САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Смирнов Александр Викторович

Асимптотические метрические инварианты и фундаментальные группы многомерных граф-многообразий

1.1.3 — Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор РАН
А.В. Малютин

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

1. Введение **4**

Введение **4**

2. Термины, обозначения и предварительные сведения **12**

2.1 Метрическая геометрия 12

2.1.1 Метрические деревья 12

2.1.2 Конечно-порожденные группы 13

2.1.3 Квази-изометрические отображения 13

2.1.4 Метрика на универсальном накрывающем 13

2.2 Асимптотическая геометрия 14

2.2.1 Асимптотические размерности 14

2.2.2 Основные факты 15

2.3 Граф-многообразия 15

2.3.1 Граф-многообразия 15

2.3.2 Ортогональные граф-многообразия 16

2.3.3 W-структура 17

2.3.4 Слоевые подпространства и пересечение решёток 19

2.3.5 Тип блока и граф-многообразия 20

2.3.6 Индекс пересечения и вторичный индекс пересечения . . . 21

2.4 Ортогональные граф-многообразия 22

2.4.1 Метрики неположительной кривизны на граф-многообразиях 22

3. Квази-изометрическое вложение фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия в произведение деревьев **23**

3.1 Стандартная гиперболическая поверхность с краем 23

3.2 Стандартные метрики и билипшицевы гомеоморфизмы между базами 24

3.3 Выбор специальной метрики на универсальном накрывающем . . 25

3.4 Деревья T_1, T_2,..., T_{n-1} и отображения в них 28

3.4.1 Конструкция деревьев 28

3.4.2 Отображения в деревья 30

3.5 Кривые специального вида 31
3.6 Вычисление асимптотических размерностей 33

4. Четырехмерные граф-многообразия с фундаментальными группами, квази-изометричными группам ортогональных граф-многообразий 34
4.1 Разматывание индексов пересечения до 1. 34
4.2 Доказательство теоремы 1.4 36
4.3 Критерий ортогональности 40
4.4 Доказательство теоремы 1.6 43
4.5 Доказательство следствия 1.7 44

5. Заключение 45

1 Введение

Цели и задачи работы. Задачей работы является изучение асимптотических инвариантов метрических пространств размерностного типа. Наибольшее внимание уделено асимптотической размерности и линейно-контролируемой асимптотической размерности. Вычислены такие размерности для широкого класса обобщенных граф-многообразий.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Асимптотическая геометрия — это изучение метрических пространств с точки зрения больших масштабов, где локальная геометрия не играет роли. Важным классом изучаемых объектов являются квази-изометрии и квази-изометрические инварианты.

Асимптотические размерности. Понятие асимптотической размерности, по-видимому, было введено Громовым в работе [17], как важный квази-изометрический инвариант, и получило популярность благодаря работе Ю [30], в которой была доказана гипотеза Новикова о высших сигнатурах для конечно-порожденных групп конечного гомотопического типа с конечной асимптотической размерностью. Позднее были получены оценки на асимптотическую размерность для разного вида метрических пространств. Для гиперболических групп — в работе [26]; для групп, гиперболических по отношению к подгруппам, — в работе [25]; для групп классов отображений ориентируемых поверхностей конечного типа — в работе [8]. Большой вклад в изучение асимптотической размерности внёс Дранишников [6], [7], [18]. Определение 2.4 асимптотической размерности см. в разделе 2.2.1.

Линейно-контролируемая асимптотическая размерность, ℓ-asdim , была определена в работе Рое [27] как метрический вариант асимптотической размерности. Также это понятие можно рассматривать как асимптотический вариант размерности Ассуад–Нагаты, введенной в работах [4], [24]. Более того, для метрических пространств, размерность Ассуад–Нагаты которых на малых масштабах легко вычислима (например, для римановых многообразий), нахождение ℓ-asdim является важнейшим шагом к нахождению размерности Ассуад–Нагаты. Для более подробного изучения свойств ℓ-asdim и размерности Ассуад–Нагаты см. работы [16], [22], [11]. Определение 2.5 линейно-контролируемой

асимптотической размерности приведено в разделе 2.2.1.

В работе [6] доказано, что если π — фундаментальная группа конечного графа групп с конечно порожденными вершинными группами G_v, у которых $\operatorname{asdim} G_v \leqslant n$ для всех вершин v, то $\operatorname{asdim} \pi \leqslant n+1$. Этот результат позволяет оценивать асимптотическую размерность фундаментальных групп пространств, склеенных из кусков.

Однако аналогичного эффективного инструмента для нахождения верхних оценок линейно-контролируемой асимптотической размерности неизвестно. Первый результат таких оценок для фундаментальных групп трехмерных многообразий был получен в работе [2], а именно, для линейно-контролируемой асимптотической размерности фундаментальной группы произвольного трехмерного граф-многообразия M была получена оценка $3 \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) \leqslant 7$. Позднее Юм и Систо в работе [20] доказали, что $\ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = 3$. Оценки линейно-контролируемой асимптотической размерности фундаментальных групп трехмерных граф-многообразий получены в работе [23].

Вложение в произведения деревьев. Изучение квази-изометрических вложений в произведения деревьев впервые было проведено в работе [18], как асимптотический аналог идей Бауэрса [10]. С тех пор такие вложения рассматриваются как один из ключевых подходов к изучению асимптотической геометрии метрических пространств. В частности, для получения верхних оценок на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности. С тех пор множество работ опубликовано на эту тему. См., например, [9], [13], [14], [19], [22], [23].

Граф-многообразия и ортогональные граф-многообразия. Классическое граф-многообразие — это трехмерное многообразие, которое получается путем склеивания некоторых S^1-расслоений. Такие многообразия были открыты и классифицированы Вальдхаузеном [31], [32]. Обобщенные граф-многообразия, далее — n-мерные граф-многообразия или просто граф-многообразия, были впервые введены Буяло и Кобельским в работе [15], как многомерные аналоги трёхмерных.

Оказывается, класс многомерных граф-многообразий гораздо обширнее и сложнее, чем трехмерных. В работе [21] доказано, что фундаментальная группа любого граф-многообразия квази-изометрична фундаментальной группе граф-

многообразия, допускающего метрику неположительной кривизны. Более того, в работе [5] доказано, что все такие фундаментальные группы квази-изометричны. В размерностях, начиная с четырёх, аналогичные результаты не известны.

Первый основной результат данной работы: вводится класс ортогонально склеенных обобщенных граф-многообразий, для краткости называемых *ортогональными граф-многообразиями* (см. определение 2.13 в разделе 2.3.2). После чего обобщаются результаты работ [20] и [1] на этот класс многообразий. А именно, сформулирована и доказана теорема 1.1.

Теорема 1.1. *Для фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия M, $\dim M = n \geqslant 3$, снабженной произвольной метрикой слов, существует квази-изометрическое вложение в произведение n метрических деревьев.*

С помощью теоремы 1.1 были найдены асимптотическая размерность и линейно-контролируемая асимптотическая размерность фундаментальных групп ортогональных граф-многообразий.

Следствие 1.2. *Для ортогонального граф-многообразия M, с $\dim M \geqslant 3$ имеет место равенство*

$$\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \dim M,$$

где asdim *— асимптотическая размерность, ℓ-*asdim *— линейно-контролируемая асимптотическая размерность.*

В работе [20] аналогичный результат получен для $n = 3$ и для любого трехмерного граф-многообразия M. Дело в том, что в размерности три фундаментальная группа любого граф-многообразия M квази-изометрична, согласно [5], фундаментальной группе так называемого флип граф-многообразия, которое является ортогональным граф-многообразием для случая $n = 3$. А асимптотическая и линейно-контролируемая асимптотическая размерности являются квази-изометрическими инвариантами.

Вторым основным результатом данной работы является теорема 1.4. В ней устанавливается билипшицева эквивалентность универсальных накрывающих для некоторых четырехмерных граф-многообразий. Это расширяет класс граф-многообразий, для которых доказан аналог теоремы 1.1.

Согласно работе [21], фундаментальная группа любого замкнутого трехмерного граф-многообразия квази-изометрична фундаментальной группе флип граф-многообразия. Поэтому фундаментальные группы любых замкнутых трехмерных граф-многообразий квази-изометричны. В старших размерностях это далеко уже не так. Мы вводим топологический инвариант, $\operatorname{type} M$, граф-многообразия M, принимающий натуральные значения. Приведем здесь его краткое определение (подробное определение см. в разделе 2.3.5).

Каждый блок граф-многообразия на уровне первых гомологий определяет слоевое пространство. Соответственно, при склейке двух блоков на ребре определено пересечение слоевых пространств склеиваемых блоков. Будем говорить, что ребра, выходящие из вершины v графа граф-многообразия M, *параллельны*, если полученные на них пространства пересечения совпадают как подпространства слоевого пространства блока вершины v.

Определение 1.3. Типом вершины v *(или блока M_v) называется наибольшее количество попарно не параллельных ребер, $w \in \partial v$, выходящих из этой вершины.* Типом граф-многообразия *будем называть наибольший тип его блоков.*

В любой размерности, большей трех, нетрудно построить граф-многообразия произвольного типа. Однако для четырехмерных ортогональных граф-многообразий тип всегда не больше двух. Оказывается, в некотором смысле верно и обратное.

Теорема 1.4. *Если для четырехмерного граф-многообразия M его тип,* $\operatorname{type} M$*, не превосходит двух, то его универсальное накрывающее билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему некоторого ортогонального граф-многообразия (для любых римановых метрик на граф-многообразиях).*

Как следствие имеем.

Следствие 1.5. *Фундаментальную группу любого четырехмерного граф-многообразия M, для которого* $\operatorname{type} M \leqslant 2$*, можно квази-изометрически вложить в произведение четырех метрических деревьев и, следовательно,* $\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \ell\text{-}\operatorname{asdim} \pi_1(M) = 4$*, где* asdim *и* ℓ-asdim *— асимптотическая и линейно-контролируемая асимптотическая размерности.*

Это следствие дает простое и легко проверяемое достаточное условие, которое позволяет вычислять $\operatorname{asdim}\pi_1(M)$ и $\ell\text{-}\operatorname{asdim}\pi_1(M)$.

Класс $\mathcal{GM}_2$ граф-многообразий с $\operatorname{type} M \leqslant 2$ значительно шире (см. раздел 4.3) класса ортогональных граф-многообразий. Более того, весьма сомнительно, что любое граф-многообразие из класса $\mathcal{GM}_2$ конечнолистно накрывается ортогональным граф-многообразием.

Как важный дополнительный результат мы приводим критерий ортогональности четырехмерных граф-многообразий, у которых типы всех блоков равны двум, см. теорему 1.6. Определения необходимых понятий приведены в разделах 2.3.6 и 4.3.

Теорема 1.6. *Пусть M — четырехмерное граф-многообразие, все блоки которого имеют тип 2. Граф-многообразие M является ортогональным тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*

(1) индекс пересечения каждого ребра равен 1;

(2) вторичный индекс пересечения каждой вершины равен 1;

(3) подпространство векторов пересечения каждой вершины содержится в ядре отображения заряда $B_v \subset \ker K_v$.

В качестве следствия мы получаем широкий класс четырехмерных граф-многообразий, тип которых равен двум, но которые не являются ортогональными (см. следствие 1.7).

Следствие 1.7. *Существует четырехмерное граф-многообразие, не являющееся ортогональным, все индексы пересечения, вторичные индексы пересечения которого равны 1, а тип каждого блока равен 2.*

Научная новизна. Все результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер.

Достоверность результатов и апробация работы. Для результатов работы даны точные доказательства. Результаты опубликованы в журнале Алгебра и анализ, докладывались на семинарах лаборатории геометрии ПОМИ

РАН и «Oberwolfach Seminar: Lipschitz Analysis», международных конференциях «W.Killing and K.Weierstrass Colloquium» и «Дни геометрии в Новосибирске».

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы статьи [1], [2] и [3]. На защиту выносятся только результаты работ [2], [3]. Журналы, в которых опубликованы статьи [1], [2], [3], удовлетворяют рекомендациям ВАК.

Методология и методы исследования.

В основе доказательства теоремы 1.1 лежит идея рассмотрения на универсальном накрывающем n-мерного ортогонального граф-многообразия метрики неположительной кривизны специального вида. Для такой метрики универсальное накрывающее разбивается на «кирпичи», каждый из которых является произведением гиперболического прямоугольного шестиугольника и $n-1$ единичного интервала.

Для формулировки теоремы 1.4 автором введён новый топологический инвариант — тип граф-многообразия. Для доказательства теоремы 1.4 изучается W-структура, введенная в работе [15]. Показывается, что любое граф-многообразие конечнолистно накрывается граф-многообразием, все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения которого равны 1. После этого строится билипшицев гомеоморфизм универсального накрывающего такого граф-многообразия в универсальное накрывающее ортогонального граф-многообразия.

Для доказательства теоремы 1.6 изучается отображение заряда. Доказывается, что для ортогонального граф-многообразия заряд любой вершины равен 0. Из исследования W-структуры получается, что есть ряд препятствий к ортогональности граф-многообразий. В первую очередь это отличие индекса или вторичного индекса пересечения от единицы. Однако даже в классе граф-многообразий, все блоки которых имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1, существуют не ортогональные граф-многообразия. В следствии 1.7 приводится пример такого граф-многообразия.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из пяти глав. Основные результаты изложены во введении, главе 1. В главе 2 изложены предварительные сведения, необходимые определения и используемые обозначения. Глава 3 посвящена доказательству теоре-

мы 1.1 и следствия 1.1. Более подробно: в разделе 3.1 определяется стандартная гиперболическая поверхность с краем, H_0. В разделе 3.2 вводятся стандартные метрики на базовых поверхностях блоков ортогонального граф-многообразия. В разделе 3.3 строится специальная метрика на универсальном накрывающем ортогонального граф-многообразия. В разделе 3.4.1 приводится конструкция деревьев $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$. В разделе 3.4.2 определяются отображения из универсального накрывающего ортогонального граф-многообразия в эти деревья. В разделе 3.5 изучаются кривые специального вида, которые дают нам верхнюю оценку на расстояние в универсальном накрывающем. Это позволяет завершить доказательство теоремы 1.1. В разделе 3.6 доказывается следствие 1.2.

В главе 4 даны доказательства теорем 1.4, 1.6 и следствий 1.5, 1.7. А именно, в разделе 4.1 теорема 1.4 сводится к случаю граф-многообразий, все индексы пересечения которых равны 1. В разделе 4.2 завершается доказательство теоремы 1.4 и доказывается следствие 1.5. В разделе 4.3 обсуждается отображение заряда и доказывается основная лемма 4.9. В разделе 4.4 доказывается теорема 1.6. В разделе 4.5 доказывается следствие 1.7. Заключение дано в главе 5.

Положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что фундаментальная группа ортогонального граф-многообразия размерности n квази-изометрически вкладывается в произведение n метрических деревьев (теорема 1.1).

2. Доказано, что универсальное накрывающее четырехмерного граф-многообразия, тип которого не превышает двух, билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему ортогонального граф-многообразия (теорема 1.4).

3. Введен новый топологический инвариант — тип граф-многообразия (определение 1.3).

4. Найден топологический критерий ортогональности для четырёхмерных граф-многообразий. (теорема 1.6).

5. Получены верхние оценки на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности для ортогональных граф-многообразий (следствие 1.2).

6. Получены верхние оценки на асимптотическую и линейно-контролируемую асимптотическую размерности для четырехмерных граф-многообразий типа не больше двух (следствие 1.5).

7. Приведен пример четырехмерного граф-многообразия типа два, не являющегося ортогональным (следствие 1.7).

Благодарности.

Автор благодарен С. В. Буяло за руководство при выполнении данной работы, множество идей и огромное терпение. Автор выражает благодарность А. В. Малютину, Г. Ю. Паниной и С. В. Иванову за то, что данная работа была доведена до конца.

Автор признателен Н. Н. Кушпель, Е. А. Фоминых, Марио Бонку, Урсу Лангу, Анджею Щепаньскому за плодотворные обсуждения.

2 Термины, обозначения и предварительные сведения

2.1 Метрическая геометрия

Напомним некоторые стандартные определения и обозначения. Пусть X — метрическое пространство. Обозначим через $|xy|$ расстояние между точками $x, y \in X$ ($|xy|_X$, если нужно уточнить, что расстояние берется в пространстве X). Через $d(U,V) := \inf\{|uv| \mid u \in U, v \in V\}$ — расстояние между множествами $U, V \subset X$. Через $B_r(x) = \{x' \in X \mid |xx'| \leqslant r\}$ обозначим (замкнутый) шар с центром x и радиусом r. *Геодезический отрезок* в метрическом пространстве X — подмножество, изометричное отрезку на вещественной прямой. Геодезический отрезок с концами $x, y \in X$ обозначим через $[xy]$.

Определение 2.1. *Метрическое пространство X называется геодезическим, если для любой пары точек $x, y \in X$ существует геодезический отрезок $[xy]$, соединяющий x и y.*

Треугольником сравнения для геодезического треугольника $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ с вершинами $x, y, z \in X$ будем называть треугольник $x'y'z'$ на евклидовой плоскости такой, что $|x'y'| = |xy|$, $|y'z'| = |yz|$ и $|z'x'| = |zx|$. Будем говорить, что геодезический треугольник $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ с вершинами $x, y, z \in X$ *не толще* треугольника сравнения, если для любой точки $t \in [yz]$ и такой точки $t' \in [y'z']$, что $|y't'| = |yt|$, выполнено неравенство $|xt| \leqslant |x't'|$.

Определение 2.2. *Геодезическое метрическое пространство X называется $CAT(0)$ пространством, если для любой тройки точек $x, y, z \in X$ геодезический треугольник $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ не толще треугольника сравнения. Полное $CAT(0)$ пространство называется пространством Адамара.*

Для более подробного введения в теорию $CAT(0)$ пространств см. [12].

2.1.1 Метрические деревья

Триподом в геодезическом метрическом пространстве X называется подпространство, изометричное объединению трех геодезических отрезков $[xt] \cup [yt] \cup$

$[zt]$, которые имеют ровно одну общую точку t. Будем называть точку t *центром* трипода. Геодезическое метрическое пространство X называется *метрическим деревом*, если каждый треугольник в нем изометричен триподу (возможно, вырожденному).

2.1.2 Конечно-порожденные группы

Пусть G — конечно-порожденная группа, $S \subset G$ — конечное симметричное множество образующих группы G ($S^{-1} = S$). Напомним, что *метрикой слов* на группе G (соответствующей S) называется метрика, определенная нормой $\|\cdot\|_S$, где для каждого элемента $g \in G$ его норма $\|g\|_S$ есть наименьшее число элементов из S, произведение которых равно g. Как известно, см., например, книгу [12], все такие метрики для данной группы билипшицево эквивалентны. В данной работе будем рассматривать только конечно-порожденные группы с некоторой метрикой слов.

2.1.3 Квази-изометрические отображения

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *квази-изометрическим*, если существуют такие постоянные $\lambda \geqslant 1, C \geqslant 0$, что

$$\frac{1}{\lambda}|xy| - C \leqslant |f(x)f(y)| \leqslant \lambda|xy| + C$$

для всех $x, y \in X$. Метрические пространства X и Y называются *квази-изометричными*, если существует такое квази-изометрическое отображение $f\colon X \to Y$, что пространство Y лежит в некоторой метрической окрестности множества $f(X)$. В этом случае f называется *квази-изометрией*.

2.1.4 Метрика на универсальном накрывающем

Знаменитая лемма Милнора–Шварца (см. [29]) гласит.

Лемма 2.3. *Пусть Y — компактное метрическое пространство с внутренней метрикой. Пусть X — его универсальное накрывающее с метрикой, поднятой из Y. Тогда X квази-изометрично фундаментальной группе $\pi_1(Y)$ с произвольной метрикой слов.*

Из этой леммы следует, что для компактных римановых многообразий вопросы квази-изометрической вложимости универсального накрывающего с метрикой, поднятой из многообразия, и фундаментальной группы с произвольной метрикой слов равносильны.

2.2 Асимптотическая геометрия

2.2.1 Асимптотические размерности

Семейство $\mathcal{U}$ подмножеств множества X называется *покрытием*, если для любой точки $x \in X$ существует такое подмножество $U \in \mathcal{U}$, что $x \in U$. Семейство $\mathcal{U}$ подмножеств называется *дизъюнктным*, если никакие два подмножества $U, V \in \mathcal{U}$ не пересекаются. Объединение $\mathcal{U} = \cup\{\mathcal{U}^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ дизъюнктных семейств $\mathcal{U}^\alpha$ называется *n-красочным*, где $n = |\mathcal{A}|$ — мощность множества $\mathcal{A}$.

Также напомним, что n-красочное семейство множеств $\mathcal{U}$ называется *r-разделенным*, $r \geqslant 0$, если для каждой краски $\alpha \in \mathcal{A}$ и любых двух множеств $U, V \in \mathcal{U}^\alpha$ выполняется неравенство $d(U, V) \geqslant r$. Семейство $\mathcal{U}$ называется *D-ограниченным*, если диаметр каждого подмножества $U \in \mathcal{U}$ не превосходит D, $\operatorname{diam} U \leqslant D$.

Определение 2.4. *(Gromov [17]) Асимптотическая размерность метрического пространства X,* $\operatorname{asdim} X$*, определяется как такое наименьшее целое число n, что для каждого $R > 0$ найдется $D > 0$, при котором у X имеется $(n+1)$-красочное, R-разделенное, D-ограниченное покрытие пространства X.*

Линейно-контролируемая асимптотическая размерность — это вариант понятия асимптотической размерности, asdim, введенного Громовым. Её определение отличается дополнительным условием на функцию $D = D(R)$ ограниченности покрытия. А именно: требуется, чтобы такая функция была линейной $D(R) = CR$.

Определение 2.5. *(Roe [27]) Линейно-контролируемая асимптотическая размерность метрического пространства X, ℓ-*$\operatorname{asdim} X$*, определяется как такое наименьшее целое число n, что для каждого достаточно большого вещественного числа R существует $(n+1)$-красочное, R-разделенное, CR-ограниченное покрытие пространства X, где число $C > 0$ не зависит от R.*

Замечание 2.6. *Из определения напрямую следует, что для всякого метрического пространства X выполнено неравенство* $\operatorname{asdim} X \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} X$.

2.2.2 Основные факты

В этом разделе мы напомним некоторые широко известные свойства описанных выше размерностей.

Пусть X и Y — метрические пространства.

Теорема 2.7. *Если X и Y квази-изометричны, то* $\operatorname{asdim} X = \operatorname{asdim} Y$ *и* $\ell\text{-}\operatorname{asdim} X = \ell\text{-}\operatorname{asdim} Y$.

Теорема 2.8 ([16], теорема 9.4.1.)**.** *Если $X \subset Y$, то* $\ell\text{-}\operatorname{asdim} X \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} Y$.

Теорема 2.9 ([16], теорема 9.5.1.)**.** *Также,* $\ell\text{-}\operatorname{asdim} X \times Y \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} X + \ell\text{-}\operatorname{asdim} Y$.

Теорема 2.10 ([16], предложение 10.2.1.)**.** *Пусть T — метрическое дерево, тогда* $\ell\text{-}\operatorname{asdim} T \leqslant 1$.

Теорема 2.11 ([16], теорема 10.1.1.)**.** *Для многообразия Адамара X выполнено неравенство* $\operatorname{asdim} X \geqslant \dim X$.

2.3 Граф-многообразия

2.3.1 Граф-многообразия

Определение 2.12. *Граф-многообразием размерности $n \geqslant 3$ мы называем замкнутое ориентируемое многообразие M, которое состоит из конечного числа блоков M_v, $M = \bigcup_{v \in V} M_v$.*

При этом должны выполняться следующие условия (1)–(3).

(1) Каждый блок M_v является тривиальным расслоением на $(n-2)$-мерные торы T^{n-2} над компактной ориентируемой поверхностью Φ_v с краем, отличной от диска и кольца;

(2) многообразие M склеено из блоков M_v, $v \in V$, посредством диффеоморфизмов между их краевыми компонентами (не исключается случай склейки краевых компонент одного блока);

(3) склеивающие диффеоморфизмы не отождествляют гомотопические классы слоевых торов.

Такие граф-многообразия размерности $n \geqslant 4$ были введены в работе [15].

Граф-многообразию M соответствует его граф G, двойственный к разложению M на блоки. Таким образом, множество блоков граф-многообразия совпадает с множеством вершин V графа G, множество (неориентированных) ребер E графа G совпадает с множеством пар склеиваемых краевых компонент. Множество ориентированных ребер графа G будем обозначать через W.

2.3.2 Ортогональные граф-многообразия

Ортогональные граф-многообразия, определенные в работе [2], выделяются в классе граф-многообразий только условием в пункте (3) на склеивающие диффеоморфизмы. Они получаются следующим образом.

Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}$ фиксируем тривиализацию расслоения $M_v \to \Phi_v$, т.е. представим блок $M_v = \Phi_v \times S^1 \times \ldots \times S^1$ в виде произведения, где сомножитель S^1 встречается $n-2$ раза. Таким образом, для каждого ребра $w = \{vv'\}$, выходящего из вершины v, задана тривиализация граничного тора $T_w = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$, $(n-1)$ сомножитель, блока M_v, соответствующего ребру w.

Аналогично для ребра $-w$, идущего в обратном направлении, задана тривиализация граничного тора $T_{-w} = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ блока $M_{v'}$.

Фиксируем порядок сомножителей тривиализации и зададим склеивающий диффеоморфизм торов T_w и T_{-w} при помощи перестановки $\mathfrak{s}_w$ сомножителей тривиализации, не отождествляющей компоненты границ поверхностей Φ_v и $\Phi_{v'}$.

При этом для взаимно обратных ребер w и $-w$ перестановки $\mathfrak{s}_w$ и $\mathfrak{s}_{-w}$, взаимно обратны, то есть $\mathfrak{s}_{-w} \circ \mathfrak{s}_w = \mathrm{id}$.

Иными словами, граф-многообразие является ортогональным, если существуют такие тривиализации всех блоков, что склейки задаются перестановками сомножителей, как описано выше. Недостаток такого определения состоит в том, что проверить, является ли данное граф-многообразие ортогональным, с помощью этого определения невозможно. Выбор тривиализаций блоков дале-

ко не однозначен и при другом выборе тривиализаций склейки блоков могут перестать быть ортогональными. В разделе 4.3 приведен критерий ортогональности некоторого класса четырехмерных граф-многообразий. Этот критерий не зависит от выбора тривиализаций.

Определение 2.13. *Описанное выше граф-многообразие будем называть ортогональным граф-многообразием.*

Замечание 2.14. *В случае $n = 3$ класс ортогональных граф-многообразий совпадает с классом флип граф-многообразий, рассматриваемых в работе [21].*

2.3.3 W-структура

Основным инструментом для работы с граф-многообразиями является так называемая W-структура, впервые описанная в трехмерном случае в работах Вальдхаузена [31], [32]. Для n-мерного случая определение W-структуры дано в работе [15]. Для удобства читателя приведем эти определения здесь.

Пусть G — граф граф-многообразия M. Для вершины $v \in \mathrm{V}$ через ∂v обозначается множество ориентированных ребер, выходящих из v.

С каждым ориентированным ребром $w \in \mathrm{W}$ ассоциируется группа $L_w = H_1(T_w; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$ гомологий тора склейки T_w и с каждой вершиной $v \in V$ — группа $F_v = H_1(T_v; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{n-2}$ гомологий слоя T_v блока M_v.

Если $w \in \partial v$, то F_v вкладывается в L_w как максимальная подгруппа F_w.

Группу $F_v \simeq F_w$ мы называем *слоевой группой*. Ориентация многообразия M фиксирует ориентацию каждого из его блоков и, следовательно, ориентацию каждой группы L_w, $w \in \mathrm{W}$. При этом ориентации групп L_w и L_{-w} противоположны.

Склейка блоков описывается изоморфизмом $\widehat{g}_w \colon L_{-w} \to L_w$, удовлетворяющим условиям

$$\widehat{g}_{-w} = \widehat{g}_w^{-1}; \tag{2.1}$$

$$\widehat{g}_w(F_{-w}) \neq F_w. \tag{2.2}$$

Выбор тривиализации каждого блока M_v (а также тривиализации слоевого тора каждого блока) фиксирует базис группы L_w (с точностью до выбора зна-

ков его элементов) для каждого ребра $w \in \partial v$ так, что его соответствующий поднабор элементов является базисом группы F_w.

Такие базисы будем называть *выделенными.*

Опишем множество выделенных базисов групп $L_w, w \in \mathrm{W}$, пользуясь их группами преобразований. Пусть $f_v = (f_v^1, \ldots, f_v^{n-2})$ — базис группы F_v.

Мы выбираем базис (z_w, f_w) группы L_w таким образом, что $f_w = f_v$ и набор $\{z_w \mid w \in \partial v\}$ соответствует краю поверхности Φ_v для некоторой тривиализации $M_v = \Phi_v \times T^{n-2}$.

При этом, базис f_v определяет некоторую ориентацию слоя F_v, а (z_w, f_w) — ориентацию группы L_w.

Группа преобразований таких базисов состоит из матриц вида

$$h_w = \begin{pmatrix} \varepsilon_v & 0 \\ n_w & \sigma_v \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_v = \pm 1$, $n_w \in \mathbb{Z}^{n-2}$, $\sigma_v \in GL(n-2, \mathbb{Z})$, и действует на базисах справа:

$$(z_w, f_w) \cdot h_w = (z_w \cdot \varepsilon_w + f_w \cdot n_w, f_w \cdot \sigma_v).$$

Мы требуем, чтобы для каждой вершины $v \in V$ выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon_v \cdot \det \sigma_v = 1; \tag{2.3}$$

$$\sum_{w \in \partial v} n_w = 0. \tag{2.4}$$

Легко видеть, что множество $\mathcal{H}$ матриц вида

$$h = \bigoplus_{w \in \mathrm{W}} h_w,$$

удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), является группой. Условие (2.3) означает, что каждый базис (z_w, f_w) согласован с фиксированной ориентацией группы L_w, а условие (2.4) означает, что эти базисы соответствуют тривиализациям блока M_v.

Определение 2.15. *W-структурой, ассоциированной с граф-многообразием M, называется набор групп $\{L_w \mid w \in \mathrm{W}\}$, удовлетворяющий условиям* (2.1), (2.2), *и множество их базисов вида $\Theta = (z, f) \cdot \mathcal{H}$, где (z, f) — набор базисов, как выше, и $\det g_w^{z,f} = -1$ для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$.*

Последнее условие означает, что изоморфизм $\widehat{g}_w : L_{-w} \to L_w$ обращает ориентацию. Элементы $(z, f) \in \Theta$ называются *базисами Вальдхаузена.*

При фиксированном базисе Вальдхаузена (z, f) изоморфизм склейки описывается матрицей

$$g_w = g_w^{z,f} = \begin{pmatrix} a_w & b_w \\ c_w & d_w \end{pmatrix},$$

для которой

$$(z_{-w}, f_{-w}) = (z_w, f_w) \cdot g_w \tag{2.5}$$

(в этой записи предполагается, что группы L_{-w} и L_w отождествлены с помощью изоморфизма $\widehat{g}_w$). Здесь $a_w \in \mathbb{Z}$, строка b_w и столбец c_w состоят из $n-2$ целых чисел, d_w является целочисленной матрицей размера $(n-2) \times (n-2)$.

Замечание 2.16. *Граф-многообразие M является ортогональным тогда и только тогда, когда на каждом блоке граф-многообразия M можно задать такую тривиализацию, что для каждого ориентированного ребра $w \in \mathrm{W}$ индуцированные базисы (z_w, f_w) и (z_{-w}, f_{-w}) групп L_w и L_{-w} отличаются только перестановкой элементов и, может быть, постановкой знаков перед векторами.*

2.3.4 Слоевые подпространства и пересечение решёток

В дальнейшем мы будем использовать подгруппы групп, изоморфных $\mathbb{Z}^n$.

При этом важную роль будут играть максимальные подгруппы. Для краткости мы будем называть их решетками.

Решеткой в группе G, изоморфной группе $\mathbb{Z}^n$, мы называем любую максимальную подгруппу H группы G, изоморфную группе $\mathbb{Z}^k$, $k \leqslant n$. То есть —

такую подгруппу, для которой не существует такой другой подгруппы $H' < G$, изоморфной $\mathbb{Z}^k$, что $H < H'$. Размерностью решетки мы называем число k. Обозначение «$G < H$», примененное к группам G и H, означает, что группа G является подгруппой группы H. При этом случай равенства групп ($G = H$) не исключается.

Замечание 2.17. *Пересечение $G_1 \cap G_2$ двух решеток G_1 и G_2 — решетка, так как если $\gamma^m \in G_i$, $m \neq 0$, то и $\gamma \in G_i$, $i = 1, 2$.*

Для каждого ребра $|w| \in \mathrm{E}$ обозначим пересечение решеток F_w и F_{-w} через $P_{|w|}$.

Далее такую решетку в $L_{|w|}$ мы будем называть *решеткой пересечения* для ребра w.

Определение 2.18. *Будем говорить, что для w, $w' \in \partial v$ решетки $P_{|w|}$ и $P_{|w'|}$* параллельны, *если они совпадают в группе F_v.*

В этом случае, для краткости, будем также говорить, что ребра w, w' параллельны.

Определение 2.19. *Решетки $P_{|w|}$, рассматриваемые как подгруппы группы F_v, $w \in \partial v$, будем называть решетками пересечения для вершины v.*

2.3.5 Тип блока и граф-многообразия

Пусть $v \in \mathrm{V}$, M_v — блок граф-многообразия M, соответствующий вершине v.

Определение 2.20. Типом вершины v *(или блока M_v) называется наибольшее количество попарно непараллельных ребер $w \in \partial v$.*

Будем обозначать тип вершины (блока) $\operatorname{type} v$ *(*$\operatorname{type} M_v$*).* Типом граф-многообразия *будем называть число* $\operatorname{type} M := \max\limits_{v \in \mathrm{V}} \operatorname{type} v$.

Замечание 2.21. *Тип блока, а следовательно, и тип граф-многообразия не зависят от выбора базиса Вальдхаузена и являются топологическими инвариантами граф-многообразия.*

Для граф-многообразия размерности четыре нас будут интересовать только блоки типов 1 и 2. Для блока M_v типа 1 будем обозначать единственную решетку пересечения вершины v через P_v^1, а для блока M_v типа 2 будем обозначать соответствующие решетки пересечения через P_v^1 и P_v^2.

2.3.6 Индекс пересечения и вторичный индекс пересечения

Напомним определения некоторых инвариантов W-структур, описанных в работе [15].

Из условия (2.2) следует, что целочисленная строка b_w ненулевая, поэтому определен наибольший общий делитель ее элементов $i_w \geqslant 1$.

Определение 2.22. *Число i_w называется индексом пересечения W-структуры на ребре w.*

Геометрически i_w есть число компонент пересечения $T_v \cap T_u \subset T_{|w|}$.

Так как $i_w = i_{-w}$ (индекс пересечения не зависит от ориентации ребра), то мы можем ввести понятие индекса пересечения неориентированного ребра $e = |w|$, как $i_e = i_w = i_{-w}$.

Рассмотрим наименьшую по включению подгруппу F_e группы L_e, содержащую F_w и F_{-w}, $F_e = \langle F_w,\ F_{-w}\rangle$.

Лемма 2.23. *Индекс $(L_e : F_e)$ равен индексу пересечения i_e ребра e.*

Доказательство. Группа F_e порождена элементами f_w, f_{-w}, $F_e = \langle f_w,\ f_{-w}\rangle$, в то время как $L_e = \langle z_w,\ f_w\rangle$.

Из формулы (2.5) следует, что $b_w^1 \cdot z_w$, $b_w^2 \cdot z_w$, $\ldots$, $b_w^{n-2} \cdot z_w$ лежат в F_e, где $b_w = (b_w^1, \ldots, b_w^{n-2})$.

Так как i_e равен наибольшему общему делителю $b_w^1, b_w^2, \ldots, b_w^{n-2}$, то $\alpha \cdot z_w \in F_e$ тогда и только тогда, когда α кратно i_e. Поэтому $(L_e : F_e) = i_e$. □

Для каждого блока M_v типа 2 решетки пересечения $P_v^1, P_v^2 \subset F_v$ порождают некоторую подгруппу $P_v \simeq \mathbb{Z}^2$, $P_v = \langle P_v^1, P_v^2\rangle$ (наименьшую по включению подгруппу в F_v, содержащую P_v^1 и P_v^2) в группе F_v.

Определение 2.24. *Будем называть группу P_v группой слоевых пересечений для блока M_v.*

Подгруппа P_v не обязательно максимальна, поэтому может не быть решеткой в $F_v \simeq \mathbb{Z}^2$.

Определение 2.25. *Индекс j_v подгруппы P_v в группе F_v называется вторичным индексом пересечения в вершине v.*

Для каждого блока M_v типа 1 обозначим $P_v = F_v$ и $j_v = 1$. Так как $P_v^1 \simeq \mathbb{Z}$, а $P_v \simeq \mathbb{Z}^2$, то $P_v \neq P_v^1$.

2.4 Ортогональные граф-многообразия

2.4.1 Метрики неположительной кривизны на граф-многообразиях

Зададим метрику на M следующим образом: для каждого ребра $e \in \mathrm{E}(G)$ на соответствующем ему торе T_e зададим плоскую метрику так, чтобы базовые окружности системы координат, заданной на нем, имели длину 1 и были попарно перпендикулярны. Таким образом, для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(G)$ на крае поверхности Φ_v задана метрика, в которой каждая граничная компонента имеет длину 1. Такую метрику можно продолжить до метрики неположительной кривизны на всей поверхности Φ_v так, чтобы ее граница была геодезической. Тогда метрика с граничных торов продолжается до метрики на блоке M_v, которая локально является метрикой произведения (в целом метрика блока может не является метрикой произведения и иметь нетривиальные голономии вдоль некоторых петель на базе Φ_v).

Далее мы будем рассматривать только такие метрики на ортогональных граф-многообразиях. Если мы поднимем описанную выше метрику в универсальное накрывающее $\widetilde{M}$, то, используя теорему Решетняка о склеивании (см. книгу [12]), можно показать, что полученное метрическое пространство будет пространством неположительной кривизны, или пространством Адамара.

3 Квази-изометрическое вложение фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия в произведение деревьев

В этой главе мы докажем теорему 1.1 и выведем из нее следствие 1.2.

Зафиксируем ортогональное граф-многообразие M с метрикой, описанной в разделе 2.4.1.

3.1 Стандартная гиперболическая поверхность с краем

Рассмотрим гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2_\kappa$ такой кривизны $-\kappa$ ($\kappa > 0$), что длина стороны равностороннего прямоугольного шестиугольника θ на плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$ равна 1. Пусть ρ — расстояние от центра шестиугольника до середины его стороны, δ — диаметр θ.

Отметим каждую вторую сторону θ (всего три стороны) и определим поверхность с краем H_0 следующим образом. Рассмотрим подгруппу G_θ группы изометрий плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$, порожденную симметриями относительно (трех) отмеченных сторон шестиугольника θ. Пусть H_0 – орбита шестиугольника θ под действием группы G_θ. Тогда H_0 – выпуклое подмножество плоскости $\mathbb{H}^2_\kappa$, разбитое на шестиугольники, изометричные θ, и являющееся поверхностью с краем. Край поверхности H_0 имеет бесконечно много компонент связности, каждая из которых является геодезической прямой в $\mathbb{H}^2_\kappa$.

Граф T_{bin}, двойственный к разбиению H_0 на шестиугольники, является стандартным бинарным деревом, степень каждой вершины которого равна трем. Будем называть любое метрическое пространство, изометричное поверхности H_0, *θ-деревом*. Для вершины p дерева T_{bin} обозначим через θ_p соответствующий ей шестиугольник в H_0.

Замечание 3.1. *В дальнейшем будем рассматривать T_{bin} как метрическое пространство с метрикой, в которой длины всех ребер равны 2ρ. Такое метрическое пространство является метрическим деревом. Обозначим множество вершин T_{bin} через $\mathrm{V}(T_{bin})$.*

3.2 Стандартные метрики и билипшицевы гомеоморфизмы между базами

Определение 3.2. *Рассмотрим симплициальное дерево, степень каждой вершины которого равна 3, а длина каждого ребра равна 1. Заменим каждое ребро прямоугольником* $1 \times 1/3^{100}$*, а каждую вершину — правильным евклидовым треугольником со стороной* $1/3^{100}$*, и склеим их естественным образом. Полученное метрическое пространство будем называть утолщенным деревом или стандартной поверхностью и обозначать через* X_0*.*

Замечание 3.3. *Заметим, что стандартная поверхность* X_0 *билипшицево гомеоморфна* θ*-дереву* H_0*. Зафиксируем произвольный билипшицев гомеоморфизм* $h_0 \colon \mathrm{H}_0 \to X_0$*.*

Определение 3.4. *Стандартным блоком мы будем называть метрическое произведение* θ*-дерева* H_0 *на* $\mathbb{R}^{n-2}$*,* $B = \mathrm{H}_0 \times \mathbb{R}^{n-2}$*.*

Разбиение θ-дерева на шестиугольники индуцирует разбиение каждой граничной компоненты θ-дерева на единичные отрезки. Такое разбиение мы назовем *сеткой* на этой компоненте. Для каждого из сомножителей $\mathbb{R}$ назовем сеткой на этом сомножителе произвольное разбиение на единичные отрезки. Для каждой граничной гиперплоскости σ стандартного блока назовем *сеткой* на ней разбиение гиперплоскости σ на кубы, согласованное с сеткой на каждом из соответствующих ей сомножителей.

Напомним следующую теорему.

Теорема 3.5 ([5], Теорема 1.2)**.** *Пусть* X_0 *— стандартная поверхность. Фиксируем ее граничную компоненту* $\partial_0 X_0$*. Тогда существуют такое число* K *и функция* $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, что для каждого числа* K_0 *и* K_0*-билипшицева гомеоморфизма* P_0 *из* $\partial_0 X_0$ *в граничную компоненту* $\partial_1 X_0$ *гомеоморфизм* P_0 *продолжается до* $\psi(K_0)$*-билипшицева гомеоморфизма* $P \colon X_0 \to X_0$*, который является* K*-билипшицевым на каждой оставшейся граничной компоненте пространства* X_0*.*

Следствие 3.6. *Пусть* $\widetilde{\Phi}_v$ *— поверхность, являющаяся универсальной накрывающей для базы* Φ_v *блока* M_v *с метрикой, описанной в разделе 2.4.1. Фиксируем ее граничную компоненту* $\partial_0 \widetilde{\Phi}_v$*. Тогда существуют такое число* K *и*

функция $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, что для каждого числа* K_0 *любой* K_0*-билипшицев гомеоморфизм* $P_0 : \partial_0\widetilde{\Phi}_v \to \partial_0 \mathrm{H}_0$ *продолжается до* $\psi(K_0)$*-билипшицева гомеоморфизма* $P\colon \widetilde{\Phi}_v \to \mathrm{H}_0$*, который является* K*-билипшицевым на всех оставшихся граничных компонентах поверхности* $\widetilde{\Phi}_v$*.*

Доказательство. Для доказательства переименуем K_0, K и ψ из условия теоремы 3.5 в $\bar{K}_0$, $\bar{K}$ и $\bar{\psi}$ соответственно. Заметим, что существует билипшицев гомеоморфизм $\psi_v\colon X_0 \to \widetilde{\Phi}_v$.

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \longrightarrow & X_0 \\ {\scriptstyle \psi_v}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle h_0} \\ \widetilde{\Phi}_v & \longrightarrow & \mathrm{H}_0 \end{array}$$

Обозначим через M максимум из констант билипшицевости гомеоморфизмов ψ_v и h_0. Пусть $P_0 : \partial_0\widetilde{\Phi}_v \to \partial_0 \mathrm{H}_0$ — произвольный K_0-билипшицев гомеоморфизм. Обозначим через $\partial_1 X_0$ граничную компоненту $h_0(\partial_0 H_0)$. Тогда если $\partial_0 X_0 = \psi_v^{-1}(\partial_0\widetilde{\Phi}_v)$, то отображение $h_0 \circ P_0 \circ \psi_v : \partial_0 X_0 \to \partial_1 X_0$ является $M^2 \cdot K_0$-билипшицевым гомеоморфизмом. По теореме 3.5 этот гомеоморфизм продолжается до $\bar{\psi}(M^2 \cdot K_0)$-билипшицева гомеоморфизма $\bar{P}\colon X_0 \to X_0$, который является $\bar{K}$-билипшицевым на каждой оставшейся граничной компоненте пространства X_0. Тогда гомеоморфизм $P = h_0^{-1} \circ \bar{P} \circ \psi_v^{-1}$ будет $\psi(K_0) = M^2\bar{\psi}(M^2 \cdot K_0)$-билипшицевым, при этом на каждой оставшейся граничной компоненте он будет даже $K = M^2 \cdot \bar{K}$-билипшицевым. Поэтому для $\psi(x) = \bar{\psi}(M^2 \cdot x)$, $x \in \mathbb{R}$ и $K = M^2 \cdot \bar{K}$ следствие 3.6 доказано.

□

Замечание 3.7. *Так как вершин в графе* G *конечное число, то можно считать, что число* K *и функция* ψ *выбраны независимо от вершины* v*.*

3.3 Выбор специальной метрики на универсальном накрывающем

В этом разделе для каждого ортогонального граф-многообразия M мы индуктивно построим метрику специального вида на его универсальном накрывающем $\widetilde{M}$ таким образом, что универсальное накрывающее $\widetilde{M}$ с такой метрикой будет квази-изометрично фундаментальной группе $\pi_1(M)$ граф-многообразия M.

После этого нам будет достаточно построить квази-изометрическое вложение в произведение деревьев универсального накрывающего $\widetilde{M}$, рассматриваемого с построенной нами метрикой.

Согласно общей теории обобщенных граф-многообразий, развитой в работе [15], универсальное накрывающее $\widetilde{M}$ многообразия M разбивается на блоки. Двойственным к такому разбиению на блоки будет дерево, которое мы обозначим через T_0. На дереве T_0 мы рассматриваем внутреннюю метрику, в которой длина каждого ребра равна 1. Выберем в дереве T_0 некоторую вершину $o \in \mathrm{V}(T_0)$ и назовем ее корнем. Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ определим ее ранг $r(v)$ как количество ребер в кратчайшем пути в дереве T_0 между вершинами v и o. В частности, $r(o) = 0$. Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ обозначим через $\widetilde{M}_v$ соответствующий ей блок пространства $\widetilde{M}$. Этот блок изометричен произведению $\widetilde{\Phi}_v \times \mathbb{R}^{n-2}$. На каждой его граничной гиперплоскости фиксирована система координат, направления осей которой мы будем называть выделенными.

Индукцией по рангу вершины дерева T_0 построим на пространстве $\widetilde{M}$ метрику специального вида, билипшицево гомеоморфную метрике, поднятой из граф-многообразия M.

`База индукции`. Обозначим через $\psi_o : \widetilde{\Phi}_o \to \mathrm{H}_0$ билипшицев гомеоморфизм. Рассмотрим изометричную копию стандартного блока B_o и рассмотрим отображение $\psi'_o \colon \widetilde{M}_o \to B_o$, являющееся прямым произведением отображения $\psi_o \colon \widetilde{\Phi}_o \to \mathrm{H}_0$ и тождественного отображения $\mathrm{id} \colon \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^{n-2}$.

`Индукционный переход`. Предположим, что для всех вершин $v \in \mathrm{V}(T_0)$, таких, что $r(v) \leqslant m$, построен блок B_v макета X и билипшицев гомеоморфизм $\psi'_v \colon \widetilde{M}_v \to B_v$. Рассмотрим вершину $u \in \mathrm{V}(T_0)$ с $r(u) = m + 1$. Для нее существует единственная вершина $v \in \mathrm{V}(T_0)$, смежная с ней, для которой $r(v) = m$. Рассмотрим блоки $\widetilde{M}_v$ и $\widetilde{M}_u$ универсального накрывающего $\widetilde{M}$. Вспомним, что склейка блоков $\mathrm{pr}(\widetilde{M}_v)$ и $\mathrm{pr}(\widetilde{M}_u)$ получена при помощи перестановки координат $\mathfrak{s}$ тора T_e. Рассмотрим изометричную копию стандартного блока, обозначим ее через B_u и приклеим получившийся блок к блоку B_v с помощью перестановки координат $\mathfrak{s}^{-1}$ вдоль соответствующих гиперплоскостей, при этом совместив сетки на них. По индукционному предположению отображение $\psi'_v \colon \widetilde{M}_v \to B_v$ является прямым произведением отображения $\widetilde{\Phi}_v \to \mathrm{H}_0$ и $n - 1$ отображе-

ния $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Более того, сужение каждого и этих отображений на пересечение с общей граничной гиперплоскостью блоков $\widetilde{M}_v$ и $\widetilde{M}_u$ является K-билипшицевым гомеоморфизмом на образ. Из ортогональности склейки следует, что эти сужения индуцируют K-билипшицев гомеоморфизм $\partial_1\psi_u\colon \partial_0\widetilde{\Phi}_u \to \partial_0\mathrm{H}_0$ граничной компоненты $\partial_0\widetilde{\psi}_u$ поверхности $\widetilde{\Phi}_u$, примыкающей к блоку $\widetilde{M}_v$, в граничную компоненту $\partial_0\mathrm{H}_0$ θ-дерева, примыкающую к блоку B_v, и семейство K-билипшицевых гомеоморфизмов $\partial_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, каждый из которых действует из соответствующего $\mathbb{R}$-сомножителя разложения $\widetilde{M}_u = \widetilde{\Phi}_u \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ в соответствующий $\mathbb{R}$-сомножитель разложения $B_u = \mathrm{H}_0 \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$.

По следствию 3.6 гомеоморфизм $\partial_1\psi_u$ продолжается до $\psi(K)$-билипшицева гомеоморфизма $\psi_u\colon \widetilde{\Phi}_u \to \mathrm{H}_0$, являющегося K-билипшицевым на каждой оставшейся граничной компоненте. Гомеоморфизм ψ'_u построим как произведение гомеоморфизма ψ_u и гомеоморфизмов ∂_i $(i = 2, \ldots, n-2)$.

Построим отображение $\psi_M\colon \widetilde{M} \to X$, а именно, если точка x лежит в блоке $\widetilde{M}_v$ для некоторой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$, то определим $\psi_M(x) := \psi'_v(x)$ (из согласованности отображений ψ'_v следует корректность такого определения).

Предложение 3.8. *Построенное выше отображение — билипшицев гомеоморфизм.*

Доказательство. Положим $C = \max\{K, \psi(K)\}$. Из построения ясно, что для каждой вершины $u \in \mathrm{V}(T_0)$ отображение ψ'_u является C-билипшицевым. Предположим, что точка x лежит в блоке $\widetilde{M}_v$ для некоторой вершины $v \in \mathrm{V}(T)$, а точка y лежит в блоке $\widetilde{M}_u$ для некоторой вершины $u \in \mathrm{V}(T)$. Обозначим через x' точку $\psi_M(x)$, а через y' точку $\psi_M(y)$. Пусть кратчайшая vu в дереве T последовательно проходит через ребра $e_1, \ldots, e_k$ и только через них. Тогда кратчайшая $xy \subset \widetilde{M}$ последовательно пересекает гиперплоскости $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ в пространстве $\widetilde{M}$, соответствующие этим ребрам. С другой стороны, кратчайшая $x'y' \subset X$ последовательно пересекает гиперплоскости макета $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k$ и только их, при этом $\sigma'_i = \psi_M(\sigma_i)$. Обозначим через z_i точку пересечения кратчайшей xy и гиперплоскости σ_i (будем считать, что $z_0 = x$, $z_{k+1} = y$).

Пусть $z'_i = \psi_M(z_i)$. Так как для всех v отображение ψ_M, суженное на блок $\widetilde{M}_v$, является C-билипшицевым, а точки z_i и z_{i+1} $(i = 0, \ldots, k)$ лежат в одном блоке, то $|z'_i z'_{i+1}| \leqslant C|z_i z_{i+1}|$. Складывая все такие неравенства получаем, что

$\sum\limits_{i=0}^{k} |z'_i z'_{i+1}| \leqslant C|xy|$. С другой стороны, по неравенству треугольника $|x'y'| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k} |z'_i z'_{i+1}|$. Из этого следует, что $|x'y'| \leqslant C|xy|$. Аналогично доказывается, что $|xy| \leqslant C|x'y'|$. □

Таким образом, мы можем задать на универсальном накрывающем ортогонального граф-многообразия метрику специального вида. Такая метрика будет иметь неположительную кривизну в смысле Александрова. Более того, для всякой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ соответствующий ей блок $\widetilde{M}_v$ будет изометричен произведению θ-дерева H_0 и $n-2$ сомножителей $\mathbb{R}$.

Введем несколько технических обозначений, которые понадобятся нам далее. Для каждой вершины v и соответствующего ей блока $\widetilde{M}_v$ обозначим через X_v соответствующую копию θ-дерева. Более того, обозначим естественно (изометрично) вложенное в поверхность X_v дерево T_{bin}, рассмотренное с описанной выше метрикой через T_v. Тогда для каждой вершины v существует 2δ липшицева ретракция $r_v \colon X_v \to T_v$.

Представив блок $\widetilde{M}_v$ как произведение $X_v \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, обозначим проекции на соответствующие сомножители через $p_v^1, \ldots, p_v^{n-1}$.

Для каждой точки x, лежащей в блоке $\widetilde{M}_v$, обозначим через π_x отображение $X_v \to \widetilde{M}_v$, заданное формулой $\pi_x(y) := (y, p_v^2(x), \ldots, p_v^{n-1}(x))$, для каждой точки $y \in X_v$.

3.4 Деревья T_1, T_2,..., T_{n-1} и отображения в них

3.4.1 Конструкция деревьев

Пусть $\gamma = w_1 \ldots w_k$ — направленный путь в дереве T_0. Обозначим через $\mathfrak{s}_\gamma$ перестановку $\mathfrak{s}_{w_k} \circ \ldots \circ \mathfrak{s}_{w_1}$ вполне упорядоченного $(n-1)$-элементного множества.

Пусть вершины u и v соединены двумя ориентированными путями γ_1 и γ_2. Тогда $\mathfrak{s}_{\gamma_1} = \mathfrak{s}_{\gamma_2}$, поэтому можно определить перестановку $\mathfrak{s}_{uv}$ как перестановку $\mathfrak{s}_\gamma$ вдоль любого пути γ между вершинами u и v. Более того, $\mathfrak{s}_{v_1v_3} = \mathfrak{s}_{v_2v_3} \circ \mathfrak{s}_{v_1v_2}$ и $\mathfrak{s}_{uv} = \mathfrak{s}_{vu}^{-1}$.

Зададим на множестве вершин дерева T_0 отношение $\sim$. А именно, будем говорить, что для вершин u и v $u \sim v$, если перестановка $\mathfrak{s}_{uv}$ оставляет на

месте наименьший элемент.

Несложно проверить, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.

Докажем, что отношение $\sim$ разбивает множество $\mathrm{V}(T_0)$ не более чем на $n-1$ класс эквивалентности. Действительно, если это не так, то можно выбрать n попарно не эквивалентных вершин $v_1, \ldots, v_n$. Тогда для некоторых $2 \leqslant i, j \leqslant n$ имеем $\mathfrak{s}_{v_1 v_i}(x_0) = \mathfrak{s}_{v_1 v_j}(x_0)$, где x_0 — наименьший элемент. Но тогда $v_i \sim v_j$ так как $\mathfrak{s}_{v_i v_j}(x_0) = \mathfrak{s}_{v_1 v_j} \circ \mathfrak{s}_{v_i v_1}(x_0) = x_0$.

Обозначим через k количество получившихся классов эквивалентности. Пусть $c_1, \ldots, c_k$ — получившиеся классы эквивалентности. Заметим, что $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Также отметим, что если $u, v \in c_i$, то для произвольной вершины $v' \in \mathrm{V}(T_0)$ $\mathfrak{s}_{uv'}(x_0) = \mathfrak{s}_{vv'}(x_0)$.

Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ и для каждого числа $1 \leqslant i \leqslant n$ построим дерево $T_{v,i}$ следующим образом. Если вершина v принадлежит классу c_i, то $T_{v,i} := T_v$, если не принадлежит, то отождествим дерево $T_{v,i}$ с прямой $\mathbb{R}$. Также для каждой вершины $v \in \mathrm{V}(T_0)$ построим отображение $r_{v,i} \colon \widetilde{M}_v \to T_{v,i}$. Если вершина v лежит в классе c_i, то $r_{v,i} := r_v(p_v^1)$. Если же вершина v лежит в некоторым классе c_j, отличном от класса c_i, то положим $r_{v,i} = p_v^k$, где $k = \mathfrak{s}_{uv}(x_0)$, где $u \in c_i$, x_0 — как и раньше, наименьший элемент.

Для каждого числа $1 \leqslant i \leqslant n$ построим дерево T_i следующим образом. Для каждой пары смежных вершин u и v дерева T_0 будем говорить, что точки $x \in T_{u,i}$ и $y \in T_{v,i}$ $\sim_i$-эквивалентны, если найдется такая точка $z \in \widetilde{M}_u \cap \widetilde{M}_v$, что $x = r_{u,i}(z) = r_{v,i}(z) = y$.

Назовем вершины u и v, лежащие в классе c_i *близкими*, если кратчайший путь между ними в дереве T_0 не содержит других вершин класса c_i.

Для каждой пары u, v близких вершин класса c_i построим изометрию $\sim_{uv}$ некоторого подпространства дерева $T_{u,i}$ и некоторого подпространства дерева $T_{v,i}$. Обозначим через $u = v_0, \ldots, v_k = v$ вершины кратчайшего пути в дереве T_0 между вершинами u и v. Будем говорить, что точки $x \in T_{u,i}$ и $y \in T_{v,i}$ $\sim_{uv}$-эквивалентны, если существуют точки $x_l \in \widetilde{M}_{v_l}, 0 \leqslant l \leqslant k$, такие, что $x = x_0$, $y = x_k$ и $x_l \sim_i x_{l+1}$ для всех $0 \leqslant l \leqslant k-1$. Пусть $A \subset T_{u,i}$ — двухвалентное дерево, состоящее из всех вершин, соответствующих шестиугольникам, приле-

гающим к гиперплоскости $\widetilde{M}_u \cap \widetilde{M}_{v_1}$, а также ребер между ними. Аналогично пусть $B \subset T_{v,i}$ — двухвалентное дерево, состоящее из всех вершин, соответствующих шестиугольникам, прилегающим к гиперплоскости $\widetilde{M}_{k-1} \cap \widetilde{M}_v$, а также ребер между ними. Так как по построению склейка соседних блоков совмещает сетки на общих гиперплоскостях, то эквивалентность $\sim_{uv}$ задает изоморфизм деревьев A и B, который является изометрией. Более того, из определения следует, что если вершины u_1, u_2 и u_3, лежащие в классе c_i, попарно близкие, то для точек $x_1 \in \widetilde{M}_{u_1}$, $x_2 \in \widetilde{M}_{u_2}$ и $x_3 \in \widetilde{M}_{u_3}$, таких, что $x_1 \sim_{u_1u_2} x_2$ и $x_1 \sim_{u_1u_3} x_3$, выполнено условие $x_2 \sim_{u_2u_3} x_3$, что означает, что можно корректно определить склеенное по изометриям пространство $T_i := \sqcup_{v \in \mathrm{V}(T_0)} T_{v,i}/\sim$, где отношение $\sim$ порождается всеми отношениями $\sim_{u,v}$, $u, v \in V(T_0)$ по транзитивности.

Заметим, что пространство T_i также является деревом. Более того, дерево T_i естественным образом можно представить в виде объединения блоков, изоморфных деревьям $T_{v,i}$, для всех вершин v класса эквивалентности c_i.

Таким образом, для каждого $1 \leqslant i \leqslant n-1$ мы построили дерево T_i, которое естественным образом разбито на блоки $T_{v,i}$. Напомним, что у нас еще есть дерево T_0.

3.4.2 Отображения в деревья

Далее мы будем рассматривать произведение n получившихся деревьев $T_0 \times T_1 \times \ldots \times T_{n-1}$ как метрическое пространство с метрикой суммы. То есть расстояние между точками $x = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}), y = (t'_0, t'_1, \ldots, t'_{n-1}) \in T_0 \times T_1 \times \ldots \times T_{n-1}$ зададим равенством

$$|xy| = |t_0t'_0|_{T_0} + |t_1t'_1|_{T_1} + \ldots + |t_{n-1}t'_{n-1}|_{T_{n-1}}.$$

Построим отображение $\varphi_i \colon \widetilde{M} \to T_i$ по формуле: если $x \in \widetilde{M}_v$, то $\varphi_i(x) := proj_{v,i}(r_{v,i}(x))$, где $proj_{v,i}$ — естественное вложение дерева $T_{v,i}$ в дерево T_i. Заметим, что по определению отображений $r_{v,i}$, а также по построению дерева T_i отображение φ_i корректно определено на пересечении $\widetilde{M}_v \cap \widetilde{M}_u$ для каждой пары смежных вершин u и v дерева T_0.

Из определения отображения $r_{v,i}$ следует, что отображение φ_i является 2ρ-

липшицевым. Для доказательства этого достаточно показать, что

$$|\varphi_i(x)\varphi_i(y)| \leqslant 2\rho|xy|,$$

где точки x и y лежат в одном блоке $\widetilde{M}_v$. Это же следует из определения отображения φ_i.

Определим отображение $\varphi_0\colon \widetilde{M} \to T_0$ следующим образом. Если $x \in \widetilde{M}_v$ и для любой другой вершины $u \in \mathrm{V}(T_0)$, $x \notin \widetilde{M}_u$, то положим $\varphi_0(x) = v$. Если $x \in \widetilde{M}_u \cap \widetilde{M}_v$ и $r(u) < r(v)$, то положим $\varphi_0(x) = u$. Ясно, что $|\varphi_i(x)\varphi_i(y)| \leqslant |xy| + 1$.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \widetilde{M} \to T_0 \times T_1 \times \ldots \times T_{n-1}$, заданное равенством $\varphi(x) := (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x))$, для каждой точки $x \in \widetilde{M}$.

Тогда

$$|\varphi(x)\varphi(y)| = |\varphi_0(x)\varphi_0(y)| + \ldots + |\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(y)| \leqslant (2\rho(n-1)+1)|xy| + 1.$$

3.5 Кривые специального вида

Для кривой γ в метрическом пространстве X через $|\gamma|$ будем обозначать ее длину. Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.9. *Для любых двух точек $x, y \in \widetilde{M}$ существует такая кривая $\gamma \subset \widetilde{M}$, что $|\gamma| \leqslant (2\delta+1)|\varphi(x)\varphi(y)| + 2\delta$.*

Доказательство. Рассмотрим такие вершины $u, v \in \mathrm{V}(T_0)$, что $x \in \widetilde{M}_v$, $y \in \widetilde{M}_u$. Докажем лемму индукцией по числу $|uv|_{T_0}$.

`База`. Найдется такая вершина $v \in \mathrm{V}(T_0)$, что $x, y \in \widetilde{M}_v$. Тогда подойдет кратчайшая xy. Действительно,

$$|xy| = \sqrt{|p_1^v(x)p_1^v(y)|^2 + \ldots + |p_{n-1}^v(x)p_{n-1}^v(y)|^2},$$

что не превосходит

$$2\delta + (|\varphi_1(x)\varphi_1(y)| + \ldots + |\varphi_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(y)|) \leqslant (2\delta+1)|\varphi(x)\varphi(y)| + 2\delta.$$

`Переход`. Пусть $r(v) > r(u)$ и $v' \in \mathrm{V}(T_0)$ — такая смежная с v вершина,

что $v' \in vu$. Не умаляя общности можно считать, что вершина v принадлежит классу эквивалентности c_1. Рассмотрим кратчайшую η между точками $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Пусть кривая η_1 — ее проекция на дерево T_1. Тогда кривую η_1 можно разбить на две части $\eta_1^1 = \eta_1 \cap T_{v,1}$ и $\eta_1^2 = \eta_1 \setminus \eta_1^1$. Пусть точка z — конец кривой η_1^1, отличный от точки $\varphi(x)$. Заметим, что $|\varphi(x)\varphi(y)| = |\varphi(x)z| + |z\varphi(y)|$.

Напомним, что $\pi_x \colon X_v \to \widetilde{M}_v$ есть горизонтальное вложение, при котором образ содержит точку x. Пусть γ_1 — образ кривой η_1^1 при отображении π_x. Пусть точки x_0 и x_1 — ее концы. Тогда $|xx_0| < \delta$ и найдется такая точка $x_2 \in \widetilde{M}_v \cap \widetilde{M}_{v'}$, что $x_2 \in \pi_x(X_v)$ и $\varphi_1(x_2) = x_1$. Тогда заметим, что $|x_1x_2| < \delta$ и для всех $i > 1$ $\varphi_i(x_2) = \varphi_i(x)$. Следовательно, $|\varphi(x)\varphi(x_2)| + |\varphi(x_2)\varphi(y)| = |\varphi(x)\varphi(y)|$, и $x_2 \in \widetilde{M}_{v'}$. Применяя индукционное предположение, получаем, что существует кривая γ' с концами в точках x_2 и y, такая, что $|\gamma'| \leqslant (2\delta+1)|\varphi(x_2)\varphi(y)| + 2\delta$. Рассмотрев кривую γ, состоящую из кратчайшей xx_0, кривой γ_1, кратчайшей x_1x_2 и кривой γ', получаем, что

$$|\gamma| = |xx_0| + |\gamma_1| + |x_1x_2| + |\gamma'| \leqslant 2\delta + |\varphi(x)\varphi(x_2)| + (2\delta+1)|\varphi(x_2)\varphi(y)| + 2\delta,$$

но так как $r(v) > r(v')$, то $1 \leqslant |\varphi(x)\varphi(x_2)|$ и, следовательно,

$$2\delta + |\varphi(x)\varphi(x_2)| \leqslant (2\delta+1)|\varphi(x)\varphi(x_2)|,$$

что влечет требуемое неравенство. □

Следствие 3.10. *Для любых точек $x, y \in \widetilde{M}$ выполнено неравенство $|xy| \leqslant (2\delta+1)|\varphi(x)\varphi(y)| + 2\delta$.*

Применяя полученные выше неравенства, получаем, что

$$|xy|/(2\delta+1) - 2\delta/(2\delta+1) \leqslant |\varphi(x)\varphi(y)| \leqslant (2\rho(n-1)+1)|xy| + 1,$$

следовательно,

$$1/C|xy| - 1 \leqslant |\varphi(x)\varphi(y)| \leqslant C|xy| + 1,$$

где $C = \max\{2\delta+1, 2\rho(n-1)+1\}$. На этом доказательство теоремы 1.1 завершено.

3.6 Вычисление асимптотических размерностей

Применяя теорему 2.7, теорему 2.8, теорему 2.9 и теорему 2.10, получаем неравенства

$$\operatorname{asdim} \pi_1(M) = \operatorname{asdim} \widetilde{M} \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} \widetilde{M} \leqslant \ell\text{-}\operatorname{asdim} (T_0 \times T_1 \times \ldots \times T_{n-1}) \leqslant n.$$

С другой стороны, пространство $\widetilde{M}$ является многообразием Адамара, и следовательно, по теореме 2.11 имеем $\operatorname{asdim} \widetilde{M} \geqslant n$. Это завершает доказательство следствия 1.2.

4 Четырехмерные граф-многообразия с фундаментальными группами, квази-изометричными группам ортогональных граф-многообразий

В этой главе мы доказываем теорему 1.4, теорему 1.6, следствие 1.5 и следствие 1.7. В этой главе под граф-многообразием мы понимаем четырехмерное граф-многообразие, если не сказано иное.

4.1 Разматывание индексов пересечения до 1.

В этом разделе мы докажем, что любое граф-многообразие конечнолистно накрывается граф-многообразием, все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения которого равны 1.

Лемма 4.1. *Граф-многообразие M можно конечнолистно накрыть граф-многообразием N, у которого все индексы пересечения равны 1, а также все вторичные индексы пересечения равны 1.*

Доказательство. Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}$ рассмотрим накрытие $r_v\colon T^2 \to T^2$, соответствующее подгруппе $P_v < F_v = \pi_1(T^2)$ фундаментальной группы слоевого тора (для вершины типа 1 такое накрытие будет тривиальным). Кратность этого накрытия равна вторичному индексу пересечения j_v в вершине v.

Рассмотрим поверхность Φ_v и построим орбиобразие Φ'_v следующим образом. Для каждого ребра $w \in \partial v$ к соответствующей компоненте края поверхности Φ_v приклеим диск D_w с конической точкой с углом $2\pi/j_u$, где u — второй конец ребра w.

Так как поверхность Φ_v с краем отлична от диска и кольца, то орбиобразие Φ'_v является хорошим компактным двумерным орбиобразием без края, и следовательно (см., например, [28, Теорема 2.5.]), существует замкнутая поверхность Ψ'_v и конечнолистное накрытие $p'_v\colon \Psi'_v \to \Phi'_v$.

Пусть n_v — кратность этого накрытия. Обозначим произведение $\prod\limits_{v\in\mathrm{V}} n_v$ через N, а произведение $\prod\limits_{v\in\mathrm{V}} j_v$ — через J.

Вырезав из поверхности Ψ'_v прообраз $(p'_v)^{-1}(\bigcup\limits_{w\in\partial v} D_w)$ приклеенных дисков, получим поверхность Ψ_v с краем, конечнолистно накрывающую поверхность Φ_v с краем. Обозначим соответствующее накрытие через $p_v\colon \Psi_v \to \Phi_v$.

Пусть $N_v = \Psi_v \times T^2$. Такие многообразия мы тоже будем называть блоками. Определим накрытие

$$q_v\colon N_v \to M_v = \Phi_v \times T^2$$

как произведение накрытий $p_v\colon \Psi_v \to \Phi_v$ и $r_v\colon T^2 \to T^2$.

Заметим, что в блоке N_v группа P_v играет роль слоевой группы.

Пусть ребро w соединяет вершину v с вершиной u, γ_w — компонента края поверхности Φ_v, соответствующая ребру w. На каждой компоненте прообраза тора $T_w = \gamma_w \times T^2$ накрытие q_v является произведением накрытий и определяется подгруппой $A_w = \langle P_v,\ P_u\rangle = B_w \times P_v$ группы L_w, где B_w — подгруппа индекса j_u в группе $\pi_1(\gamma_w) \simeq \mathbb{Z}$.

Таким образом, группа A_w имеет в группе L_w индекс $(L_w : A_w) = j_u \cdot j_v$.

Теперь опишем склейки блоков. Пусть ребро w соединяет вершину v с вершиной u. Пусть T_v — компонента края блока N_v, а T_u — компонента края блока N_u, накрывающие тор $T_{|w|}$. Склейка $g'_w\colon T_v \to T_u$ задается изоморфизмом групп $H_1(T_v;\mathbb{Z})$ и $H_1(T_u;\mathbb{Z})$.

Для каждой из этих групп имеется изоморфизм с группой A_w, индуцированный накрытиями q_v и q_u соответственно. Это и определяет требуемую склейку. Так как решетки $P_u, P_v < A_w$ различны, то такая склейка удовлетворяет определению 2.12 (3).

Заметим, что для ребра w, соединяющего вершины u и v графа G, $P_{|w|} = F_w \cap F_{-w} = P_u \cap P_v < L_w$.

Поэтому для ребра w', соответствующего склейке блоков N_u и N_v, решетка пересечения $P_{|w'|} = P_{|w|}$. Следовательно, группа P_v играет роль группы слоевых пересечений для блока N_v. Тогда вторичный индекс пересечения блока N_v равен $(P_v : P_v) = 1$.

Согласно лемме 2.23, индекс пересечения на ребре w' равен индексу $(A_w : \langle P_u, P_v\rangle)$ подгруппы $\langle P_u, P_v\rangle$ в группе A_w, то есть единице.

Для каждой вершины $v \in \mathrm{V}$ рассмотрим $N/n_v \cdot J/j_v$ копий блока N_v.

Для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$ $(e = |w|)$, соединяющего вершины $u, v \in \mathrm{V}$, у

нас имеется $N/n_u \cdot J/j_u$ копий блока N_u и $N/n_v \cdot J/j_v$ копий блока N_v.

У блока N_u есть $(n_u \cdot j_u)/(j_u \cdot j_v) = n_u/j_v$ краевых компонент, накрывающих тор T_e, а у блока N_v есть n_v/j_u краевых компонент, накрывающих тор T_e.

Следовательно, у всех копий блока N_u есть

$$N/n_u \cdot J/j_u \cdot n_u/j_v = (N \cdot J)/(j_u \cdot j_v)$$

компонент края, накрывающих тор T_e.

Столько же компонент края всех копий блоков N_v накрывают тор T_e.

Установив соответствие, склеим каждую рассмотренную компоненту края копий блоков M_u с соответствующей компонентой края блока M_v при помощи склейки g'_w.

Мы получили граф-многообразие M', у которого все вторичные индексы пересечения равны 1, $N \cdot J$ листно накрывающее граф-многообразие M. □

Применяя лемму 4.1 к граф-многообразию M, получим граф-многообразие N, все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения которого равны 1. При этом, фундаментальные группы $\pi_1(N)$ и $\pi_1(M)$ квазиизометричны.

4.2 Доказательство теоремы 1.4

Для удобства читателя приведем здесь лемму 2.4 из работы [21]. Эта лемма играет важную роль в доказательстве теоремы 1.4.

Лемма 4.2. *Пусть S — гладкое компактное многообразие отрицательной кривизны с геодезический краем, $\widetilde{S}$ — его универсальное накрывающее. Пусть α — замкнутая гладкая дифференциальная 1-форма на границе ∂S, α' — её поднятие на $\partial\widetilde{S}$.*

Тогда существует такая гладкая липшицева функция $h\colon \widetilde{S} \to \mathbb{R}$, что $dh|_{\partial\widetilde{S}} = \alpha'$.

Пусть M — четырехмерное граф-многообразие, тип которого не превосходит двух.

Переходя к конечнолистному накрывающему, будем считать, что все индексы пересечения, а также все вторичные индексы пересечения многообразия M равны 1.

Из равенства вторичных индексов пересечения единице следует, что мы можем выбрать такой базис Вальдхаузена $\{(z_w, f_w) \mid w \in \partial v, v \in \mathrm{V}\}$, что для каждого блока M_v типа 2, $f_v^1 \in P_v^1$ и $f_v^2 \in P_v^2$.

При этом, для каждого блока типа 1 можно выбрать $f_v^1 \in P_v^1$.

Для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$, соединяющего вершины v и u, склейка $\widehat{g}_{-w}$ блоков M_v и M_u задается базисами (z_w, f_w) и (z_{-w}, f_{-w}) пространства $L_{|w|}$.

Иначе говоря, матрица g_{-w} этой склейки получается разложением базиса (z_w, f_w) по базису (z_{-w}, f_{-w}).

Мы можем считать, что $P_u^1 = P_w = P_v^1$, где $P_w = F_w \cap F_{-w}$. Тогда, в этих обозначениях, $f_w^1 = \pm f_{-w}^1$. Более того, так как индексы пересечения равны единице и $f_w^1 = \pm f_{-w}^1$, то из формулы (2.5) следует, что $f_{-w}^2 - z_w \in F_w$.

Обозначим вектор $f_{-w}^2 - z_w$ через δ_w.

Шаг за шагом, меняя склейки на ребрах, построим ортогональное граф-многообразие N, у которого универсальное накрывающее $\widetilde{N}$ билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему $\widetilde{M}$ исходного граф-многообразия M.

Фиксируем ребро $w \in \mathrm{W}$. Пусть оно соединяет вершины v и u. Новую склейку $\widehat{g}'_{-w}$ блоков M_v и M_u определим базисом $z'_w = z_w + \delta_w$, $f'_w = f_w$.

Таким образом, изоморфизм $\widehat{g}'_{-w}$ получается из изоморфизма $\widehat{g}_{-w}$ сдвигом на вектор δ_w по первой координате. То есть, такая склейка совмещает векторы f_w^1 и f_{-w}^1, а также векторы z_w и f_{-w}^2.

Так как при такой модификации склейки решетки P_v, $v \in \mathrm{V}$ и F_e, $e \in \mathrm{E}$ (см. определения 2.22 и 2.25) не изменяются, то не меняются ни индекс пересечения, ни вторичный индекс пересечения.

Разрезав граф-многообразие M вдоль тора $T_{|w|}$, а затем склеив вдоль него же при помощи склейки $\widehat{g}'_{-w}$, получим граф-многообразие N.

Лемма 4.3. *Универсальные накрывающие граф-многообразий M и N билипшицево гомеомеорфны.*

Доказательство. Граф-многообразия M и N имеют общий граф G, а следовательно, дерево Басса–Серра граф-многообразия M совпадает с аналогичным деревом многообразия N.

Более того, для каждой вершины $v' \in \mathrm{V}$ блоки $M_{v'}$ и $N_{v'}$ изоморфны.

Универсальное накрывающее $\widetilde{M}$ граф-многообразия M разбивается на блоки, двойственные дереву Басса–Серра T_M, каждый из которых, является универсальным накрывающим некоторого блока граф-многообразия M.

Назовем блоки, накрывающие блок M_v, выделенными.

Универсальное накрывающее $\widetilde{N}$ граф-многообразия N также разбивается на блоки, причем поскольку деревья Басса–Серра граф-многообразий совпадают, блоки многообразия $\widetilde{N}$ являются копиями блоков многообразия $\widetilde{M}$.

Многообразия $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ отличаются лишь склейками вдоль границ выделенных блоков. Блоки, соответствующие выделенным, также будем называть выделенными.

Докажем, что универсальные накрывающие $\widetilde{M}$ и $\widetilde{N}$ билипшицево гомеоморфны. Построим отображение $\widetilde{M} \to \widetilde{N}$ следующим образом: каждый невыделенный блок пространства $\widetilde{M}$ отобразим тождественно в соответствующий ему невыделенный блок пространства $\widetilde{N}$.

Для каждого выделенного блока $\widetilde{M_v} = \widetilde{\Phi_v} \times \mathbb{R}^2$ описанное выше отображение индуцирует отображение его границы на границу соответствующего ему выделенного блока $\widetilde{N_v} = \widetilde{\Phi_v} \times \mathbb{R}^2$, которое на каждой граничной компоненте, не соответствующей ребру w, является тождественным, а на компоненте $\ell_w \times \mathbb{R}^2$, соответствующей ребру w, является аффинным отображением $A_w \colon \ell_w \times \mathbb{R}^2 \to \ell_w \times \mathbb{R}^2$, соответствующим отображению

$$h_w = (g'_{-w})^{-1} \circ g_{-w} \colon H_1(T_{|w|}; \mathbb{Z}) \to H_1(T_{|w|}; \mathbb{Z}).$$

При этом отображение A_w определено с точностью до целочисленного сдвига во втором сомножителе.

Разложим δ_w по базису (f_w^1, f_w^2) пространства F_w, $\delta_w = \gamma_1 f_w^1 + \gamma_2 f_w^2$.

Отображение h_w в базисе (z_w, f_w^1, f_w^2) задается формулами

$$h_w(z_w) = z_w - \delta_w = z_w - \gamma_1 f_w^1 - \gamma_2 f_w^2, h_w(f_w^1) = f_w^1, h_w(f_w^2) = f_w^2.$$

Введем систему координат (x, y, z) на краевой компоненте $\ell_w \times \mathbb{R}^2$, для которой прямая $y = z = 0$ соответствует направлению z_w, $x = z = 0$ соответствует направлению f_w^1, а $x = y = 0$ — направлению f_w^2.

В этой системе координат отображению h_w соответствует класс $\mathcal{A}_w$ отображений $A\colon \ell_w \times \mathbb{R}^2 \to \ell_w \times \mathbb{R}^2$ вида

$$A(x, y, z) = (x, y - \gamma_1 \cdot x + c_1, z - \gamma_2 \cdot x + c_2), \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Функция $\varphi_1\colon \partial\widetilde{\Phi_v} \to \mathbb{R}$ на компонентах, соответствующих ребру w, равная $-\gamma_1$, а на остальных компонентах равная 0, задает замкнутую дифференциальную 1-форму на границе компактной поверхности с краем Φ_v.

Аналогично, функция $\varphi_2\colon \partial\widetilde{\Phi_v} \to \mathbb{R}$ на компонентах, соответствующих ребру w, равная $-\gamma_2$, а на остальных компонентах равная 0, задает замкнутую дифференциальную 1-форму на границе компактной поверхности с краем Φ_v.

По лемме 4.2 существует гладкая липшицева функция $h_1\colon \widetilde{\Phi_v} \to \mathbb{R}$ такая, что $dh_1|_{\partial\widetilde{\Phi_v}} = \varphi_1$.

Аналогично строится такая гладкая липшицева функция $h_2\colon \widetilde{\Phi_v} \to \mathbb{R}$, что $dh_2|_{\partial\widetilde{\Phi_v}} = \varphi_2$.

Иначе говоря, ограничения функций h_1 и h_2 на компоненты края поверхности $\widetilde{\Phi}_v$ являются аффиными функциями.

На каждой компоненте σ края блока M_v билипшицев гомеоморфизм $\widehat{h}\colon \widetilde{M_v} \to \widetilde{N}_v$, заданный по формуле $\widehat{h}(x, y, z) = (x, y + h_1(x), z + h_2(x))$, отличается от некоторого отображения из класса $\mathcal{A}_w$ на ограниченный вектор $(c_1^\sigma, c_2^\sigma) \in \mathbb{R}^2$ по построению. Рассмотрим липшицевы функции $h_1', h_2'\colon \widetilde{\Phi_v} \to \mathbb{R}$ с носителем в достаточно малой окрестности края $\partial\widetilde{\Phi}_v$, для которых на каждой компоненте σ края блока M_v $h_1 = c_1^\sigma$ и $h_2 = c_2^\sigma$.

Тогда разность $h(x, y, z) = \widehat{h}(x, y, z) - (0, h_1'(x), h_2'(x))$ является требуемым билипшицевым гомеоморфизмом. □

Для граф-многообразия N, для ребра $-w$, обратного к ребру w, графа G, аналогично описанному выше, строится своя склейка $\widehat{g}_w'\colon L_{-w} \to L_w$, которая совмещает векторы f_w^1 и f_{-w}^1, а также векторы z_{-w} и f_w^2.

Эта склейка не меняет векторы z_w и f_{-w}^2.

Разрезав граф-многообразие T вдоль тора $T_{|w|}$, а затем склеив вдоль него же при помощи склейки $\widehat{g}_w'$, получим граф-многообразие N', у которого склейка вдоль ребра $|w|$ является ортогональной.

Из леммы 4.3 следует, что универсальные накрывающие граф-многообразий

M и N' билипшицево гомеоморфны.

Применив описанную выше операцию последовательно ко всем парам противоположных ребер $(w, -w)$ графа G, мы получим из граф-многообразия M ортогональное граф-многообразие N, универсальное накрывающее которого билипшицево гомеоморфно универсальному накрывающему граф-многообразия M.

Это доказывает теорему 1.4. □

Применяя теорему 2.7, получаем следствие 1.5.

4.3 Критерий ортогональности

В этом разделе мы приводим критерий ортогональности четырехмерных граф-многообразий, для которых тип каждой вершины равен двум. Как следствие, мы строим пример четырехмерного граф-многообразия, не являющегося ортогональным, все блоки которого имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1,

Напомним определение отображения заряда граф-многообразия из работы [15] (для случая граф-многообразий M произвольной размерности, $\dim M = n$).

Далее мы переходим к группам гомологий с вещественными коэффициентами, сохраняя те же обозначения. В частности, через F_w мы будем обозначать $F_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, а через $L_{|w|}$ — $L_{|w|} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Для каждого ориентированного ребра w графа G граф-многообразия M матрица склейки g_w определяет такое отображение $D_w : F_{-w} \to F_w$, что $D_w(f_{-w}p_w) = f_w d_w p_w$, где $p_w \in \mathbb{R}^{n-2}$ — столбец вещественных чисел. Другими словами, отображение D_w в базисах f_{-w}, f_w задается подматрицей d_w матрицы g_w и может быть интерпретировано как проекция пространства F_{-w} на пространство F_w вдоль вектора z_w.

В частности, отображение D_w является тождественным на пересечении $F_{-w} \cap F_w$.

Для каждого ориентированного ребра w графа G граф-многообразия M зафиксируем ориентацию пространства F_w.

Пусть $u_w = f_w^1 \wedge f_w^2 \wedge \ldots \wedge f_w^{n-2}$. Отождествляя пространства L_{-w} и L_w с помо-

щью отображения g_w, мы получаем пространство $L_{|w|}$ с парой ориентированных подпространств F_w и F_{-w}.

В этих условиях, на подпространстве $F_w \cap F_{-w}$ возникает каноническая ориентация пересечения $u_{w\cap -w}$ (см. работу [15]).

Определение 4.4. *Отображение заряда вершины $v \in V$ определяется как ограничение*

$$K_v \colon Q_v \to F_v$$

отображения

$$\bigoplus_{w\in\partial v} \frac{1}{i_w} D_w \colon \bigoplus_{w\in\partial v} F_{-w} \to F_v$$

на подпространство Q_v, где подпространство $Q_v \subset \bigoplus\limits_{w\in\partial v} F_{-w}$ состоит из всех таких $q_v = \bigoplus\limits_{w\in\partial v} q_{-w}$, что существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $q_{-w} \wedge u_{w\cap -w} = \alpha \cdot u_{-w}$ для всех $w \in \partial v$.

Это подпространство не зависит от выбора базиса Вальдхаузена (z, f) и $\dim Q_v = (n-3)|\partial v| + 1$ (подробности см. в работе [15]). Заметим, что подпространство

$$A_v = \{q_v = \bigoplus_{w\in\partial v} q_{-w} \mid q_{-w} \wedge u_{w\cap -w} = 0\} \subset Q_v$$

является гиперплоскостью в Q_v, $\dim A_v = (n-3)|\partial v|$.

В трехмерном случае, $n = 3$, отображение $K_v \colon Q_v \to F_v$ является линейным отображением одномерных пространств, и поэтому оно однозначно определяется рациональным числом k_v, которое является зарядом вершины v.

Хотя отображение зарядов в старших размерностях не является числовым инвариантом, тем не менее имеет смысл говорить о равенстве нулю заряда вершины.

Определение 4.5. *Будем говорить, что* заряд вершины $v \in V$ равен нулю, *если ядро отображения заряда K_v не содержится в подпространстве $A_v \subset Q_v$,* $\ker K_v \not\subset A_v$.

В этом случае мы пишем $k_v = 0$.

Замечание 4.6. *Если граф-многообразие трехмерно, то это определение совпадает с обычным условием $k_v = 0$, поскольку в размерности три* $\dim F_v =$

$\dim Q_v = 1$, $A_v = \{0\}$ *и, следовательно, условие* $k_v = 0$ *эквивалентно равенству* $\ker K_v = Q_v$, *то есть* $\ker K_v \not\subset A_v$.

Пусть M — четырехмерное граф-многообразие, все блоки которого имеют тип 2. Для каждой вершины v такого граф-многообразия и ребра w, ведущего из вершины v в вершину u, в слоевой решетке F_u блока M_u содержатся две решетки пересечения. Обозначим через $\bar{P}_u$ ту из них, которая не является решеткой пересечения для ребра w.

Обозначим $\bar{P}_u \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ через J_{-w}.

Определение 4.7. *Определим подпространство векторов пересечения в пространстве* Q_v *следующей формулой*

$$B_v := Q_v \cap \bigoplus_{w \in \partial v} J_{-w}.$$

Замечание 4.8. *Из определения следует, что подпространство векторов пересечения для вершины* v *не зависит от базиса Вальдхаузена, и, следовательно, является топологическим инвариантом граф-многообразия* M.

Лемма 4.9. *Для ортогонального граф-многообразия* M *и любой вершины* v *его графа* G *выполнено* $B_v \subset \ker K_v$.

Более того, заряд любой вершины граф-многообразия M *равен 0.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.16, выберем на каждом его блоке базис Вальдхаузена так, чтобы для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$ базисы (z_w, f_w) и (z_{-w}, f_{-w}) групп L_w и L_{-w} отличались только перестановкой элементов и, может быть, постановкой знаков перед векторами. Фиксируем вершину v.

В силу ортогональности, для каждого $w \in \partial v$ подпространство J_{-w} порождено вектором z_w. Поэтому $B_v \subset \ker K_v$. Более того, можно выбрать такой знак $\varepsilon_w = \pm 1$ перед вектором z_w, что $\varepsilon_w \cdot z_w \wedge u_{w \cap -w} = 1 \cdot u_{-w}$.

Таким образом, $q_v = \bigoplus_{w \in \partial v} \varepsilon_w \cdot z_w \in Q_v$ и при этом $q \notin A_v$.

Получаем, что $K_v(q_v) = 0$ и, следовательно, $k_v = 0$. □

Замечание 4.10. *Из леммы 2.23 и определения 2.25 следует, что индексы пересечения любого ребра, а также вторичные индексы пересечения любой вершины для ортогонального граф-многообразия равны 1.*

Это означает, что препятствиями к ортогональности граф-многообразий являются отличие индекса или вторичного индекса пересечения от единицы. Однако, даже в классе граф-многообразий, все блоки которых имеют тип 2, а индексы пересечения и вторичные индексы пересечения равны 1, существуют не ортогональные граф-многообразия. Ниже (см. следствие 1.7) мы приведем пример такого граф-многообразия.

4.4 Доказательство теоремы 1.6

Доказательство. Если M является ортогональным, то из леммы 2.23, определения 2.25 и леммы 4.9 следует, что условия (1)–(3) выполняются.

В обратную сторону. Из равенства вторичных индексов пересечения единице следует, что мы можем выбрать такой базис Вальдхаузена $\{(z_w, f_w) \mid w \in \partial v, v \in \mathrm{V}\}$, что для каждого блока M_v имеем $f_v^1 \in P_v^1$ и $f_v^2 \in P_v^2$, поскольку тип каждого блока равен 2.

Для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$, соединяющего вершины v и u, склейка $\widehat{g}_{-w}$ блоков M_v и M_u задается базисами (z_w, f_w) и (z_{-w}, f_{-w}) пространства $L_{|w|}$.

Иначе говоря, матрица g_{-w} этой склейки получается разложением базиса (z_w, f_w) по базису (z_{-w}, f_{-w}). Мы можем считать, что $P_u^1 = P_w = P_v^1$, где $P_w = F_w \cap F_{-w}$. Тогда, в этих обозначениях, $f_w^1 = \pm f_{-w}^1$. Более того, так как индексы пересечения равны единице и $f_w^1 = \pm f_{-w}^1$, то из формулы (2.5) следует, что $f_{-w}^2 - z_w \in F_w$.

Из условия (3) следует, что $q = \bigoplus\limits_{w \in \partial v} f_{-w}^2 \in \ker K_v$. Это означает, что $\sum\limits_{w \in \partial v} D_w(f_{-w}^2) = 0$. С другой стороны, так как $f_{-w}^2 - z_w \in F_w$, то $D_w(f_{-w}^2) = f_{-w}^2 - z_w$.

Обозначим $f_{-w}^2 - z_w$ через n_w. Из свойств 2.3, 2.4 и равенства $\sum\limits_{w \in \partial v} n_w = 0$ следует, что существует базис Вальдхаузена $\{(\bar{z}_w, \bar{f}_w) \mid w \in \partial v, v \in \mathrm{V}\}$, для которого $\bar{z}_w = z_w + n_w$ и $\bar{f}_w = f_w$ для каждого ориентированного ребра графа G.

Для такого базиса выполнены следующие условия: $\bar{f}_w^1 = \bar{f}_{-w}^1$, $\bar{f}_{-w}^2 = \bar{z}_w$ и $\bar{f}_w^2 = \bar{z}_{-w}$.

Это означает, что граф-многообразие M — ортогональное. □

4.5 Доказательство следствия 1.7

Доказательство. В качестве графа G возьмем цикл длины $k \geqslant 3$.

Пронумеруем его вершины по порядку $v_1, \ldots, v_k$.

Для каждой вершины v_i, $i = 1, \ldots, k$, рассмотрим блок $M_i = \Phi \times T^2$, где Φ — тор с двумя компонентами края. Склеим из получившихся блоков граф-многообразие так, чтобы для каждого ребра $w \in \mathrm{W}$ соответствующая матрица склейки имела вид

$$g_w = g_w^{z,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из определения (см. раздел 2.4) следует, что получившееся граф-многообразие является ортогональным. Следовательно, по теореме 1.6 для каждой вершины $v \in \mathrm{V}$ множество векторов пересечения лежит в ядре отображения заряда, $B_v \subset \ker K_v$.

Рассмотрим ребро w, ведущее из вершины v_2 в вершину v_3.

Заменив на этом ребре склейку на склейку, задающуюся с помощью матрицы

$$\bar{g}_w = \bar{g}_w^{z,f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим граф-многообразие M', все вершины которого будут иметь тип 2. Из леммы 2.23 и определения 2.25 следует, что индексы пересечения, а также вторичные индексы пересечения такого граф-многообразия равны 1. С другой стороны, отображение заряда вершины v_1 не изменится. При этом пространство векторов пересечения для этой вершины станет другим. Действительно, пусть ребра w_k и w_2 ведут из вершины v_1 в вершины v_k и v_2 соответственно. Тогда новое пространство векторов пересечения B'_{v_1} получается из старого пространства векторов пересечения переносом на вектор $0 + f^1_{-w_2} \in F_{-w_k} \oplus F_{-w_2}$. Это означает, что $K_v(q) = f^1_{v_1}$, где $q = f^2_{-w_k} \oplus f^2_{-w_2} \neq 0$.

То есть, B'_{v_1} не лежит в ядре $\ker K_{v_1}$ и, согласно теореме 1.6, граф-многообразие M' не является ортогональным. $\square$

5 Заключение

В работе показано, что фундаментальную группу любого ортогонального граф-многообразия M, $\dim M = n \geqslant 3$, снабженную произвольной метрикой слов, можно квази-изометрически вложить в произведение n метрических деревьев. В размерности четыре этот результат продолжен на гораздо более широкий класс $\mathcal{GM}_2$ граф-многообразий с $\operatorname{type} M \leqslant 2$.

Следующий вопрос о квази-изометрическом вложении фундаментальных групп произвольных граф-многообразий остался открытым.

Вопрос 5.1. *Для каких классов n-мерных граф-многообразий фундаментальную группу можно вложить в произведение n метрических деревьев?*

В работе показано, что асимптотическая и линейно-контролируемая асимптотическая размерности фундаментальной группы ортогональных граф-многообразий, а также граф-многообразий из класса $\mathcal{GM}_2$ (граф-многообразий с $\operatorname{type} M \leqslant 2$) не превосходит размерности граф-многообразий. Однако остался не известен ответ на следующий вопрос.

Вопрос 5.2. *Для каких классов n-мерных граф-многообразий ℓ-asdim их фундаментальной группы не превосходит n?*

В работе [21] показано, что универсальное накрывающее трёхмерного граф-многообразия билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему флип граф-многообразия, трехмерного аналога ортогонального граф-многообразия. Многомерный аналог этого утверждения вряд ли существует. Поэтому интерес представляет ответ на следующий вопрос.

Вопрос 5.3. *Найти пример граф-многообразия, для которого не верно, что его универсальное накрывающее билипшицево эквивалентно универсальному накрывающему оротогонального граф-многообразия.*

Список литературы

Работы автора по теме

[1] Смирнов А. В. Линейно-контролируемая асимптотическая размерность фундаментальной группы граф-многообразия // Алгебра и анализ. – 2010. – №22:2. – С. 185–203.

[2] Смирнов А. В. Квази-изометрическое вложение фундаментальной группы ортогонального граф-многообразия в произведение деревьев // Алгебра и анализ. – 2012. – №24:5. – С. 165–180.

[3] Смирнов А. В. Четырехмерные граф-многообразия с фундаментальными группами квази-изометричными группам ортогональных граф-многообразий // Алгебра и анализ. – 2017. – №29:6. – С. 230–247.

Литература

[4] Assouad P. Sur la distance de Nagata // C.R. Acad. Sci. Paris sér. I Math. – 1982. – Т. 244. – №1. С. – 31–34.

[5] Behrstock J. A. and Neumann W. D. Quasi-isometric classification of graph manifold groups // Duke Math. J. – 2008. – Т. 141.– №2. – С. 217–240.

[6] Bell G. and Dranishnikov A. On Asymptotic Dimension of Groups Acting on Trees // Geometriae Dedicata. – 2004. – Т. 103. – № 1. – С. 89–101.

[7] Bell G., Dranishnikov A. A Hurewicz-type theorem for asymptotic dimension and applications to geometric group theory // Transactions of the American Mathematical Society. – 2006. – Т. 358. – №11. – С. 4749–4764.

[8] Bestvina M., Fujiwara K. Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups // Geometry & Topology. – 2002. – Т. 6. – №1. – С. 69–89.

[9] Bowditch B. H. Embedding median algebras in products of trees // Geometriae Dedicata. – 2014. – Т. 170. – №1. – С. 157–176.

[10] Bowers P. L. General position properties satisfied by finite products of dendrites // Transactions of the American Mathematical Society. – 1985. – Т. 288. – №2. – С. 739–753.

[11] Brodskiy, N. and Dydak, J. and Levin, M. and Mitra, A. A Hurewicz theorem for the Assouad–Nagata dimension // Journal of the London Mathematical Society. – 2008. – Т. 77. – №3. – С. 741–756.

[12] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. // – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 512 стр.

[13] Buyalo S., Dranishnikov A., Schroeder V. Embedding of hyperbolic groups into products of binary trees // Inventiones mathematicae. – 2007. – Т. 169. – №1. – С. 153–192.

[14] Буяло С. В. Емкостная размерность и вложение гиперболических пространств в произведение деревьев // Алгебра и анализ. – 2005. – №17:4. – С. 42–58.

[15] Буяло С. В., Кобельский В.Л. Обобщенные графмногообразия неположительной кривизны // Алгебра и Анализ. – 1999. – №11:2. – С. 64–87.

[16] Buyalo S., Schroeder V. Elements of asymptotic geometry. // European Mathematical Society, 2007.

[17] Gromov M. Asymptotic invariants of infinite groups // London Mathematical Society Lecture Note Series, – 1993. – Т. 182. – С. 1–295.

[18] Dranishnikov A. On hypersphericity of manifolds with finite asymptotic dimension // Transactions of the American Mathematical Society. – 2003. – Т. 355. – №1. – С. 155–167.

[19] Hume D. Embedding mapping class groups into a finite product of trees // Groups, Geometry, and Dynamics. – 2017. – Т. 11. – №2. – С. 613–647.

[20] Hume D., Sisto A, Embedding universal covers of graph manifolds in products of trees // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – Т. 141. – №10. – С. 3337–3340.

[21] Kapovich M. and Lieb B. 3-manifold groups and nonpositive curvature // Geometric Analysis and Functional Analysis. – 1998. – Т. 8 – С. 841–852.

[22] Lang U. and Schlichenmaier T. Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions // Int Math Res Notices, – 2005. – Т. 2005. – С. 3625–3655.

[23] Mackay J. M., Sisto A. Embedding relatively hyperbolic groups in products of trees // Algebraic & Geometric Topology. – 2013. – Т. 13. – №4. – С. 2261–2282.

[24] Nagata J. Note on dimension theory for metric spaces // Fundamenta Mathematicae. – 1958. – Т. 45. – №1. – С. 143–181.

[25] Osin D. Asymptotic dimension of relatively hyperbolic groups // International Mathematics Research Notices. – 2005. – Т. 2005. – №35. – С. 2143–2161.

[26] Roe J. Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2005. – Т. 133. – №9. – С. 2489–2490.

[27] Roe J. Lectures on Coarse Geometry. // University Lecture Series, – Т. 31. // AMS, 2003.

[28] Скот П. Геометрии на трехмерных многообразиях: Пер. с англ.. // Мир, 1986.

[29] Шварц А. С. Объемный инвариант накрывающих // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 105. – №1. – С. 32–34.

[30] Yu G. The Novikov Conjecture for Groups with Finite Asymptotic Dimension // The Annals of Mathematics, Second Series. – Т. 147. – №2. – 1998. – С. 325–355.

[31] Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I // Invent. Math. 3. – 1967. – С. 308–333.

[32] Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. II // Invent. Math. 4. – 1967. – С. 87–117.