Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

На правах рукописи

УДК 515.1, 517.938

Скрипченко Александра Сергеевна



Ренормализация в одномерной динамике

Специальность 1.1.3 – геометрия и топология

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико–математических наук

Москва · 2024

Работа выполнена на факультете математики НИУ ВШЭ.

Научный консультант:

Дынников Иван Алексеевич – доктор физико–математических наук, профессор РАН, ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии МИАН им. В. А. Стеклова РАН
(специальность 01.01.04)

Официальные оппоненты:

Иванов Сергей Владимирович – доктор физико–математических наук, чл.-корр. РАН, главный научный сотрудник лаборатории геометрии и топологии ПОМИ РАН им. В. А. Стеклова
(специальность 01.01.04)

Миронов Андрей Евгеньевич – доктор физико–математических наук, чл.-корр. РАН, и. о. директора Института Математики им. С. Л. Соболева СО РАН
(специальность 01.01.04)

Нечаев Сергей Константинович – доктор физико–математических наук, директор по научным исследованиям, лаборатория теоретической физики и статистических моделей, университет Paris Saclay, CNRS, Франция
(специальность 01.04.02)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук

Защита диссертации состоится 20 марта 2025 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета 24.1.167.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте https://mi–ras.ru/dis/ref24/skripchenko/dis.pdf
Автореферат разослан ___ ноября 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.167.03 при МИАН
доктор физико–математических наук



Д. В. Осипов

Настоящая диссертация посвящена изучению динамических и геометрических свойств ряда одномерных отображений – перекладываний отрезков и их естественных обобщений – с помощью алгоритмов ренормализации, а также топологическим приложениям полученных результатов.

Актуальность темы

Перекладывание отрезков – это взаимно–однозначное полунепрерывное отображение полуинтервала в себя с конечным числом точек разрыва, которое на каждом из отрезков непрерывности является сдвигом. Такие отображения возникают в теории динамических систем и маломерной топологии в разных контекстах. Так, например, отображение первого возвращения на трансверсаль для бильярдного потока в многоугольниках с рациональными углами является перекладыванием отрезков. Кроме того, перекладывания отрезков тесно связаны с измеримыми слоениями с особенностями, которые определяются замкнутой 1–формой на ориентируемой поверхности: по любому перекладыванию отрезков можно построить ориентируемую поверхность, для которой это перекладывание отрезков будет отображением первого возвращения для заданного направления слоения на некоторый трансверсальный этому направлению интервал, и наоборот – для любого измеримого слоения на ориентируемой поверхности, которое определяется 1–формой, отображение первого возвращения на любую трансверсаль является перекладыванием отрезков. Перекладывания отрезков представляют самостоятельный интерес с точки зрения других разделов теории динамических систем: некоторые их классы возникают в символической динамике (например, как модель штурмовых и эпиштурмовых символических последовательностей) или как естественное обобщение поворота окружности в КАМ – теории.

Поэтому эргодические свойства перекладываний отрезков, такие как минимальность, эргодичность, вопрос о числе эргодических мер, слабое и сильное перемешивание, задачи разрешимости когомологических уравнений и т. д., а также топологическая и геометрическая интерпретация этих результатов в терминах свойств слоений и пространств модулей играют заметную роль сразу в нескольких разделах математики. Впервые перекладывания отрезков были определены в работах В. И. Арнольда[1] и В. И. Оселедца[2] в 60е годы XX века; чуть позже А. Каток и А. Степин[3]

[1] В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости дви– жения в классической и небесной механике// Успехи Мат. Наук, 1963, 18:6(114), стр. 91–192

[2] В. И. Оселедец, О спектре эргодических автоморфизмов // ДАН СССР, 1966, 168, стр. 1009–1011.

[3] А. Б. Каток, А. М. Степин, Аппроксимации в эргодической теории // Успехи

описали связь перекладываний отрезков и бильярдов в рациональных многоугольниках; параллельно развивалось исследование свойств измеримых слоений на поверхностях, введенных У. Тёрстоном[4]. В 70е годы была доказана минимальность типичных перекладываний отрезков (М. Кин[5]) и отсутствие сильного перемешивания (А. Каток[6]). В 80е усилиями Х. Мазура[7] и У. Вича[8] был достигнут заметный прогресс в понимании эргодических свойств перекладываний отрезков – доказано, что типичное перекладывание отрезков является строго эргодичным. При этом вопрос о том, является ли перекладывание отрезков общего вида слабо перемешивающим, оставался открытым до 2007 года, когда ключевые результаты были доказаны в работе А. Авилы и Дж. Форни[9]. К этому же периоду относятся наблюдения о когомологических уравнениях над перекладываниями отрезков, которые были получены Дж. Форни[10], с одной стороны, и Ж.–К. Йоккозом, С. Марми и П. Мусса – с другой[11]. Впоследствии их работы стали основой для развития теории малых знаменателей для обобщенных перекладываний отрезков и ее связей с КАМ теорией[12].

Параллельно развивалось исследование связей эргодических и спектральных свойств перекладываний отрезков с геометрией пространств модулей абелевых и квадратичных дифференциалов. Очень заметную роль сыграли результаты А. Зорича и М. Концевича[13] о показателях Ляпунова коцикла Концевича–Зорича и их связи с числом связных компонент пространств модулей и теорема А. Авилы и М. Вианы[14], показы-

---

Мат.Наук, 1967, 22:5(137), 81–106

[4]A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru. Thurston's work on surfaces// Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.// Mathematical Notes. Vol. 48. Princeton University Press.

[5]M. Keane. Interval Exchange Transformations// Math. Z., 1975, 141, стр 25–31.

[6]A. Katok. Interval exchange transformations and some special flows are not mixing.// Israel J. Math., 1980, 35, стр. 301—-310

[7]H.Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. // Ann. Math.,1982, 115:1 стр. 169–200

[8]W. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps.// Ann. Math., 1982, 115:1, стр. 201–242

[9]A. Avila, G. Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. // Ann. Math., 2007, 165:2, стр. 637—-664.

[10]G. Forni. Solutions of the cohomological equation for area–preserving flows on compact surfaces of higher genus. // Ann. Math., 1997, 146, стр. 295–344.

[11]S. Marmi, P. Moussa и J. –C. Yoccoz. The cohomological equation for Roth–type interval exchange maps. // J. Amer. Math. Soc., 2005, 18:4, стр. 823–872.

[12]Stefano Marmi, Pierre Moussa, and Jean–Christophe Yoccoz. Linearization of generalized interval exchange maps.// Ann. Math., 2012, 176:3, стр. 1583–1646.

[13]M. Kontsevich, A. Zorich. Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities.// Invent. math., 2003, 153, стр. 631–678

[14]A. Avila and M. Viana. Simplicity of Lyapunov spectra: proof of the Zorich–Kontsevich

вающая, что ляпуновский спектр является простым Наконец, в работе А. Эскина и М. Мирзахани[15] получена полная классификации действий группы $SL(2,\mathbb{R})$ на пространстве модулей.

Ключевым инструментом, который во всех перечисленных работах использовался для изучения эргодических, топологических и даже символических свойств перекладываний отрезков, является применение алгоритма ренормализации, который в этом случае называется *индукцией Рози*. Один шаг индукции Рози – это преобразование, строящее по исходному отображению другое, которое будет ему эквивалентно с точки зрения поведения орбит, но определено на меньшем носителе; алгоритм ренормализации определяет бесконечную последовательность таких преобразований. Каждый шаг индукции Рози описывается матрицей, с помощью которой длины полученного перекладывания отрезков выражаются через длины исходного; добавление условия сохранения суммы длин отрезков позволяет определить последовательность проективных преобразований. Таким образом, в случае перекладывания отрезков ренормализация может рассматриваться как многомерная цепная дробь. В случае перекладывания двух отрезков это отображение непосредственно совпадает с отображением Гаусса. Эргодические и комбинаторные свойства алгоритма ренормализации как самостоятельной динамической системы определяют многие важные эргодические свойства исходного перекладывания отрезков.

При этом для ряда топологически осмысленных задач возникает необходимость изучения эргодических свойств и характеристик орбит, а также геометрических характеристик пространств модулей не для самих перекладываний отрезков, а для их естественных обобщений – перекладываний отрезков с флипами, линейных инволюций, отображений сдвигов отрезков, систем изометрий и т. д., а также классов перекладываний отрезков, не являющихся типичными с точки зрения эргодической теории (например, тех, для которых не выполняется условие Кина). Все эти объекты – и обобщения перекладываний отрезков, и их специальные подклассы – значительно меньше, чем классические перекладывания отрезков общего вида, изучались в литературе.

Перекладывания отрезков с флипами были введены А. Ногейрой[16], который получил первые результаты об их эргодических свойствах (уточ-

conjecture.// Acta Math., 2007, 198:1, стр. 1–56

[15] A. Eskin, M. Mirzakhani. Invariant and stationary measures for the action on Moduli space. // Publ.math.IHES, 2018, 127, 95—-324.

[16] A.Nogueira. Almost all interval exchange transformations with flips are nonergodic. //Ergod. Th. Dyn. Syst., 1989, 9, стр. 515—-525

нения этих результатов содержатся в настоящей диссертации). Важные результаты о свойствах линейных инволюций, определенных в работе А. Ногейры и К. Дантони[17], были получены впоследствии Э. Ланно и К. Буассе[18], которые сформулировали и доказали критерии минимальности неприводимых линейных инволюций. В настоящей диссертации исследуется вопрос о когомологических уравнениях для таких линейных инволюций. Заметный вклад в исследования отображений сдвигов отрезков внесли Х. Бруин и С. Трубецкой[19], а также Х. Бруин и Г. Клак[20].

Системы изометрий впервые появились в геометрической теории групп, где были описаны в работе Ж. Левитта, Д. Габорье и Ф. Полана [21]; их связь с задачей С. П. Новикова[22] о плоских сечениях 3–периодических поверхностей была обнаружена И. Дынниковым[23], который впоследствии (в том числе в совместных работах с А. Скрипченко и П. Юбером) значительно продвинулся в понимании эргодических свойств ассоциированных с системами изометрий измеримыми слоениями; при этом некоторые из полученных результатыов существенно используют результаты совместной работы А. Авилы, А. Скрипченко и П. Юбера.

Вещественно–нормированные дифференциалы были введены И.М. Кричевером[24] в связи с изучением спектральной теории периодических линейных операторов и впоследствии широко применялись[25] для исследования геометрии пространств модулей римановых поверхностей с отмеченными точками. Ряд вопросов в этом контексте сводится к изучению слоений абсолютных периодов таких дифференциалов.

---

[17]Cl. Danthony and A. Nogueira. Measured foliations on nonorientable surfaces. // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., 1990, 23:4(3), стр. 469–494.

[18]C. Boissy and E. Lanneau. Dynamics and geometry of the Rauzy–Veech induction for quadratic differentials.// Ergodic Th. Dyn. Syst., 2009, 29:3, стр. 767–816

[19]H. Bruin и S. Troubetzkoy. The Gauss map on a class of interval translation mappings.// Israel J. Math. 2003, 137, стр. 125–148

[20]G. Clack, H. Bruin. Inducing and unique ergodicity of double rotations.// DCDS, 2012, 32, стр. 1078–0947

[21]D. Gaboriau, G. Levitt, F. Paulin. Pseudogroups of isometries of $\mathbb{R}$ and Rips' theorem on free actions on $\mathbb{R}$–trees.// Isr. J. Math., 1994, 87, стр. 403–428.

[22]С. П. Новиков. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса//УМН, 1982, 37:5, стр. 3–49.

[23]И. А. Дынников. Системы наложений отрезков и плоские сечения 3–периодических поверхностей. Труды МИАН, 2008, 263, стр. 72–84

[24]И. М. Кричевер. Спектральная теория конечнозонных нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса. //Функц. ан. и прил. 20(3), 1986, 42–54.

[25]Grushevsky and I. Krichever. The universal Whitham hierarchy and the geometry of the moduli space of pointed Riemann surfaces.//Surveys in differential geometry. Vol. XIV. Geometry of Riemann surfaces and their moduli spaces, volume 14 of Surv. Differ. Geom., стр. 111–129. Int. Press, Somerville, MA, 2009

Во всех этих случаях центральным становится вопрос построения эффективной ренормализации и использования ренормализующего алгоритма для изучения свойств исходных динамических систем.

Цель работы

Главной целью работы является детальное описание динамических и геометрических свойств перекладываний отрезков и их обобщений, а также топологическая интерпретация полученных результатов в терминах свойств измеримых слоений на поверхностях и двумерных комплексах, слоений абсолютных периодов и др. Для решения центральных для работы вопросов строятся различные алгоритмы ренормализации и попутно исследуются эргодические и комбинаторные свойства этих алгоритмов, представляющие самостоятельный интерес с точки зрения теории многомерных цепных дробей.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Центральным результатом работы является разработка ренормализационных методов, позволяющих исследовать эргодические, геометрические и топологические свойства широкого класса динамических систем, включающего в себя различные обобщения перекладываний отрезков и важные семейства перекладываний отрезков, не удовлятворяющих условию рациональной несоизмеримости длин.

Например, получено подробное описание динамических свойств перекладываний отрезков типа Арну–Рози с использованием нескольких различных алгоритмов ренормализации (индукции Рози и ее ускорений, машины Рипса и др.). В частности, построена естественная мера, носителем которой является множество параметров, задающее минимальные перекладывания отрезков типа Арну – Рози, и доказано, что почти все перекладывания отрезков по отношению к этой мере являются строго эргодичными, но допускают не более 2 инвариантных мер. Кроме этого, благодаря взаимосвязям между перекладываниями отрезков типа Арну–Рози и хаотическими режимами в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3–периодических поверхностей, для наиболее простого случая поверхности рода 3 с двумя двойными седлами доказаны оценки на скорость диффузии хаотической траектории.

К ключевыми результатам диссертации относятся также следующие:

- построены примеры самоподобных перекладываний отрезков с нулевым инвариантом Са–Арну–Фати, обладающих и не обладающих свойством слабого перемешивания;

- доказана верхняя оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами;

- теорема Марми – Мусса – Йоккоза о когомологических уравнениях для перекладываний отрезков распространена на неприводимые линейные инволюции;

- построена новая ренормализация для отображений сдвигов отрезков Бруина – Трубецкого; построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих отображения Бруина – Трубецкого бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) отображения сдвигов отрезков Бруина – Трубецкого бесконечного типа являются строго эргодичными;

- аналогичный результат получен для двойных вращений – с использованием описанной совместно с соавторами ренормализации автором построена мера, инвариантная относительно этой ренормализации, носителем которой является множество параметров, задающих двойные вращения бесконечного типа; доказано, что типичные (по отношению к этой мере) двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными и получена оценка на хаусдорфову размерность множества параметров, определяющих двойные вращения бесконечного типа.

- для ленточных комплексов тонкого типа построены примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно один топологический конец, и примеры, для которых почти все слои вертикального слоения имеют ровно 2 топологических конца. С использованием этих примеров в задаче С. П. Новикова об асимптотическом поведении плоских сечений 3–периодических поверхностей построены хаотические режимы, имеющие ровно 1 связную компоненту и бесконечное число связных компонент.

- для слоения абсолютных периодов главного страта пространства модулей вещественно–нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка доказана плотность локуса, отвечаю-

щего заданному вектору периодов в общем положении, и подсчитано число связных компонент такого локуса.

Кроме того, в диссертации содержатся новые технические результаты, в том числе касающиеся многомерных цепных дробей и символической динамики.

Методы исследования

В работе используются методы теории слоений, топологии, теории динамических систем, эргодической теории, геометрической теории групп, геометрии пространств модулей, символической динамики.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации и разработанные в ней методы могут найти применение при исследовании эргодических и геометрических свойств различных классов слоений на поверхностях и ленточных комплексов, потоков в пространствах модулей и др. Отдельные результаты также применяются в теории чисел в связи с изучением многомерных цепных дробей и в геометрической теории групп в связи с исследованиями свойств автоморфизмов свободных групп.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» отдела геометрии и топологии МИАН; на семинаре «Глобус» Независимого Московского университета; на семинаре «Характеристические классы и теория пересечений» НИУ ВШЭ; на Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам ПОМИ РАН; на семинаре «Геометрия и топология» Новосибирского Государственного университета; на семинаре «Алгебро–геометрические методы в интергрируемых системах и квантовой физике» МФТИ; на семинарах по динамическим системам, геометрии и топологии и по геометрической теории групп университета Парижа, университета Марселя, Высшей Нормальной Школы Лиона, Женевского университета, университета Уорвика, Цюрихского университета, Высшей Нормальной школы Пизы, Пеннсильванского университета, Нью–Йоркского университета; на международных конференциях:

- Teichmüller dynamics, Уорвик, Великобритания, март 2018 г;

- From order to chaos, Пиза, Италия, апрель 2018 г;
- Real and complex dynamical systems, Москва, Россия, ноябрь 2018 г;
- Workshop Groups and group rings, Санкт–Петербург, Россия, июнь 2019 г;
- Dynamics of parabolic flows, Цюрих, Швейцария, июль 2019 г;
- Holomorphic differentials in Mathematics and Physics, MSRI, Беркли, США, ноябрь 2019 г;
- конференция Международных математических центров, Сочи, Россия, август 2021 г.;
- Combinatorics, Dynamics and Geometry on Moduli Spaces, Марсель, Франция, сентябрь 2022 г.;
- Геометрия, топология и математическая физика, МИАН им. Стеклова, апрель 2023 г.;
- International Congress of Basic Science, Пекин, Китай, июль 2023 г.;
- Conference on dynamics and finance: from KAM tori to ETFs, Триест, Италия, октябрь 2023 г.;
- Real and complex dynamical systems, Цахкадзор, Армения, ноябрь 2023 г.

Публикации

Список публикаций автора по теме диссертации приведён в конце автореферата. Основные результаты диссертации изложены в 13 статьях [1–13], опубликованных в изданиях, индексируемых в ведущих международных базах научного цитирования.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Во **введении** дан исторический обзор, обоснована актуальность темы исследования, сформулированы основные результаты и описано содержание диссертации.

В **Главе 1** вводятся ключевые понятия из теории динамических систем, топологии и геометрии пространств модулей.

Первый параграф начинается с определения перекладываний отрезков. Будем рассматривать перестановки из элементов $1, \cdots, n$, которые являются *неприводимыми* в следующем смысле:

$$\pi\{1, \cdots, k\} \neq \{1, \cdots, k\}$$

для любого $1 \leq k < n$. Для вектора $\lambda \in {\mathbb{R}_+}^n$ и перестановки π перекладывание отрезков $T(x) = T_{\lambda,\pi}(x)$ – это отображение полуинтервала $I = [0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ в себя, определенное следующим образом:

$$T(x) = x + \sum_{\pi(j)<\pi(i)} \lambda_j - \sum_{j<i} \lambda_j, \tag{1}$$

если $x \in I_i = [\sum_{j<i} \lambda_j, \sum_{j\leq i} \lambda_j)$.

В работе определены наиболее важные динамические свойства перекладываний отрезков, многие из которых уже упомянуты выше: минимальность, эргодичность и строгая эргодичность, наличие слабого перемешивания и отсутствие сильного перемешивания, оценки на число инвариантных эргодических мер и т. д. Некоторые из аналогичных свойств для перекладываний отрезков с флипами доказываются в Главе 3 и для отображений сдвигов отрезков – в Главе 5. В этом же параграфе Главы 1 вводятся когомологические уравнения для перекладываний отрезков и формулируется теорема Марми–Муссы–Йоккоза, которая будет распространена на неприводимые линейные инволюции в Главе 4.

Во втором параграфе описанные результаты интерпретируются с точки зрения топологии (в терминах свойств измеримых слоений на гладких поверхностях и голоморфных дифференциальных форм на замкнутых римановых поверхностях). Понятие *измеримого слоения* на поверхности было введено У. Тёрстоном в связи с изучением классов диффеоморфизмов поверхностей и означает наличие слоения, гладкого (класса C^∞) везде, за исключением конечного числа изолированных точек, которые являются седлами с $k \geq 3$ сепаратрисами, при этом слоение снабжено также конечной трансверсальной мерой, которая C^∞ – эквивалентна мере Лебега. Чтобы описать эргодические свойства измеримых слоений на римановых поверхностях, введем несколько обозначений.

Пусть $M_{g,b}$ – ориентированная поверхность рода g с b граничными компонентами, а $\mathrm{MCG}(M_{g,b}) = \mathrm{Diff}^+(M_{g,b})/\mathrm{Diff}_0(M_{g,b})$ – ее модулярная группа. Пусть $\mathcal{MF}(M_{g,b})$ – пространство классов эквивалентности измеримых слоений на $M_{g,b}$ (отношение эквивалентности порождается гомотопными тождественному диффеоморфизмами и движениями Уайтхеда).

Пусть $\mathcal{PMF}(M_{g,b})$–соответствующее проективное пространство. Известно, что $\mathcal{MF}(M_{g,b})$ имеет структуру топологического кусочно–линейного (PL) многообразия (и, более того, множество классов эквивалентности гомеоморфно $\mathbb{R}^{6g-6} - \{0\}$, если $g \geq 2$). Тогда мера Лебега задается естественным образом в каждой из карт.

Во втором параграфе Главы 1 формулируются ключевые эргодические свойства таких слоений (теорема Мазура), а также описывается связь между перекладываниями отрезков и бильярдным потоком в рациональных многоугольниках. Сформулированные в этом параграфе динамические свойства бильярдного потока (минимальность, эргодичность, строгая эргодичность, энтропия) частично обобщаются для некоторых классов бильярдов с шпионскими зеркалами в Главе 5.

В третьем параграфе описывается ключевой алгоритм ренормализации для перекладываний отрезков – индукция Рози. В последующих главах 3–8 этот алгоритм модифицируется под различные классы обобщений перекладываний отрезков и используется для доказательства всех основных результатов автора.

Четвертый параграф посвящен геометрии пространств модулей абелевых дифференциалов и слоению абсолютных периодов. Обозначим через $H(d_1, \cdots, d_m)$, $d_1 + \cdots + d_m = 2g - 2$ подмногообразие пространства голоморфных дифференциалов, состоящее из дифференциалов с нулями, порядки которых задаются вектором $d_1, \ldots, d_m$. В частности, *главный страт* $H(1, \ldots, 1)$ состоит из дифференциалов общего положения, то есть таких, у которых все нули простые.

На каждом страте $H(d_1, \ldots, d_m)$ определено естественное действие группы $SL(2, \mathbb{R})$; это действие можно описать в терминах *отображений периодов* или задать с помощью *периодических координат*. На каждом страте пространства Тейхмюллера $\widehat{H}(d_1, \cdots, d_m)$ определена естественная мера $\hat{\lambda}$, полученная обратной проекцией лебеговой меры на $H^1(C, \Sigma, \mathbb{C})$ с помощью отображения периодов. Эта мера индуцирует меру λ на страте $H(d_1, \ldots, d_m)$ пространства модулей. Однако объем страта по отношению к этой мере является бесконечным, поэтому добавляется условие ренормализации – ограничение на поверхности площади 1. А именно, определим *отображение площади* α следующим образом:

$$\alpha(C, \phi) = \frac{i}{2} \int_C \phi \wedge \bar{\phi}. \tag{2}$$

Мера $\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda_a$ задает систему мер λ_a. Мера λ_1, определенная на $\alpha^{-1}(1)$, называется *мерой Мазура–Вича*. Известно, что эта мера конечна и эргодична. Определим голоморфное слоение на страте $H(d_1, \cdots, d_m)$: слой

этого слоения, проходящий через абелев дифференциал ϕ, – это содержащая ϕ связная компонента локуса дифференциалов, подгруппа абсолютных периодов которых совпадает с $Per(\phi) \subset \mathbb{C}$. Это слоение можно продолжить на замыкание страта $\overline{H(d_1, \cdots, d_m)}$ и рассматривать как фактор слоения, определенного на пространства Тейхмюллера $\widehat{H}(d_1, \cdots, d_m)$, слои которого инвариантны относительно действия группы классов отображений.

В параграфе приведены необходимые определения и краткий обзор известных результатов об эргодических свойствах и геометрических свойствах слоев таких слоений, включая теорему МакМуллена[26] об эргодичности слоения абсолютных периодов для рода 3, независимо доказанный Деруаном – Касамильей – Франкавильей[27] и Хаменштадт[28] результат об эргодичности слоения абсолютных периодов в главном страте и его обобщения, доказанные Винзором[29] и Вайссом–Чайкой[30]. Близкие по содержанию результаты для слоений абсолютных периодов специального класса мероморфных дифференциалов – вещественно–нормированных дифференциалов – изложены в Главе 8.

Таким образом, первые четыре параграфа носят реферативный характер. Пятый параграф содержит, среди прочих, и результаты автора. В этом параграфе обсуждаются перекладывания отрезков, между длинами которых имеются рациональные соотношения. Понятно, что нетривиальное целочисленное линейное соотношение между длинами может быть интерпретировано как элемент группы относительных целочисленных гомологий, построенной по рассматриваемому перекладыванию отрезков поверхности, на которой отмечены особые точки слоения. Линейные пространства ограничений, определяемые существующими рациональными соотношениями между длинами отрезков рассматриваемого перекладывания, могут быть разделены на две группы – *богатые* и *бедные* пространства – в зависимости от того, содержат ли они так называемый *асимптотический цикл*.

Предположительно, именно эта характеристика является ключевой для определения эргодического поведения типичного представителя се-

[26] C. T. McMullen. Moduli spaces of isoperiodic forms on Riemann surfaces.// Duke Math. J., 2014, 163:12, стр. 2271–2323.

[27] G. Calsamiglia, B. Deroin, S. Francaviglia. A transfer principle: from periods to isoperiodic foliations.// GAFA, 2023, 33, стр. 57 – 169

[28] U. Hamenstädt. Ergodicity of the absolute period foliations. Israel Journal of Mathematics, 2018, 225:2, стр. 661–680.

[29] Winsor K. Dense real Rel flow orbits and absolute period leaves. ArXiv: 2207.04628.

[30] J. Chaika, B. Weiss. On the ergodic theory of the real Rel foliation.// Forum of Mathematics, Pi. 2024;12:e7

мейства перекладываний отрезков с рациональными ограничениями:

Теорема 1. [Дынников – Скрипченко] Пусть $T_{\pi,\lambda}$ – минимальное и строго эргодичное перекладывание отрезков, у которого пространство ограничений $\mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$ является бедным. Пусть $\mathcal{R}_0$ – подпространство $\mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$, порожденное всеми ограничениями, которые реализуются перекладыванием отрезков $T_{\pi,\lambda}$. Тогда отображение $T_{\pi,\lambda}$ является $\mathcal{R}$–стабильно минимальным для любого пространства ограничений $\mathcal{R}$, для которого $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}(T_{\pi,\lambda})$.

Кроме того, существует открытая окрестность V вектора λ в пространстве параметров $\{\kappa \in \Delta^{n--1}\ ;\ \mathcal{R}(T_{\pi,\kappa}) \supset \mathcal{R}\}$ такая, что $T_{\pi,\lambda'}$ строго эргодично для почти всех $\lambda' \in V$ по отношению к мере Лебега.

Гипотеза 1 (Дынников – Скрипченко)**.** Утверждения теоремы 1 остаются верными в отсутствие предположения о строгой эргодичности.

В случае богатого семейства ограничений доказанных результатов для ситуации общего положения нет; сформулирована гипотеза о том, что в случае богатого семейства ограничений минимальность не является устойчивым свойством:

Гипотеза 2. Если $\mathcal{R}$ – богатое пространство ограничений по отношению к билинейной форме $\langle\,,\rangle$ и $T(\pi,\lambda)$ удовлетворяет всем ограничениям из $\mathcal{R}$, то $T(\pi,\lambda)$ не является $\mathcal{R}$–стабильно минимальным.

Оказывается, что свойство пространства ограничений принадлежать к группе богатых или бедных можно интерпретировать и в более комбинаторных терминах. Для этого используется так называемый инвариант Са – Арну – Фати.

Определение 1. *Инвариант Са – Арну – Фати (SAF) перекладывания отрезков* $T_{\pi,\mathbf{a}_i}$ – это такой элемент рационального векторного пространства $\mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$:

$$SAF(T_{\pi,\mathbf{a}}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \wedge_{\mathbb{Q}} (\widetilde{x}_{\pi^{--1}(i)} - x_i) = \sum_{i<j} (a_i \wedge_{\mathbb{Q}} a_j - -a_{\pi(i)} \wedge_{\mathbb{Q}} a_{\pi(j)}).$$

Инвариант Са – Арну – Фати (SAF) был определен П. Арну[31]. В той же работе было показано, что SAF является инвариантом измеримого слоения на поверхности, отвечающего рассматриваемому перекладыванию отрезков (и, в частности, инвариантен относительно индукции Рози). Известно, что SAF зануляется для периодических перекладываний отрезков

[31] P. Arnoux. Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces. // Théorie ergodique: Semin. Les Plans-sur-Bex, 1980. Geneve: Univ. Genéve. 1981. pp. 5–38. (Monogr. enseign. math.; V. 29).

(то есть таких, у которых все орбиты конечны). Арну и Йоккоз[32] построили первый пример минимального и строго эргодичного перекладывания отрезков, для которого SAF инвариант равен нулю. Это отображение – представитель семейства перекладываний типа Арну–Рози, которые являются одним из центральных объектов изучения в настоящей диссертации.

Известно, что полное пространство ограничений является богатым, если и только если $SAF(T_{\pi,\mathbf{a}}) = 0$.

Наиболее известное семейство перекладываний отрезков, удовлетворяющее свойству обнуления SAF – инварианта, – перекладывания отрезков типа Арну – Рози – подробно описано в Главе 6 и Главе 7. Там же доказаны их ключевые эргодические свойства, в частности, показано, что типичное перекладывание отрезков типа Арну–Рози является строго эргодичным, но не обладает свойством слабого перемешивания.

Других аналогичных по уровню общности результатов о строгой эргодичности и наличии или отсутствии свойства слабого перемешивания для перекладываний отрезков с рациональными соотношениями между длинами отрезков в настоящий момент нет.

В диссертации исследуются *самоподобные перекладывания отрезков с нулевым SAF*, то есть такие, для которых, начиная с некоторого момента, отображение ренормализации является периодическим. Доказывается следующее

Предложение 2. Существуют самоподобные перекладывания отрезков с нулевым SAF, обладающие свойством слабого перемешивания.

Вторая глава посвящена марковским многомерным цепным дробям и их эргодическим и спектральным свойствам; в этот класс многомерных цепных дробей попадают все использованные в работе алгоритмы ренормализации.

Первый параграф является вводным и содержит определения и классические примеры марковских многомерных цепных дробей. Здесь же приводятся некоторые важные определения из теории динамических систем (в том числе определение динамического коцикла).

Многомерные цепные дроби – это алгоритмы, позволяющие строить одновременные диофантовы приближения рациональными числами компонент заданного иррационального вектора. Рассматриваемые в диссертации алгоритмы ренормализации с точки зрения теории чисел являются представителями класса *марковских многомерных цепных дробей*. Такие

[32]P. Arnoux, J.-C. Yoccoz. Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov // C. r. Acad. sci. Paris. S´er. I. 1981. V. 292, N 1. pp. 75–78.

алгоритмы определяются двумя кусочно–непрерывными отображениями:

$$f : [0,1]^d \to [0,1]^d;$$

и

$$A : [0,1]^d \to GL(d+1, \mathbb{Z}).$$

Алгоритмы, которые мы будем рассматривать, для заданного вектора с действительными компонентами $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ строят последовательность $(d+1) \times (d+1)$ матриц, строки которых задают диофантовы приближения к θ. Для произвольного $\theta \in [0,1]^d$ положим $A^{(n)}(\theta) = A(f^{n-1})(\theta)$ и определим коцикл $C^n(\theta) = A^{(n)}(\theta) \cdots A^{(1)}(\theta)$, так что $C^n(\theta) = A^{(n)}(\theta) C^{n-1}(\theta)$ (группа T в данном случае совпадает с $\mathbb{Z}$, а фазовое пространство–с $[0,1]^d$). Будем рассматривать такие коциклы, что строки $C_i^{(n)} = (c_{i,1}^n, \cdots, c_{i,d+1}^n)$ матриц C дают одновременное приближение компонент вектора θ, то есть выполнено такое условие: для произвольного $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ при $n \to \infty$ мы имеем $w_i^{(n)} \to \theta$, где $w_i^{(n)} = (\frac{c_{i,1}^{(n)}}{c_{i,d+1}^{(n)}}, \cdots, \frac{c_{i,d}^{(n)}}{c_{i,d+1}^{(n)}})$. Если это условие (его называют *слабой сходимостью алгоритма*) выполняется, пару (f, A) называют *марковской* многомерной цепной дробью или *марковским алгоритмом*. Использование такого термина обусловлено тем, что действие алгоритма на $(n+1)$–ом шаге полностью определяется значением $\theta^{(n)} = f^n(\theta)$ и не зависит от предыдущих шагов.

В работе рассматривается специальный подкласс таких алгоритмов – алгоритмы линейного разбиения симплекса, которые можно задать следующим образом: зафиксируем d–мерный симплекс – пространство параметров – $\Delta \in \mathbb{R}^{d+1}$ с ренормализующим условием $||x|| = 1$ – и его разбиение на конечное или счетное число подсимплексов Δ_α. Для каждого α зафиксируем матрицу A_α и определим $f : \Delta_\alpha \in \Delta$:

$$f(x) = \frac{A_\alpha^{-1} x}{||A_\alpha^{-1} x||}.$$

Для того, чтобы алгоритм был марковским, разбиение тоже должно быть марковским, то есть образом каждого Δ_α при таком отображении должно быть конечное или счетное объединение подсимплексов разбиения. Помимо индукции Рози и классического алгоритма Евклида, алгоритмами линейного разбиения симплексов являются, например, известные алгоритмы Бруна, Селмера, Якоби и другие. Их эргодические и спектральные свойства активно изучаются в теории диофантовых аппроксимаций

и символической динамике, потому что, с одной стороны, как мы видели выше, являются источником сведений о динамике и геометрии той системы, ренормализацией для которой служит рассматриваемый алгоритм, а с другой стороны, оказывается, что именно спектральные свойства соответствующих коциклов отвечают за качество аппроксимации изучаемого алгоритма.

Во втором параграфе дается определение топологического марковского сдвига и разъясняется его связь с марковскими многомерными цепными дробями. Приводится классификация счетных марковских сдвигов и обсуждаются некоторые их важные топологические свойства, а понятие диаграммы Рози, введенное в предыдущей главе в связи с индукцией Рози, обобщается для произвольной марковской многомерной цепной дроби.

В третьем параграфе с использованием диаграммы Рози определяются ключевые понятия теории ренормализации одномерных динамических систем – *ускорение* и *специальное ускорение* марковских многомерных цепных дробей. Доказывается ряд технических утверждений об эргодических свойствах специального ускорения марковских цепных дробей. Результаты этого параграфа используются впоследствии в Главах 3, 5 и 6.

Четвертый параграф является реферативным и посвящен критерию Фужерона[33] – утверждению, позволяющему по комбинаторному описанию марковской многомерной цепной дроби сформулировать ее ключевые эргодические свойства (доказать эргодичность, строгую эргодичность, построить инвариантную меру и т. д.).

В пятом параграфе речь идет о свойствах ляпуновского спектра коциклов, задающих марковские алгоритмы. Показатели Ляпунова динамического коцикла определяются с помощью мультипликативной эргодической теоремы. В работе проверяются условия, необходимые для того, чтобы показатели Ляпунова соответствующего коцикла определяли скорость сходимость соответствующей многомерной цепной дроби, и описываются подходы к проверке свойства *простоты* ляпуновского спектра, предложенные в совместной работе автора и Ш. Фужерона[34].

Глава 3 посвящена изучению перекладываний отрезков с флипами и особенностям процесса ренормализации для этих отображений, который является адаптированной версией индукции Рози для перекладываний отрезков. Известно, что в отличие от классических перекладываний отрезков, перекладывания отрезков с флипами почти всегда не являются

[33]Ch. Fougeron. Dynamical properties of simplicial systems and continued fraction algorithms. ArXiv: 2001.01367.

[34]Ch. Fougeron, A. Skripchenko. Simplicity of spectrum for certain multidimensional continued fraction algorithms. Monatsh. für Math., 2021, 194:4, pp. 767–787.

минимальными, поэтому множество параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами, является множеством нулевой меры. В диссертации доказаны оценки на хаусдорфову размерность этого пространства параметров.

Первый параграф является вводным: он начинается с определения перекладываний отрезков с флипами. Неформально, перекладывание отрезков с флипами f задается конечным разбиением полуинтервала действительной оси I на подинтервалы I_α, и полунепрерывным отображением из $\cup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathrm{int}(I_\alpha)$ в I, которое устроено следующим образом: f является изометрией на каждом из I_α, так что образы подинтервалов разбиения I_α не пересекаются по внутренним точкам, при этом f обращает ориентацию хотя бы одного из отрезков разбиения I_α. Заметим, что из–за требования обращения ориентации даже доопределение f в левых концах не позволит автоматически получить биекцию $I \to I$.

Более строгое определение выглядит следующим образом. Рассмотрим интервал $I = [0, 1)$ и его разбиение на подотрезки I_α, которые мы будем помечать буквами алфавита $\mathcal{A}$. Обозначим длину каждого отрезка разбиения I_α через λ_α и обозначим вектор $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ (каждая компонента λ_α строго положительна). Введем пару отображений, которую мы назовем *обобщенной перестановкой* $\hat{\pi} = (\pi_0, \pi_1)$, где $\pi_0 : \mathcal{A} \mapsto \{1, \cdots, n\}$ – это биекция и $\pi_1 : \mathcal{A} \mapsto \{-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$ – это такое отображение, что его модуль $|\pi_1|$ является биекцией. Эта пара отображений $\pi_0, |\pi_1|$ описывает порядок появления интервалов I_α до и после применения отображения. Отображение π_1 можно рассматривать как перестановку, дополнительно снабжающую все элементы знаками $\theta|\pi_1|$, где $\theta \in \{-1, 1\}^n$. Эта перестановка хранит информацию о тех интервалах, ориентация которых была обращена (они определяются условиями $\theta_\alpha = -1$). Множество $F = \{\alpha \in \mathcal{A} : \theta_\alpha = -1\}$ мы будем называть *множеством флипов*.

Определение 2. Перекладывание отрезков с флипами, заданное $(\hat{\pi}, \lambda)$, – это следующее отображение:

$$f(x) = \begin{cases} x + w_\alpha & \text{if } x \in \mathrm{int}(I_\alpha), \alpha \notin F, \\ w_\alpha - -x, & \text{if } x \in \mathrm{int}(I_\alpha), \alpha \in F, \end{cases}$$

где

$$w_\alpha = \sum_{|\pi_1|(\beta)<|\pi_1|(\alpha)} \lambda_\beta - - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta,$$

если $\alpha \notin F$ и

$$w_\alpha = \sum_{|\pi_1|(\beta)\le|\pi_1|(\alpha)} \lambda_\beta - - \sum_{\pi_0(\beta)<\pi_0(\alpha)} \lambda_\beta$$

иначе.

Затем следует краткая формулировка известных результатов и формулировка главного результата автора для изучаемого объекта – теоремы о верхней оценке хаусдорфовой размерности множества $MF(n)$ параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами;

Теорема 3. Выполнена следующая оценка на хаусдорфову размерность множества $MF(n)$:

$$Hdim(MF(n)) < n - 1.$$

Кроме того, используя некоторые наблюдения Главы 2, выводится утверждение о том, что при наличии произвольной меры, носителем которой является множество параметров, задающих минимальные перекладывания отрезков с флипами и которая инвариантна относительно индукции Рози, почти все (по отношению к этой мере) отображения являются строго эргодичными.

Подготовке к доказательству теоремы 3 и непосредственно самому доказательству посвящены все оставшиеся параграфы этой главы. Во втором параграфе определяется алгоритм ренормализации – индукция Рози для перекладываний отрезков с флипами.

В третьем параграфе мы определяем связанную с описанной индукцией диаграмму Рози, а в четвертом используем диаграмму для определения специального ускорения индукции Рози, чтобы в пятом параграфе описать соответствующий марковский сдвиг. В четвертом параграфе мы доказываем, что специальное ускорение индукции Рози является равномерно расширяющим отображением.

Шестой параграф является ключевым – там формулируется и доказывается свойство ограниченного искажения. Для этого для каждого значения $q \in \mathbb{R}^d$, где d – число отрезков непрерывности перекладывания отрезков с флипами,– рассматривается симплекс $\Lambda_q = \{\lambda \in \mathbb{R}^d :< q, \lambda >< 1\}$ и вводится специальный класс мер ν_q, таких, что для любого измеримого $A \subset P\mathbb{R}^d$ выполняется $\nu_q(A) = Leb(\mathbb{R}_+ A \cap \Lambda_q)$. Используя эти меры, определяем условные вероятности P_q и оцениваем вероятность того, что один из столбцов матрицы ренормализации при умножении на вектор q существенно увеличивает норму этого вектора (этот результат называется *леммой Керхгофа*, по аналогии с оценкой, которая использовалась в известном доказательстве Керхгофа теоремы Мазура – Вича о строгой эргодичности перекладываний отрезков). Важно, что эта, как и последующие, оценки являются равномерными по q. Следующие леммы позволяют уточнить полученные оценки и становятся базой для доказательства следующего ключевого утверждения – экспоненциального хвоста функции

крыши, которое приведено в параграфе 7.

Функция крыши – это отображение первого возвращения в подсимплекс. Функция f, определенная на симплексе Δ, имеет *экспоненциальный хвост*, если для некоторого $\sigma > 0$ выполнено $\int_\Delta e^{\sigma f} dLeb < \infty$.

В следующем параграфе вводится понятие *быстро распадающегося отображения:* марковское отображение $T : \Delta \to \Delta$, которому отвечает марковское разбиение $\Delta^{(l)}$, называется *быстро распадающимся*, если существуют такие $C_1 > 0, \alpha_1 > 0$, что $\sum_{\mu(\Delta^{(l)}) \leq \varepsilon} \mu(\Delta^{(l)}) \leq C_1 \varepsilon^{\alpha_1}$ для произвольного $1 > \varepsilon > 0$. Далее показывается, что утверждение о том, что соответствующий марковский сдвиг является быстро распадающимся, оказывается прямым следствием наличия экспоненциального хвоста у функции крыши.

Наконец, доказывается, что верхняя оценка хаусдорфовой размерности исключительного множества, которая опирается на свойство быстрого распада (доказательство этой части дословно повторяет результат Авилы – Делакруа[35]).

В **Главе 4** обсуждаются слоения на поверхностях, определенные квадратичными дифференциалами, и некоторые свойства динамики ассоциированных с этими слоениями отображений первого возвращения на трансверсаль – линейных инволюций, в частности, доказывается обобщение теоремы Марми – Муссы – Йоккоза о наличии решений когомологических уравнений. Основные отличия в доказательстве ключевого результата от случая абелевых дифференциалов и перекладываний отрезков связаны с комбинаторными особенностями алгоритма ренормализации для случая неприводимых линейных инволюций.

В первом параграфе приводится определение другого обобщения перекладываний отрезов – линейных инволюций и описывается их связь с измеримыми слоениями на поверхностях (как ориентируемыми, так и неориентируемыми). Линейные инволюции возникают как отображения первого возвращения на трансверсаль для слоев слоения на поверхности, которое определяется не абелевым (как в случае перекладываний отрезков), а квадратичным дифференциалом.

Определение 3. Пусть $\widehat{X} = X \times \{0, 1\}$ – это две непересекающиеся копии открытого интервала X. Линейная инволюция T на $\widehat{X}$ – отображение $T = f \circ T' : \widehat{X} \to \widehat{X}$, где:

- T' – это гладкая инволюция без неподвижных точек, определенная на $\widehat{X} \backslash \Sigma$, где Σ – это конечное подмножество множества $\widehat{X}$.

[35] A. Avila, V. Delecroix. Weak mixing direction in non–arithmetric Veech surfaces. Journal of the Amer. Math. Soc., 2016, 29, стр. 1167–1208.

- Если (x, ε) и $T(x, \varepsilon)$ принадлежат одной и той же связной компоненте $\widehat{X}$, то производная T' в (x, ε) равно -1, а иначе она равна 1.
- f – инволюция $(x, \varepsilon) \mapsto (x, 1 - \varepsilon)$.

Заметим, что если G – это перекладывание отрезков на X, то его можно рассматривать как линейную инволюцию T на $\widehat{X}$: для $x \in X$

$$\begin{cases} T(x, 0) = (G(x), 0), \\ T(x, 1) = (G^{--1}(x), 1) \end{cases} \tag{3}$$

Впервые линейные инволюции были определены в работе Дантони – Ногейра; там же был описан алгоритм ренормализации для линейных инволюций, который, как и в случае перекладываний отрезков, называется *индукцией Рози – Вича*. При этом показано, что при наличии флипа почти все линейные инволюции имеют периодическую орбиту, в то время как почти все линейные инволюции без флипа строго эргодичны.

Линейные инволюции определяются набором комбинаторных данных (которые записываются в виде *обобщенной перестановки*) и непрерывных данных – длин отрезков.

В работе формулируются ключевые известные результаты: теорема Дантони – Ногейры о наличии периодической орбиты у типичной линейной инволюции общего вида, и теоремы Буасси – Ланно, позволяющие, во–первых, определить в комбинаторных терминах наиболее интересный с геометрической точки зрения класс линейных инволюций – неприводимые линейные инволюции – отвечающий отображениям первого возвращения на трансверсаль для слоений на поверхностях, заданных квадратичными дифференциалами, а во–вторых, доказать, что типичные линейные инволюции внутри этого класса минимальны.

Во втором параграфе вводятся когомологические уравнения над линейными инволюциями (по аналогии с когомологическими уравнениями над перекладываниями отрезков) и формулируются два ключевых результата диссертации: теорема о разрешимости когомологических уравнений для линейных инволюций типа Рота и теорема о том, что неприводимая линейная инволюция почти всегда является отображением типа Рота (определение линейных инволюций типа Рота приводится ниже, в четвертом параграфе).

Далее рассматриваются функции, определенные на $\widehat{X}$. Пусть $\widehat{BV}^1_*(\sqcup A_\alpha)$ – это множество функций $\widehat{\Phi}$ из класса C^1, определенных на каждом отрезке непрерывности, у которых производная имеет ограниченную вариацию, а интеграл по области определения равен нулю.

Теорема 4. Пусть T – минимальная линейная инволюция типа Рота. Тогда для любого $\widehat{\Phi} \in \widehat{BV}^1_*(\sqcup A_\alpha)$ существуют функция χ, постоянная на каждом A_α, и ограниченная функция Ψ на $\widehat{X}$ такие, что

$$\Psi - \Psi \circ T = \widehat{\Phi} - \chi.$$

Теорема 5. Линейные инволюции типа Рота составляют подмножество полной меры в множестве всех неприводимых линейных инволюций.

В третьем параграфе описывается алгоритм ренормализации, определенный в работе Дантони–Ногейры, который по аналогии с описанными выше алгоритмами также называется индукцией Рози. Мы также определяем ускорения этого алгоритма – индукцию Зорича и специальное ускорение.

В четвертом параграфе определяются линейные инволюции типа Рота. Структура определения совпадает с аналогичным определением для перекладываний отрезков типа Рота. Определение включает три условия, сформулированные в терминах индукции Рози: условие на скорость роста (это некоторый аналог условия ограниченного искажения для алгоритма индукции Рози), наличие спектральной дыры (оно гарантирует строгую эргодичность рассматриваемых линейных инволюций) и когерентность (это свойство вытекает из мультипликативной эргодической теоремы).

В пятом параграфе излагается доказательство теоремы 4. Доказательство опирается на применение теоремы Готтшалка–Хедлунда, но для этого требуется подготовительная работа в связи с тем, что линейная инволюция является минимальным, но не непрерывным отображением. Далее задача сводится к оценке сумм Бирхгофа, а оценка сумм Бирхгофа, в свою очередь, сводится к оценке так называемых *специальных сумм Бирхгофа*, которая получается с помощью свойств линейных инволюций типа Рота.

В шестом параграфе мы доказываем свое второе утверждение, связанное с линейными инволюциями, – теорему 5. Для доказательства мы последовательно проверяем, что каждое из свойств, определяющих линейную инволюцию типа Рота, выполняется почти всегда для неприводимых линейных инволюций. Параграф разбит на несколько подпараграфов: в первом мы доказываем, что свойства когерентности и спектральной дыры выполнены почти всегда, во втором показываем, что свойство ограниченного роста выполняется почти всегда, используя техническую лемму, которую в совместной работе доказал Э. Ланно, а в третьем параграфе приводим доказательство этой леммы.

Глава 5 посвящена еще одному обобщению перекладываний отрезков – отображению сдвигов отрезков, введенному в 1994 году М. Бошер-

ницаном и И. Корнфельдом[36]. Такое кусочно–линейное отображение отрезка в себя, как и в случае перекладываний отрезков, на каждом из конечного числа отрезков непрерывности является сохраняющей ориентацию изометрией. Отличие от перекладываний отрезков состоит в том, что отрезки–образы не обязаны задавать разбиение отрезка–носителя, а могут пересекаться. Приведем формальное определение.

Определение 4. Рассмотрим кусочно – линейное отображение R, определенное на полуоткрытом интервале $I \subset \mathbb{R}$ со значениями в I. R называется отображением сдвигов отрезка на n отрезках, если I имеет n максимальных полуоткрытых отрезков непрерывности, ограничение R на каждый из которых является сдвигом. Концы этих отрезков называются *особыми точками* отображения, концы отрезка – носителя являются образами особых точек.

Бошерницан и Корнфельд показали, что отображения сдвигов отрезков делятся на две группы: отображения конечного типа, которые сводятся к перекладываниям отрезков, и отображения бесконечного типа, аттрактором которых является множество канторовского типа и динамика может кардинально отличаться от перекладываний отрезков. Они также сформулировали гипотезу о том, что почти все отображения сдвигов отрезков для заданного количества отрезков являются отображениями конечного типа. В настоящее время эта гипотеза доказана только для отдельных классов отображений сдвигов отрезков.

Первый параграф – это краткое введение в тему с формулировками ранее известных результатов и гипотез.

Второй параграф содержит доказательство ряда утверждений об эргодических характеристиках отображений сдвигов отрезков типа Бруйна – Трубецкого – специального класса отображений сдвигов отрезков, для которого гипотеза Бошерницана – Корнфельда была доказана ранее Бруином и Трубецким. Семейство определяется следующим образом: пусть $U := \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\}$, $L := \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha \leq \beta + 1 \leq 1\}$ и $R := U \cup L$; тогда для любой внутренней точки $(\alpha, \beta) \in U$ мы определяем

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x + \alpha, \text{ если } x \in [0, 1 - -\alpha] \\ x + \beta, \text{ если } x \in [1 - -\alpha, 1 - -\beta] \\ x + \beta - -1, \text{ если } x \in [1 - -\beta, 1). \end{cases} \tag{4}$$

Центральной является следующая

[36] M. Boshernitzan и I. Kornfeld. Interval translation mappings. Ergod. Th. Dynam. Syst. 15:5 (1995), стр. 821–832.

Теорема 6. Существует такая вероятностная мера μ, носителем которой является множество параметров A, задающее отображения Бруйна – Трубецкого бесконечного типа, что для почти всех (по отношению к μ) $(\alpha, \beta) \in A$ отображения сдвигов отрезков $R_{\alpha,\beta}$ строго эргодичны.

Для ее доказательства мы вводим новый алгоритм ренормализации, отличный от описанного Бруином и Трубецким, и изучаем эргодические свойства специального ускорения этой ренормализации. В частности, мы строим ассоциированную с этим алгоритмом симплициальную систему и, пользуясь упомянутым в Главе 2 критерием Фужерона, доказываем, что верна следующая

Теорема 7. Верна следующая оценка на хаусдорфову размерность множества A из предыдущей теоремы:

$$Hdim(A) < 2.$$

В третьем параграфе вводится следующий класс отображений сдвигов отрезков – двойные вращения.

Двойные вращения были впервые определены в работе Сузуки – Ито – Айхара[37], где также впервые был описан алгоритм ренормализации, который называется индукцией SIA.

Определение 5. *Двойное вращение* – это отображение $P_{(\alpha,\beta,c)} \colon [0,1) \to [0,1)$ следующего вида:

$$P_{(\alpha,\beta,c)}(y) = \begin{cases} y + \alpha \pmod 1 & \text{, если } y \in [0, c) \\ y + \beta \pmod 1 & \text{, если } y \in [c, 1), \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha, \beta, c \in [0, 1)$.

Как и в случае отображений Бруина – Трубецкого, ранее (из работы Бруина–Клака) было известно, что гипотеза Бошерницана – Корнфельда верна для этого класса отображений сдвигов отрезков. В работе Бруина – Клака, где она доказана, сформулирован ряд открытых вопросов, ответ на которые содержится в следующем утверждении:

Теорема 8. Множество параметров, задающих отображение двойного вращения бесконечного типа, имеет хаусдорфову размерность строго меньше 3.

Кроме того, аналогично предыдущему параграфу, строится естественная мера μ', носителем которой является множество параметров, задающих двойные вращения бесконечного типа, и показывается, что

[37] H. Suzuki, S. Ito, and K. Aihara. Double rotations.// Discrete Contin. Dyn. Syst.,2005, 13:2, стр. 515–532.

Теорема 9. Почти все (по отношению к μ') двойные вращения бесконечного типа являются строго эргодичными.

Доказательства этих теорем вынесены в четвертый параграф.

Третий параграф завершается обсуждением приложений полученных результатов к изучению эргодических свойств бильярдного потока для так называемых бильярдов в многоугольниках со шпионскими зеркалами. Стол такого бильярдного потока представляет собой многоугольник, к границе которого добавлены прямолинейные отрезки, которые при ударе бильярдного шара с одной стороны (например, слева) являются прозрачными, а при ударе с другой стороны становятся классическими элементами границы, для которых выполнен закон геометрической оптики – угол падения равен углу отражения. Такие бильярды впервые были описаны в работе Бошерницана и Корнфельда. Двойные вращения являются отображениями первого возвращения бильярдного потока на трансверсаль для шпионского бильярда в квадрате с прямолинейным зеркалом, параллельным стороне граничного квадрата. Кроме того, для произвольного бильярда в многоугольнике доказано, что

Теорема 10. Бильярдный поток в многоугольнике со шпионскими зеркалами имеет нулевую энтропию.

В четвертом параграфе доказываются основные результаты третьего параграфа. Для этого вводятся два алгоритма ренормализации – один из них предложен автором, а второй – М. Артиджани, Ш. Фужероном и П. Юбером. Доказывается, что одна из этих индукций является ускорением второй. С помощью этого утверждения мы доказываем существование специального ускорения (обоих алгоритмов ренормализации). Затем мы строим симплициальную систему, ассоциированную с этим специальным ускорением, и показываем, что она удовлетворяет критерию Фужерона. Из этого следуют оба утверждения.

В пятом параграфе приводится доказательство теоремы 10.

Глава 6 посвящена еще одному обобщению перекладываний отрезков и отображений сдвигов отрезов – *системам изометрий*. Системы изометрий определяются на мульти–интервале (дизъюнктном объединении нескольких интервалов) и состоят из нескольких пар равных подотрезков мульти–интервала – носителя; между любыми двумя отрезками из одной пары задана сохраняющая ориентацию изометрия. С каждой системой изометрий можно связать ленточный комплекс – аналог конструкции прямоугольников на молнии для перекладываний отрезков. В случае систем изометрий эти двумерные комплексы с вертикальными слоениями на них активно используются в геометрической теории групп для изучения

действий свободной группы на $\mathbb{R}$–деревьях.

Определение 6. Система изометрий S состоит из конечного объединения D компактных отрезков действительной оси (мы будем называть D *мультиотрезком – носителем*) и конечного набора n сохраняющих ориентацию изометрий между компактными подотрезками мультиотрезка–носителя D: $\phi_j : A_j \to B_j$. Эти подотрезки мы будем называть *базами*.

Система изометрий не является отображением, но, как и в случае перекладываний отрезков, можно определить орбиты систем изометрий и изучить топологические и эргодические свойства таких орбит. Полученные результаты можно сформулировать в терминах свойств слоев вертикального слоения на ленточном комплексе. Напомним его определение.

С каждой системой изометрий мы ассоциируем двумерный комплекс Σ с вертикальным слоением на нем. Сначала рассмотрим объединение отрезка – носителя (на котором слоение задано точками) и непересекающихся прямоугольных полос $A_j \times [0,1]$ (на каждой из них слоение задается как $* \times [0,1]$). Для построения комплекса Σ приклеим $A_j \times [0,1]$ к D, склеив точку $(t,0) \in A_j \times 0$ с $(t,0) \in A_j \subset D$ и каждый $(t,1) \in A_j$ с $\phi_j(t) \in B_j \subset D$. Отрезок D мы не будем отличать от его образа в Σ. Таким образом, у нас получится двумерный комплекс с вертикальным слоением на нем. Такие семейства используются в геометрической теории групп для описания действий свободной группы на .$\mathbb{R}$–деревьях.

Первый параграф является вводным – мы приводим определение систем изометрий и их классификацию, известную из работ по геометрической теории групп, и формулируем наиболее важные гипотезы, которые в настоящее время остаются открытыми задачами, среди которых центральной является

Гипотеза 3. Множество параметров, задающих минимальные системы изометрий, орбиты которых – бесконечные деревья, является подмножеством нулевой меры в множестве параметров, задающих сбалансированные системы изометрий, и его хаусдорфова размерность строго меньше $n-1$, где n – число отрезков в системе изометрий.

Во втором параграфе мы переходим к обсуждению наиболее интересного для нас класса систем изометрий – *специальных систем изометрий порядка 3* – и доказательству гипотезы 3 для этого класса. Показано, что множество параметров, задающих специальные системы изометрий порядка 3 тонкого типа – это известный фрактал под названием *Салфетка Рози*. Этот фрактал ранее возникал в нескольких разделах математики, включая символическую динамику, геометрическую теорию групп и др. Во всех этих контекстах доказывалось утверждение о том, что лебегова

мера Салфетки Рози равно нулю, и возникал вопрос о хаусдорфовой размерности этого фрактала. Верхняя оценка на хаусдорфову размерность Салфетки Рози была получена в работе А. Авилы, П. Юбера и А. Скрипченко. Мы приводим набросок доказательства этого утверждения и, в частности, подробно описываем алгоритм ренормализации для специальных систем изометрий порядка 3. Нам потребуется убедиться, что отвечающий этой ренормализации коцикл обладает свойствами равномерного расширения и ограниченного искажения (аналогичные вычисления описаны в главе 3 в связи с ренормализацией для перекладываний отрезков с флипами). Предложенный нами подход впоследствии был доработан Ш. Фужероном, который получил уточненную оценку. Наиболее точную оценку получили недавно М. Поликотт и Б. Сьюэлл[38], их результат практически совпадает с численной оценкой, полученной И. Дынниковым и Р. Ди Лео[39].

В третьем параграфе обсуждается вопрос о существовании естественной меры, носителем которой является Салфетка Рози. Построение такой меры является одним из центральных результатов этой главы и всей диссертации.

Теорема 11. Существует и единственна мера максимальной энтропии для специального потока над алгоритмом ренормализации, определяющем Салфетку Рози.

Доказательство ключевой теоремы состоит из нескольких этапов: сначала определяется специальный поток, ассоциированный с системой изометрий, а затем с использованием теории термодинамического формализма для топологических марковских сдвигов с счетным числом состояний, разработанной О. Саригом[40], доказывается существование и единственность меры максимальной энтропии для построенного специального потока, после чего эта мера по формуле Абрамова – Рохлина проецируется на меру, носителем которой является Салфетка Рози. Применение формализма Сарига требует проверки выполнения ряда комбинаторных свойств ассоциированного с изучаемым алгоритмом ренормализации марковского сдвига. В качестве потенциала для построения меры максимальной энтропии используется ренормализационный коцикл (с точностью до константы). Впоследствии этот подход, реализованный для конкретного

[38]M. Policott, B. Sewell. An upper bound on the dimension of the Rauzy gasket.// Bull. Soc.Math.France, 2023, 151, стр. 595–611

[39]R. De Leo, I. Dynnikov. Geometry of plane sections of the infinite regular skew polyhedron 4,6|4.// Geom. Dedic., 2009, 138:1, стр. 51–67.

[40]O. Sarig. Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. //Proc. Amer. Math. Soc., 2003, 131:6, стр. 1751–1758.

алгоритма ренормализации, являющегося многомерной цепной дробью, был обобщен Ш. Фужероном на некоторый класс многомерных цепных дробей. Полученный критерий сформулирован в Главе 2 и использован для доказательства основных результатов Главы 5.

В четвертом параграфе мы возвращаемся к системам изометрий общего вида: описывается альтернативная ренормализация для систем изометрий – машина Рипса, которая была определена в геометрической теории групп как геометрическая презентация движений Маканина – Разборова.

В пятом параграфе речь идет о топологической структуре орбит систем изометрий тонкого типа. Известно, что орбиты являются бесконечными деревьями и почти все из них имеют один или два топологических конца. Мы формулируем два утверждения, показывающих, что оба варианта возможны.

Теорема 12. Существует система изометрий тонкого типа, почти все орбиты которой имеют ровно 1 топологический конец.

Теорема 13. Существуют тонкие системы изометрий, почти все орбиты которых имеют два топологических конца.

Доказательству каждого из этих утверждений посвящен отдельный параграф.

В шестом параграфе доказывается теорема 12: строится система изометрий, после применения некоторого конечного числа шагов алгоритма ренормализации (машины Рипса) к которой получается та же система, сжатая в λ раз ($\lambda > 1$). Такие системы называются самоподобными.

В седьмом параграфе доказана теорема 13.

В **Главе 7** приведены приложения доказанных в предыдущих разделах результатов к топологии: сформулирована задача С. П. Новикова об асимптотическом сечении 3–периодических поверхностей и доказана оценка на скорость диффузии в случае хаотического режима для центрально–симметричной поверхности рода 3 с двумя двойными седлами, а также изучена связь перекладываний отрезков типа Арну–Рози с хаотическими слоениями на уже упомянутой центрально–симметричной поверхности с 2 седлами и доказаны новые эргодические свойства перекладываний Арну–Рози (а значит, и соответствующих хаотических слоений).

В первом параграфе приводится постановка задачи С. П. Новикова и краткий обзор известных ранее результатов. Приводится определение хаотических режимов и интерпретация этого понятия на двух возможных языках: плоских сечений 3–периодических поверхностей и слоев измеримого слоения на поверхности в трехмерном торе.

В 1982 году С. П. Новиков в связи с изучением модели полуклассического движения электрона в кристаллической решетке сформулировал следующую задачу: в трехмерном торе $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ задана поверхность уровня M некоторой гладкой функции. Пусть $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ – стандартная проекция, тогда $\hat{M} = \pi^{-1}(M)$ – 3–периодическая поверхность. Рассмотрим сечения поверхности $\hat{M}$ семейством параллельных плоскостей, ортогональных вектору $H = (H_1, H_2, H_3)$; что можно сказать об асимптотическом поведении этих сечений (мы будем называть их H–сечениями)?

Эту задачу можно сформулировать на языке теории измеримых слоений: рассмотрим измеримое слоение $\mathcal{F}$ на M, определенное ограничением на M 1–формы с постоянными коэффициентами $H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3$; слои этого слоения одномерны – это образы интересующих нас сечений при проекции π. Отображением первого возвращения на трансверсаль для этого слоения будут перекладывания отрезков, однако, так как речь идет о поверхности в трехмерном торе, эти перекладывания отрезков не будут удовлетворять условию Кина, поэтому стандартная ренормализация с помощью индукции Рози не может быть применена.

Первые результаты в этой задаче были получены А. Зоричем[41] и И. Дынниковым[42] топологическими методами. В частности, была получена следующая классификация (будем фокусироваться только на случае общего положения, когда $\dim_{\mathbb{Q}}(H_1, H_2, H_3) = 3$):

- *тривиальный случай:* все компоненты H – сечений компактны;
- *интегрируемый случай:* каждая регулярная незамкнутая компонента H – сечений представляет собой прямую линию, возмущенную конечной деформацией; слоение $\mathcal{F}$ разрезается сепаратрисными циклами на торы с дырками, на которых слоение ведет себя как иррациональная обмотка, и цилиндры, состоящие из замкнутых слоев.
- *хаотический случай:* слоение $\mathcal{F}$ имеет компоненту рода $g \geq 3$.

Хаотический случай был открыт Дынниковым [43]. В настоящее время основные открытые вопросы относятся к хаотическому случаю.

[41] А. В. Зорич. Задача С. П. Новикова о полуклассическом движении электрона в однородном магнитном поле, близком к рациональному.// УМН, 1984, 39:5(239), стр. 235–236

[42] I. A. Dynnikov, Semiclassical electron motion and Novikov conjecture. //Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 15–2, Зап. научн. сем. ПОМИ, 235, ПОМИ, СПб., 1996, стр. 228–234

[43] I. A. Dynnikov. Semiclassical motion of the electron. A proof of the Novikov conjecture in general position and counterexamples.// Solitons, geometry, and topology: on the crossroad, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, стр. 45–73

Известно, что хаотические режимы являются редкими в следующем смысле:

Теорема 14 (Дынников)**.** В пространстве пар (M, H), где M – гомологичная нулю поверхность в $\mathbb{T}^3$, а H – ковектор в R^3, все пары, задающие хаотические слоения $\mathcal{F}$, сосредоточены на некотором подмножестве $\mathcal{R}$ коразмерности 1 и образуют нигде не плотное подмножество в нем.

Второй параграф содержит формулировку новых результатов, в основном полученных как приложения описанных ранее свойств систем изометрий и других перекладываний отрезков.

Параграф начинается с определения *перекладываний отрезков типа Арну–Рози*[44].

Определение 7. Для $\lambda \in \Delta$ определим *перекладывание отрезков типа Арну – Рози* T_λ^{AR} как композицию $\Phi \circ T'_\lambda : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, где Φ – это сдвиг (поворот) $1/2$, то есть , $\Phi(x) = x + 1/2$, и T'_λ – это перекладывание отрезков, определенное на отрезке $[0, 1)$ перестановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

и параметрами $\left(\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_3}{2}, \frac{\lambda_3}{2}\right)$. Соответствующее отображение выглядит так:

$$T_\lambda^{\mathrm{AR}}(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1+\lambda_1}{2}, & \text{if } x \in [0, \lambda_1/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_1}{2}, & \text{if } x \in [\lambda_1/2, \lambda_1) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1+\lambda_2}{2}, & \text{if } x \in [\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_2}{2}, & \text{if } x \in [\lambda_1 + \lambda_2/2, \lambda_1 + \lambda_2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1+\lambda_3}{2}, & \text{if } x \in [\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2) + \mathbb{Z}, \\ x + \dfrac{1-\lambda_3}{2}, & \text{if } x \in [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3/2, 1) + \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Теорема 15. Перекладывания отрезков типа Арну – Рози допускают не более двух инвариантных мер и почти все эти перекладывания отрезков (по отношению к мере $\mu_{\mathcal{R}}$) являются строго эргодичными.

[44]P. Arnoux and G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité 2n+1. Bull. Soc. Math. France, 1991, 119:2, 199–215.

Замечание 1. С учетом того, что поверхность, ассоциированная с перекладываниями отрезков типа Арну – Рози, имеет род 3, из теоремы Катка следовало, что число инвариантных эргодических мер для перекладываний отрезков Арну–Рози не превосходит 3. Наш результат дает более сильную оценку.

Верна также следующая

Теорема 16. Почти все (по отношению к мере $\mu_{\mathcal{R}}$) перекладывания отрезков типа Арну – Рози не является слабо перемешивающими.

Анализ спектральных свойств алгоритма ренормализации для специальных систем изометрий позволил нам доказать, что ляпуновский спектр почти всегда простой (то есть все показатели Ляпунова различны) и удовлетворяет свойству Пизо (один из показателей положителен, два других отрицательны). Простота спектра проверяется с помощью алгоритма, упомянутого в разделе, посвященном многомерным цепным дробям, а утверждение для свойства Пизо следует из аналогичного утверждения для сопряженного с нашей ренормализацией алгоритма полного вычитания, которое было доказано Авилой и Делакруа[45].

Прямым следствием этого результата является

Теорема 17. В случае поверхности Арну – Рози почти все хаотические траектории имеют скорость диффузии строго между $\frac{1}{2}$ и 1.

В третьем параграфе описана связь между системами изометрий тонкого типа из предыдущей главы и хаотических режимов в задаче Новикова.

Четвертый параграф содержит доказательство сформулированных выше свойств перекладываний отрезков типа Арну–Рози.

Доказательство оценки диффузии, которому посвящены параграфы 5 и 6, опирается на ряд результатов о спектральных свойствах многомерных цепных дробей, которые задают алгоритмы ренормализации. Аргументы, обобщающие использованные в этой главе, обсуждаются в Главе 2. В 5 параграфе определяются показатели Ляпунова и доказывается простота ляпуновского спектра и свойство Пизо. В 6 параграфе изучается связь между скоростью диффузии и показателями Ляпунова.

В той же главе примеры ленточных комплексов, слои которых имеют 1 или 2 топологических конца, построенные в главе 6, используются для построения хаотических режимов в задаче Новикова, сечения в которых имеют ровно одну или бесконечно много компонент связности.

[45] A. Avila, V. Delecroix. Some monoids of Pisot matrices. // In: Pacifico, M., Guarino, P. (eds) New Trends in One-Dimensional Dynamics. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 285.

Теорема 18. Существуют 3–периодическая поверхность $\hat{M}$ и вектор H такие, что сечение поверхности $\hat{M}$ почти всеми плоскостями, ортогональными H, состоят ровно из 1 связной компоненты.

Эта теорема является следствием утверждения 12.

Аналогично доказывается

Теорема 19. Существуют 3–периодическая поверхность $\hat{M}$ и вектор H такие, что сечение поверхности $\hat{M}$ почти всеми плоскостями, ортогональными H, состоят из бесконечного числа связных компонент.

Это утверждение следует из теоремы 13.

Глава 8 посвящена изучению слоения абсолютных периодов для вещественно–нормированных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка. Результаты этой главы позволяют сопоставить геометрические свойства пространства модулей вещественно–нормированных дифференциалов с описанными в Главе 1 характеристиками пространства модулей абелевых дифференциалов.

Основным инструментом, использованным для доказательства центральных результатов этой главы, является алгоритм ренормализации, комбинаторное описание которого сводится к применению второго движения Васильева для хордовых диаграмм.

В первом параграфе определяются ключевое понятие – вещественно–нормированные дифференциалы.

Определение 8. Мероморфный дифференциал на римановой поверхности называется *вещественно–нормированным,* если все его периоды – действительные.

Во втором параграфе описывается комбинаторная модель пространства вещественно–нормированных дифференциалов с полюсом второго порядка, с помощью которой будут исследоваться соответствующие пространства модулей.

В третьем параграфе определяется слоение абсолютных периодов. Для вещественно–нормированного дифференциала ϕ на римановой поверхности C обозначим через L_ϕ подгруппу по сложению в $\mathbb{R}$, состоящую из периодов дифференциала ϕ. Для дифференциала общего положения ϕ группа L_ϕ порождается целочисленными линейными комбинациями чисел $p_i - -q_i, i = 1, \cdots, 2g$. Поэтому подгруппа L_ϕ плотна в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда хотя бы два периода ϕ рационально несоизмеримы. Если все периоды рационально несоизмеримы (то есть L_ϕ является $\mathbb{Z}$-модулем ранга $2g$), дифференциал будет называться *полностью несоизмеримым.*

Обозначим через $\mathcal{R}_g$ пространство вещественно–нормированных мероморфных дифференциалов с единственным полюсом второго порядка

на поверхностях рода g. Для каждой аддитивной подгруппы $L \subset \mathbb{R}$, у которой не более $2g$ порождающих, рассмотрим локус $\mathcal{A}_L \subset \mathcal{R}_g$ слоения периодов в $\mathcal{R}_g$, состоящий из тех вещественно – нормированных дифференциалов ϕ, для которых $L_\phi = L$.

Верно следующее

Предложение 20. Для плотной подгруппы периодов $L \subset \mathbb{R}$, локус $A_L \subset \mathcal{R}_g$ плотен в $\mathcal{R}_g$.

Кроме того,

Теорема 21. Для полностью несозимеримого дифференциала ϕ локус A_{L_ϕ} содержит по меньшей мере столько же связных компонент, сколько имеет множество классов сопряженности $GL(2g, \mathbb{Z})/Sp(2g, \mathbb{Z})$. В частности, для поверхности рода 1 связных компонент будет 2, а для поверхностей рода больше 1 их число будет бесконечным.

Для доказательства этих утверждений исследуются связи между упомянутой выше комбинаторной моделью и хордовыми диаграммами и показывается, что применение процесса ренормализации внутри локуса слоения может быть сведено к последовательному применению второго движения Васильева для хордовых диаграмм.

Заключение диссертации содержит краткое изложение основных результатов диссертации и перечисление нескольких открытых проблем для дальнейших исследований.

Благодарности. Автор благодарит всех своих соавторов за увлекательные обсуждения и удовольствие от совместной работы. Отдельно автор благодарит И. А. Дынникова за интерес к работе и поддержку на всех этапах подготовки текста. Автор благодарен всему коллективу отдела геометрии и топологии МИАН им. Стеклова, а также коллективу факультета математики НИУ ВШЭ и коллективу Центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий за теплую и творческую атмосферу.

Работы автора по теме диссертации

[1] A. Skripchenko, Symmetric interval identification systems of order three, Discrete Contin. Dyn. Sys., Vol. 32, no. 2, 2012, 643 – 656.

[2] A. Skripchenko, On connectedness of chaotic sections of some 3–periodic surfaces, Ann. Glob. Anal. Geom., Vol. 43, 2013, 253 – 271.

[3] A. Skripchenko, S. Troubetzkoy, Entropy and complexity of polygonal billiards with spy mirrors, Nonlinearity, Vol. 28, 2015, 3443–3456.

[4] I. Dynnikov, A. Skripchenko. Symmetric band complexes of thin type and chaotic sections which are not actually chaotic, Trans. Moscow Math. Soc., Vol. 76, no. 2, 2015, 287–308.

[5] A. Avila, P. Hubert, A. Skripchenko. Diffusion for chaotic plane sections of 3–periodic surfaces, Inventiones mathematicae, Vol. 206, no. 1, 2016, 109–146.

[6] A. Skripchenko, S. Troubetzkoy, On the Hausdorff dimension of minimal interval exchange transformations with flips, J. Lond. Math. Soc., 97:2, 2018, 149–169.

[7] Ch. Fougeron, A. Skripchenko. Simplicity of spectrum of certain multidimensional fraction algorithms,Monatshefte fur Mathematik, Vol. 194 No. 4., 2021, 767–787.

[8] E. Lanneau, S. Marmi, A. Skripchenko. Cohomological equations for linear involutions, Dynamical systems. An International Journal, Vol. 36:2, 2021, 292–304.

[9] I. Krichever, S. Lando, A. Skripchenko. Real normalized differentials with a single order 2 pole, Letters in Mathematical Physics, Vol. 111 No.2, 2021.

[10] M. Artigiani, Ch. Fougeron, P. Hubert and A. Skripchenko. A note on double rotations of infinite type, Trans. Moscow Math. Soc., 82:1, 2021, 185–204.

[11] I. Dynnikov, P. Hubert and A. Skripchenko. Dynamical systems around the Rauzy gasket and their ergodic properties. International Mathematics Research Notices, Vol. 8, 2023, 6461–6503.

[12] А. С. Скрипченко Ренормализация в одномерной динамике // Успехи математических наук, 78:6 (474), 2023, 3–46.

[13] А. С. Скрипченко. Перекладывания отрезков с нулевым инвариантом Са – Арну – Фати. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, 325, 2024, 277–296.

Подписано в печать 07.11.2024 г.
Тираж 75 экз.

Отпечатано типографии (название, адрес)