ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Смирнова Александра Викторовича
«Асимптотические метрические инварианты
и фундаментальные группы многомерных граф-многообразий»,
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3 — Геометрия и топология.

Работа А.В. Смирнова посвящена изучению асимптотических инвариантов фундаментальных групп многомерных граф-многообразий. Она состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во введении кратко рассмотрена научная проблематика, затрагиваемая в работе, дан обзор библиографии и кратко перечислены основные результаты. В главе 2 изложены предварительные сведения, необходимые определения и используемые обозначения. Глава 3 посвящена квази-изометрическому вложению фундаментальной группы n-мерного ортогонального граф-многообразия в произведение n метризческих деревьев, а также следствиям из него. В главе 4 изучается билипшицева эквивалентность универсального накрывающего четырехмерного граф-многообразия, тип которого не превышает двух и некоторого универсального накрывающего ортогонального граф-многообразия и приводятся следствиям из нее.

Сквозной нитью диссертации вступает исследование асимптотических свойств фундаментальных групп многомерных граф-многообразий. Этим идейно связаны все ее составные части.

Исследование асимптотических инвариантов метрических пространств важная проблематика геометрии на протяжении последних 35 лет. Понятие асимптотической размерности было введено Громовым. Стартовой точкой исследования этого понятия послужило доказательство гипотезы Новикова о высших сигнатурах для конечно-порожденных групп, данное американским математиком Гуоляном Ю. Линейно-контролируемая асимптотическая размерность — вариант асимптотической размерности с линейной функцией контроля. Важным вопросом, имеющим приложения в геометрической теории групп, математическом анализе и теоретической информатике, является вопрос конечности линейно-контролируемой асимптотической размерности того или иного метрического пространства. Классическим является результат Белла и Дранишникова о том, что для фундаментальной группы π конечного графа групп с конечно порожденными вершинными группами G_v, у которых $\operatorname{asdim} G_v \leqslant n$ для всех вершин v, выполняется неравенство $\operatorname{asdim} \pi \leqslant n+1$. Этот результат позволяет эффективно оценивать асимптотическую размерность фундаментальных групп пространств, склеенных из хороших кусков. Однако, аналогичного инструмента для нахождения верхних оценок линейно-контролируемой асимптотической размерности неизвестно. Для фундаментальных групп многообразий известны лишь некоторые частные случаи. Для линейно-контролируемой асимптотической размерности фундаментальной группы про-

извольного трехмерного граф-многообразия Юм и Систо доказали, что $\ell\text{-asdim}\,\pi_1(M) = 3$.

В диссертации решается вопрос об обобщении этих результатов на случай многомерных граф-многообразий. Третья глава посвящена ответу на этот вопрос для случая многомерных ортогональных граф-многообразий. В основе доказательства лежит идея рассмотрения на универсальном накрывающем n-мерного ортогонального граф-многообразия метрики неположительной кривизны специального вида. Для такой метрики универсальное накрывающее разбивается на «кирпичи», каждый из которых является произведением гиперболического прямоугольного шестиугольника и $n-1$ единичного интервала. Это новый, довольно интересный метод, основанный на идеях геометрии пространств неположительной кривизны.

В главе 4 для четырехмерных граф-многообразий приводится обобщение на существенно более общий случай граф-многообразий типа не больше двух. Вероятно самым трудным в доказательстве было понять, какие топологические аргументы использовать и в какой последовательности. Для этого автором введён новый топологический инвариант — тип граф-многообразия. Показывается, что любое граф-многообразие конечнолистно накрывается граф-многообразием, все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения которого равны 1. После этого строится билипшицев гомеоморфизм универсального накрывающего такого граф-многообразия в универсальное накрывающее ортогонального граф-многообразия.

Естественным смежным вопросом является вопрос о том, когда граф-многообразие является ортогональным. В четвертой главе дан на него ответ. Для этого изучается понятие отображения заряда. Доказывается, что для ортогонального граф-многообразия заряд любой вершины равен 0. Также устанавливается ряд других естественных препятствий к ортогональности граф-многообразий. В первую очередь это отличие индекса или вторичного индекса пересечения от единицы. Однако, даже в классе граф-многообразий, все блоки которых имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1, существуют не ортогональные граф-многообразия. Пример такого многообразия также приводится в диссертации.

Новизна исследования и полученных результатов, а также предложенных идей доказательств, несомненна. Результаты — завершённые математические утверждения, логически связанные между собой.

Работа написана чётким и понятным языком, обозначения и порядок изложения достаточно хорошо продуманы. Автореферат верно отражает её содержание. Все полученные результаты опубликованы в центральных математических журналах, индексируемых в основных математических базах. Основные положения диссертации докладывалась на престижных конференциях и научных семинарах.

В процессе чтения диссертации, к математической части и оформлению в целом вопросов не возникло. Это подтверждает достоверность работы. Продемонстрированная автором техника подтверждает его высокий математический уровень.

Существенных опечаток в тексте обнаружить не удалось. Тем не менее, традиционно

сделаем несколько замечаний. Они носят стилевой характер и не влияют на общую оценку работы.

1. Вызывает некоторое недоумение структура раздела 2.2.2, содержащего основные факты о асимтотических размерностях. По-видимому, утверждения приведенных там теорем 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 было бы разумно представить в виде единого списка (возможно, с указанием точных ссылок). Это бы способствовало более размеренному восприятию текста с точки зрения читателя.

2. В определении 3.2 используется понятие симплициального дерева, которое нигде в тексте не определено. Также, кажется несколько странным выбор константы $1 \times 1/3^{100}$.

В целом, работа является существенным вкладом в современную теорию многообразий. Соискателю удалось значительно продвинуться в понимании того, для каких многомерных граф-многообразий линейно-контролируемая асимптотическая размерность конечна и для широкого класса таких многообразий найти ее точное значение.

В частности, им предложен новый технический аппарат, который без сомнения найдет применение в дальнейшем. Работа может найти применение в МГУ, СПбГУ, НГУ, ПОМИ РАН, Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Диссертация соответствует всем критериям положения о присуждении учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. №842, предъявляемых к диссертациям на соискание учёной степени кандидата наук, а ее автор, Смирнов Александр Викторович, безусловно, достоин присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — «Геометрия и топология».

Доктор физ.-мат. наук,
профессор Медных Александр Дмитриевич

Подпись А. Д. Медных заверяю
Ученый секретарь
12.02.2025

Почтовый адрес: 630090, г. Новосибирск, Пр. ак. Коптюга, 4
Телефон: +7 (383) 329-76-64
Адрес электронной почты: mednykh@math.nsc.ru
Организация – место работы: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
Должность: Главный научный сотрудник
Web-сайт организации: math.nsc.ru