САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи



Смирнов Александр Викторович

Асимптотические метрические инварианты и фундаментальные группы многомерных граф-многообразий

1.1.3 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Санкт-Петербург
2024

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

Малютин Андрей Валерьевич — доктор физико-математических наук, профессор РАН, заместитель директора по научной работе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (специальность — 01.01.04).

Официальные оппоненты:

Кудрявцева Елена Александровна — доктор физико-математических наук, профессором РАН, профессор кафедры Дифференциальной Геометрии и Приложений Механико-Математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» (специальность — 01.01.04).

Медных Александр Дмитриевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией теории функций Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (специальность — 01.01.04).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Защита состоится на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8. 6 марта 2025 г.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте `http://www.mi-ras.ru/dis/ref24/smirnov/dis.pdf`

Автореферат разослан « » ноября 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.03
доктор физико-математических наук Д. В. Осипов

Общая характеристика работы

Цели и задачи работы.

Диссертация посвящена изучению асимптотических инвариантов метрических пространств размерностного типа. Наибольшее внимание уделено асимптотической размерности и линейно-контролируемой асимптотической размерности. Вычислены такие размерности для широкого класса обобщенных граф-многообразий.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Асимптотическая геометрия изучает метрические пространства с точки зрения больших масштабов, где локальная геометрия не играет роли. Важным классом изучаемых объектов являются квази-изометрии и квази-изометрические инварианты.

Асимптотические размерности. Понятие асимптотической размерности, по-видимому, было введено Громовым в работе [17], как важный квази-изометрический инвариант, и получило популярность благодаря работе Ю [31], в которой была доказана гипотеза Новикова о высших сигнатурах для конечно-порожденных групп конечного гомотопического типа с конечной асимптотической размерностью.

Определение. *(Gromov [17]) Асимптотическая размерность метрического пространства X,* $\operatorname{asdim} X$*, определяется как такое наименьшее целое число n, что для каждого $R > 0$ найдется $D > 0$, при котором у X имеется $(n+1)$-красочное, R-разделенное, D-ограниченное покрытие пространства X.*

Позднее были получены оценки на асимптотическую размерность для разного вида метрических пространств. Для гиперболических групп — в работе [27]; для групп, гиперболических по отношению к подгруппам, — в работе [26]; для групп классов отображений ориентируемых поверхностей конечного типа — в работе [8]. Большой вклад в изучение асимптотической размерности внёс Дранишников [6], [7], [18].

Линейно-контролируемая асимптотическая размерность, ℓ-asdim, была определена в работе Рое [28] как метрический вариант асимптотической размерности.

Определение. *(Roe [28]) Линейно-контролируемая асимптотическая размерность метрического пространства X,* ℓ-$\operatorname{asdim} X$*, определяется как такое наименьшее целое число n, что для каждого достаточно большого вещественного числа R существует $(n+1)$-красочное, R-разделенное, CR-ограниченное покрытие пространства X, где число $C > 0$ не зависит от R.*

Также это понятие можно рассматривать как асимптотический вариант размерности Ассуад–Нагаты, введенной в работах [4], [25]. Более того, для мет-

рических пространств, размерность Ассуад–Нагаты которых на малых масштабах легко вычислима (например, для римановых многообразий), нахождение ℓ-asdim является важнейшим шагом к нахождению размерности Ассуад–Нагаты. В последнее время пространства с конечной размерностью Ассуад–Нагаты неожиданно появляются в различных областях математики. В работе Лэнга и Шлихенмайера [23] они используется при исследования продолжимости липшицевых функций. А в недавней работе [19] Эршлер и Митрофанову удается построить хорошее упорядочивание на таких пространствах, помогающее при исследовании универсальной задачи комивояжора.

Для более подробного изучения свойств ℓ-asdim и размерности Ассуад–Нагаты см. работы [16], [23], [11].

В работе [6] Белл и Дранишников доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть π — фундаментальная группа конечного графа групп с конечно порожденными вершинными группами G_v, у которых* $\operatorname{asdim} G_v \leqslant n$ *для всех вершин v. Тогда* $\operatorname{asdim} \pi \leqslant n + 1$.

Этот результат позволяет оценивать асимптотическую размерность фундаментальных групп пространств, склеенных из хороших кусков.

Однако аналогичного эффективного инструмента для нахождения верхних оценок линейно-контролируемой асимптотической размерности неизвестно. Для фундаментальных групп многообразий известны лишь некоторые частные случаи. Первый результат таких оценок для фундаментальных групп трехмерных многообразий был получен в работе [2], а именно, для линейно-контролируемой асимптотической размерности фундаментальной группы произвольного трехмерного граф-многообразия M была получена оценка $3 \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) \leqslant 7$. Позднее Юм и Систо в работе [21] доказали, что $\ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = 3$. Оценки линейно-контролируемой асимптотической размерности фундаментальных групп трехмерных граф-многообразий получены Маккэем и Систо в работе [24].

Возникает вопрос о переносе этих результатов на многомерный случай. Глава три диссертации посвящена ответу на этот вопрос для случая многомерных ортогональных граф-многообразий, следствие 1.2. В главе 4 приводится обобщение на существенно более общий случай четырехмерных граф-многообразий типа не больше двух, следствие 1.5.

Вложение в произведения деревьев. Изучение квази-изометрических вложений в произведения деревьев впервые было проведено в работе [18], как асимптотический аналог идей Бауэрса [10]. С тех пор такие вложения рассматриваются как один из ключевых подходов к изучению асимптотической геометрии метрических пространств. В частности, для получения верхних оценок на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности. С тех пор множество работ опубликовано на эту тему. См., например, [9], [13], [14], [20], [23], [24].

Естественным вопросом является следующий: какие метрические пространства можно квази-изометрически вложить в произведение нескольких деревьев?

Для случая ортогональных граф-многообразий ответом на него является теорема 1.1, доказанная в главе 3 диссертации.

Граф-многообразия и ортогональные граф-многообразия. Классическое граф-многообразие — это трехмерное многообразие, которое получается путем склеивания некоторых S^1-расслоений. Такие многообразия были открыты и классифицированы Вальдхаузеном [32], [33]. Обобщенные граф-многообразия, далее — n-мерные граф-многообразия или просто граф-многообразия, были впервые введены Буяло и Кобельским в работе [15], как многомерные аналоги трёхмерных.

Оказывается, класс многомерных граф-многообразий гораздо обширнее и сложнее, чем трехмерных. Капович и Либ в работе [22] доказали, что фундаментальная группа любого трехмерного граф-многообразия квази-изометрична фундаментальной группе граф-многообразия, допускающего метрику неположительной кривизны. Более того, Бершток и Нойман в работе [5] доказали, что все такие фундаментальные группы попарно квази-изометричны. Эти результаты позволяют сводить вопросы асимптотической геометрии трехмерных граф-многообразий к исследованию одного базового случая. К сожалению, в размерностях, начиная с четырёх, аналогичные результаты не известны.

Возникает естественный вопрос о нахождении аналогичных результатов в многомерном случае. Частичные ответы на этот вопрос для четырехмерных граф-многообразий даются в главе 4 диссертации, см. теорему 1.4, теорему 1.6 и следствие 1.7.

Положения, выносимые на защиту. Научная новизна.

В диссертации автором самостоятельно получены следующие новые результаты.

1. Показано, что фундаментальная группа ортогонального граф-многообразия размерности n квази-изометрически вкладывается в произведение n метрических деревьев (теорема 1.1).

2. Доказано, что универсальное накрывающее четырехмерного граф-многообразия, тип которого не превышает двух, билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему ортогонального граф-многообразия (теорема 1.4).

3. Введен новый топологический инвариант — тип граф-многообразия (определение 1.3).

4. Найден топологический критерий ортогональности для четырёхмерных граф-многообразий. (теорема 1.6).

5. Получены верхние оценки на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности для ортогональных граф-многообразий (следствие 1.2).

6. Получены верхние оценки на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности для четырехмерных граф-многообразий типа не больше двух (следствие 1.5).

7. Приведен пример четырехмерного граф-многообразия типа два, не являющегося ортогональным (следствие 1.7).

Практическая и теоретическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по асимптотической геометрии и геометрии многообразий.

Достоверность результатов и апробация работы.

Для результатов работы даны точные доказательства. Результаты опубликованы в журнале Алгебра и анализ, докладывались на семинарах лаборатории геометрии ПОМИ РАН и «Oberwolfach Seminar: Lipschitz Analysis», международных конференциях «W.Killing and K.Weierstrass Colloquium» и «Дни геометрии в Новосибирске».

Публикации.

По теме диссертации автором опубликованы статьи [1], [2] и [3]. На защиту выносятся только результаты работ [2], [3]. Журналы, в которых опубликованы статьи [1], [2], [3], удовлетворяют рекомендациям ВАК.

Методология и методы исследования.

В основе доказательства теоремы 1.1 лежит идея рассмотрения на универсальном накрывающем n-мерного ортогонального граф-многообразия метрики неположительной кривизны специального вида. Для такой метрики универсальное накрывающее разбивается на «кирпичи», каждый из которых является произведением гиперболического прямоугольного шестиугольника и $n-1$ единичного интервала.

Для формулировки теоремы 1.4 автором введён новый топологический инвариант — тип граф-многообразия. Для доказательства теоремы 1.4 изучается W-структура, введенная в работе [15]. Показывается, что любое граф-многообразие конечнолистно накрывается граф-многообразием, все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения которого равны 1. После этого строится билипшицев гомеоморфизм универсального накрывающего такого граф-многообразия в универсальное накрывающее ортогонального граф-многообразия.

Для доказательства теоремы 1.6 изучается отображение заряда. Доказывается, что для ортогонального граф-многообразия заряд любой вершины равен 0. Из исследования W-структуры получается, что есть ряд препятствий к ортогональности граф-многообразий. В первую очередь это отличие индекса или вторичного индекса пересечения от единицы. Однако даже в классе

граф-многообразий, все блоки которых имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1, существуют не ортогональные граф-многообразия. В следствии 1.7 приводится пример такого граф-многообразия.

Основное содержание работы

Структура и объем работы.

Диссертация изложена на 48 страницах и состоит из пяти глав, разбитых на разделы, и списка литературы.

Краткое содержание диссертации.

Здесь мы опишем структуру диссертации. Нумерация утверждений согласована с нумерацией, используемой в диссертации.

Во **введении, главе 1** приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации. Первый основной результат: вводится класс ортогонально склеенных обобщенных граф-многообразий, для краткости называемых *ортогональными граф-многообразиями*. После чего обобщаются результаты работ [21] и [1] на этот класс многообразий. А именно, сформулирована и доказана теорема 1.1.

Теорема 1.1. *Для фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия* M, $\dim M = n \geqslant 3$, *снабженной произвольной метрикой слов, существует квази-изометрическое вложение в произведение* n *метрических деревьев.*

С помощью теоремы 1.1 были найдены асимптотическая размерность и линейно-контролируемая асимптотическая размерность фундаментальных групп ортогональных граф-многообразий.

Следствие 1.2. *Для ортогонального граф-многообразия* M, *с* $\dim M \geqslant 3$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \dim M,$$

где asdim — *асимптотическая размерность,* ℓ-asdim — *линейно-контролируемая асимптотическая размерность.*

В работе [21] аналогичный результат получен для $n = 3$ и для любого трехмерного граф-многообразия M. Дело в том, что в размерности три фундаментальная группа любого граф-многообразия M квази-изометрична, согласно [5], фундаментальной группе так называемого флип граф-многообразия, которое является ортогональным граф-многообразием для случая $n = 3$. А асимптотическая и линейно-контролируемая асимптотическая размерности являются квази-изометрическими инвариантами.

Вторым основным результатом диссертации является теорема 1.4. В ней устанавливается билипшицева эквивалентность универсальных накрывающих

для некоторых четырехмерных граф-многообразий. Это расширяет класс граф-многообразий, для которых доказан аналог теоремы 1.1.

Согласно работе [22], фундаментальная группа любого замкнутого трехмерного граф-многообразия квази-изометрична фундаментальной группе флип граф-многообразия. Поэтому фундаментальные группы любых замкнутых трехмерных граф-многообразий квази-изометричны. В старших размерностях это далеко уже не так. Мы вводим топологический инвариант, $\operatorname{type} M$, граф-многообразия M, принимающий натуральные значения. Приведем здесь его краткое определение.

Каждый блок граф-многообразия на уровне первых гомологий определяет слоевое пространство. Соответственно, при склейке двух блоков на ребре определено пересечение слоевых пространств склеиваемых блоков. Будем говорить, что ребра, выходящие из вершины v графа граф-многообразия M, *параллельны*, если полученные на них пространства пересечения совпадают как подпространства слоевого пространства блока вершины v.

Определение 1.3. Типом вершины v *(или блока M_v) называется наибольшее количество попарно не параллельных ребер, $w \in \partial v$, выходящих из этой вершины.* Типом граф-многообразия *будем называть наибольший тип его блоков.*

В любой размерности, большей трех, нетрудно построить граф-многообразия произвольного типа. Однако для четырехмерных ортогональных граф-многообразий тип всегда не больше двух. Оказывается, в некотором смысле верно и обратное.

Теорема 1.4. *Если для четырехмерного граф-многообразия M его тип,* $\operatorname{type} M$*, не превосходит двух, то его универсальное накрывающее билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему некоторого ортогонального граф-многообразия (для любых римановых метрик на граф-многообразиях).*

Как следствие имеем.

Следствие 1.5. *Фундаментальную группу любого четырехмерного граф-многообразия M, для которого* $\operatorname{type} M \leqslant 2$*, можно квази-изометрически вложить в произведение четырех метрических деревьев и, следовательно,* $\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = 4$*, где* asdim *и* ℓ-asdim *— асимптотическая и линейно-контролируемая асимптотическая размерности.*

Это следствие дает простое и легко проверяемое достаточное условие, которое позволяет вычислять $\operatorname{asdim} \pi_1(M)$ и $\ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M)$.

Класс $\mathcal{GM}_2$ граф-многообразий с $\operatorname{type} M \leqslant 2$ значительно шире класса ортогональных граф-многообразий. Более того, весьма сомнительно, что любое граф-многообразие из класса $\mathcal{GM}_2$ конечнолистно накрывается ортогональным граф-многообразием.

Как важный дополнительный результат мы приводим критерий ортогональности четырехмерных граф-многообразий, у которых типы всех блоков равны двум, см. теорему 1.6.

Теорема 1.6. *Пусть M — четырехмерное граф-многообразие, все блоки которого имеют тип 2. Граф-многообразие M является ортогональным тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*

(1) индекс пересечения каждого ребра равен 1;

(2) вторичный индекс пересечения каждой вершины равен 1;

(3) подпространство векторов пересечения каждой вершины содержится в ядре отображения заряда $B_v \subset \ker K_v$.

В качестве следствия мы получаем широкий класс четырехмерных граф-многообразий, тип которых равен двум, но которые не являются ортогональными (см. следствие 1.7).

Следствие 1.7. *Существует четырехмерное граф-многообразие, не являющееся ортогональным, все индексы пересечения, вторичные индексы пересечения которого равны 1, а тип каждого блока равен 2.*

Во второй главе вводится список основных обозначений и соглашений, а также приводятся необходимые для дальнейшего конструкции и определения.

Укажем здесь определения граф-многообразия и ортогонального граф-многообразия, используемые повсеместно в текущей работе.

Определение 2.12. *Граф-многообразием размерности $n \geqslant 3$ мы называем замкнутое ориентируемое многообразие M, которое состоит из конечного числа блоков M_v, $M = \bigcup_{v \in V} M_v$.*

При этом должны выполняться следующие условия (1)–(3).

(1) Каждый блок M_v является тривиальным расслоением на $(n-2)$-мерные торы T^{n-2} над компактной ориентируемой поверхностью Φ_v с краем, отличной от диска и кольца;

(2) многообразие M склеено из блоков M_v, $v \in V$, посредством диффеоморфизмов между их краевыми компонентами (не исключается случай склейки краевых компонент одного блока);

(3) склеивающие диффеоморфизмы не отождествляют гомотопические классы слоевых торов.

Такие граф-многообразия размерности $n \geqslant 4$ были введены в работе [15].

Граф-многообразию M соответствует его граф G, двойственный к разложению M на блоки. Таким образом, множество блоков граф-многообразия совпадает с множеством вершин V графа G, множество (неориентированных) ребер E графа G совпадает с множеством пар склеиваемых краевых компонент. Множество ориентированных ребер графа G будем обозначать через W.

Ортогональные граф-многообразия, определенные в работе [2], выделяются в классе граф-многообразий только условием в пункте (3) на склеивающие диффеоморфизмы. Они получаются следующим образом.

Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}$ фиксируем тривиализацию расслоения $M_v \to \Phi_v$, т.е. представим блок $M_v = \Phi_v \times S^1 \times \ldots \times S^1$ в виде произведения, где сомножитель S^1 встречается $n-2$ раза. Таким образом, для каждого ребра $w = \{vv'\}$, выходящего из вершины v, задана тривиализация граничного тора $T_w = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$, $(n-1)$ сомножитель, блока M_v, соответствующего ребру w.

Аналогично для ребра $-w$, идущего в обратном направлении, задана тривиализация граничного тора $T_{-w} = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ блока $M_{v'}$.

Фиксируем порядок сомножителей тривиализации и зададим склеивающий диффеоморфизм торов T_w и T_{-w} при помощи перестановки $\mathfrak{s}_w$ сомножителей тривиализации, не отождествляющей компоненты границ поверхностей Φ_v и $\Phi_{v'}$. При этом для взаимно обратных ребер w и $-w$ перестановки $\mathfrak{s}_w$ и $\mathfrak{s}_{-w}$, взаимно обратны, то есть $\mathfrak{s}_{-w} \circ \mathfrak{s}_w = \mathrm{id}$.

Определение 2.13. *Описанное выше граф-многообразие будем называть ортогональным граф-многообразием.*

Основным инструментом для работы с граф-многообразиями является так называемая W-структура, впервые описанная в трехмерном случае в работах Вальдхаузена [32], [33]. Для n-мерного случая определение W-структуры дано в работе [15]. Для удобства приведем эти определения здесь.

Пусть G — граф граф-многообразия M. Для вершины $v \in \mathrm{V}$ через ∂v обозначается множество ориентированных ребер, выходящих из v.

С каждым ориентированным ребром $w \in \mathrm{W}$ ассоциируется группа $L_w = H_1(T_w; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ гомологий тора склейки T_w и с каждой вершиной $v \in V$ — группа $F_v = H_1(T_v; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ гомологий слоя T_v блока M_v.

Если $w \in \partial v$, то F_v вкладывается в L_w как максимальная подгруппа F_w.

Группу $F_v \simeq F_w$ мы называем *слоевой группой*. Ориентация многообразия M фиксирует ориентацию каждого из его блоков и, следовательно, ориентацию каждой группы L_w, $w \in \mathrm{W}$. При этом ориентации групп L_w и L_{-w} противоположны.

Склейка блоков описывается изоморфизмом $\widehat{g}_w \colon L_{-w} \to L_w$, удовлетворяющим условиям

$$\widehat{g}_{-w} = \widehat{g}_w^{-1}; \tag{2.1}$$

$$\widehat{g}_w(F_{-w}) \neq F_w. \tag{2.2}$$

Выбор тривиализации каждого блока M_v (а также тривиализации слоевого тора каждого блока) фиксирует базис группы L_w (с точностью до выбора знаков его элементов) для каждого ребра $w \in \partial v$ так, что его соответствующий поднабор элементов является базисом группы F_w.

Такие базисы будем называть *выделенными.*

Опишем множество выделенных базисов групп $L_w, w \in \mathrm{W}$, пользуясь их группами преобразований. Пусть $f_v = (f_v^1, \ldots, f_v^{n-2})$ — базис группы F_v.

Мы выбираем базис (z_w, f_w) группы L_w таким образом, что $f_w = f_v$ и набор $\{z_w \mid w \in \partial v\}$ соответствует краю поверхности Φ_v для некоторой тривиализации $M_v = \Phi_v \times T^{n-2}$.

При этом, базис f_v определяет некоторую ориентацию слоя F_v, а (z_w, f_w) — ориентацию группы L_w.

Группа преобразований таких базисов состоит из матриц вида

$$h_w = \begin{pmatrix} \varepsilon_v & 0 \\ n_w & \sigma_v \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_v = \pm 1$, $n_w \in \mathbb{Z}^{n-2}$, $\sigma_v \in GL(n-2, \mathbb{Z})$, и действует на базисах справа:

$$(z_w, f_w) \cdot h_w = (z_w \cdot \varepsilon_w + f_w \cdot n_w, f_w \cdot \sigma_v).$$

Мы требуем, чтобы для каждой вершины $v \in V$ выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon_v \cdot \det \sigma_v = 1; \tag{2.3}$$

$$\sum_{w \in \partial v} n_w = 0. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что множество $\mathcal{H}$ матриц вида

$$h = \bigoplus_{w \in \mathrm{W}} h_w,$$

удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), является группой. Условие (2.3) означает, что каждый базис (z_w, f_w) согласован с фиксированной ориентацией группы L_w, а условие (2.4) означает, что эти базисы соответствуют тривиализациям блока M_v.

Определение 2.15. *W-структурой, ассоциированной с граф-многообразием M, называется набор групп $\{L_w \mid w \in \mathrm{W}\}$, удовлетворяющий условиям* (2.1), (2.2), *и множество их базисов вида $\Theta = (z, f) \cdot \mathcal{H}$, где (z, f) — набор базисов, как выше, и $\det g_w^{z,f} = -1$ для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$.*

Последнее условие означает, что изоморфизм $\widehat{g}_w : L_{-w} \to L_w$ обращает ориентацию. Элементы $(z, f) \in \Theta$ называются *базисами Вальдхаузена.*

При фиксированном базисе Вальдхаузена (z, f) изоморфизм склейки описывается матрицей

$$g_w = g_w^{z,f} = \begin{pmatrix} a_w & b_w \\ c_w & d_w \end{pmatrix},$$

для которой

$$(z_{-w}, f_{-w}) = (z_w, f_w) \cdot g_w \tag{2.5}$$

(в этой записи предполагается, что группы L_{-w} и L_w отождествлены с помощью изоморфизма $\widehat{g}_w$). Здесь $a_w \in \mathbb{Z}$, строка b_w и столбец c_w состоят из $n-2$ целых чисел, d_w является целочисленной матрицей размера $(n-2) \times (n-2)$.

Из условия (2.2) следует, что целочисленная строка b_w ненулевая, поэтому определен наибольший общий делитель ее элементов $i_w \geqslant 1$.

Определение 2.16. *Число i_w называется индексом пересечения W-структуры на ребре w.*

Так как $i_w = i_{-w}$ (индекс пересечения не зависит от ориентации ребра), то мы можем ввести понятие индекса пересечения неориентированного ребра $e = |w|$, как $i_e = i_w = i_{-w}$.

Решеткой в группе G, изоморфной группе $\mathbb{Z}^n$, мы называем любую максимальную подгруппу H группы G, изоморфную группе $\mathbb{Z}^k$, $k \leqslant n$. Размерностью решетки мы называем число k.

Для каждого ребра $|w| \in \mathrm{E}$ обозначим пересечение решеток F_w и F_{-w} через $P_{|w|}$. Такую решетку в $L_{|w|}$ мы будем называть *решеткой пересечения* для ребра w.

В случае четырехмерного граф-многообразия для каждого блока M_v типа два решетки пересечения $P_v^1, P_v^2 \subset F_v$ порождают некоторую подгруппу $P_v \simeq \mathbb{Z}^2$, $P_v = \langle P_v^1, P_v^2 \rangle$ (наименьшую по включению подгруппу в F_v, содержащую P_v^1 и P_v^2) в группе F_v.

Определение 2.24. *Будем называть группу P_v группой слоевых пересечений для блока M_v.*

Подгруппа P_v не обязательно максимальна, поэтому может не быть решеткой в $F_v \simeq \mathbb{Z}^2$.

Определение 2.25. *Индекс j_v подгруппы P_v в группе F_v называется вторичным индексом пересечения в вершине v.*

Третья глава посвящена доказательству теоремы 1.1 и следствия 1.2. Более подробно: в разделе 3.1 определяется стандартная гиперболическая поверхность с краем, H_0. Рассмотрим гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2_\kappa$ такой кривизны $-\kappa$ ($\kappa > 0$), что длина стороны равностороннего прямоугольного шестиугольника θ на плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$ равна 1. Пусть ρ — расстояние от центра шестиугольника до середины его стороны, δ — диаметр θ.

Отметим каждую вторую сторону θ (всего три стороны) и определим поверхность с краем H_0 следующим образом. Рассмотрим подгруппу G_θ группы

изометрий плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$, порожденную симметриями относительно (трех) отмеченных сторон шестиугольника θ. Пусть H_0 – орбита шестиугольника θ под действием группы G_θ. Тогда H_0 – выпуклое подмножество плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$, разбитое на шестиугольники, изометричные θ, и являющееся поверхностью с краем. Край поверхности H_0 имеет бесконечно много компонент связности, каждая из которых является геодезической прямой в $\mathbb{H}^2_\kappa$. Будем называть любое метрическое пространство, изометричное поверхности H_0, *θ-деревом*.

В разделе 3.2 вводятся стандартные метрики на базовых поверхностях блоков ортогонального граф-многообразия.

Определение 3.4. *Стандартным блоком мы будем называть метрическое произведение θ-дерева H_0 на $\mathbb{R}^{n-2}$, $B = \mathrm{H}_0 \times \mathbb{R}^{n-2}$.*

Следующую теорема Берштока–Ноймана позволяет построить специальную метрику на универсальном накрывающем ортогонального граф-многообразия.

Теорема 3.5 ([5], Теорема 1.2)**.** *Пусть X_0 — стандартная поверхность. Фиксируем ее граничную компоненту $\partial_0 X_0$. Тогда существуют такое число K и функция $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для каждого числа K_0 и K_0-билипшицева гомеоморфизма P_0 из $\partial_0 X_0$ в граничную компоненту $\partial_1 X_0$ гомеоморфизм P_0 продолжается до $\psi(K_0)$-билипшицева гомеоморфизма $P\colon X_0 \to X_0$, который является K-билипшицевым на каждой оставшейся граничной компоненте пространства X_0.*

Следствие 3.6. *Пусть $\widetilde{\Phi}_v$ — поверхность, являющаяся универсальной накрывающей для базы Φ_v блока M_v с ортогонально склеенной метрикой. Фиксируем ее граничную компоненту $\partial_0 \widetilde{\Phi}_v$. Тогда существуют такое число K и функция $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для каждого числа K_0 любой K_0-билипшицев гомеоморфизм $P_0 : \partial_0 \widetilde{\Phi}_v \to \partial_0 \mathrm{H}_0$ продолжается до $\psi(K_0)$-билипшицева гомеоморфизма $P\colon \widetilde{\Phi}_v \to \mathrm{H}_0$, который является K-билипшицевым на всех оставшихся граничных компонентах поверхности $\widetilde{\Phi}_v$.*

Согласно общей теории обобщенных граф-многообразий, развитой в работе [15], универсальное накрывающее $\widetilde{M}$ многообразия M разбивается на блоки. Двойственным к такому разбиению на блоки будет дерево, которое мы обозначим через T_0. На дереве T_0 мы рассматриваем внутреннюю метрику, в которой длина каждого ребра равна 1. Выберем в дереве T_0 некоторую вершину $o \in \mathrm{V}(T_0)$ и назовем ее корнем. Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ определим ее ранг $r(v)$ как количество ребер в кратчайшем пути в дереве T_0 между вершинами v и o. В частности, $r(o) = 0$.

В разделе 3.3 индукцией по рангу вершины дерева T_0 (при помощи следствия 3.6) на пространстве $\widetilde{M}$ строится метрика, каждый блок в которой изометричен стандартному блоку. Такая метрика билипшицево гомеоморфна метрике, поднятой из граф-многообразия M.

В разделе 3.4 приводится конструкция деревьев $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$. Деревья строятся также индукцией по рангу вершины дерева T_0. Аналогично определяются отображения из универсального накрывающего ортогонального граф-многообразия в эти деревья.

В разделе 3.5 изучаются кривые специального вида, которые дают нам верхнюю оценку на расстояние в универсальном накрывающем. Это позволяет завершить доказательство теоремы 1.1.

В разделе 3.6 доказывается следствие 1.2.

В **четвертой главе** диссертации даны доказательства теорем 1.4, 1.6 и следствий 1.5, 1.7. В этой главе под граф-многообразием понимается четырехмерное граф-многообразие. В разделе 4.1 доказывается следующая лемма

Лемма 4.1. *Граф-многообразие M можно конечнолистно накрыть граф-многообразием N, у которого все индексы пересечения равны 1, а также все вторичные индексы пересечения равны 1.*

Таким образом, теорема 1.4 сводится к случаю граф-многообразий, все индексы пересечения которых равны 1.

В разделе 4.2 для граф-многообразия M, у которого все индексы пересечения равны 1, а также все вторичные индексы пересечения равны 1 строится ортогональное граф-многообразие N, у которого универсальное накрывающее $\widetilde{N}$ билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему $\widetilde{M}$ исходного граф-многообразия M. Это завершает доказательство теоремы 1.4 и доказывает следствие 1.5.

В разделе 4.3 приводится критерий ортогональности четырехмерных граф-многообразий, для которых тип каждой вершины равен двум. Как следствие, строится пример четырехмерного граф-многообразия, не являющегося ортогональным, все блоки которого имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1.

Важным ингредиентом здесь является отображение заряда граф-многообразия из работы [15]. Приведем здесь его определение для случая граф-многообразия M произвольной размерности, $\dim M = n$. Для этого мы переходим к группам гомологий с вещественными коэффициентами, сохраняя те же обозначения. В частности, через F_w мы будем обозначать $F_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, а через $L_{|w|}$ — $L_{|w|} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Для каждого ориентированного ребра w графа G граф-многообразия M матрица склейки g_w определяет такое отображение $D_w : F_{-w} \to F_w$, что $D_w(f_{-w}p_w) = f_w d_w p_w$, где $p_w \in \mathbb{R}^{n-2}$ — столбец вещественных чисел. Другими словами, отображение D_w в базисах f_{-w}, f_w задается подматрицей d_w матрицы g_w и может быть интерпретировано как проекция пространства F_{-w} на пространство F_w вдоль вектора z_w. В частности, отображение D_w является тождественным на пересечении $F_{-w} \cap F_w$.

Для каждого ориентированного ребра w графа G граф-многообразия M зафиксируем ориентацию пространства F_w.

Пусть $u_w = f_w^1 \wedge f_w^2 \wedge \ldots \wedge f_w^{n-2}$. Отождествляя пространства L_{-w} и L_w с помощью отображения g_w, мы получаем пространство $L_{|w|}$ с парой ориентированных подпространств F_w и F_{-w}.

В этих условиях, на подпространстве $F_w \cap F_{-w}$ возникает каноническая ориентация пересечения $u_{w \cap -w}$ (см. работу [15]).

Определение 4.4. *Отображение заряда вершины $v \in V$ определяется как ограничение*

$$K_v \colon Q_v \to F_v$$

отображения

$$\bigoplus_{w \in \partial v} \frac{1}{i_w} D_w \colon \bigoplus_{w \in \partial v} F_{-w} \to F_v$$

на подпространство Q_v, где подпространство $Q_v \subset \bigoplus\limits_{w \in \partial v} F_{-w}$ состоит из всех таких $q_v = \bigoplus\limits_{w \in \partial v} q_{-w}$, что существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q_{-w} \wedge u_{w \cap -w} = \alpha \cdot u_{-w}$ для всех $w \in \partial v$.

Это подпространство не зависит от выбора базиса Вальдхаузена (z, f) и $\dim Q_v = (n-3)|\partial v| + 1$ (подробности см. в работе [15]). Заметим, что подпространство

$$A_v = \{q_v = \bigoplus_{w \in \partial v} q_{-w} \mid q_{-w} \wedge u_{w \cap -w} = 0\} \subset Q_v$$

является гиперплоскостью в Q_v, $\dim A_v = (n-3)|\partial v|$.

В трехмерном случае, $n = 3$, отображение $K_v \colon Q_v \to F_v$ является линейным отображением одномерных пространств, и поэтому оно однозначно определяется рациональным числом k_v, которое является зарядом вершины v.

Хотя отображение зарядов в старших размерностях не является числовым инвариантом, тем не менее имеет смысл говорить о равенстве нулю заряда вершины.

Определение 4.5. *Будем говорить, что* заряд вершины $v \in V$ равен нулю, *если ядро отображения заряда K_v не содержится в подпространстве $A_v \subset Q_v$, $\ker K_v \not\subset A_v$.*

В этом случае мы пишем $k_v = 0$.

Замечание 4.6. *Если граф-многообразие трехмерно, то это определение совпадает с обычным условием $k_v = 0$, поскольку в размерности три $\dim F_v = \dim Q_v = 1$, $A_v = \{0\}$ и, следовательно, условие $k_v = 0$ эквивалентно равенству $\ker K_v = Q_v$, то есть $\ker K_v \not\subset A_v$.*

Пусть M — четырехмерное граф-многообразие, все блоки которого имеют тип два. Для каждой вершины v такого граф-многообразия и ребра w, ведущего из вершины v в вершину u, в слоевой решетке F_u блока M_u содержатся

две решетки пересечения. Обозначим через $\bar{P}_u$ ту из них, которая не является решеткой пересечения для ребра w.

Обозначим $\bar{P}_u \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ через J_{-w}.

Определение 4.7. *Определим подпространство векторов пересечения в пространстве Q_v следующей формулой*

$$B_v := Q_v \cap \bigoplus_{w \in \partial v} J_{-w}.$$

Из определения следует, что подпространство векторов пересечения для вершины v не зависит от базиса Вальдхаузена, и, следовательно, является топологическим инвариантом граф-многообразия M. Ключевым утверждением этого раздела является следующая лемма.

Лемма 4.9. *Для ортогонального граф-многообразия M и любой вершины v его графа G выполнено $B_v \subset \ker K_v$. Более того, заряд любой вершины граф-многообразия M равен 0.*

Можно проверить, что индексы пересечения любого ребра, а также вторичные индексы пересечения любой вершины для ортогонального граф-многообразия равны одному. Это означает, что препятствиями к ортогональности граф-многообразий являются отличие индекса или вторичного индекса пересечения от единицы. Однако, даже в классе граф-многообразий, все блоки которых имеют тип два, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны одному, существуют не ортогональные граф-многообразия.

Разделе 4.4 посвящен доказательству теоремы 1.6.

В разделе 4.5 приводится следующий пример четырехмерного граф-многообразия, не являющееся ортогональным, все индексы пересечения, вторичные индексы пересечения которого равны 1, а тип каждого блока равен 2.

В качестве графа G возьмем цикл длины $k \geqslant 3$. Пронумеруем его вершины по порядку $v_1, \ldots, v_k$. Для каждой вершины v_i, $i = 1, \ldots, k$, рассмотрим блок $M_i = \Phi \times T^2$, где Φ — тор с двумя компонентами края. Склеим из получившихся блоков граф-многообразие так, чтобы для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$ соответствующая матрица склейки имела вид

$$g_w = g_w^{z,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ребро w, ведущее из вершины v_2 в вершину v_3. Заменив на этом ребре склейку на склейку, задающуюся с помощью матрицы

$$\bar{g}_w = \bar{g}_w^{z,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим искомое граф-многообразие M'. Заключение дано в **пятой главе**.

Благодарности.

Автор благодарен С. В. Буяло за руководство при выполнении данной работы, множество идей и огромное терпение. Автор выражает благодарность А. В. Малютину, Г. Ю. Паниной и С. В. Иванову за то, что данная работа была доведена до конца.

Автор признателен Н. Н. Кушпель, Е. А. Фоминых, Марио Бонку, Урсу Лангу, Анджею Щепаньскому за плодотворные обсуждения.

Список литературы

Работы автора по теме

[1] Смирнов А. В. Линейно-контролируемая асимптотическая размерность фундаментальной группы граф-многообразия // Алгебра и анализ. – 2010. – №22:2. – С. 185–203.

[2] Смирнов А. В. Квази-изометрическое вложение фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия в произведение деревьев // Алгебра и анализ. – 2012. – №24:5. – С. 165–180.

[3] Смирнов А. В. Четырехмерные граф-многообразия с фундаментальными группами квази-изометричными группам ортогональных граф-многообразий // Алгебра и анализ. – 2017. – №29:6. – С. 230–247.

Литература

[4] Assouad P. Sur la distance de Nagata // C.R. Acad. Sci. Paris sér. I Math. – 1982. – Т. 244. – №1. С. – 31–34.

[5] Behrstock J. A. and Neumann W. D. Quasi-isometric classification of graph manifold groups // Duke Math. J. – 2008. – Т. 141.– №2. – С. 217–240.

[6] Bell G. and Dranishnikov A. On Asymptotic Dimension of Groups Acting on Trees // Geometriae Dedicata. – 2004. – Т. 103. – № 1. – С. 89–101.

[7] Bell G., Dranishnikov A. A Hurewicz-type theorem for asymptotic dimension and applications to geometric group theory // Transactions of the American Mathematical Society. – 2006. – Т. 358. – №11. – С. 4749–4764.

[8] Bestvina M., Fujiwara K. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups // Geometry & Topology. – 2002. – Т. 6. – №1. – С. 69–89.

[9] Bowditch B. H. Embedding median algebras in products of trees // Geometriae Dedicata. – 2014. – Т. 170. – №1. – С. 157–176.

[10] Bowers P. L. General position properties satisfied by finite products of dendrites // Transactions of the American Mathematical Society. – 1985. – Т. 288. – №2. – С. 739–753.

[11] Brodskiy, N. and Dydak, J. and Levin, M. and Mitra, A. A Hurewicz theorem for the Assouad–Nagata dimension // Journal of the London Mathematical Society. – 2008. – Т. 77. – №3. – С. 741–756.

[12] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. // – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 512 стр.

[13] Buyalo S., Dranishnikov A., Schroeder V. Embedding of hyperbolic groups into products of binary trees // Inventiones mathematicae. – 2007. – T. 169. – №1. – C. 153–192.

[14] Буяло С. В. Емкостная размерность и вложение гиперболических пространств в произведение деревьев // Алгебра и анализ. – 2005. – №17:4. – С. 42–58.

[15] Буяло С. В., Кобельский В.Л. Обобщенные графмногообразия неположительной кривизны // Алгебра и Анализ. – 1999. – №11:2. – С. 64–87.

[16] Buyalo S., Schroeder V. Elements of asymptotic geometry. // European Mathematical Society, 2007.

[17] Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups // London Mathematical Society Lecture Note Series, – 1993. – T. 182. – C. 1–295.

[18] Dranishnikov A. On hypersphericity of manifolds with finite asymptotic dimension // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – T. 355. – №1. – C. 155–167.

[19] Erschler A., Mitrofanov I. Assouad–Nagata dimension and gap for ordered metric spaces // Comment. Math. Helv. 98 – 2023. – T. 2, – C. 217—260.

[20] Hume D. Embedding mapping class groups into a finite product of trees // Groups, Geometry, and Dynamics. – 2017. – T. 11. – №2. – C. 613–647.

[21] Hume D., Sisto A, Embedding universal covers of graph manifolds in products of trees // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – T. 141. – №10. – C. 3337–3340.

[22] Kapovich M. and Lieb B. 3-manifold groups and nonpositive curvature // Geometric Analysis and Functional Analysis. – 1998. – T. 8 – C. 841–852.

[23] Lang U. and Schlichenmaier T. Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions // Int Math Res Notices, – 2005. – T. 2005. – C. 3625–3655.

[24] Mackay J. M., Sisto A. Embedding relatively hyperbolic groups in products of trees // Algebraic & Geometric Topology. – 2013. – T. 13. – №4. – C. 2261–2282.

[25] Nagata J. Note on dimension theory for metric spaces // Fundamenta Mathematicae. – 1958. – T. 45. – №1. – C. 143–181.

[26] Osin D. Asymptotic dimension of relatively hyperbolic groups // International Mathematics Research Notices. – 2005. – T. 2005. – №35. – C. 2143–2161.

[27] Roe J. Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2005. – T. 133. – №9. – C. 2489–2490.

[28] Roe J. Lectures on Coarse Geometry. // University Lecture Series, – T. 31. // AMS, 2003.

[29] Скот П. Геометрии на трехмерных многообразиях: Пер. с англ.. // Мир, 1986.

[30] Шварц А. С. Объемный инвариант накрывающих // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 105. – №1. – С. 32–34.

[31] Yu G. The Novikov Conjecture for Groups with Finite Asymptotic Dimension // The Annals of Mathematics, Second Series. – T. 147. – №2. – 1998. – С. 325–355.

[32] Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I // Invent. Math. 3. – 1967. – С. 308–333.

[33] Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II // Invent. Math. 4. – 1967. – С. 87–117.

Подписано в печать 07.11.2024 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано типографии