (а значит, в частности, и на фоне гравитации). Отметим, что поля супермультиплета спина **3** в действии (6.89) не взаимодействуют напрямую с полями супергравитации; взаимодействие переносится вспомогательными полями гипермультиплета.

## 6.7 $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина s и кубическая вершина $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$

В этом разделе, следуя стратегии секции 6.2, мы обобщаем результаты полученные для $\mathcal{N}=2$ суперконформного мультиплета спина **3** на случай произвольного целочисленного спина **s**.

Общая суперконформная вершина $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ имеет вид:

$$S^{(s)}_{int} = -\frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}\,(J)^{P(s)}\, q^{+}_{a}. \tag{6.93}$$

Здесь $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ – аналитический дифференциальный опреатор, включающий общие слагаемые с

числом $s-1$, $s-3$, ... $1/0$ (для четных $s$/нечетных $s$) суперпространственных производных:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} := h^{++M_1\dots M_{s-1}}\partial_{M_{s-1}}\dots\partial_{M_1} + h^{++M_1\dots M_{s-3}}\partial_{M_{s-3}}\dots\partial_{M_1} + \dots + \begin{cases} h^{++M}\partial_M & (\text{четные } s) \\ h^{++} & (\text{нечетные } s). \end{cases} \tag{6.94}$$

Слагаемые с $s-1$, $s-3$, ... формально отвечают спинам $\mathbf{s}$, $\mathbf{s-2}$, .... Все спины, кроме старшего $\mathbf{s}$, являются вспомогательными и обеспечивают инвариантность вершины. Все слагаемые не имеют симметризации по индексам, что следует из требования $\mathcal{N}=2$ суперконформной инвариантности (аналогично случаю спина $\mathbf{3}$). Аналитические препотенциалы $h^{++\cdots}(\zeta)$ для любой пары соседних индексов удовлетворяют условиям:

$$h^{++M_1\dots M_nM_k\dots M_{s-1}} = (-1)^{P(M_k)P(M_n)}h^{++M_1\dots M_kM_n\dots M_{s-1}}. \tag{6.95}$$

Из этого условия можно вывести соотношение для перестановки любых двух индексов. Также оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$ удовлетворяет условию вещественности:

$$\widetilde{\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}} = \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}. \tag{6.96}$$

Отсюда можно найти условия вещественности на препотенциалы $h^{++M_1\dots M_n}$.

**(1)** ***$\mathcal{N}=2$ суперконформная симметрия***

Под действием супердиффеоморфизмов (6.14), получаем вариацию общей вершины:

$$\begin{aligned}\delta_{diff}S^{(s)}_{int} =& \frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)},\hat{\Lambda}]\,(J)^{P(s)}\,q^+_a + \frac{\kappa_s}{4}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)},\Omega]\,(J)^{P(s)}\,q^+_a \\ &- \frac{\kappa_s}{2}\int d\zeta^{(-4)}\,q^{+a}\delta_{diff}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}\,(J)^{P(s)}\,q^+_a.\end{aligned} \tag{6.97}$$

Вычисляя коммутаторы в первой строчке, получаем слагаемые с разным количеством суперпространственных производных ($s-1, s-2, \dots$), действующих на гипермультиплет. (По аналогии со случаем спина $\mathbf{3}$, как в уравнении (6.59)). Это и приводит к необходимости добавлять вспомогательные спины в оператор $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$. Рассмотрим, каким образом эти слагаемые могут быть сокращены.

- Для четных спинов $\mathbf{s}$ можно всегда преобразовать слагаемые с четным числом производных к слагаемым с нечетным числом. Тогда они могут быть компенсированы соответствующей вариацией препотенциалов в операторе (6.94).

Проиллюстрируем сделанное утверждение примером. Рассмотрим слагаемое с двумя производными в случае спина **4**:

$$q^{+a}h^{++MNKL}\left(\partial_L\partial_K\partial_N\lambda^R\right)\partial_R\partial_M q_a^+. \tag{6.98}$$

Выражение $T^{++MR} := h^{++MNKL}\left(\partial_L\partial_K\partial_N\lambda^R\right)$ при перестановке индексов $R$ и $M$ обладает свойством:

$$T^{++MR} = (-1)^{P(R)P(M)}T^{++RM}, \tag{6.99}$$

поскольку оно входит умноженным на комбинацию производных $\partial_R\partial_M = (-1)^{P(M)P(R)}\partial_M\partial_R$. После интегрирования по частям (мы опускаем полные производные) получаем:

$$T^{++MR}q^{+a}\partial_R\partial_M q_a^+ = -(-1)^{(P(M)+P(R))P(R)}\left(\partial_R T^{++MR}\right)q^{+a}\partial_M q_a^+ - T^{++MR}\partial_R q^{+a}\partial_M q_a^+. \tag{6.100}$$

Второе слагаемое зануляется как следствие симметрии (6.99). Таким образом, мы редуцировали слагаемое с двумя производными, действующими на $q_a^+$, к слагаемому с одной производной.

Приведенные рассуждения применимы и к общему случаю. Для того, чтобы показать это в общем случае, надо проинтегрировать по частям и привести все слагаемые либо к нечетному числу производных, действующих на $q_a^+$ (и не действующих на второе $q^{+a}$), либо к слагаемым, где одинаковое число производных действует на $q^{+a}$ и на $q_a^+$ а после этого воспользоваться соотношениями вида

$$h^{++\ldots N_1\ldots N_nM_1\ldots M_n\ldots}\partial_{N_1}\ldots\partial_{N_n}q^{+a}\partial_{M_1}\ldots\partial_{M_n}q_a^+ = 0, \tag{6.101}$$

которые являются обобщением тождества $q^{+a}q_a^+ = 0$.

• В случае нечетного **s** аналогичным образом можно привести слагаемые с нечетным числом производных к слагаемым с четным числом производных, интегрируя по частям и используя соотношение:

$$h^{++N_1\ldots N_nM_1\ldots M_nK}\partial_{N_1}\ldots\partial_{N_n}q^{+a}\partial_K\partial_{M_1}\ldots\partial_{M_n}Jq_a^+ = \frac{1}{2}h^{++N_1\ldots N_nM_1\ldots M_nK}\partial_K\left(\partial_{N_1}\ldots\partial_{N_n}q^{+a}\partial_{M_1}\ldots\partial_{M_n}Jq_a^+\right). \tag{6.102}$$

В результате, для любого значения **s** можно сократить слагаемые из $[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)},\hat{\Lambda}]$ и $[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)},\Omega]$

соответствующими преобразованиями калибровочных препотенциалов

$$\delta_{diff}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} = [\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}, \hat{\Lambda}] + \frac{1}{2}[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}, \Omega] \tag{6.103}$$

и тем самым обеспечить инвариантность относительно супердиффеоморфизмов (и, как следствие, суперконформных преобразований) для вершины (6.93). В формуле (6.103) мы предполагаем, что различные слагаемые в правой части равенства должны быть приведены к форме оператора в левой части равенства. Роль слагаемых с меньшим числом производных такая же, как и в случае спина **3**: они сокращают слагаемые с меньшим числом производных, которые возникают из коммутаторов $[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}, \hat{\Lambda}]$ и $[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}, \Omega]$.

**(2) *Калибровочная свобода***

Действие

$$S_{free} + S^{(s)}_{int} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\left(\mathcal{D}^{++} + \kappa_s \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}\,(J)^{P(s)}\right) q^{+}_{a} \tag{6.104}$$

инвариантно относительно семейства калибровочных преобразований гипермультиплета ($k$ это целое число, принимающее значения $k = s, s-2, s-4\ldots$):

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}_{\lambda} q^{+a} = &-\frac{\kappa_s}{2}\left\{\hat{\Lambda}^{M_1\ldots M_{k-2}}, \partial_{M_{k-2}}\ldots\partial_{M_1}\right\}_{AGB}(J)^{P(s)}\, q^{+a} \\ &-\frac{\kappa_s}{4}\left\{\Omega^{M_1\ldots M_{k-2}}, \partial_{M_{k-2}}\ldots\partial_{M_1}\right\}_{AGB}(J)^{P(s)}\, q^{+a},\end{aligned} \tag{6.105}$$

сопровождающихся калибровочными преобразованиями аналитических препотенциалов:

$$\delta_{\lambda}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}^{++}, \left\{\hat{\Lambda}^{M_1\ldots M_{k-2}}, \partial_{M_{k-2}}\ldots\partial_{M_1}\right\}_{AGB}\right]. \tag{6.106}$$

Эти преобразования являются прямым обобщением преобразований для случая спина **3**. Формула (6.106) является символической, в том же смысле, как и (6.103). Здесь предполагается, что нужно преобразовать слагаемые, следующие из второй строчки способом, описанным выше.

В этих формулах мы использовали обозначения для аналитического оператора:

$$\hat{\Lambda}^{M_1\ldots M_k} := \sum_{N\le M_k\cdots\le M_1} \lambda^{M_1\ldots M_k N}\partial_N \tag{6.107}$$

и для аналитического весового фактора:

$$\Omega^{M_1\ldots M_k} := \sum_{N\le M_k\cdots\le M_1} (-1)^{P(N)}\partial_N \lambda^{N M_1\ldots M_k}. \tag{6.108}$$

Параметры $\lambda$ являются произвольными аналитическими суперполями и удовлетворяют условиям

$$\lambda^{\dots MN\dots} = (-1)^{P(M)P(N)}\lambda^{\dots NM\dots} \tag{6.109}$$

для любой пары соседних индексов. Эти условия имеют такую же форму как и для аналитических потенциалов (6.95). Требование действительности вариации (6.105) приводит к соответственным условиям действительности на параметры.

Полученное семейство калибровочных преобразований можно рассматривать как калибровочные преобразования для частей со спинами $\mathbf{s}$, $\mathbf{s-2}$, $\dots$ дифференциального оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}$.

### ③ *Калибровка Весса-Зумино*

Калибровочная свобода (6.106) позволяет занулить большое количество полей. Калибровка Весса-Зумино может быть выбрана так же, как и в случае спина $\mathbf{3}$[9]:

$$\begin{cases} h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = -4i\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}\Phi^{(\rho\alpha(s-1))(\dot\rho\dot\alpha(s-1))} - (\bar\theta^+)^2\theta^+_\rho\psi^{(\rho\alpha(s-1))\dot\alpha(s-1)i}u^-_i \\ \qquad\qquad - (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar\psi^{\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-1)\dot\rho)i}u^-_i + (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)ij}u^-_iu^-_j\,, \\ h^{++\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)+} = (\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\nu}P^{\alpha(s-1)(\dot\alpha(s-2)\dot\nu)} + (\bar\theta^+)^2\theta^+_\nu T^{(\alpha(s-1)\nu)\dot\alpha(s-2)} \\ \qquad\qquad + (\theta^+)^4\chi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)i}u^-_i\,, \\ h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-1)+} = h^{++\widetilde{\alpha(s-1)\dot\alpha}(s-2)+}\,, \\ h^{(+4)\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = (\theta^+)^2(\bar\theta^+)^2D^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\,. \end{cases} \tag{6.110}$$

Все оставшиеся аналитические препотенциалы из оператора (6.94) несут чисто калибровочные степени свободы. Можно рассмотреть специальную калибровку, в которой все препотенциалы, кроме $h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}$, зануляются[10]. Однако, в такой калибровке суперконформные преобразования являются нелинейными и должны сопровождаться калибровочными преобразованиями, явно зависящими от препотенциалов. Это значительно усложняет работу с симметриями.

Таким образом, мы получили $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина $\mathbf{s}$. Супермультиплет состоит из полей с калибровочными преобразованиями:

[9] Вид калибровки получен обобщением случая спина $\mathbf{3}$, требованием сохранения её формы и требования равенства бозонных и фермионных степеней свободы ВМО.

[10] В такой калибровке можно представить дифференциальный оператор как

$$\mathcal{H}^{++}_s = h^{++\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)M}\partial_M\partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = (D^+)^4\left(\Upsilon^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\mathcal{D}^{--}\right)\partial^{(s-2)}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}.$$

Это обеспечивает прямое соответствие с результатами, полученными в работе [118].

***Бозонный сектор***:

- *Конформное поле спина* $s$ ($2s+1$ степеней свободы ВМО):

$$\delta\Phi^{\alpha(s)\dot\alpha(s)} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} a^{\alpha(s-1))\dot\alpha(s-1))}. \tag{6.111}$$

Такие поля были впервые введены в работе Фрадкина и Цейтлина [35].

- *Триплет конформных полей спина* $s-1$ ($3(2s-1)$ степеней свободы ВМО):

$$\delta V^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)ij} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} v^{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2))}. \tag{6.112}$$

- *Конформное поле спина* $s-1$ ($3(2s-1)$ степеней свободы ВМО):

$$\delta P^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} p^{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-2))}. \tag{6.113}$$

- *Обобщенное конформное калибровочное поле* ($2(2s-1)$ степеней свободы ВМО):

$$\delta T^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} t^{\alpha(s-1))\dot\alpha(s-3))}. \tag{6.114}$$

Такие комплексные калибровочные поля появлялись при рассмотрении $\mathcal{N}=1$ суперконформных мультиплетов в работах [36] (уравнение (3.16)) и [175]. Калибровочно-инвариантные напряженности и конформные действия для них были также представлены в [36] (см. формулу (0.15)). В работах [172, 176, 177] калибровочно-инвариантное действие для таких полей было построено для конформно-плоских пространств.

- *Конформное поле спина* $s-2$ ($2s-3$ степеней свободы ВМО):

$$\delta D^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} d^{\alpha(s-3))\dot\alpha(s-3))}. \tag{6.115}$$

***Фермионный сектор***:

- *Дублет фермионов спина* $s-\frac{1}{2}$ ($8s$ степеней свободы ВМО):

$$\delta\psi^{\alpha(s)\dot\alpha(s-1)i} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} b^{\alpha(s-1))\dot\alpha(s-2))i}. \tag{6.116}$$

- *Дублет фермионов спина* $s-\frac{3}{2}$ ($8(s-1)$ степеней свободы ВМО):

$$\delta\chi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-2)i} = \partial^{(\alpha(\dot\alpha} c^{\alpha(s-2))\dot\alpha(s-3))i}. \tag{6.117}$$

Таким образом, общий $\mathcal{N}=2$ суперконформный мультиплет спина $\mathbf{s}$ содержит $\mathbf{8(2s-1)}_B+\mathbf{8(2s-1)}_F$ степеней свободы вне массовой оболочки. Интересно, что все поля в $\mathcal{N}=2$ суперконформных мультиплетах высших спинов являются калибровочными (случаи низших $\mathcal{N}=2$ спина $\mathbf{1}$ и $\mathcal{N}=2$ спина $\mathbf{2}$ представляют исключения). Это существенное отличие от случая $\mathcal{N}=2$ неконформных высших спинов, представленных в главе 2. Отметим, что вспомогательные поля также отсутствуют и в мультиплетах $\mathcal{N}=1$ высших спинов [36][11]. В связи с $\mathcal{N}=1$ суперконформными мультиплетами высших спинов, интересно отметит, что полученные $\mathcal{N}=2$ суперконформные мультиплеты раскладываются в сумму трех $\mathcal{N}=1$ супермультиплетов: высшего спина $\mathbf{s}$ ($4s_B+4s_F$ степеней свободы BMO), высшего спина $\mathbf{s-1}$ ($4(s-1)_B+4(s-1)_F$ степеней свободы BMO) и высшего спина $\mathbf{s-\frac{1}{2}}$ ($4(2s-1)_B+4(2s-1)_F$ степеней свободы BMO).

**(4) *Обобщение на произвольный супергравитационный фон***

Теперь рассмотрим обобщение действия (6.104) на произвольный фон $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации:

$$S=-\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}q^{+a}\left(\mathfrak{D}^{++}+\kappa_s\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}(J)^{P(s)}\right)q^+_a. \tag{6.118}$$

Оно может быть проанализировано в полной аналогии с разобранным ранее случаем спина $\mathbf{3}$. Мы сразу приведём результаты.

Это действие инвариантно относительно:

1. *Нелинейных калибровочных преобразований спина* $\mathbf{2}$ (т.е. относительно калибровочной группы конформной $\mathcal{N}=2$ супергравитации). Действие этих преобразований на аналитические препотенциалы спина $\mathbf{s}$ даны в (6.103), для гипермультиплета и спина 2 в разделе 6.4.

2. *Калибровочных преобразований спина* $\mathbf{s}$ в лидирующем порядке по $\kappa_s$. Полная форма таких преобразований с учетом препотенциалов фоновой конформной $\mathcal{N}=2$ супергравитации дается выражением:

$$\begin{aligned}\delta_\lambda\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)}=&\frac{1}{2}\left[\mathfrak{D}^{++},\left\{\hat{\Lambda}^{M_1\dots M_{k-2}},\partial_{M_{k-2}}\dots\partial_{M_1}\right\}_{AGB}\right]\\&+\frac{1}{4}\left[\mathfrak{D}^{++},\left\{\Omega^{M_1\dots M_{k-2}},\partial_{M_{k-2}}\dots\partial_{M_1}\right\}_{AGB}\right].\end{aligned} \tag{6.119}$$

Для гипермультиплета эти преобразования задаются формулой (6.106). Отметим, что во втором слагаемом плоская часть $\mathcal{D}^{++}$ зануляется, тем самым в плоском пределе

[11] Основываясь на этом наблюдении, можно предположить, что и во всех $\mathcal{N}$-расширенных суперконформных мультиплетах высших спинов нет вспомогательных полей.

восстанавливается формула (6.106).

Таким образом, действие (6.118) описывает ковариантную суперконформную кубическую вершину $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ на произвольном фоне $\mathcal{N} = 2$ конформной супергравитации.

## 6.8 О полностью согласованном кубическом взаимодействии $\mathcal{N} = 2$ конформных высших спинов с гипермультиплетом

В предыдущем разделе мы построили суперконформную вершину $(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$, согласованную в лидирующем порядке по $\kappa_s$. В этом разделе мы рассмотрим возможность построения вершины, калибровочно инвариантной в следующих порядках по константе взаимодействия. Рассмотрим простейший случай спина **3** на искривленном суперпространстве:

$$S_{(s=3)} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\left(\mathfrak{D}^{++} + \kappa_3 \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} J\right) q^{+}_{a}. \tag{6.120}$$

Как обсуждалось ранее, эта вершина инвариантна в лидирующем порядке по $\kappa_3$. В следующем порядке $\kappa_3^2$ для вариации вершины под действием калибровочных преобразований гипермультиплета (6.69) получаем:

$$\delta^{(s=3)}_{\lambda}\left(-\frac{\kappa_3}{2} q^{+a}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} J q^{+}_{a}\right) = -\frac{\kappa_3^2}{4} q^{+a}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}, \left\{\hat{\Lambda}^M + \frac{1}{2}\Omega^M, \partial_M\right\}_{AGB}\right] q^{+}_{a}. \tag{6.121}$$

В результате мы получаем дифференциальный оператор третьего порядка по суперпространственным производным. Это слагаемое можно сократить, используя препотенциалы суперконформного мультиплета спина **4**, и деформируя закон преобразования оператора $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=4)}$:

$$\kappa_4 \delta^{(s=3)}_{\lambda}\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=4)} = -\frac{\kappa_3^2}{4}\left[\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}, \left\{\hat{\Lambda}^M + \frac{1}{2}\Omega^M, \partial_M\right\}_{AGB}\right]. \tag{6.122}$$

Здесь предполагается использование преобразований, приводящих правую часть к такому же виду, как в левой части. Это преобразование смешивает различные $\mathcal{N} = 2$ суперконформные мультиплеты, т.е. является нелинейным.

Таким образом, действие

$$S_{s=3,4} = -\frac{1}{2}\int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a}\left(\mathfrak{D}^{++} + \kappa_3 \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)} J + \kappa_4 \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=4)}\right) q^{+}_{a} \tag{6.123}$$

является инвариантным в порядке $\kappa_3^2$. Однако, действие (6.123) не является инвариантным в порядке $\kappa_3\kappa_4$. Однако такое слагаемое можно скомпенсировать введя слагаемое с $\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=5)}$, и

так далее, шаг за шагом.

Чтобы полностью выполнить эту процедуру, мы вводим аналитический дифференциальный оператор, который включает все целочисленные конформные высшие спины:

$$\hat{\mathbf{H}}^{++} := \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s \hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s)} (J)^{P(s)}. \tag{6.124}$$

Ясно, что из-за наличия слагаемых произвольной структуры по суперпространственным производным, любая вариация гипермультиплета может быть сокращена преобразованием этой "башни".

В результате мы приходим к действию бесконечной башни целочисленных $\mathcal{N} = 2$ суперконформных высших спинов на фоне $\mathcal{N} = 2$ конформной супергравитации:

$$S_{full} = -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} \left( \mathfrak{D}^{++} + \hat{\mathbf{H}}^{++} \right) q^{+}_{a}. \tag{6.125}$$

Тогда, соответствующей нелинейной деформацией закона преобразования $\hat{\mathbf{H}}^{++}$, всегда можно добиться инвариантности действия, т.е. компенсировать все возникающие слагаемые, поскольку оператор $\hat{\mathbf{H}}^{++}$ является наиболее общим. Обозначим сумму калибровочных преобразований гипермультиплета (6.105) (калибровочные законы преобразования гипермультиплета мы не деформируем) для всей башни спинов:

$$\delta_\lambda q^{+a} = -\hat{\mathcal{U}} q^{+a} = -\sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s \hat{\mathcal{U}}_s q^{+a}. \tag{6.126}$$

Преобразования (6.126) действуют линейно на гипермультиплет и содержат все возможные суперпространственные производные. Мы используем обозначение $\hat{\mathcal{U}}_s$ для калибровочного преобразования спина $s$ (с суммой по всем значениям $k$ в формуле (6.105)). Вариация свободного действия гипермультиплета на фоне конформной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации при таком преобразовании приводит к выражению:

$$\delta^{(s)}_\lambda \int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} \mathfrak{D}^{++} q^{+}_{a} = -\kappa_s \int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} [\mathfrak{D}^{++}, \hat{\mathcal{U}}_s] q^{+}_{a}, \tag{6.127}$$

в соответствии с результатами предыдущего раздела.

Обобщая это равенство, для аналитических калибровочных преобразований (6.126) получаем:

$$\delta_\lambda S_{full} = -\frac{1}{2} \int d\zeta^{(-4)}\, q^{+a} \left( -\left[ \mathfrak{D}^{++} + \hat{\mathbf{H}}^{++}, \hat{\mathcal{U}} \right] + \delta_\lambda \hat{\mathbf{H}}^{++} \right) q^{+}_{a}. \tag{6.128}$$

Тогда требование инвариантности приводит к закону преобразования:

$$\delta_\lambda \hat{\mathbf{H}}^{++} = \left[\mathfrak{D}^{++} + \hat{\mathbf{H}}^{++}, \hat{\mathcal{U}}\right]. \tag{6.129}$$

Здесь мы также предполагаем соответствующее интегрирование по частям, как и раньше в подобных формулах. Этот закон преобразования смешивает препотенциалы, соответствующие различным спинам, и тем самым является неабелевым законом преобразования.

Инвариантность действия (6.125) относительно $\mathcal{N} = 2$ преобразований конформной супергравитации автоматически выполняется по построению. Таким образом, мы построили полностью согласованное калибровочно инвариантное взаимодействие гипермультиплета с бесконечной башней $\mathcal{N} = 2$ высших спинов на произвольном фоне $\mathcal{N} = 2$ конформной супергравитации.

## 6.9 О суперконформных токах гипермультиплета

В этом разделе мы обсудим структуру суперконформных суперполей токов высших спинов для гипермультиплета. Их структура во многом похожа на структуру неконформных токовых суперполей. Согласно теореме Нётер, такие токи находятся в однозначном соответствии с глобальными суперконформными симметриями высших спинов для гипермультиплета. Мы также обсудим, как получить эти глобальные симметрии. Мы рассмотрим примеры $s = 2, 3$ а затем приведем результаты для общего случая.

### $s = 2$ суперконформные суперполя токов

Согласно суперполевой версии теоремы Нётер, глобальным симметриям соответствуют сохраняющиеся токовые суперполя. Как мы обсуждали в разделе 6.1 преобразования с параметрами $\lambda^M$, удовлетворяющими соотношению $[\mathcal{D}^{++}, \hat{\Lambda}] = \lambda^{++}\mathcal{D}^0$, являются глобальными симметриями безмассового гипермультиплета – $\mathcal{N} = 2$ суперконформными симметриям. Используя выражение (6.37) для вариации гипермультиплета относительно локализованных преобразований, можно обобщить результаты, полученные для неконформного случая на $\mathcal{N} = 2$ суперконформный случай. Эквивалентно, можно получить токовые суперполя, варьируя кубическую вершину (6.25) по $\mathcal{N} = 2$ аналитическим потенциалам $h^{++M}$ мультиплета

Вейля. В результате мы получаем:

$$\begin{aligned}
M = \alpha\dot{\alpha} \quad &\Rightarrow \quad J^{++}_{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++} J^{++}_{\alpha\dot{\alpha}} = 0; \\
M = \alpha \quad &\Rightarrow \quad J^{+}_{\alpha} = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial^-_{\alpha} q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++} J^{+}_{\alpha} = 4i\theta^{+\dot{\rho}} J_{\alpha\dot{\rho}}; \\
M = \dot{\alpha} \quad &\Rightarrow \quad J^{+}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial^-_{\dot{\alpha}} q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++} J^{+}_{\dot{\alpha}} = -4i\theta^{+\rho} J_{\rho\dot{\alpha}}; \\
M = ++ \quad &\Rightarrow \quad J = -\frac{1}{2} q^{+a} \partial^{--} q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++} J = -\theta^{+\hat{\rho}} J^+_{\hat{\rho}}.
\end{aligned} \tag{6.130}$$

Как было показано в разделе 5.4, суперполевые законы сохранения токовых суперполей вида (6.130) приводят к стандартным законам сохранения для компонентных токов. Все приведенные супертоки являются аналитическими, однако токи $J^+_\alpha$ и $J^+_{\dot{\alpha}}$ не являются $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрично инвариантными. Можно построить неаналитический $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрично-инвариантный суперток:

$$\mathcal{J} := -\frac{1}{2} q^{+a} \mathcal{D}^{--} q^+_a = J + \theta^{-\hat{\rho}} J_{\hat{\rho}} - 4i\theta^{-\rho}\bar{\theta}^{-\dot{\rho}} J^{++}_{\rho\dot{\rho}}. \tag{6.131}$$

В своем разложении он содержит все аналитические супертоки, выписанные в (6.130). Он удовлетворяет закону сохранения

$$\mathcal{D}^{++} \mathcal{J} = 0\,, \tag{6.132}$$

который приводит к законам сохранения, приведенным в (6.130).

Отметим, что конформный суперток $\mathcal{J}$ может быть получен через представление аналитических параметров $\lambda^M$ в терминах неаналитического параметра $l^{--}(\zeta, \theta^-)$:

$$\hat{\Lambda} = (D^+)^4 \left(l^{--} \mathcal{D}^{--}\right). \tag{6.133}$$

Вариация (6.37) действия свободного гипермультиплета тогда принимает форму:

$$\delta^{(s=2)}_l S_{free} = \int d^4x d^8\theta du \, \left(\mathcal{D}^{++} l^{--}\right) q^{+a} \mathcal{D}^{--} q^+_a\,, \tag{6.134}$$

которая и приводит к закону сохранения (6.132).

Также можно получить суперток $\mathcal{J}$, варьируя взаимодействие (6.25) по неаналитическому

препотенциалу $\Upsilon(\zeta,\theta^-)$ $\mathcal{N}=2$ конформной супергравитации, определенному как:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=2)} := (D^+)^4\,(\Upsilon\mathcal{D}^{--})\,.$$

Такой способ представления аналитических препотенциалов в терминах неаналитического препотенциала типа Мезинческу был предложен в работах [97, 158]. Это позволяет связать гармонические калибровочные препотенциалы с препотенциалами, не имеющими геометрической интерпретации, и применявшимися для суперполевого описания $\mathcal{N}=2$ супергравитации до открытия гармонического суперпространства [145, 159, 164, 178].

Как итог, мы заключаем, что $\mathcal{N}=2$ суперконформным преобразованиям соответствует неаналитический суперток $\mathcal{J}$ удовлетворяющий закону сохранения:

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}q^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{J}=0. \tag{6.135}$$

Этот суперток уже использовался нами в разделе (5.3.2) (первоначально, суперток $\mathcal{J}$ был введен в работе [158], см. также работу [149]). По сравнению с результатами спина неконформного **2** , мы видим, что появляется новый суперток $J=-\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{--}q^+_a$, который ассоциирован с параметром $\lambda^{++}$ в (6.1).

**s = 3 суперконформные суперполя токов**

Если наложить условие $\delta^{(s=3)}_\lambda S_{free}=0$ в уравнении (6.73), мы получим условия на глобальные $s=3$ симметрии гипермультиплета. Есть два способа получения $s=3$ нетеровских токовых суперполей. Можно либо исследовать вариацию действия (6.73) и использовать теорему Нётер, или, эквивалентно, варьировать кубическую вершину (6.52) по аналитическим препотенциалам $h^{++MN}$. Соответствующие токовые суперполя задаются выражениями:

$$J^{++}_{MN} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_N\partial_M Jq^+_a, \qquad \mathcal{D}^{++}J^{++}_{MN} = -\frac{1}{2}q^{+a}[\mathcal{D}^{++},\partial_N\partial_M]Jq^+_a. \tag{6.136}$$

При выводе суперполевых уравнений сохранения (6.136), мы использовали уравнения движения гипермультиплета.

Явно расписывая индексы, мы получаем 9 независимых токовых суперполя:

$$J^{++}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta},\quad J^{+}_{\alpha\beta\dot\alpha},\quad J^{+}_{\dot\alpha\dot\beta\alpha},\quad J_{\alpha\beta},\quad J_{\dot\alpha\dot\beta},\quad J_{\alpha\dot\alpha},\quad J^-_\alpha,\quad J^-_{\dot\alpha},\quad J^{--}. \tag{6.137}$$

Эти токовые суперполя являются аналитическими, но токи, содержащие $\partial^-_{\hat\alpha}$, не инвариантны относительно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии. Так же, как и в случае $s=2$, можно ввести токовые суперполя, инвариантные относительно $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии и содержащие аналитические супертоки в их разложении по $\theta^-$. Однако, в отличии от $\mathbf{s}=2$ случая, здесь необходимо вводить несколько независимых "родительских" токовых суперполей.

Простейший выбор соответствует выбору $M=\alpha\dot\alpha$. Соответствующее неаналитическое токовое суперполе имеет вид:

$$\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}=-\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}\partial_{\alpha\dot\alpha}Jq^+_a,\qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}=-\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{\alpha\dot\alpha}Jq^+_a. \tag{6.138}$$

Полученное выражение удовлетворяет ряду уравнения сохранения:

$$\mathcal{D}^{++}\left(D^+_{\hat\beta}\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}\right)=0,\qquad \mathcal{D}^{++}\left(D^+_\beta D^+_{\hat\beta}\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}\right)=0. \tag{6.139}$$

Для выбора $M=\hat\alpha$ мы аналогичным образом получаем:

$$\mathcal{J}^-_{\hat\alpha}=-\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}\mathcal{D}^-_{\hat\alpha}Jq^+_a,\qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^-_{\hat\alpha}=0. \tag{6.140}$$

Здесь, помимо уравнений движения свободного гипермультиплета, использованы условия $[\mathcal{D}^{++},\mathcal{D}^{--}]=\mathcal{D}^0$ и $\mathcal{D}^0(\mathcal{D}^-_{\hat\alpha}Jq^+_a)=0$.

Выбор $M=++$ приводит к:

$$\mathcal{J}^{--}=-\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}\mathcal{D}^{--}Jq^+_a,\qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{J}^{--}=0. \tag{6.141}$$

Здесь использованы соотношения $[\mathcal{D}^{++},\mathcal{D}^{--}]=\mathcal{D}^0$, $\mathcal{D}^0\mathcal{D}^{--}Jq^+_a=-\mathcal{D}^{--}Jq^+_a$ и $\mathcal{D}^0q^+_a=q^+_a$.

Набор $s=3$ суперконформных токовых суперполей $\{\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha},\mathcal{J}^-_{\hat\alpha},\mathcal{J}^{--}\}$ содержит все аналитические супертоки (6.137) в $\theta^-$ разложениях. Например,

$$\mathcal{J}_{\alpha\dot\alpha}=-4i\theta^{-\beta}\bar\theta^{-\dot\beta}J^{++}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}+\theta^{-\beta}J^+_{\alpha\beta\dot\alpha}+J_{\alpha\dot\alpha}. \tag{6.142}$$

Альтернативно можно воспроизвести эти супертоки через вариацию по неаналитическим препотенциалам $\{\Upsilon^{\alpha\dot\alpha},\Upsilon^{+\hat\alpha},\Upsilon^{++},\Upsilon^{--}\}$, определенным как:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++}_{(s=3)}:=(D^+)^4\left(\Upsilon^{\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}^{--}+\Upsilon^{+\hat\alpha}\mathcal{D}^-_{\hat\alpha}\mathcal{D}^{--}+\Upsilon^{++}\mathcal{D}^{--}\mathcal{D}^{--}+\Upsilon^{--}\right). \tag{6.143}$$

Если зафиксировать калибровку, где только $h^{++M\alpha\dot\alpha}\neq 0$, можно описывать супермульти-

плет спина **3** только в терминах препотенциала $\Upsilon^{\alpha\dot\alpha}$. Такой препотенциал (в калибровке, где он не зависит от гармоник) может быть идентифицирован с препотенциалом, введенным в работе [118] и тем самым показывает его происхождение в подходе гармонического суперпространства.

### Суперконформные суперполя токов: общий случай

Обобщение на общий случай спина **s** проводится довольно прямолинейно. Аналитические токовые суперполя имеют вид:

$$J^{++}_{M_{s-1}\dots M_1} = -\frac{1}{2}q^{+a}\partial_{M_{s-1}}\dots\partial_{M_1}(J)^{P(s)}q^+_a \tag{6.144}$$

и удовлетворяют закону сохранения:

$$\mathcal{D}^{++}J^{++}_{M_{s-1}\dots M_1} = -\frac{1}{2}q^{+a}[\mathcal{D}^{++},\partial_{M_{s-1}}\dots\partial_{M_1}](J)^{P(s)}q^+_a. \tag{6.145}$$

Ковариантные неаналитические суперполя токов также определяются прямолинейно. Например, для $s-2$ векторных индексов получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= -\frac{1}{2}q^{+a}\mathcal{D}^{--}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}Jq^+_a,\\ \mathcal{D}^{++}\mathcal{J}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)} &= -\frac{1}{2}q^{+a}\partial^{s-2}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}Jq^+_a.\end{aligned} \tag{6.146}$$

Эти выражения удовлетворяют различным законам сохранения:

$$\mathcal{D}^{++}\left(D^+_{\hat\beta}\mathcal{J}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\right)=0,\qquad \mathcal{D}^{++}\left(D^+_{\beta}D^+_{\hat\beta}\mathcal{J}_{\alpha(s-2)\dot\alpha(s-2)}\right)=0. \tag{6.147}$$

Другие токовые суперполя могут быть рассмотрены аналогично.

Эти суперполя токов отвечают симметриям, обобщающим суперконформные симметрии на высшие спины. Эти преобразования определяются из условия равенства нулю правой части уравнения (6.106) и заслуживают отдельного рассмотрения.

# Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующим:

1. Найден набор аналитических суперполей без связей, их калибровочные преобразования и преобразования $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. Показано, что в калибровке Весса-Зумино компонентный состав этих суперполей отвечает $\mathcal{N} = 2$ мультиплету высших спинов вне массовой оболочки. Построена $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная калибровочно-инвариантная теория, на уровне компонент сводящаяся к сумме свободных действий Фронсдала и Фанга-Фронсдала;

2. Получены суперполевые уравнения движения в теории $\mathcal{N} = 2$ высших спинов. Сделано это двумя способами: вариацией по аналитических препотенциалам и по препотенциалам Мезинческу. Для этого были введены препотенциалы Мезинческу, дающие альтернативное суперполевое представление для $\mathcal{N} = 2$ BMO-мультиплетов высших спинов;

3. Построены $\mathcal{N} = 2$ кубические вершины взаимодействия высших спинов с гипермультиплетом. Для этого были сформулированы ограничения, которые накладывает аналитичность, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия и калибровочная инвариантность. Для получения калибровочных преобразований гипермультиплета были проанализированы глобальные симметрии свободного гипермультиплета;

4. Построены $\mathcal{N} = 2$ суперполевые токи высших спинов для BMO-гипермультиплета. Показано, что эти суперполевые токи находятся во взаимно однозначном соответствии с глобальными симметриями гипермультиплета и определяют структуру кубического взаимодействия;

5. Сформулированы методы компонентой редукции полученных суперполевых теорий. Произведена компонентная редукция калибровочных действий, кубических вершин и суперполевых токов;

6. Найдены аналитические суперполя, описывающие $\mathcal{N} = 2$ суперконформные мультиплеты. Получены их калибровочные преобразования и $\mathcal{N} = 2$ суперконформные преобра-

зования. Построена кубическая суперконформная вершина взаимодействия суперконформных мультиплетов высших спинов с гипермультиплетом.

Для полноты диссертации приведем ряд сюжетов, в которых можно применить и обобщить результаты в теории $\mathcal{N} = 2$ высших спинов, полученные с использованием гармонического суперпространства:

- $\mathcal{N} = 2$ *полуцелые спины в гармоническом суперпространстве*

  Интересно провести гармоническое построение $\mathcal{N} = 2$ теорий высших спинов со старшим полуцелом спином вне массовой оболочки. Построение таких теорий требует какого-то альтернативного подхода и, возможно, должно включать синтез элементов конструкции теории гипермультиплета и $\mathcal{N} = 2$ целочисленных высших спинов. Имея такие теории, можно строить теории высших спинов с $\mathcal{N} > 2$ суперсимметриями в терминах гармонических суперполей.

- $\mathcal{N} = 2$ *AdS высшие спины в гармоническом суперпространстве*

  Открытой остается проблема построения $\mathcal{N} = 2$ высших спинов на AdS и на других конформно плоских фонах. На этом пути, полезными могут оказаться результаты работы [179].

- *Построение суперполевой массивной* $\mathcal{N} = 2$ *теории высших спинов*

  В данной диссертации мы рассматривали только безмассовые $\mathcal{N} = 2$ супермультиплеты высших спинов.

- *Построение более общих взаимодействий*

  Интересная и важная задача состоит в исследовании взаимодействия $\mathcal{N} = 2$ высших спинов с $\mathcal{N} = 2$ теорией Максвелла, с $\mathcal{N} = 2$ супергравитацией и между собой. Можно ожидать, что такие вершины будут иметь простую структуру в гармоническом суперпространстве. Важен вопрос и про построении четвертичных вершин. В частности, ряд идей касательно структуры четвертичных вершин с материей рассматривался в работе [180]

- *Динамические действия для* $\mathcal{N} = 2$ *суперконформных мультиплетов*

  Естественно возникает задача построения $\mathcal{N} = 2$ суперконформных действий, обобщающих действие Фрадкина-Цейтлина [35]. В гармоническом суперпространстве такое действие не было построено даже для $\mathcal{N} = 2$ мультиплета Вейля ($\mathbf{s} = \mathbf{2}$).

- *Индуцированные действия*

  Мы построили явно инвариантные $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричные и суперконформные вершины гипермультиплета с высшими спинами. Имея эти результаты, можно изучать эффективные действия, вычисляя функциональный интеграл по гипермультиплету. Для явной конструкции эффективных действий, существует общая процедура, восходящая к Швингеру и де Витту и базирующая на представлении эффективного действия как интеграла по собственному времени (см., например, [181]). Индуцированное действие в общем случае является существенно нелокальным. Тем не менее, оно может быть приближенно представлено в виде ряда по фоновым полям и производным. Тем самым этот способ позволяет находить инвариантны калибровочных полей высших спинов путям прямых алгебраических вычислений. Изучение эффективных действий для конформных высших спинов было инициировано в "world-line" формализме Сегалом [55], который на этой основе предложил способ построения взаимодействующих теорий конформных высших спинов (см. также статью [182]). Также ряд интересных результатов по индуцированным действиям в теории высших спинов представлен в работах [71], [183], [184], [185], включая суперполевой подход [185] для $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теорий высших спинов в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве.

- *Суперконформные компенсаторы и различные версии* $\mathcal{N} = 2$ *теорий высших спинов*

  $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричное расширение теории Фронсдала, построенное в работе [141] обобщает одну из версий $\mathcal{N} = 2$ BMO-супергравитации. Возникает естественный вопрос, как построить теории высших спинов, обобщающие другие версии $\mathcal{N} = 2$ супергравитации. Как хорошо известно, наиболее общий набор версий (супер)гравитации может быть получен с использованием (супер)конформных компенсаторов[12]. Интересно обобщить этот механизм на $\mathcal{N} = 2$ высшие спины.

- $\mathcal{N} = 3$ *теория высших спинов в гармоническом суперпространстве*

  Существует BMO-формулировка $\mathcal{N} = 3$ теории Янга-Миллса в $\mathcal{N} = 3$ гармоническом суперпространстве [88, 94]. Вполне вероятно, что этот подход допускает красивое обобщение на $\mathcal{N} = 3$ супергравитацию и высшие спины.

[12] Некоторые идеи о конформных компенсаторах для высших спинов обсуждались Сегалом [55].

# Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю и соавтору Евгению Алексеевичу Иванову за постановку задач, помощь и поддержку в их решении, терпеливые разъяснения. Без его доброжелательности, многочисленных консультаций и ценных советов данная работа была бы невозможна. Также я хочу поблагодарить Иосифа Львовича Бухбиндера за ценные обсуждения различных областей теоретической физики, указания на важные теоретические работы и совместную работу над статьями. Я очень признателен всему коллективу Лаборатории теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований за создание благоприятной среды для работы, особенно Степану Сергеевичу Сидорову, благородя работе которого в лаборатории регулярно организуются конференции, собирающие множество выдающихся специалистов по теоретической физике.

Хотелось бы поблагодарить Сергея Алексеевича Федорука за важные замечания, которые позволили значительно улучшить текст диссертации. Также автор благодарен Кириллу Губареву за шаблон диссертации и многочисленные консультации по её оформлению.

Автор выражает благодарность своим преподавателям, в особенности Ахмедову Эмилю Тофиковичу, Киселеву Валерию Валерьевичу, Мейлихову Евгению Залмановичу и Пакуляку Станиславу Здиславовичу за поддержку на первых шагах изучения теоретической физики. Также автор благодарен Маршакову Андрею Владимировичу, Морозову Алексею Юрьевичу, Морозову Андрею Алексеевичу, Мусаеву Эдварду Таваккуловичу, Пополитову Александру Викторовичу и Слепцову Алексею Васильевичу за организацию различных студенческих и аспирантских научных семинаров, на которых автор очень многому научился.

Хочется выразить благодарность и своим товарищам, особенно Сергею Алексееву, Кириллу Базарову, Диме Дьяконову, Саше Дятлику, Славе Ивановскому, Ване Сечину, Михаилу Литвинову, Борису Мерзликину, Вите Мишнякову, Коле Терзиеву и особенно Никите Колганову за многочисленные обсуждения, которые в различные периоды помогали мне и поддерживали в занятиях наукой. Автор также признателен своим студентам, особенно Илье Данилину, Лёне Елесину, Егору Еремееву, Джиму Кейси, Дмитрию Кодову, Диме Корзуну,

Саше Мамекину, Паше Мещерякову и Андрею Коцевичу обсуждения, чьи вопросы и дискуссии были крайне полезны и увлекательны.

Особую благодарность автор выражает Полине за непрерывную поддержку и вдохновение, без которых данная работа была бы невозможной.

# Приложение А

# Обозначения и соглашения

Мы используем стандартный двухкомпонентный спинорный формализм:

$$\alpha = (1,2), \qquad \dot{\alpha} = (\dot{1},\dot{2}), \qquad \hat{\alpha} = (\alpha,\dot{\alpha}). \tag{A.1}$$

Для симметризованных индексов используются сокращения:

$$\alpha(s) = (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s), \qquad \dot{\alpha}(s) = (\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_s) \tag{A.2}$$

Для производных используются обозначения:

$$\partial_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m, \qquad \partial^+_{\hat{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{-\hat{\alpha}}}, \qquad \partial^-_{\hat{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{+\hat{\alpha}}}. \tag{A.3}$$

Связь между векторными и спинорными индексами задается правилом:

$$A_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}A_n. \tag{A.4}$$

Для квадратичных комбинаций грассмановых переменных используются обозначения:

$$(\theta^{\hat{+}})^2 = (\theta^+)^2 - (\bar{\theta}^+)^2, \qquad (\theta^{\hat{-}})^2 = (\theta^-)^2 - (\bar{\theta}^-)^2, \tag{A.5}$$

$SU(2)$ инвариантный тензор определен как:

$$\varepsilon^{12} = -1, \qquad \varepsilon_{12} = 1, \qquad \epsilon_{ij}\epsilon^{jk} = \delta^k_i. \tag{A.6}$$

Индекс $M$ принимает значения в неконформном и конформном случаях:

$$M = (\alpha\dot{\alpha}, \alpha+, \dot{\alpha}+, 5), \qquad M = (\alpha\dot{\alpha}, \alpha+, \dot{\alpha}+, ++) \tag{A.7}$$

Соответствующие частные производные обозначаются как:

$$\partial_M = (\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \partial^-_\alpha, \partial^-_{\dot{\alpha}}, \partial^{--}, \partial_5)\,. \tag{A.8}$$

Четность индексов определяется по правилу:

$$P(\alpha\dot{\alpha}) = P(++) = P(5) = 0, \qquad P(\hat{\alpha}+) = 1. \tag{A.9}$$

## Инвариантны линеаризованной гравитации в спинорных обозначениях

Мы используем стандартные определения для линеаризованного гравитационного поля, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h := \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Линеаризация тензора Римана, кривизны Риччи и скалярной кривизны задается формулами:

$$R_{[\lambda\rho][\mu\nu]} = 2\partial_{[\rho}\partial_{[\mu}h_{\nu]\lambda]} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\rho h_{\mu\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\lambda} + \partial_\nu\partial_\lambda h_{\mu\rho}\right), \tag{A.10a}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\rho\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho\partial_\nu h_{\mu\rho} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right), \tag{A.10b}$$

$$R = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \Box h. \tag{A.10c}$$

Эти кривизны инвариантны относительно линеаризованных калибровочных преобразований линеаризованного гравитационного поля $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu$.

Связь между полем спина 2 $\Phi^{\alpha\dot{\alpha}}_{\beta\dot{\beta}}$ из калибровки Весса-Зумино (1.70) и фильбайном задается формулой $\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + \Phi^{\alpha\dot{\alpha}}_{\beta\dot{\beta}} := \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu\sigma^a_{\beta\dot{\beta}}e^\mu_a$. Разложение фильбайна относительно плоского фона задается формулой: $e^\mu_a = \delta^\mu_a + \varepsilon^\mu_a$, so $h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu}$. После фиксирования локальных Лоренцевых преобразований, в симметричной калибровке $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{(\mu\nu)}$ получаем:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{\mu\nu} &= \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu\sigma^{\beta\dot{\beta}}_\nu\left(\Phi_{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Phi\right) \\ &= \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_\mu\sigma^{\beta\dot{\beta}}_\nu\Phi_{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + 2\eta_{\mu\nu}\Phi. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Из этого соотношения получаем $h = 8\Phi$.

Выражения для кривизн (A.10) в терминах полей спина 2 в спинорных обозначениях $\Phi_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$ и $\Phi$:

$$R_{[\lambda\rho][\mu\nu]} = \sigma^{(\alpha\beta)}_{[\lambda\rho]}\sigma^{(\gamma\delta)}_{[\mu\nu]}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{R}_{(\alpha\beta\gamma\delta)} - \frac{1}{32}\epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}R\right) - \frac{1}{4}\sigma^{(\alpha\beta)}_{[\lambda\rho]}\sigma^{(\dot\alpha\dot\beta)}_{[\mu\nu]}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + c.c., \tag{A.12}$$

$$R_{\mu\nu} = \sigma^{\alpha\dot\alpha}_{\mu}\sigma^{\beta\dot\beta}_{\nu}\Big(\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} + \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}R\Big), \tag{A.13}$$

$$R = 4\partial^{\alpha\dot\alpha}\partial^{\beta\dot\beta}\Phi_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - 6\,\Box\,\Phi. \tag{A.14}$$

Здесь мы ввели неприводимые компонентны для линеаризованных кривизн:

$$\mathcal{R}_{(\alpha\beta\gamma\delta)} := \partial^{\dot\alpha}_{(\alpha}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\Phi_{\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)}, \qquad \bar{\mathcal{R}}_{(\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma\dot\delta)} := \partial^{\alpha}_{(\dot\alpha}\partial^{\beta}_{\dot\beta}\Phi_{\dot\gamma\dot\delta)(\alpha\beta)}, \tag{A.15}$$

$$\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} := 2\partial_{(\alpha(\dot\alpha}\partial^{\rho\dot\rho}\Phi_{(\beta)\rho)(\dot\beta)\dot\rho)} - \frac{1}{2}\,\Box\,\Phi_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - 2\partial_{(\alpha(\dot\alpha}\partial_{\beta)\dot\beta)}\Phi. \tag{A.16}$$

Заметим, что поскольку линеаризованный инвариант (A.15) построен из поля конформного гравитона, он может быть идентифицирован с линеаризованным тензором Вейля.

Линеаризованные тождества Бьянки имеют вид:

$$\partial^{\beta\dot\beta}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} = \frac{1}{8}\partial_{\alpha\dot\alpha}R, \tag{A.17}$$

таким образом линеаризованный тензор Эйнштейна выражается как:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = \mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - \frac{1}{8}\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}R, \qquad \partial^{\beta\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta} = 0. \tag{A.18}$$

С использованием линеаризованного тензора Эйнштейна, можно записать действие линеаризованной гравитации в виде:

$$S_2 \sim \int d^4x\; \Phi^{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta\dot\alpha\dot\beta}. \tag{A.19}$$

Эти обозначения будут удобны для работы с решениями уравнений нулевой кривизны, уравнениями движения и компонентной редукции суперполевых действий.

## Инварианты калибровочного спина $\frac{3}{2}$

В этом приложении мы приведем выражения для линеаризованных кривизн калибровочного поля Рариты-Швайнгера спина $\frac{3}{2}$. Такие кривизны появляются в решениях уравнений

нулевой кривизны в секторе спина $\frac{3}{2}$ и в компонентном действии $\mathcal{N}=2$ супергравитации.

Как получено в (2.13), неприводимые части поля Рариты-Швингера имеют линеаризованные калибровочные преобразования:

$$\psi^{\beta\alpha\dot{\alpha}i} = \psi^{(\beta\alpha)\dot{\alpha}i} + \epsilon^{\beta\alpha}\psi^{\dot{\alpha}i}, \qquad \delta_\lambda\psi^{(\beta\alpha)\dot{\alpha}i} = -\partial^{(\beta\dot{\alpha}}\epsilon^{\alpha)i}, \quad \delta_\lambda\psi^{\dot{\alpha}i} = -\frac{1}{2}\partial^{\dot{\alpha}}_{\alpha}\epsilon^{\alpha i}. \tag{A.20a}$$

Комплексно сопряженные поля преобразуются подобным образом:

$$\bar{\psi}^{\dot{\beta}\dot{\alpha}\alpha i} = \bar{\psi}^{(\dot{\beta}\dot{\alpha})\dot{\alpha}i} + \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\alpha i}, \qquad \delta_\lambda\bar{\psi}^{(\dot{\beta}\dot{\alpha})\alpha i} = -\partial^{(\dot{\beta}\alpha}\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha})i}, \quad \delta_\lambda\bar{\psi}^{\alpha i} = -\frac{1}{2}\partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\epsilon^{\dot{\alpha}i}. \tag{A.20b}$$

Из этих неприводимых частей можно построить неприводимые линеаризованные калибровочные инвариантны первого порядка по производным:

$$\mathcal{R}^i_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha} := \partial^{\beta}_{(\dot{\alpha}}\psi^i_{(\alpha\beta)\dot{\beta})} + \partial_{(\dot{\alpha}\alpha}\psi^i_{\dot{\beta})}, \qquad \mathcal{R}^i_{\alpha} := \partial^{\beta\dot{\beta}}\psi^i_{(\alpha\beta)\dot{\beta}} - 3\partial^{\dot{\beta}}_{\alpha}\psi^i_{\dot{\beta}}, \tag{A.21a}$$

$$\bar{\mathcal{R}}^i_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}} := \partial^{\dot{\beta}}_{(\alpha}\bar{\psi}^i_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\beta)} + \partial_{(\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^i_{\beta)}, \qquad \bar{\mathcal{R}}^i_{\dot{\alpha}} := \partial^{\beta\dot{\beta}}\bar{\psi}^i_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\beta} - 3\partial^{\beta}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^i_{\beta}. \tag{A.21b}$$

Тензор для спина $\frac{3}{2}$, являющийся аналогом тензора Эйнштейна, однозначно определяется из требования выполнения тождеств Бьянки:

$$\mathcal{G}^i_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\alpha} := \mathcal{R}^i_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})\alpha} + \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mathcal{R}^i_{\alpha}, \qquad \partial^{\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{G}^i_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\alpha} = 0, \tag{A.22a}$$

$$\bar{\mathcal{G}}^i_{\alpha\beta\dot{\alpha}} := \bar{\mathcal{R}}^i_{(\alpha\beta)\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\bar{\mathcal{R}}^i_{\dot{\alpha}}, \qquad \partial^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{G}}^i_{\alpha\beta\dot{\alpha}} = 0. \tag{A.22b}$$

Используя эти результаты, теперь можно построить калибровочно инвариантное действие для спина $\frac{3}{2}$:

$$S_{\frac{3}{2}} \sim \int d^4x\; i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\alpha i}\bar{\mathcal{G}}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\alpha i}. \tag{A.23}$$

# Приложение B

# Решения уравнений нулевой кривизны

## B.1 $\mathcal{N} = 2$ супергравитация

Для проведения компонентной редукции различных суперполевых инвариантов линеаризованной супергравитации необходимо решить набор уравнений нулевой кривизны (2.23):

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^{++}G^{--\alpha\dot{\alpha}} = \mathcal{D}^{--}G^{++\alpha\dot{\alpha}},\\
&\mathcal{D}^{++}G^{--5} = \mathcal{D}^{--}G^{++5},\\
&\mathcal{D}^{++}G^{--\hat{\alpha}+} = \mathcal{D}^{--}G^{++\hat{\alpha}+}\\
&\mathcal{D}^{++}G^{--\hat{\alpha}+} + G^{--\hat{\alpha}+} = 0.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Поскольку уравнения линейны, их можно решать отдельно для каждого поля в калибровке Весса-Зумино (1.70).

Отметим еще одно важное свойство:

$$\delta_\lambda\left[(\mathcal{D}^+)^4 G^{--\alpha\dot{\alpha}}\right] = 0, \qquad \delta_\lambda\left[(\mathcal{D}^+)^4 G^{--5}\right] = 0. \tag{B.2}$$

Таким образом, все $(\theta^-)^4$ компоненты суперполей $G^{--\alpha\dot{\alpha}}$ и $G^{--5}$ инвариантны относительно калибровочных преобразований (2.25). Это наблюдение позволяет проверить корректность полученных решений и играет важную роль в построении различных инвариантов. Для того, чтобы явно выделить калибровочно инвариантные слагаемые в решениях уравнений нулевой кривизны, мы будем использовать обозначения, введенные в приложении A.

***Гравитационный сектор:***

$$G^{++\alpha\dot{\alpha}}_{(\Phi)} = -4i\theta^{+\beta}\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\Phi^{\alpha\dot{\alpha}}_{\beta\dot{\beta}} + 4(\theta^+)^2\bar{\theta}^{+\dot{\beta}}\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}}B^{\alpha}_{\dot{\beta}} - 4(\bar{\theta}^+)^2\theta^{+\beta}\theta^{-\alpha}B^{\dot{\alpha}}_{\beta}, \tag{B.3a}$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha\dot\alpha}_{(\Phi)} =& -4i\theta^{-\beta}\bar\theta^{-\dot\beta}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} + 8(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\rho}\bar\theta^{+\dot\beta}\left(\partial^\beta_{(\dot\rho}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta)} - \frac{1}{2}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\rho}B^\alpha_{\dot\beta}\right)\\
&- 8(\bar\theta^-)^2\theta^{-\rho}\theta^{+\beta}\left(\partial^{\dot\beta}_{(\rho}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\dot\beta\beta)} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\rho B^{\dot\alpha}_\beta\right)\\
&- 8i(\theta^-)^4\theta^+_\rho\bar\theta^+_{\dot\rho}\left(\mathcal{R}^{(\alpha\rho)(\dot\alpha\dot\rho)} - \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot\alpha\dot\rho}R\right).
\end{aligned}
\tag{B.3b}
$$

$$
G^{++5}_{(\Phi)} = 2(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\theta^{-\beta}B_{\beta\dot\beta} + 2(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\bar\theta^{-\dot\beta}B_{\beta\dot\beta},
\tag{B.3c}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(\Phi)} =& -2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\beta}\theta^{+\beta}B_{\beta\dot\beta} - \frac{i}{2}(\theta^-)^4(\theta^+)^2R\\
&- 2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\beta}\bar\theta^{+\dot\beta}B_{\beta\dot\beta} + \frac{i}{2}(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2R.
\end{aligned}
\tag{B.3d}
$$

$$
G^{++\alpha+}_{(\Phi)} = -i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta},
\tag{B.3e}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha+}_{(\Phi)} =& -\frac{i}{2}(\theta^-)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta} - i(\theta^+\theta^-)\bar\theta^-_{\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta}\\
&+ (\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\rho}\partial_{\rho\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta} - (\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\rho}\partial_{\rho\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta}\\
&+ 2(\theta^-)^2\theta^{+\rho}\bar\theta^{+(\dot\rho}\theta^{-\dot\beta)}\partial_{\rho\dot\rho}B^\alpha_{\dot\beta} - \frac{i}{2}(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\,\Box\, B^\alpha_{\dot\beta},
\end{aligned}
\tag{B.3f}
$$

$$
G^{--\alpha-}_{(\Phi)} = -\frac{i}{2}(\theta^-)^2\bar\theta^-_{\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta} + (\theta^-)^4\theta^{+\beta}\partial_{\beta\dot\beta}B^{\alpha\dot\beta}.
\tag{B.3g}
$$

***Максвелловский сектор:***

$$
G^{++5}_{(C)} = -4i\theta^{+\beta}\bar\theta^{+\dot\beta}C_{\beta\dot\beta},
\tag{B.4a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(C)} =& -4i\theta^{-\beta}\bar\theta^{-\dot\beta}C_{\beta\dot\beta}\\
&+ 8(\theta^-)^2\bar\theta^{-(\dot\rho}\bar\theta^{+\dot\beta)}\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\rho\dot\beta)} - 8(\bar\theta^-)^2\theta^{-(\rho}\theta^{+\beta)}\mathcal{F}_{(\rho\beta)}\\
&- 8i(\theta^-)^4\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\left(\partial^{\dot\beta}_\rho\bar{\mathcal{F}}_{(\dot\rho\dot\beta)} + \partial^\beta_{\dot\rho}\mathcal{F}_{(\rho\beta)}\right).
\end{aligned}
\tag{B.4b}
$$

***Вспомогательное поле $T^{(\alpha\beta)}$:***

$$
G^{++\alpha\dot\alpha}_{T^{(\alpha\beta)}} = 4i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\beta\bar\theta^{-\dot\alpha}T^{(\alpha\beta)} - 4i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}\theta^{-\alpha}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)},
\tag{B.5a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha\dot\alpha}_{T^{(\alpha\beta)}} =& -4i(\bar\theta^-)^2\theta^-_\beta\bar\theta^{+\dot\alpha}T^{(\alpha\beta)} + 4(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\partial^{\dot\alpha}_\rho T^{(\alpha\rho)}\\
&+ 4i(\theta^-)^2\bar\theta^-_{\dot\beta}\theta^{+\alpha}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)} + 4(\theta^-)^4(\theta^+)^2\partial^\alpha_{\dot\rho}\bar T^{(\dot\alpha\dot\rho)}.
\end{aligned}
\tag{B.5b}
$$

$$
G^{++5}_{T^{(\alpha\beta)}} = -2i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\alpha\theta^-_\beta T^{(\alpha\beta)} - 2i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar\theta^-_{\dot\beta}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)},
\tag{B.5c}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{T^{(\alpha\beta)}} =& -2i(\bar\theta^-)^2\theta^+_\alpha\theta^-_\beta T^{(\alpha\beta)} - 4(\theta^-)^4\theta^+_\alpha\bar\theta^{+\dot\sigma}\partial_{\beta\dot\sigma}T^{(\alpha\beta)}\\
&- 2i(\theta^-)^2\bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar\theta^-_{\dot\beta}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)} - 4(\theta^-)^4\bar\theta^+_{\dot\alpha}\theta^{+\sigma}\partial_{\sigma\dot\beta}\bar T^{(\dot\alpha\dot\beta)}.
\end{aligned}
\tag{B.5d}
$$

$$G^{++\alpha+}_{T^{(\alpha\beta)}} = -(\bar\theta^+)^2\theta^+_\beta T^{(\alpha\beta)}, \tag{B.5e}$$

$$\begin{aligned} G^{--\alpha+}_{T^{(\alpha\beta)}} =& -\frac{1}{2}(\bar\theta^-)^2\theta^+_\beta T^{(\alpha\beta)} - (\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^-_\beta T^{(\alpha\beta)} \\ &+ i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\dot\rho\beta}T^{(\alpha\beta)} - 2i(\bar\theta^-)^2\theta^{+(\beta}\theta^{-\rho)}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}T^{(\alpha}_{\beta)} \\ &- i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\rho}\partial_{\dot\rho\beta}T^{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2}(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^+_\beta\,\Box\, T^{(\alpha\beta)}, \end{aligned} \tag{B.5f}$$

$$G^{--\alpha-}_{T^{(\alpha\beta)}} = \frac{1}{2}(\bar\theta^-)^2\theta^-_\beta T^{(\alpha\beta)} - i(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\dot\rho\beta}T^{(\alpha\beta)}. \tag{B.5g}$$

***Вспомогательное поле $T$:***

$$G^{++\alpha\dot\alpha}_{(T)} = 4i(\bar\theta^+)^2\theta^{+\alpha}\bar\theta^{-\dot\alpha}T - 4i(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\alpha}\theta^{-\alpha}\bar T, \tag{B.6a}$$

$$\begin{aligned} G^{--\alpha\dot\alpha}_{(T)} =& -4i(\bar\theta^-)^2\theta^{-\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}T + 4(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\partial^{\alpha\dot\alpha}T \\ &+ 4i(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\alpha}\theta^{+\alpha}\bar T + 4(\theta^-)^4(\theta^+)^2\partial^{\alpha\dot\alpha}\bar T, \end{aligned} \tag{B.6b}$$

$$G^{++5}_{(T)} = -2i(\bar\theta^+)^2(\theta^+\theta^-)T + 2i(\theta^+)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\bar T, \tag{B.6c}$$

$$G^{--5}_{(T)} = -2i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)T + 2i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar T. \tag{B.6d}$$

$$G^{++\alpha+}_{(T)} = -(\bar\theta^+)^2\theta^{+\alpha}T, \tag{B.6e}$$

$$\begin{aligned} G^{--\alpha+}_{(T)} =& -\frac{1}{2}(\bar\theta^-)^2\theta^{+\alpha}T - (\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{-\alpha}T \\ &- i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\rho}\partial^\alpha_{\dot\rho}T + i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\rho}\partial^\alpha_{\dot\rho}T \\ &- 2i(\bar\theta^-)^2\theta^{+(\alpha}\theta^{-\rho)}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}T + \frac{1}{4}(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{-\alpha}\,\Box\, T, \end{aligned} \tag{B.6f}$$

$$G^{--\alpha-}_{(T)} = \frac{1}{2}(\bar\theta^-)^2\theta^{-\alpha}T - \frac{i}{2}(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\rho}\partial^\alpha_{\dot\rho}T. \tag{B.6g}$$

***Вспомогательное поле $P^{\alpha\dot\alpha}$:***

$$G^{++\alpha\dot\alpha}_{(P)} = 4i(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}\bar\theta^{-\dot\alpha}P^{\alpha\dot\beta} + 4i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\beta\theta^{-\alpha}\bar P^{\beta\dot\alpha}, \tag{B.7a}$$

$$\begin{aligned} G^{--\alpha\dot\alpha}_{(P)} =& 2i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)P^{\alpha\dot\alpha} + 4i(\theta^-)^2\bar\theta^+_{(\dot\beta}\bar\theta^{-\dot\alpha)}P^{\alpha\dot\beta} - 8(\theta^-)^4\theta^{+\rho}\bar\theta^+_{(\dot\beta}\partial^{\dot\alpha)}_\rho P^{\alpha\dot\beta} \\ &- 2i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\bar P^{\alpha\dot\alpha} + 4i(\bar\theta^-)^2\theta^+_{(\beta}\theta^{-\alpha)}\bar P^{\beta\dot\alpha} - 8(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\rho}\theta^+_{(\beta}\partial^{\alpha)}_{\dot\rho}\bar P^{\beta\dot\alpha}, \end{aligned} \tag{B.7b}$$

$$G^{++5}_{(P)} = 2i(\theta^+)^2\theta^-_\beta\bar\theta^+_{\dot\beta}P^{\beta\dot\beta} + 2i(\bar\theta^+)^2\theta^+_\beta\bar\theta^-_{\dot\beta}\bar P^{\beta\dot\beta}, \tag{B.7c}$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(P)} =& -2i(\theta^-)^2\theta^+_\beta\bar\theta^-_{\dot\beta}P^{\beta\dot\beta} + 2(\theta^-)^4(\theta^+)^2\partial_{\beta\dot\beta}P^{\beta\dot\beta} \\
& -2i(\bar\theta^-)^2\theta^-_\beta\bar\theta^+_{\dot\beta}\bar P^{\beta\dot\beta} + 2(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\partial_{\beta\dot\beta}\bar P^{\beta\dot\beta},
\end{aligned}
\tag{B.7d}
$$

$$
G^{++\alpha+}_{(P)} = -(\theta^+)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta},
\tag{B.7e}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha+}_{(P)} =& -\frac{1}{2}(\theta^-)^2\bar\theta^+_{\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} - (\theta^+\theta^-)\bar\theta^-_{\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} \\
& - i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\rho}\partial_{\rho\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} + i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\rho}\partial_{\rho\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} \\
& - 2i(\theta^-)^2\theta^{+\rho}\bar\theta^{+(\dot\rho}\theta^{-\dot\beta)}\partial_{\rho\dot\rho}P^\alpha_{\dot\beta} - \frac{1}{2}(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\,\Box\,P^\alpha_{\dot\beta},
\end{aligned}
\tag{B.7f}
$$

$$
G^{--\alpha-}_{(P)} = -\frac{1}{2}(\theta^-)^2\bar\theta^-_{\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} - i(\theta^-)^4\theta^{+\beta}\partial_{\beta\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta}.
\tag{B.7g}
$$

***Вспомогательное поле*** $V^{\alpha\dot\alpha(ij)}$***:***

$$
G^{++\alpha\dot\alpha}_{(V)} = (\theta^+)^4V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j,
\tag{B.8a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha\dot\alpha}_{(V)} =& \frac{1}{3}(\theta^-)^2(\bar\theta^+)^2V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{1}{3}(\bar\theta^-)^2(\theta^+)^2V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{4}{3}(\theta^+\theta^-)(\bar\theta^+\bar\theta^-)V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j \\
& - \frac{2}{3}(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^+_iu^-_j - \frac{2}{3}(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^+_iu^-_j \\
& + \frac{4}{3}i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{4}{3}i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\theta^{+\rho}\bar\theta^{-\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j \\
& + \frac{1}{3}(\theta^-)^4V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^+_iu^+_j + \frac{4}{3}i(\theta^-)^4\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^+_iu^-_j - \frac{2}{3}(\theta^-)^4(\theta^+)^4\,\Box\,V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_iu^-_j.
\end{aligned}
\tag{B.8b}
$$

***Вспомогательное суперполе*** $S^{(ij)}$***:***

$$
G^{++5}_{(S)} = (\theta^+)^4S^{(ij)}u^-_iu^-_j,
\tag{B.9a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(S)} =& \frac{1}{3}(\theta^-)^2(\bar\theta^+)^2S^{(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{1}{3}(\bar\theta^-)^2(\theta^+)^2S^{(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{4}{3}(\theta^+\theta^-)(\bar\theta^+\bar\theta^-)S^{(ij)}u^-_iu^-_j \\
& - \frac{2}{3}(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)S^{(ij)}u^+_iu^-_j - \frac{2}{3}(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)S^{(ij)}u^+_iu^-_j \\
& + \frac{4}{3}i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}S^{(ij)}u^-_iu^-_j + \frac{4}{3}i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\theta^{+\rho}\bar\theta^{-\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}S^{(ij)}u^-_iu^-_j \\
& + \frac{1}{3}(\theta^-)^4S^{ij}u^+_iu^+_j + \frac{4}{3}i(\theta^-)^4\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}S^{(ij)}u^+_iu^-_j - \frac{2}{3}(\theta^-)^4(\theta^+)^4\,\Box\,S^{(ij)}u^-_iu^-_j.
\end{aligned}
\tag{B.9b}
$$

***Поле Рариты-Швингера*** $\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta$***:***

$$
\begin{aligned}
G^{++\alpha\dot\alpha}_{(\psi)} =& 16(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta u^-_i - 16(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i \\
& - 16i(\theta^+)^4\bar\theta^{-\dot\beta}\partial^\beta_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_\beta u^-_i - 16i(\theta^+)^4\theta^{-\beta}\partial^{\dot\beta}_\beta\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i,
\end{aligned}
\tag{B.10a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha\dot\alpha}_{(\psi)} = \quad & 16(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{-\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}u^-_i + 8(\bar\theta^-)^2\theta^{+\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}u^-_i - 8(\bar\theta^-)^2\theta^{-\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}u^+_i \\
& - 16i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\sigma}\left(\partial^{\beta}_{\dot\sigma}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta} - \delta^{\dot\alpha}_{\dot\sigma}\partial^{\beta}_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\beta i}_{\beta}\right)u^-_i \\
& + 8i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\sigma}\left(2\partial^{\beta}_{\dot\sigma}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta} - \delta^{\dot\alpha}_{\dot\sigma}\partial^{\beta}_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\beta i}_{\beta}\right)u^-_i \\
& - 32i(\bar\theta^-)^2\theta^{-(\beta}\theta^{+\sigma)}\bar\theta^{+\dot\sigma}\partial_{\sigma\dot\sigma}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}u^-_i \\
& - 16i(\theta^-)^4\bar\theta^+_{\dot\sigma}\mathcal{G}^{\dot\sigma\dot\alpha\alpha i}u^+_i + 32(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\mathcal{G}^{\dot\rho\dot\alpha\alpha i}u^-_i \\
& - 16(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{-\dot\beta}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i - 8(\theta^-)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i + 8(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\beta}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^+_i \\
& - 16i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\sigma}\left(\partial^{\dot\beta}_{\sigma}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta} - \delta^{\alpha}_{\sigma}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\bar\psi^{\beta\dot\alpha i}_{\dot\beta}\right)u^-_i \\
& + 8i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\sigma}\left(2\partial^{\dot\beta}_{\sigma}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta} - \delta^{\alpha}_{\sigma}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\bar\psi^{\beta\dot\alpha i}_{\dot\beta}\right)u^-_i \\
& + 32i(\theta^-)^2\bar\theta^{-(\dot\beta}\bar\theta^{+\dot\sigma)}\theta^{+\sigma}\partial_{\sigma\dot\sigma}\bar\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i \\
& - 16i(\theta^-)^4\theta^+_{\sigma}\bar{\mathcal{G}}^{\sigma\alpha\dot\alpha i}u^+_i - 32(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho}\bar{\mathcal{G}}^{\rho\alpha\dot\alpha i}u^-_i,
\end{aligned}
\tag{B.10b}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{++5}_{(\psi)} = & -16(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\psi^{i}_{\dot\beta}u^-_i + 8i(\theta^+)^4\theta^-_{\alpha}\partial^{\beta}_{\dot\beta}\psi^{\alpha\dot\beta i}_{\beta}u^-_i \\
& + 16(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\bar\psi^{i}_{\beta}u^-_i - 8i(\theta^+)^4\bar\theta^-_{\dot\alpha}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\bar\psi^{\beta\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i,
\end{aligned}
\tag{B.10c}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(\psi)} = & -16(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{-\dot\beta}\psi^{i}_{\dot\beta}u^-_i - 8(\theta^-)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\psi^{i}_{\dot\beta}u^-_i + 8(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\beta}\psi^{i}_{\dot\beta}u^+_i \\
& - 8i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^+_{\alpha}\mathcal{R}^{\alpha i}u^-_i - 4i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^-_{\alpha}(\mathcal{R}^{\alpha i} + 2\partial^{\alpha\dot\beta}\psi^-_{\dot\beta})u^-_i \\
& + 4i(\theta^-)^4\theta^+_{\alpha}\mathcal{R}^{\alpha i}u^+_i + 8(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\partial_{\dot\rho\alpha}\mathcal{R}^{\alpha i}u^-_i + \\
& + 16(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{-\beta}\bar\psi^{i}_{\beta}u^-_i + 8(\bar\theta^-)^2\theta^{+\beta}\bar\psi^{i}_{\beta}u^-_i - 8(\bar\theta^-)^2\theta^{-\beta}\bar\psi^{i}_{\beta}u^+_i \\
& - 8i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{R}}^{\dot\alpha i}u^-_i - 4i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\bar\theta^-_{\dot\alpha}(\bar{\mathcal{R}}^{\dot\alpha i} + 2\partial^{\dot\alpha\beta}\bar\psi^{i}_{\beta})u^-_i \\
& - 4i(\theta^-)^4\bar\theta^+_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{R}}^{\dot\alpha i}u^+_i + 8(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\partial_{\rho\dot\alpha}\bar{\mathcal{R}}^{\dot\alpha i}u^-_i,
\end{aligned}
\tag{B.10d}
$$

***Фермионное поле*** $\rho^i_\beta$***:***

$$
G^{++5}_{(\rho)} = 8(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\rho^i_{\beta}u^-_i - 8(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i,
\tag{B.11a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(\rho)} = \quad & 8(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{-\beta}\rho^i_\beta u^-_i + 4(\bar\theta^-)^2\theta^{+\beta}\rho^i_\beta u^-_i - 4(\bar\theta^-)^2\theta^{-\beta}\rho^i_\beta u^+_i \\
& - 8i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\sigma}\partial^\beta_{\dot\sigma}\rho^i_\beta u^-_i + 8i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\sigma}\partial^\beta_{\dot\sigma}\rho^i_\beta u^-_i \\
& - 16i(\bar\theta^-)^2\theta^{-(\beta}\theta^{+\sigma)}\bar\theta^{+\dot\sigma}\partial_{\sigma\dot\sigma}\rho^i_\beta u^-_i \\
& + 8i(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\sigma}\partial^\beta_{\dot\sigma}\rho^i_\beta u^+_i - 4(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\,\Box\,\rho^i_\beta u^-_i \\
& - 8(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{-\dot\beta}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i - 4(\theta^-)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i + 4(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\beta}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^+_i \\
& - 8i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\sigma}\partial^{\dot\beta}_{\sigma}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i + 8i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\sigma}\partial^{\dot\beta}_{\sigma}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i \\
& + 16i(\theta^-)^2\bar\theta^{-(\dot\beta}\bar\theta^{+\dot\sigma)}\theta^{+\sigma}\partial_{\sigma\dot\sigma}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i \\
& + 8i(\theta^-)^4\theta^{+\sigma}\partial^{\dot\beta}_{\sigma}\bar\rho^i_{\dot\beta}u^+_i + 4(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\beta}\,\Box\,\bar\rho^i_{\dot\beta}u^-_i .
\end{aligned}
\tag{B.11b}
$$

***Вспомогательное фермионное поле*** $\chi^i_\beta$***:***

$$
G^{++\alpha\dot\alpha}_{(\chi)} = -4i(\theta^+)^4\bar\theta^{-\dot\alpha}\chi^{\alpha i}u^-_i + 4i(\theta^+)^4\theta^{-\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha i}u^-_i ,
\tag{B.12a}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--\alpha\dot\alpha}_{(\chi)} = \quad & 4i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\alpha}\chi^{\alpha i}u^-_i - 2i(\theta^-)^2(\bar\theta^+)^2\bar\theta^{-\dot\alpha}\chi^{\alpha i}u^-_i \\
& - 2i(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\alpha}\chi^{\alpha i}u^+_i - 4(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\partial^{\dot\alpha}_{\rho}\chi^{\alpha i}u^-_i \\
& - 4i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha i}u^-_i + 2i(\bar\theta^-)^2(\theta^+)^2\theta^{-\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha i}u^-_i \\
& + 2i(\theta^-)^4\theta^{+\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha i}u^+_i - 4(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\partial^{\alpha}_{\dot\rho}\bar\chi^{\dot\alpha i}u^-_i .
\end{aligned}
\tag{B.12b}
$$

$$
G^{++5}_{(\chi)} = -2i(\theta^+)^4\theta^{-\alpha}\chi^i_\alpha u^-_i + 2i(\theta^+)^4\bar\theta^{-\dot\alpha}\bar\chi^i_{\dot\alpha}u^-_i ,
\tag{B.12c}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{--5}_{(\chi)} = \quad & 2i(\theta^-)^2(\bar\theta^+\bar\theta^-)\theta^{+\alpha}\chi^i_\alpha u^-_i - i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{-\alpha}\chi^i_\alpha u^-_i \\
& - i(\theta^-)^4\theta^{+\alpha}\chi^i_\alpha u^+_i - 2(\theta^-)^4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\partial^{\alpha}_{\dot\rho}\chi^i_\alpha u^-_i + \\
& - 2i(\bar\theta^-)^2(\theta^+\theta^-)\bar\theta^{+\dot\alpha}\bar\chi^i_{\dot\alpha}u^-_i + i(\bar\theta^+)^2(\theta^-)^2\theta^{-\dot\alpha}\bar\chi^i_{\dot\alpha}u^-_i \\
& + i(\theta^-)^4\bar\theta^{+\dot\alpha}\bar\chi^i_{\dot\alpha}u^+_i - 2(\theta^-)^4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\rho}\partial^{\dot\alpha}_{\rho}\bar\chi^i_{\dot\alpha}u^-_i .
\end{aligned}
\tag{B.12d}
$$

## B.2 $\mathcal{N} = 2$ теория спина 3

В этом приложении приведены отрицательно заряженные потенциалы, полученные решением уравнений нулевой кривизны для потенциалов $G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(\Phi,B)}$ и $G^{++\alpha\dot\alpha}_{(\Phi,B)}$, определенных в уравнении (2.69). В секторе спина 3 ненулевыми являются компоненты суперполей $G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}$

и $G^{++\alpha\dot\alpha}$:

$$
\begin{aligned}
G^{++(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(\Phi,B)} &= -4i\theta^{+\gamma}\bar\theta^{+\dot\gamma}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\gamma\dot\gamma} + 4(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\gamma}\bar\theta^{-(\dot\alpha}B^{\dot\beta)(\alpha\beta)}_{\dot\gamma} \\
&\qquad - 4(\bar\theta^+)^2\theta^{+\gamma}\theta^{-(\alpha}\bar B^{\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\gamma}\,, \\
G^{++\alpha\dot\alpha}_{(\Phi,B)} &= -2(\theta^+)^2\bar\theta^{+\dot\rho}\theta^-_\mu B^{(\mu\alpha)\dot\alpha}_{\dot\rho} - 2(\bar\theta^+)^2\theta^{+\beta}\bar\theta^-_{\dot\rho}\bar B^{\alpha(\dot\rho\dot\alpha)}_{\beta}\,.
\end{aligned}
\tag{B.12e}
$$

Выражения для потенциалов с отрицательными зарядами имеют вид:

$$
\begin{aligned}
G^{--(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{(\Phi,B)} &= -4i\theta^{-\beta}\bar\theta^{-\dot\beta}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\beta\dot\beta} \\
&\quad + 8(\theta^-)^2\bar\theta^{-(\dot\rho}\bar\theta^{+\dot\beta)}\partial^\beta_{\dot\rho}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\beta\dot\beta} - 8(\bar\theta^-)^2\theta^{-(\rho}\theta^{+\beta)}\partial^{\dot\beta}_{\rho}\Phi^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\beta\dot\beta} \\
&\quad + 4(\theta^-)^2\bar\theta^{+(\dot\alpha}\bar\theta^{-\dot\rho}B^{\dot\beta)(\alpha\beta)}_{\dot\rho} - 4(\bar\theta^-)^2\theta^{+\rho}\theta^{-(\alpha}\bar B^{\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\rho} \\
&\quad - 12i(\theta^-)^2(\bar\theta^-)^2\theta^{+\rho}\bar\theta^{+\dot\rho}\mathcal{G}^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}_{\rho\dot\rho}\,, \\
G^{--\alpha\dot\alpha}_{(\Phi,B)} &= 2(\theta^-)^2\bar\theta^{-\dot\rho}\theta^+_\mu B^{(\mu\alpha)\dot\alpha}_{\dot\rho} + 2i(\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2(\theta^-)^2\partial_{\rho\dot\rho}B^{(\rho\alpha)\dot\rho\dot\alpha} \\
&\quad + 2\,(\bar\theta^-)^2\theta^{-\beta}\bar\theta^+_{\dot\rho}\bar B^{\alpha(\dot\alpha\dot\rho)}_{\beta} - 2i(\bar\theta^+)^2(\bar\theta^-)^2(\theta^-)^2\partial_{\rho\dot\rho}\bar B^{\rho\alpha(\dot\rho\dot\alpha)}\,.
\end{aligned}
\tag{B.12f}
$$

В уравнении (B.12f) были использованы обозначения для линеаризованных кривизн для спина 3:

$$
\mathcal{G}_{(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3(\dot\alpha_1\dot\alpha_2)\dot\alpha_3} = \mathcal{R}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} - \frac{4}{9}\mathcal{R}_{(\alpha_1(\dot\alpha_1}\epsilon_{\dot\alpha_2)\dot\alpha_3}\epsilon_{\alpha_2)\alpha_3}\,,
\tag{B.12g}
$$

$$
\mathcal{R}_{\alpha_1\dot\alpha_1} = \partial^{\alpha_2\dot\alpha_2}\partial^{\alpha_3\dot\alpha_3}\Phi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} - \frac{1}{4}\partial_{\alpha_1\dot\alpha_1}\partial^{\alpha_2\dot\alpha_2}\Phi_{\alpha_2\dot\alpha_2} - \frac{5}{2}\,\Box\,\Phi_{\alpha_1\dot\alpha_1}\,,
\tag{B.12h}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} &= \partial_{(\alpha_1(\dot\alpha_1}\partial^{\rho\dot\rho}\Phi_{\alpha_2\alpha_3)\rho\dot\alpha_2\dot\alpha_3)\dot\rho} - \frac{2}{3}\,\Box\,\Phi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\dot\alpha_1\dot\alpha_2\dot\alpha_3)} \\
&\quad - \partial_{(\alpha_1(\dot\alpha_1}\partial_{\alpha_2\dot\alpha_2}\Phi_{\alpha_3)\dot\alpha_3)}\,.
\end{aligned}
\tag{B.12i}
$$

Тензор $\mathcal{G}_{(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3(\dot\alpha_1\dot\alpha_2)\dot\alpha_3}$ является аналогом тензора Эйнштейна для спина 3 и удовлетворяет тождеству Бьянки:

$$
\partial^{\alpha_3\dot\alpha_3}\mathcal{G}_{(\alpha_1\alpha_2)\alpha_3(\dot\alpha_1\dot\alpha_2)\dot\alpha_3} = 0.
\tag{B.12j}
$$

# Литература


[1] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007.

[2] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 12, 2007.

[3] D. J. Gross, "High-Energy Symmetries of String Theory," *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1229.

[4] A. Sagnotti, "Notes on Strings and Higher Spins," *J. Phys. A* **46** (2013) 214006, arXiv:1112.4285 [hep-th].

[5] G. Bonelli, "On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins," *Nucl. Phys. B* **669** (2003) 159–172, arXiv:hep-th/0305155.

[6] A. Sagnotti and M. Tsulaia, "On higher spins and the tensionless limit of string theory," *Nucl. Phys. B* **682** (2004) 83–116, arXiv:hep-th/0311257.

[7] M. A. Vasiliev, "Higher spin superalgebras in any dimension and their representations," *JHEP* **12** (2004) 046, arXiv:hep-th/0404124.

[8] S. R. Coleman and J. Mandula, "All Possible Symmetries of the S Matrix," *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251–1256.

[9] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, "All Possible Generators of Supersymmetries of the s Matrix," *Nucl. Phys. B* **88** (1975) 257.

[10] M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Rocek, "Improved Methods for Supergraphs," *Nucl. Phys. B* **159** (1979) 429.

[11] L. Brink, O. Lindgren, and B. E. W. Nilsson, "The Ultraviolet Finiteness of the N=4 Yang-Mills Theory," *Phys. Lett. B* **123** (1983) 323–328.

[12] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, M. Chiodaroli, H. Johansson, and R. Roiban, "Supergravity amplitudes, the double copy and ultraviolet behavior," arXiv:2304.07392 [hep-th].

[13] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, and E. Sokatchev, "Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in N=4 super-Yang-Mills theory," *Nucl. Phys. B* **828** (2010) 317–374, arXiv:0807.1095 [hep-th].

[14] B. Zumino, "Supersymmetry and Kahler Manifolds," *Phys. Lett. B* **87** (1979) 203.

[15] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom, and M. Rocek, "Hyperkahler Metrics and Supersymmetry," *Commun. Math. Phys.* **108** (1987) 535.

[16] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1992.

[17] K. S. M. Buchbinder, Ioseph L., *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace: A Walk Through Superspace*. Taylor & Francis, 1998.

[18] Z. Bern, J. J. Carrasco, D. Forde, H. Ita, and H. Johansson, "Unexpected Cancellations in Gravity Theories," *Phys. Rev. D* **77** (2008) 025010, arXiv:0707.1035 [hep-th].

[19] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, arXiv:hep-th/9711200.

[20] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "AdS dual of the critical O(N) vector model," *Phys. Lett. B* **550** (2002) 213–219, arXiv:hep-th/0210114.

[21] X. Bekaert, N. Boulanger, A. Campoleoni, M. Chiodaroli, D. Francia, M. Grigoriev, E. Sezgin, and E. Skvortsov, "Snowmass White Paper: Higher Spin Gravity and Higher Spin Symmetry," arXiv:2205.01567 [hep-th].

[22] D. Sorokin, "Introduction to the classical theory of higher spins," *AIP Conf. Proc.* **767** no. 1, (2005) 172–202, arXiv:hep-th/0405069.

[23] V. E. Didenko and E. D. Skvortsov, "Elements of Vasiliev theory," arXiv:1401.2975 [hep-th].

[24] R. Rahman and M. Taronna, "From Higher Spins to Strings: A Primer," arXiv:1512.07932 [hep-th].

[25] P. Kessel, "The Very Basics of Higher-Spin Theory," *PoS* **Modave2016** (2017) 001, arXiv:1702.03694 [hep-th].

[26] D. Ponomarev, "Basic Introduction to Higher-Spin Theories," *Int. J. Theor. Phys.* **62** no. 7, (2023) 146, arXiv:2206.15385 [hep-th].

[27] S. Pekar, "Introduction to higher-spin theories," *PoS* **Modave2022** (2023) 004.

[28] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, "Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case," *Phys. Rev. D* **9** (1974) 898–909.

[29] L. P. S. Singh and C. R. Hagen, "Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case," *Phys. Rev. D* **9** (1974) 910–920.

[30] C. Fronsdal, "Massless Fields with Integer Spin," *Phys. Rev. D* **18** (1978) 3624.

[31] J. Fang and C. Fronsdal, "Massless Fields with Half Integral Spin," *Phys. Rev. D* **18** (1978) 3630.

[32] S. M. Klishevich and Y. M. Zinovev, "On electromagnetic interaction of massive spin-2 particle," *Phys. Atom. Nucl.* **61** (1998) 1527–1537, arXiv:hep-th/9708150.

[33] R. R. Metsaev, "Gauge invariant formulation of massive totally symmetric fermionic fields in (A)dS space," *Phys. Lett. B* **643** (2006) 205–212, arXiv:hep-th/0609029.

[34] Y. M. Zinoviev, "Massive N=1 supermultiplets with arbitrary superspins," *Nucl. Phys. B* **785** (2007) 98–114, arXiv:0704.1535 [hep-th].

[35] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, "Conformal supergravity," *Phys. Rept.* **119** (1985) 233–362.

[36] S. M. Kuzenko, R. Manvelyan, and S. Theisen, "Off-shell superconformal higher spin multiplets in four dimensions," *JHEP* **07** (2017) 034, arXiv:1701.00682 [hep-th].

[37] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam, "On the Theoretical Problems in Constructing Interactions Involving Higher Spin Massless Particles," *Nucl. Phys. B* **260** (1985) 295–322.

[38] Y. M. Zinoviev, "Spin 3 cubic vertices in a frame-like formalism," *JHEP* **08** (2010) 084, arXiv:1007.0158 [hep-th].

[39] B. de Wit and D. Z. Freedman, "Systematics of Higher Spin Gauge Fields," *Phys. Rev. D* **21** (1980) 358.

[40] T. Damour and S. Deser, "Higher Derivative Interactions of Higher Spin Gauge Fields," *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) L95.

[41] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. Van Dam, "On spin three self interactions," *Z. Phys. C* **24** (1984) 247–254.

[42] X. Bekaert, N. Boulanger, and S. Leclercq, "Strong obstruction of the Berends-Burgers-van Dam spin-3 vertex," *J. Phys. A* **43** (2010) 185401, arXiv:1002.0289 [hep-th].

[43] X. Bekaert, N. Boulanger, and P. Sundell, "How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier: no-go theorems versus yes-go examples," *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 987–1009, arXiv:1007.0435 [hep-th].

[44] M. A. Vasiliev, "Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett. B* **243** (1990) 378–382.

[45] M. A. Vasiliev, "More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions," *Phys. Lett. B* **285** (1992) 225–234.

[46] M. A. Vasiliev, "Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d)," *Phys. Lett. B* **567** (2003) 139–151, arXiv:hep-th/0304049.

[47] M. A. Vasiliev, "Massless fields of all spins in anti-De Sitter space and their gravitational interaction," 1987.

[48] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in four-dimensions, three-dimensions, and two-dimensions," *Int. J. Mod. Phys. D* **5** (1996) 763–797, arXiv:hep-th/9611024.

[49] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories: Star product and AdS space," arXiv:hep-th/9910096.

[50] M. A. Vasiliev, "Higher spin gauge theories in various dimensions," *PoS* **JHW2003** (2003) 003, arXiv:hep-th/0401177.

[51] X. Bekaert, S. Cnockaert, C. Iazeolla, and M. A. Vasiliev, "Nonlinear higher spin theories in various dimensions," in *1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories*, pp. 132–197. 2004. arXiv:hep-th/0503128.

[52] V. E. Didenko and A. V. Korybut, "On z-dominance, shift symmetry and spin locality in higher-spin theory," *JHEP* **05** (2023) 133, arXiv:2212.05006 [hep-th].

[53] V. E. Didenko and A. V. Korybut, "Towards higher-spin symmetry breaking in the bulk," arXiv:2312.11096 [hep-th].

[54] A. A. Tseytlin, "On limits of superstring in AdS(5) x S**5," *Theor. Math. Phys.* **133** (2002) 1376–1389, arXiv:hep-th/0201112.

[55] A. Y. Segal, "Conformal higher spin theory," *Nucl. Phys. B* **664** (2003) 59–130, arXiv:hep-th/0207212.

[56] T. Basile, M. Grigoriev, and E. Skvortsov, "Covariant action for conformal higher spin gravity," *J. Phys. A* **56** no. 38, (2023) 385402, arXiv:2212.10336 [hep-th].

[57] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson, and L. Brink, "Cubic Interaction Terms for Arbitrary Spin," *Nucl. Phys. B* **227** (1983) 31–40.

[58] R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices of massive and massless higher spin fields," *Nucl. Phys. B* **759** (2006) 147–201, arXiv:hep-th/0512342.

[59] R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices for fermionic and bosonic arbitrary spin fields," *Nucl. Phys. B* **859** (2012) 13–69, arXiv:0712.3526 [hep-th].

[60] E. Joung and M. Taronna, "Cubic interactions of massless higher spins in (A)dS: metric-like approach," *Nucl. Phys. B* **861** (2012) 145–174, arXiv:1110.5918 [hep-th].

[61] F. A. Berends, G. J. H. Burgers, and H. van Dam, "Explicit Construction of Conserved Currents for Massless Fields of Arbitrary Spin," *Nucl. Phys. B* **271** (1986) 429–441.

[62] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan, and W. Ruhl, "Off-shell construction of some trilinear higher spin gauge field interactions," *Nucl. Phys. B* **826** (2010) 1–17, arXiv:0903.0243 [hep-th].

[63] A. Fotopoulos, N. Irges, A. C. Petkou, and M. Tsulaia, "Higher-Spin Gauge Fields Interacting with Scalars: The Lagrangian Cubic Vertex," *JHEP* **10** (2007) 021, arXiv:0708.1399 [hep-th].

[64] X. Bekaert, E. Joung, and J. Mourad, "On higher spin interactions with matter," *JHEP* **05** (2009) 126, arXiv:0903.3338 [hep-th].

[65] S. Weinberg and E. Witten, "Limits on Massless Particles," *Phys. Lett. B* **96** (1980) 59–62.

[66] M. Porrati, "Universal Limits on Massless High-Spin Particles," *Phys. Rev. D* **78** (2008) 065016, arXiv:0804.4672 [hep-th].

[67] N. Boulanger, S. Leclercq, and P. Sundell, "On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory," *JHEP* **08** (2008) 056, arXiv:0805.2764 [hep-th].

[68] D. Ponomarev and E. D. Skvortsov, "Light-Front Higher-Spin Theories in Flat Space," *J. Phys. A* **50** no. 9, (2017) 095401, arXiv:1609.04655 [hep-th].

[69] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields," *Phys. Lett. B* **189** (1987) 89–95.

[70] E. S. Fradkin and V. Y. Linetsky, "Cubic Interaction in Conformal Theory of Integer Higher Spin Fields in Four-dimensional Space-time," *Phys. Lett. B* **231** (1989) 97–106.

[71] X. Bekaert, E. Joung, and J. Mourad, "Effective action in a higher-spin background," *JHEP* **02** (2011) 048, arXiv:1012.2103 [hep-th].

[72] S. M. Kuzenko, M. Ponds, and E. S. N. Raptakis, "Conformal Interactions Between Matter and Higher-Spin (Super)Fields," *Fortsch. Phys.* **71** no. 1, (2023) 2200157, arXiv:2208.07783 [hep-th].

[73] M. Grigoriev and A. A. Tseytlin, "On conformal higher spins in curved background," *J. Phys. A* **50** no. 12, (2017) 125401, arXiv:1609.09381 [hep-th].

[74] M. Beccaria and A. A. Tseytlin, "On induced action for conformal higher spins in curved background," *Nucl. Phys. B* **919** (2017) 359–383, arXiv:1702.00222 [hep-th].

[75] M. Taronna, "Higher-Spin Interactions: four-point functions and beyond," *JHEP* **04** (2012) 029, arXiv:1107.5843 [hep-th].

[76] M. Karapetyan, R. Manvelyan, and G. Poghosyan, "On special quartic interaction of higher spin gauge fields with scalars and gauge symmetry commutator in the linear approximation," *Nucl. Phys. B* **971** (2021) 115512, arXiv:2104.09139 [hep-th].

[77] Y. A. Golfand and E. P. Likhtman, "Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance," *JETP Lett.* **13** (1971) 323–326.

[78] D. V. Volkov and V. P. Akulov, "Is the Neutrino a Goldstone Particle?," *Phys. Lett. B* **46** (1973) 109–110.

[79] J. Wess and B. Zumino, "A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations," *Phys. Lett. B* **49** (1974) 52.

[80] H. Hannesdottir and M. D. Schwartz, "$S$ -Matrix for massless particles," *Phys. Rev. D* **101** no. 10, (2020) 105001, arXiv:1911.06821 [hep-th].

[81] E. Witten and D. I. Olive, "Supersymmetry Algebras That Include Topological Charges," *Phys. Lett. B* **78** (1978) 97–101.

[82] X. Bekaert and N. Boulanger, "The unitary representations of the Poincar\'e group in any spacetime dimension," *SciPost Phys. Lect. Notes* **30** (2021) 1, arXiv:hep-th/0611263.

[83] C. Cordova, T. T. Dumitrescu, and K. Intriligator, "Multiplets of Superconformal Symmetry in Diverse Dimensions," *JHEP* **03** (2019) 163, arXiv:1612.00809 [hep-th].

[84] L. Eberhardt, "Superconformal symmetry and representations," *J. Phys. A* **54** no. 6, (2021) 063002, arXiv:2006.13280 [hep-th].

[85] S. M. Kuzenko, E. S. N. Raptakis, and G. Tartaglino-Mazzucchelli, "Superspace approaches to $\mathcal{N} = 1$ supergravity," arXiv:2210.17088 [hep-th].

[86] W. Siegel and M. Rocek, "On off-shell supermultiplets," *Phys. Lett. B* **105** (1981) 275–277.

[87] V. O. Rivelles and J. G. Taylor, "Off-shell No Go Theorems for Higher Dimensional Supersymmetries and Supergravities," *Phys. Lett. B* **121** (1983) 37–42.

[88] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitsyn, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, "Unconstrained Off-Shell $\mathcal{N} = 3$ Supersymmetric Yang-Mills Theory," *Class. Quant. Grav.* **2** (1985) 155.

[89] J. van Muiden and A. Van Proeyen, "The $\mathcal{N} = 3$ Weyl multiplet in four dimensions," *JHEP* **01** (2019) 167, arXiv:1702.06442 [hep-th].

[90] E. Bergshoeff, M. de Roo, and B. de Wit, "Extended Conformal Supergravity," *Nucl. Phys. B* **182** (1981) 173–204.

[91] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, and W. Siegel, *Superspace Or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, vol. 58 of *Frontiers in Physics*. 1983. arXiv:hep-th/0108200.

[92] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitsyn, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, "Unconstrained $\mathcal{N}$ = 2 Matter, Yang-Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace," *Class. Quant. Grav.* **1** (1984) 469–498. [Erratum: Class.Quant.Grav. 2, 127 (1985)].

[93] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, "Harmonic superspace: key to $\mathcal{N}$ = 2 supersymmetry theories," *JETP Lett.* **40** (1984) 912–916.

[94] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, and E. S. Sokatchev, *Harmonic superspace*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.

[95] A. S. Galperin, N. A. Ky, and E. Sokatchev, "$\mathcal{N}$ = 2 Supergravity in Superspace: Solution to the Constraints," *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) 1235.

[96] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, and E. Sokatchev, "$\mathcal{N}$ = 2 Supergravity in Superspace: Different Versions and Matter Couplings," *Class. Quant. Grav.* **4** (1987) 1255.

[97] B. M. Zupnik, "Background harmonic superfields in $\mathcal{N}$ = 2 supergravity," *Theor. Math. Phys.* **116** (1998) 964–977, arXiv:hep-th/9803202.

[98] T. Curtright, "Massless Field Supermultiplets With Arbitrary Spin," *Phys. Lett. B* **85** (1979) 219–224.

[99] M. A. Vasiliev, "'Gauge' for of description of massles fields with arbitrary spin. (in russian)," *Yad. Fiz.* **32** (1980) 855–861.

[100] S. M. Kuzenko, A. G. Sibiryakov, and V. V. Postnikov, "Massless gauge superfields of higher half integer superspins," *JETP Lett.* **57** (1993) 534–538.

[101] S. M. Kuzenko and A. G. Sibiryakov, "Massless gauge superfields of higher integer superspins," *JETP Lett.* **57** (1993) 539–542.

[102] S. M. Kuzenko and A. G. Sibiryakov, "Free massless higher superspin superfields on the anti-de Sitter superspace," *Phys. Atom. Nucl.* **57** (1994) 1257–1267, arXiv:1112.4612 [hep-th].

[103] K. Koutrolikos, "Superspace formulation of massive half-integer superspin," *JHEP* **03** (2021) 254, arXiv:2012.12225 [hep-th].

[104] S. J. Gates, Jr., S. M. Kuzenko, and A. G. Sibiryakov, "$\mathcal{N}$=2 supersymmetry of higher superspin massless theories," *Phys. Lett. B* **412** (1997) 59–68, arXiv:hep-th/9609141.

[105] S. J. Gates, Jr., S. M. Kuzenko, and A. G. Sibiryakov, "Towards a unified theory of massless superfields of all superspins," *Phys. Lett. B* **394** (1997) 343–353, arXiv:hep-th/9611193.

[106] I. L. Buchbinder, S. J. Gates, and K. Koutrolikos, "Higher Spin Superfield interactions with the Chiral Supermultiplet: Conserved Supercurrents and Cubic Vertices," *Universe* **4** no. 1, (2018) 6, arXiv:1708.06262 [hep-th].

[107] I. L. Buchbinder, S. J. Gates, and K. Koutrolikos, "Integer superspin supercurrents of matter supermultiplets," *JHEP* **05** (2019) 031, arXiv:1811.12858 [hep-th].

[108] E. I. Buchbinder, J. Hutomo, and S. M. Kuzenko, "Higher spin supercurrents in anti-de Sitter space," *JHEP* **09** (2018) 027, arXiv:1805.08055 [hep-th].

[109] I. L. Buchbinder, S. J. Gates, and K. Koutrolikos, "Interaction of supersymmetric nonlinear sigma models with external higher spin superfields via higher spin supercurrents," *JHEP* **05** (2018) 204, arXiv:1804.08539 [hep-th].

[110] I. L. Buchbinder, S. J. Gates, and K. Koutrolikos, "Conserved higher spin supercurrents for arbitrary spin massless supermultiplets and higher spin superfield cubic interactions," *JHEP* **08** (2018) 055, arXiv:1805.04413 [hep-th].

[111] J. Hutomo and S. M. Kuzenko, "The massless integer superspin multiplets revisited," *JHEP* **02** (2018) 137, arXiv:1711.11364 [hep-th].

[112] J. Hutomo and S. M. Kuzenko, "Non-conformal higher spin supercurrents," *Phys. Lett. B* **778** (2018) 242–246, arXiv:1710.10837 [hep-th].

[113] J. Hutomo, *Off-shell higher-spin gauge supermultiplets and conserved supercurrents*. PhD thesis, Western Australia U., 2020. arXiv:2009.01131 [hep-th].

[114] S. J. Gates and K. Koutrolikos, "Progress on cubic interactions of arbitrary superspin supermultiplets via gauge invariant supercurrents," *Phys. Lett. B* **797** (2019) 134868, arXiv:1904.13336 [hep-th].

[115] R. R. Metsaev, "Cubic interactions for arbitrary spin $\mathcal{N}$ -extended massless supermultiplets in 4d flat space," *JHEP* **11** (2019) 084, arXiv:1909.05241 [hep-th].

[116] M. V. Khabarov and Y. M. Zinoviev, "Cubic interaction vertices for massless higher spin supermultiplets in $d = 4$," *JHEP* **02** (2021) 167, arXiv:2012.00482 [hep-th].

[117] E. S. Fradkin and V. Y. Linetsky, "Superconformal Higher Spin Theory in the Cubic Approximation," *Nucl. Phys. B* **350** (1991) 274–324.

[118] S. M. Kuzenko and E. S. N. Raptakis, "Extended superconformal higher-spin gauge theories in four dimensions," *JHEP* **12** (2021) 210, arXiv:2104.10416 [hep-th].

[119] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, and A. G. Sibiryakov, "Quantization of higher spin superfields in the anti-De Sitter superspace," *Phys. Lett. B* **352** (1995) 29–36, arXiv:hep-th/9502148.

[120] S. M. Kuzenko, "Projective superspace as a double punctured harmonic superspace," *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1999) 1737–1758, arXiv:hep-th/9806147.

[121] D. Jain and W. Siegel, "Deriving Projective Hyperspace from Harmonic," *Phys. Rev. D* **80** (2009) 045024, arXiv:0903.3588 [hep-th].

[122] D. Butter, "On conformal supergravity and harmonic superspace," *JHEP* **03** (2016) 107, arXiv:1508.07718 [hep-th].

[123] A. Rosly, "Super Yang-Mills constraints as integrability conditions," in *M.A. Markov (Ed.), "Group Theoretical Methods in Physics", Nauka, Moscow,*, p. 263. 1983.

[124] A. A. Roslyi and A. S. Schwarz, "Supersymmetry in a space with auxiliary dimensions," *Commun. Math. Phys.* **105** (1986) 645.

[125] A. Karlhede, U. Lindstrom, and M. Rocek, "Selfinteracting Tensor Multiplets in $\mathcal{N} = 2$ Superspace," *Phys. Lett. B* **147** (1984) 297–300.

[126] U. Lindstrom and M. Rocek, "$N = 2$ Superyang-mills Theory in Projective Superspace," *Commun. Math. Phys.* **128** (1990) 191.

[127] S. M. Kuzenko, "Lectures on nonlinear sigma-models in projective superspace," *J. Phys. A* **43** (2010) 443001, arXiv:1004.0880 [hep-th].

[128] D. Butter, "$\mathcal{N} = 2$ Conformal Superspace in Four Dimensions," *JHEP* **10** (2011) 030, arXiv:1103.5914 [hep-th].

[129] R. Grimm, "Solution of the Bianchi Identities in SU(2) Extended Superspace with Constraints," in *Europhysics Study Conference on Unification of the Fundamental Interactions*, pp. 509–523. 1980.

[130] P. S. Howe, "Supergravity in Superspace," *Nucl. Phys. B* **199** (1982) 309–364.

[131] E. Ivanov, $\mathcal{N}=2$ *Supergravities in Harmonic Superspace*. 2024. arXiv:2212.07925 [hep-th].

[132] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 5, 2012.

[133] E. Lauria and A. Van Proeyen, $\mathcal{N}=2$ *Supergravity in* $D=4,5,6$ *Dimensions*, vol. 966. 3, 2020. arXiv:2004.11433 [hep-th].

[134] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Minimal set of auxiliary fields and S matrix for extended supergravity," *Lett. Nuovo Cim.* **25** (1979) 79–90.

[135] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Minimal set of auxiliary fields in $SO(2)$ extended supergravity," *Phys. Lett. B* **85** (1979) 47–51.

[136] B. de Wit and J. W. van Holten, "Multiplets of Linearized $SO(2)$ Supergravity," *Nucl. Phys. B* **155** (1979) 530–542.

[137] S. M. Kuzenko, E. S. N. Raptakis, and G. Tartaglino-Mazzucchelli, "Covariant superspace approaches to $\mathcal{N}=2$ supergravity," arXiv:2211.11162 [hep-th].

[138] V. Ogievetsky and E. Sokatchev, "Structure of Supergravity Group," *Phys. Lett. B* **79** (1978) 222.

[139] V. I. Ogievetsky and E. S. Sokatchev, "The Gravitational Axial Superfield and the Formalism of Differential Geometry," *Sov. J. Nucl. Phys.* **31** (1980) 424.

[140] V. I. Ogievetsky and E. S. Sokatchev, "The Simplest Group of Einstein Supergravity," *Sov. J. Nucl. Phys.* **31** (1980) 140.

[141] I. Buchbinder, E. Ivanov, and N. Zaigraev, "Unconstrained off-shell superfield formulation of 4D, $\mathcal{N}=2$ supersymmetric higher spins," *JHEP* **12** (2021) 016, arXiv:2109.07639 [hep-th].

[142] I. Buchbinder, E. Ivanov, and N. Zaigraev, "$\mathcal{N}=2$ higher spins: superfield equations of motion, the hypermultiplet supercurrents, and the component structure," *JHEP* **03** (2023) 036, arXiv:2212.14114 [hep-th].

[143] L. Mezincescu, "On the superfield formulation of $O(2)$ supersymmetry," *Dubna preprint JINR-P2-12572 (June, 1979)* .

[144] R. Grimm, M. Sohnius, and J. Wess, "Extended Supersymmetry and Gauge Theories," *Nucl. Phys. B* **133** (1978) 275–284.

[145] S. J. Gates, Jr. and W. Siegel, "Linearized $\mathcal{N} = 2$ superfield supergravity," *Nucl. Phys. B* **195** (1982) 39–60.

[146] I. Buchbinder, E. Ivanov, and N. Zaigraev, "Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Higher-Spin Gauge Superfields and Their Hypermultiplet Couplings," *Phys. Part. Nucl. Lett.* **20** no. 3, (2023) 300–305, arXiv:2211.09501 [hep-th].

[147] I. Buchbinder, E. Ivanov, and N. Zaigraev, "Off-shell cubic hypermultiplet couplings to $\mathcal{N} = 2$ higher spin gauge superfields," *JHEP* **05** (2022) 104, arXiv:2202.08196 [hep-th].

[148] N. Zaigraev, "$\mathcal{N} = 2$ Higher Spin Theory in Harmonic Superspace," *Phys. Part. Nucl.* **54** no. 6, (2023) 1084–1088.

[149] S. M. Kuzenko and E. S. N. Raptakis, "On higher-spin $\mathcal{N} = 2$ supercurrent multiplets," *JHEP* **05** (2023) 056, arXiv:2301.09386 [hep-th].

[150] J. Hietarinta, "Supersymmetry Generators of Arbitrary Spin," *Phys. Rev. D* **13** (1976) 838.

[151] N. S. Baaklini, "New Superalgebra and Goldstone Spin 3/2 Particle," *Phys. Lett. B* **67** (1977) 335–336.

[152] M. Magro, I. Sachs, and S. Wolf, "Superfield Noether procedure," *Annals Phys.* **298** (2002) 123–166, arXiv:hep-th/0110131.

[153] J. Wess, "Supersymmetry and Internal Symmetry," *Acta Phys. Austriaca* **41** (1975) 409–414.

[154] W. Siegel, "Chiral Actions for $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Tensor Multiplets," *Phys. Lett. B* **153** (1985) 51–54.

[155] V. Ogievetsky and E. Sokatchev, "On Vector Superfield Generated by Supercurrent," *Nucl. Phys. B* **124** (1977) 309–316.

[156] M. F. Sohnius, "The Multiplet of Currents for $\mathcal{N} = 2$ Extended Supersymmetry," *Phys. Lett. B* **81** (1979) 8–10.

[157] P. C. West, "Introduction to rigid supersymmetric theories," in *NATO Advanced Study Institute on Confinement, Duality and Nonperturbative Aspects of QCD*, pp. 87–150. 6, 1997. arXiv:hep-th/9805055.

[158] S. M. Kuzenko and S. Theisen, "Correlation functions of conserved currents in $\mathcal{N} = 2$ superconformal theory," *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 665–696, arXiv:hep-th/9907107.

[159] D. Butter and S. M. Kuzenko, "$\mathcal{N} = 2$ supergravity and supercurrents," *JHEP* **12** (2010) 080, arXiv:1011.0339 [hep-th].

[160] P. C. West, *Introduction to supersymmetry and supergravity*. World Scientific Publishing Company, 2 ed., 1990.

[161] T. T. Dumitrescu and Z. Komargodski, "Aspects of supersymmetry and its breaking," *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **216** (2011) 44–68.

[162] S. Ferrara and B. Zumino, "Transformation Properties of the Supercurrent," *Nucl. Phys. B* **87** (1975) 207.

[163] M. Bertolini, *Lectures on Supersymmetry*. 2024.

[164] P. S. Howe, K. S. Stelle, and P. K. Townsend, "Supercurrents," *Nucl. Phys. B* **192** (1981) 332–352.

[165] S. M. Kuzenko, "Variant supercurrent multiplets," *JHEP* **04** (2010) 022, arXiv:1002.4932 [hep-th].

[166] S. M. Kuzenko, "Variant supercurrents and Noether procedure," *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1513, arXiv:1008.1877 [hep-th].

[167] N. Zaigraev, I. Buchbinder, and E. Ivanov, "$\mathcal{N} = 2$ higher spin theories and harmonic superspace," *PoS* **ICPPCRubakov2023** (2024) 048, arXiv:2402.05704 [hep-th].

[168] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, and E. Sokatchev, "Conformal invariance in harmonic superspace," *JINR-E2-85-363* (5, 1985) .

[169] M. Muller, "Minimal $\mathcal{N} = 2$ Supergravity in Superspace," *Nucl. Phys. B* **282** (1987) 329–348.

[170] T. L. Curtright and P. G. O. Freund, "Massive dual fields," *Nucl. Phys. B* **172** (1980) 413–424.

[171] T. Curtright, "Generalized gauge fields," *Phys. Lett. B* **165** (1985) 304–308.

[172] S. M. Kuzenko, M. Ponds, and E. S. N. Raptakis, "New locally (super)conformal gauge models in Bach-flat backgrounds," *JHEP* **08** (2020) 068, arXiv:2005.08657 [hep-th].

[173] V. I. Ogievetsky and I. V. Polubarinov, "The notoph and its possible interactions," *Yad. Fiz.* **4** (1966) 216–223.

[174] E. A. Ivanov, "Gauge Fields, Nonlinear Realizations, Supersymmetry," *Phys. Part. Nucl.* **47** no. 4, (2016) 508–539, arXiv:1604.01379 [hep-th].

[175] S. M. Kuzenko, M. Ponds, and E. S. N. Raptakis, "Generalised superconformal higher-spin multiplets," *JHEP* **03** (2021) 183, arXiv:2011.11300 [hep-th].

[176] S. M. Kuzenko and M. Ponds, "Conformal geometry and (super)conformal higher-spin gauge theories," *JHEP* **05** (2019) 113, arXiv:1902.08010 [hep-th].

[177] S. M. Kuzenko and M. Ponds, "Generalised conformal higher-spin fields in curved backgrounds," *JHEP* **04** (2020) 021, arXiv:1912.00652 [hep-th].

[178] V. O. Rivelles and J. G. Taylor, "Linearized $\mathcal{N} = 2$ superfield supergravity," *J. Phys. A* **15** (1982) 163.

[179] D. Butter and S. M. Kuzenko, "$\mathcal{N} = 2$ AdS supergravity and supercurrents," *JHEP* **07** (2011) 081, arXiv:1104.2153 [hep-th].

[180] E. Ivanov, "Higher spins in harmonic superspace," *Theor. Math. Phys.* **217** no. 3, (2023) 1855–1869, arXiv:2306.10401 [hep-th].

[181] I. L. Buchbinder and I. Shapiro, *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2, 2023.

[182] R. Bonezzi, "Induced Action for Conformal Higher Spins from Worldline Path Integrals," *Universe* **3** no. 3, (2017) 64, arXiv:1709.00850 [hep-th].

[183] L. Bonora, M. Cvitan, P. Dominis Prester, S. Giaccari, B. Lima de Souza, and T. Štemberga, "One-loop effective actions and higher spins," *JHEP* **12** (2016) 084, arXiv:1609.02088 [hep-th].

[184] L. Bonora, M. Cvitan, P. Dominis Prester, S. Giaccari, and T. Štemberga, "One-loop effective actions and higher spins. Part II," *JHEP* **01** (2018) 080, arXiv:1709.01738 [hep-th].

[185] S. M. Kuzenko, J. La Fontaine, and M. Ponds, "Induced action for superconformal higher-spin multiplets using SCFT techniques," *Phys. Lett. B* **839** (2023) 137818, arXiv:2212.00468 [hep-th].