ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук **Кудрявцевой Елены Александровны** на диссертационную работу Смирнова Александра Викторовича «Асимптотические метрические инварианты и фундаментальные группы многомерных граф-многообразий», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 — геометрия и топология

Граф-многообразия образуют широкий класс трехмерных многообразий. Они получаются путем склеивания S^1-расслоений над компактными двумерными поверхностями вдоль граничных двумерных торов. Такие многообразия были введены и классифицированы Вальдхаузеном (1967). Этот класс многообразий имеет приложения в теории интегрируемых гамильтоновых систем. А именно, этот класс совпадает с классом компактных неособых изоэнергетических многообразий интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (это следует из работ А.Браилова, С.Матвеева, Фоменко и Цишанга, 1987–1988). Многомерные граф-многообразия были введены Буяло и Кобельским (1999). Это ориентируемые многообразия, получающиеся путем склеивания T^{n-2}-расслоений над компактными двумерными поверхностями вдоль граничных $(n-1)$-мерных торов.

Основным инструментом изучения граф-многообразия является его фундаментальная группа. Поэтому представляет интерес изучение их фундаментальных групп и метрических инвариантов этих групп по отношению к произвольной метрике слов. В качестве такого метрического инварианта в данной работе рассматривается асимптотическая размерность, которая была введена Громовым (1993) как важный квази-изометрический инвариант. С помощью этого инварианта в работе Ю (1998) была доказана гипотеза Новикова о высших сигнатурах для конечно-порожденных групп конечного гомотопического типа с конечной асимптотической размерностью. Оценки для асимптотической размерности были получены для разных метрических пространств (Roe, Осин, Бествина и Фудживара, Дранишников). Так как граф-многообразия M являются пространствами неположительной кривизны ($CAT(0)$ пространствами), то их универсальные накрытия $\widetilde{M}$ являются пространствами Адамара, а для пространств Адамара X известна **нижняя оценка** для асимптотической размерности $asdim X \geq \dim X$ (Буяло, Шрёдер, 2007). Также были известны некоторые верхние оценки, например монотонность и $asdim T \leq 1$ для любого метрического дерева T (Буяло, Шрёдер, 2007). Было известно, что для трехмерных граф-многообразий все фундаментальные группы квази-изометричны (Behrstock, Neumann, 2008). В размерностях, начиная с четырех, аналогичные результаты об асимптотической размерности не были известны.

Таким образом, представляет несомненный интерес получение **верхних оценок** для асимптотической размерности (и ее вычисление) фундаментальных групп многомерных граф-многообразий. Эта задача успешно решается в данной диссертационной работе для широких классов многомерных граф-многообразий, введенных автором:

1) класс ортогональных граф-многообразий произвольной размерности $n \geq 3$,

2) класс 4-мерных граф-многообразий с типом ≤ 2 (этот класс содержит все ортогональные 4-мерные граф-многообразия и является более широким, см. следствие 1.7).

Для ортогональных граф-многообразий M любой размерности $n \geq 3$ построено вложение универсального накрытия $\widetilde{M}$ в прямое произведение n метрических деревьев (теорема 1.1). Отсюда с учетом известных верхних оценок (Буяло, Шрёдер, 2007) сразу получена верхняя оценка для асимптотической размерности

$$asdim(\widetilde{M}) \leq \dim(T_0 \times T_1 \times \cdots \times T_{n-1}) \leq \dim M$$

(и даже для линейно контролируемой асимптотической размерности), совпадающая с указанной выше нижней оценкой, и тем самым вычислена асимптотическая размерность группы $\pi_1(M)$ (следствие 1.2). Для любого 4-мерного граф-многообразия с типом ≤ 2 доказано, что его универсальное накрытие билипшицево эквивалентно универсальному накрытию некоторого ортогонального граф-многообразия (теорема 1.4). Получен критерий ортогональности таких граф-многообразий (теорема 1.6). В качестве следствий вычислена асимптотическая размерность их фундаментальных групп (следствие 1.5) и построено 4-мерное граф-многообразие типа 2, не являющееся ортогональным (следствие 1.7).

Ортогональность граф-многообразия означает, что каждый его блок имеет структуру прямого произведения $\Phi_v \times S^1 \times \cdots \times S^1$ компактной поверхности Φ_v и $n-2$ окружностей (поэтому граничные торы каждого блока имеют структуру прямого произведения $n-1$ окружностей $S^1 \times \cdots \times S^1$), и при склеивании блоков вдоль граничных торов сохраняется структура прямого произведения $S^1 \times \cdots \times S^1$ на этих торах, однако порядок сомножителей и ориентации окружностей не обязаны сохраняться. Аналогичное условие ортогональности естественно возникает у "цилиндрических полиэдральных комплексов" (склеенных из прямых произведений полиэдров и цилиндров), возникающих при изучении топологии пространств функций Морса на поверхностях (Кудрявцева, 2010–2016).

Тип граф-многообразия введен в данной диссертации (определения 1.3, 2.20) как наибольший тип его блоков. Для определения типа блока каждому блоку (или вершине соответствующего графа) сопоставляется группа одномерных гомологий слоя (изоморфная $\mathbb{Z}^{n-2}$), а каждому ребру — пересечение групп склеиваемой пары блоков (изоморфное $\mathbb{Z}^{n-3}$). Группа, сопоставляемая ребру, вкладывается в виде подгруппы в группу, сопоставляемую любому концу этого ребра. Два ребра, выходящие из одной вершины, называются параллельными, если им отвечает одна и та же подгруппа группы, сопоставляемой вершине. Тип блока (или вершины соответствующего графа) — это наибольшее количество попарно не параллельных ребер, выходящих из данной вершины.

Тем самым, тема диссертации и примененные в ней методы безусловно являются актуальными, а полученные результаты — новыми, интересными и перспективными.

Диссертация состоит из пяти глав.

В первой, вводной главе обосновывается актуальность темы, даётся обзор известных результатов по асимптотической размерности метрических пространств, вложению в произведения деревьев, граф-многообразия и ортогональные граф-многообразия. Приводятся формулировки основных результатов работы (теоремы 1.1 и 1.4, определение 1.3, теорема 1.6, следствия 1.2, 1.5 и 1.7), описываются методы исследования.

Во второй главе формулируются определения, обозначения, даётся более подробный обзор предварительных сведений и известных результатов. Формулируются поня-

тия метрической геометрии: геодезическое метрическое пространство, пространство Адамара (односвязное полное метрическое пространство, в котором каждый геодезический треугольник не толще треугольника сравнения), конечно-порожденные группы, квазиизометрические отображения. Формулируются определения асимптотической размерности и линейно-контролируемой асимптотической размерности. Подробно формулируется определение многомерного граф-многообразия и структуры на нем. Вводятся понятия ортогонального граф-многообразия, типа его блока, определяются индекс пересечения на ребре и вторичный индекс пересечения в вершине соответствующего графа.

В третьей главе приведено доказательство теоремы 1.1 и следствия 1.2. Для этого для произвольного ортогонального граф-многообразия любой размерности $n \geq 3$ явно строится стандартная метрика на его универсальном накрытии $\widetilde{M}$, строятся n деревьев $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ и билипшицево вложение $\widetilde{M} \to T_0 \times T_1 \times \cdots \times T_{n-1}$.

В четвертой главе изучаются 4-мерные граф-многообразия, приведено доказательство остальных результатов диссертации (теоремы 1.4 и 1.6, следствия 1.5 и 1.7).

В заключении формулируются основные результаты диссертации и открытые вопросы.

Научные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. Основные результаты диссертации опубликованы в трёх работах из перечня ВАК. Результаты работы докладывались на научных конференциях и ряде семинаров. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

По диссертационной работе имеются следующие замечания.

1. Имеются опечатки на стр.9, строка 12 ($n-1 \to n-2$), стр.10, строка 1 (следствия 1.1 $\to$ следствия 1.2), стр.12, строка -6 (Полное $\to$ Полное односвязное) (без этого исправления неверна теорема 2.11 на стр.15, см. комментарий 4 ниже), стр.14, строка 14 ($U, V \in \mathfrak{U}^\alpha \to U, V \in \mathfrak{U}$), стр.21, строка 5 (пропущена запятая перед $i_w \geq 1$), стр.21, строка 8 ($T_v \cap T_u \subset T_{|w|} \to T_v \cap T_{v'} \subset T_{|w|}$), стр.21, строка -8 ($P_v \simeq \mathbb{Z}^2 \to P_v \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$), стр.21, строка -3 ($F_v \simeq \mathbb{Z}^2 \to F_v \simeq \mathbb{F}^{n-2}$), стр.22, строка 1 ($P_v^1 \simeq \mathbb{Z} \to P_v^1 \simeq \mathbb{F}^{n-3}$), стр.22, строка 2 ($P_v \simeq \mathbb{Z}^2 \to P_v \simeq \mathbb{F}^{n-2}$), стр.25, строка -10 ($\psi(x) = \bar{\psi}(M^2 \cdot x) \to \psi(x) = M^2\bar{\psi}(M^2 \cdot x)$), стр.27, строка 1 (и этих отображений $\to$ из этих отображений), стр.27, строка 13 ($(i = 2, \ldots, n-2) \to (i = 2, \ldots, n-1)$), стр.29, строка 7 ($s_{v_1v_i}(x_0) = s_{v_1v_j}(x_0) \to s_{v_iv_1}(x_0) = s_{v_jv_1}(x_0)$), стр.29, строка -10 ($x = r_{u,i}(z) = r_{v,i}(z) = y \to x = r_{u,i}(z)$ и $r_{v,i}(z) = y$), стр.29, строка -3 ($x_1 \in \widetilde{M}_{v_l} \to x_1 \in T_{v_l,i}$), стр.31, строка -4 ($p_1^v(x)p_1^v(y)...p_{n-1}^v(x)p_{n-1}^v(y) \to p_v^1(x)p_v^1(y)...p_v^{n-1}(x)p_v^{n-1}(y)$).

2. Имеются неточности:

на стр.12–13 в разделе 2.1.1 триподом названо подпространство, изометричное объединению трех геодезических треугольников с ровно одной общей точкой, но правильнее было бы писать "являющееся объединением" вместо "изометричное объединению"; там же в определении метрического дерева правильнее было бы писать "является триподом" вместо "изометричен триподу";

на стр.19, строки 2–3: "набор групп $\{...\}$, удовлетворяющий условиям (2.1), (2.2)" $\to$ "набор групп $\{...\}$ и изоморфизмов $\widehat{g}_w : L_{-w} \to L_w$, удовлетворяющий условиям (2.1), (2.2)";

на стр.21, строка 1 доказательства леммы 2.23: "порождена элементами" $\to$ "порождена наборами элементов";

на стр.22, строка -1: "будет пространством неположительной кривизны, или пространством Адамара" → "будет односвязным пространством неположительной кривизны, или пространством Адамара";

в определении 2.12 граф-многообразия (стр.15) блоки M_v имеют вид $\Phi_v \times T^{n-2}$, где Φ_v — любая компактная связная поверхность с краем, отличная от диска и кольца; то же верно в определении ортогонального граф-многообразия (стр.16) и в определении метрики на блоке M_v (как прямого произведения метрики неположительной кривизны на поверхности Φ_v и плоских метрик длины 1 на окружностях); однако стандартный блок $B = \Pi_0 \times \mathbb{R}^{n-2}$ отвечает специальному случаю — когда его база Φ_v — это ориентируемая поверхность рода 0 с тремя граничными окружностями (т.н. "штаны"); поэтому следствие 3.6 верно только для таких специальных блоков, но неверно для произвольных блоков (это следствие используется в доказательстве теоремы 1.1, см. стр.27, строка 10, стр.28, строки 6–15, стр.29, строка 16, поэтому доказательство теоремы 1.1 дано только для таких специальных блоков). Тем не менее, можно разрезать поверхность Φ_v на несколько "штанов", тогда каждый блок M_v разрежется на блоки нужного вида с базой "штаны" (правда, для полученного разбиения на блоки неравенство (2.2) уже будет нарушено, но это не помешает доказательству теоремы 1.1 в общем случае);

на стр.30, строка 16: "разбито на блоки" → "представлено как объединение блоков";

на стр.31, лемма 3.9: "$+2\delta$" → "$+2\delta$ и $\partial\gamma = \{x, y\}$".

3. В работе используются понятия билипшицевой эквивалентности и λ-билипшицевой эквивалентности, но они нигде не определены. Было бы хорошо дать их определения, например после определения квази-изометрического отображения в конце раздела 2.1.3 (на стр.13) добавить: "Если $C = 0$, то f называется *λ-билипшицевым*, а если f биективно и $C = 0$, то пространства X и Y называются *билипшицево эквивалентными*".

В доказательстве теоремы 1.1 используется равенство $asdim\pi_1(M) = asdim\widetilde{M}$ (см. стр.33, строка 4). В качестве обоснования этого равенства приводится только следующая фраза на стр.25, строки 1–4 снизу: "В этом разделе для каждого ортогонального граф-многообразия M мы индуктивно построим метрику специального вида на его универсальном накрывающем $\widetilde{M}$ таким образом, что универсальное накрывающее $\widetilde{M}$ с такой метрикой будет квази-изометрично фундаментальной группе $\pi_1(M)$ граф-многообразия M". Было бы хорошо дать пояснение (или ссылку), почему $\widetilde{M}$ с построенной метрикой на нем квази-изометрично группе $\pi_1(M)$.

4. После определения квази-изометричных пространств (§2.1.3 на с.13) было бы полезно привести следствие из этого определения: "Любые два ограниченные метрические пространства квази-изометричны." Аналогично после определения 2.5 линейно-контролируемой асимптотической размерности (на стр.14) было бы полезно привести следствие: "Если $diamX = D_0 < \infty$, то $asdimX = 0$. В частности, для любого замкнутого многообразия X неположительной кривизны верно $asdimX = 0$ (и поэтому для них неверна нижняя оценка из теоремы 2.11 на стр.15, см. комментарий 1 выше)."

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

Диссертационная работа Смирнова Александра Викторовича на тему «Асимптотические метрические инварианты и фундаментальные группы многомерных граф-многообразий» представляет законченную научно-квалификационную работу, которая вносит существенный вклад в изучение топологических инвариантов и фундаментальных групп многомерных граф-многообразий.

Основные результаты диссертации отражены в публикациях автора. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Смирнова Александра Викторовича полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения учёных степеней» ВАК Минобрнауки РФ (п.9 Положения, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 г. № 842), предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Смирнов Александр Викторович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3 «Геометрия и топология».

Официальный оппонент
Кудрявцева Елена Александровна
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.04)
профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова
профессор РАН / Е. А. Кудрявцева /
18 февраля 2025 г.

Почтовый адрес:
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, дом 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–19.
Телефон: +7 495 939-39-40.
Адрес электронной почты: eakudr@mech.math.msu.su

Подпись Кудрявцевой Е.А. заверяю.

Нач. отдела кадров (Соколова)